Linköpings universitet | Matematiska institutionen
Forskningskonsumtion, 15 hp | Lärarutbildning – programområde
Vårterminen 2018 | LiU-LÄR-MG-A--2018/12--SE

Gymnasieelevers matematiska svårigheter att lösa linjära ekvationer och linjära ekvationssystem

En litteraturöversikt

Upper Secondary School Students` Mathematical Difficulties in Solving Linear Equations and Systems of Linear Equations

A Literature Survey

Författare: **Mona Al-Chalabi**
Handledare: **Björn Textorius**
Examinator: **Peter Frejd**

Linköpings universitet
SE-581 83 Linköping, Sweden
013-28 10 00, www.liu.se

LINKÖPINGS UNIVERSITET	Institutionen för Matematik 581 83 Linköping	Seminariedatum 20180608

Språk	Rapporttyp	ISRN- nummer
Svenska/ Swedish	Examensarbete avanceradnivå	LiU-LÄR-MG-A--2018/12--SE

Titel: Gymnasieelevers matematiska svårigheter att lösa linjära ekvationer och linjära ekvationssystem

Title: Upper Secondary School Students` Mathematical Difficulties in Solving Linear Equations and Systems of Linear Equations

Författare: Mona Al-Chalabi

Sammanfattning:

Många gymnasieelever har svårt att förstå algebra, specifikt linjära ekvationer och linjära ekvationssystem, vilket hindrar deras vidare lärande i både matematik och andra ämnen. Lärare måste därför ha en klar uppfattning om vilka dessa svårigheter är för att kunna hjälpa sina elever till förståelse och lärande av detta område i algebra. I studien undersöks forskningslitteraturens resultat om vilka dessa svårigheter är. Påvisade svårigheter som har illustrerats med exempel på elevlösningar är: brister i elevers algebraiska förkunskaper, procedurkunskaper och konceptuella kunskaper (särskilt om likhetstecken, konstanter och variabler), brister i elevers kunskaper om algebraisk syntax, samt brister i elevers hantering av de operationer som används för lösning av ekvationer och ekvationssystem, t ex hur man hanterar negativa koefficienter och konstanter och använder substitutionsmetoden.

Many students of secondary school find it difficult to understand algebra, specifically linear equations and systems of linear equations, which prevents their further learning in both mathematics and other subjects. Teacher must therefore have a clear idea of what these difficulties are in order to assist their students in understanding and learning this area in algebra. The study examines the findings of the research literature as to what these difficulties are. Proven difficulties that have been illustrated with examples of students´ solutions are: deficiencies in their algebraic prerequisites, procedural knowledge and conceptual knowledge (especially about similarities, constants and variables), lack of knowledge of the algebraic syntax, and incorrect handling of the operations used to solve equations and systems of equations, for example how to handle negative coefficients and constants and use the substitution method.

Nyckelord: Algebra, linjär ekvation, linjärt ekvationssystem

Innehållsförteckning

Förord

Jag, Mona Al-Chalabi är en lärarstudent på Linköpings universitet och kommer att bli gymnasielärare i matematik och biologi. Det här är mitt första examensarbete som jag skriver i matematik. Arbetet handlar om gymnasieelevers svårigheter i algebra särskilt deras svårigheter att lösa linjära ekvationer och linjära ekvationssystem. Sådana svårigheter är ett stort hinder för deras gymnasiestudier i matematik. Det är därför viktigt att lärare är bekanta med dessa svårigheter så att de kan främja sina elevers förståelse och lärande i algebra. För att kunna finna matematiska svårigheter att lösa linjära ekvationer och linjära ekvationssystem, behövs det mer forskning inom dessa områden.

Jag vill tacka väldigt mycket min handledare, Björn Textorius, för allt stöd och vägledning.

1. Inledning

Matematik har utvecklats efter individens och samhällets behov. Uppträdande av problem eller situationer löstes i antiken med geometriska och aritmetiska metoder. Vissa matematiska problem kunde inte lösas på det viset. Genom att använda bokstavssymboler istället för tal underlättades lösningsmetoderna och aritmetiken generaliserades till algebra. Genom att använda sig av algebran som en ny lösningsmetod kunde man lösa avancerade matematiska problem på ett snabbare och enklare sätt (Bergsten, Häggström och Lindberg, 2012).

Algebra är ett viktigt område i matematik, med stor användbarhet även i vardagslivet. För att kunna delta i det demokratiska samhället, förstå och kunna ta ställning exempelvis i miljödebatt eller ekonomisk politik behöver alla lära sig algebra (Bergsten et al., 2012). Att kunna algebra är som en bro till högre matematikkurser och även till högre utbildning (Magruder, 2012). Eftersom matematiska modeller används i olika sammanhang i samhället för att kunna förstå formler, tabeller och diagram.

Enligt Skolverket (2011) är matematik ett viktigt verktyg för vetenskap samt yrkesliv, och enligt läroplanen ska läraren hjälpa eleven att utveckla sin matematiskt tänkande samt sätta in matematiken i olika sammanhang. En gymnasieelev ska kunna formulera, analysera, kommunicera matematiska tankegångar och utforma matematiska modeller för att nå kunskapskraven i matematikkurserna. I läroplanens centrala innehåll för kursen Matematik 1 står att eleverna ska kunna utveckla sin förmåga att lära sig algebraiska samt grafiska metoder för att lösa linjära ekvationer (Skolverket, 2011). I kursen Matematik 2 ska eleverna kunna använda sig av linjära ekvationer för att lösa linjära ekvationssystem med både algebraiska och grafiska metoder (Skolverket, 2011). Men alla elever tycker dock inte att algebra är intressant eller lätt att förstå. Vissa har svårt att förstå framför allt ekvationer och det är just begreppet variabler, som kan vara ett stort komplicerat hinder för dem i algebra (Bergsten et al., 2012). I matematiska didaktikkurser blev jag intresserad att läsa mer om elevernas svårigheter i algebra. Det visade sig att Häggström har forskat om elevernas förståelse i att lösa linjära ekvationer och ekvationssystem. Forskarens studie utnyttjades därför här i detta konsumtionsarbete.

Av mina erfarenheter från VFU, verksamhetsförlagd utbildning, samt mitt arbete som gymnasielärare har jag dragit slutsatsen att elever har svårigheter att lära sig algebra och att detta är ett stort hinder för deras vidare lärande i gymnasieutbildningen, eftersom matematikkunskaper används i olika sammanhang i olika ämne i gymnasieskolan. Jag vill därför speciellt undersöka vilka svårigheter, som elever har att lösa linjära ekvationer och system av sådana.

1.1 Bakgrund

1.1.1 Algebra

NE, Nationalencyklopedin, definierar begreppet algebra enligt följande: ”Ordet algebra anses härstamma från al-jabr, som i sin tur betyder ’addera lika termer till båda sidor av en ekvation för att eliminera negativa termer’” (NE, 2018). Och enligt Bergsten et al. (2012) betyder algebra bokstavsräkning, alltså eleven räknar med bokstäver istället för med enbart siffror. Det enda som kan skilja alltså mellan aritmetik och algebra är bokstavsymboler. Bergsten et al. (2012) nämner fyra aspekter på algebra: *problemlösningsverktyg, generaliserad aritmetik, studium av relationer* och *studium av strukturer* (s. 13) som förklaras här nedan.

I problemlösningsverktyget används bokstavsymbolen x för att beteckna en bestämd, men ännu en obekant storhet, t.ex. i ekvationen $x + 0{,}12x = 392$

$$”\ x + 0{,}12x = 392\ ,$$
$$(1 + 0{,}12)x = 392\ ,$$
$$1{,}12x = 392\ ,$$
$$\text{d.v.s. } x = 350\ ”$$

(Bergsten et al., 2012; s. 13)

och i följande ekvation, $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2$, för sidlängden x hos en liksidig triangel, inskriven i en cirkel med radien R:

$$”\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2,$$
$$\frac{x^2}{4} + \frac{R^2}{4} = R^2\ ,$$
$$\frac{x^2}{4} = 3\frac{R^2}{4}\ ,$$
$$x^2 = 3R^2\ ,$$
$$x = R\sqrt{3}\ ”$$

(Bergsten et al., 2012; s. 13)

vid lösning och förenkling av ekvationer, begreppet ekvation förklaras i nedanstående avsnitt 1.1.2.

Den generaliserade aritmetiken framställer hur algebraiska bokstavssymboler formuleras av generella aritmetiska räkneregler såsom den kommutativa lagen för en operation, tex. $a + b = b + a$ där ordningen av bokstavssymboler vid additionen inte är viktig, eller att karakterisera alla udda tal som 2n+1 där n är ett naturligt tal som är ett annat exempel i denna aspekt (Bergsten et al., 2012; s. 14).

Studium av relationer innebär att studera hur bokstavssymboler, dvs variabler och parametrar, exempelvis x och y, relateras till varandra genom en tabell eller formel. Bokstavssymbolerna kan beteckna observerbara och mätbara fenomen såsom tid (x) och temperatur (y), t.ex. när vattentemperaturen y i termosen sjunker beroende av tiden x (Bergsten et al., 2012; s. 14).

Studium av strukturer innebär enligt Bergsten et al. (2012) att godtyckliga symboler används för att definiera strukturer i abstrakt matematik, exempelvis operationen * på en mängd M med två element a och b, där operationen * definieras på M genom $a * b = b$ eller $b * b = a$, dvs dessa två definitioner skapar en struktur på mängden M. Man kan exempelvis ta $M = \{0,1\}$; $a = 0$, $b = 1$, med operationen * definierad enligt $0 * 0 = 0$, $0 * 1 = 1$, $1 * 1 = 0$.

Det innebär att för att beskriva tydligt strukturer för det generella algebraiska språket behöver man upptäcka gemensamma strukturer hos olika aritmetiska operationer (Bergsten et al., 2012).

Bokstäver omdefinieras för att kunna användas i matematiken - så kallade bokstavsymboler i algebra, variabler - bokstavssymbolen kan alltså stå för ett bestämt men obekant tal, ibland för en variabel och ibland står den för ett godtyckligt men konstant tal (Bergsten et al., 2012). För att kunna lösa ett problem behöver eleven *översätta* problemet eller textuppgiften till ett uttryck med symboler, ett så kallat algebraiskt uttryck, *skriva om* detta algebraiska uttryck och inte minst *tolka* det (Bergsten et al., 2012). Ett exempel: Sofia köper bananer för 24 kronor, hur många bananer köper Sofia om en banan kostar 3 kronor?. Översättningen av detta problem till en ekvation $3x = 24$, där x betecknar priset för en banan, och genom att skriva om ekvationen som x=24/3 får man lösningen x=8 till ekvationen. Tolkningen i den ursprungliga textkontexten av ekvationens lösning är därför att Sofia köper 8 bananer. Därför är de tre faserna översättning, omskrivning och tolkning viktiga i den algebraiska cykeln som Bergsten et al. (2012) beskriver som nödvändig för att kunna lyckas med algebra.

1.1.2 Linjär ekvation och linjärt ekvationssystem

Begreppet ekvation är centralt i algebran och en linjär ekvation av grad 1 med en variabel x är en likhet av formen $ax + b = cx + d$, där koefficienterna a, c och konstanterna b, d är reella tal samt x betecknar en obekant. Om $a \neq c$ har ekvationen lösningen $x = (d - b)/(a - c)$, vilket är nollstället för polynomet $p(x) = (a - c)x - (d - b)$.

Den geometriska representationen av funktionen $y = p(x)$, där p är ett förstagradspolynom, är en rät linje. Ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer och två obekanta är ett system av två ekvationer: $ax + by = c$, $dx + ey = f$, där alla konstanter och koefficienter är reella. Ett sådant system kan ha ingen, exakt en eller oändligt många lösningar (x, y), svarande mot att de två linjerna är parallella, skärande eller sammanfallande.

Sådana ekvationssystem löses algebraiskt, t.ex. med substitutions- eller med additionsmetoden. Förutom algebraiska metoder finns grafiska metoder som approximativt löser ekvationssystemet (Häggström, 2008). Den grafiska metoden består i att rita linjerna i ett koordinatsystem och läsa av deras eventuella skärningspunkt.

Endast i kursen Matematik 2 c finns ekvationssystem med flera än två ekvationer och två variabler, enligt ämnesplanen. I andra matematikkurserna används ekvationssystem med två obekanta (Skolverket, 2011). I denna studie framställs ekvationssystemet till fallet system av två linjära ekvationer med två variabler och förutsätts att systemet har exakt en lösning. De algebraiska metoderna, substitutions- och additionsmetoden, visas i följande exempel.

Substitutionsmetoden:

$$\begin{cases} 5x + y = 7 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \quad \text{(Crawford, 1972; 10)}$$

I substitutionsmetoden bestäms först ur en av ekvationerna en av variablerna uttryckt i den andra. I exemplet används först ekvationen $5x + y = 7$ för att bestämma y uttryckt i x: $= 7 - 5x$. Ersätt sedan y i den andra ekvationen med det funna uttrycket $7 - 5x$. Det ger $3x + 2\,(7 - 5x) = 0$.

Förenkla vänsterledet: $3x + 14 - 10x = 0$, alltså $14 - 7x = 0$; $14 = 7x$; $x = 2$.

Sätt slutligen in detta x-värde i den första ekvationen. Det ger $5(2)\ +\ y = 7$; $y = 7 - 5\,(2) =\ -3$. Ekvationssystemet har därför lösningen $x = 2$, $y = -3$.

Additionsmetoden:

Eliminera en av variablerna genom att multiplicera de båda leden i en av ekvationerna med en lämplig konstant och addera sedan ekvationerna.

I exemplet: $\begin{cases}(-2)(5x + y) = (-2)7 \\ 3x + 2y = 0\end{cases}$, förenkla den första ekvationen $\begin{cases}-10x - 2y = -14 \\ 3x + 2y = 0\end{cases}$ och addera sedan ekvationerna.

Den ger $(-10x + 3x) + (-2y + 2y) = -14 + 0$; $-7x + 0 = -14$, vilket ger $x = (-14)/(-7)\ = 2$. Sätt in detta x-värde i någon av ursprungsekvationerna för att bestämma y-värdet, t.ex. i den första: $5(2) + y = 7$;$y = -3$ (se ovanstående). Naturligtvis ger båda metoderna samma lösning.

1.2 Syfte och frågeställningar

Det övergripande syftet är att bidra med information för att öka lärares möjligheter att stödja gymnasieelevers lärande i matematik. Det är då väsentligt att kunna hjälpa eleverna till goda kunskaper i algebra. Arbetet fokuserar därför på att klarlägga vilka matematiska hinder elever möter när de arbetar med linjära ekvationer.

Detta syfte ger följande frågeställning:

- Vilka matematiska svårigheter har gymnasieelever att lösa linjära ekvationer och linjära ekvationssystem?

2. Metod

2.1 Litteratursökning

Examensarbetet är en konsumtionsstudie, alltså en systematisk litteraturstudie. Det innebär att tidigare forskning sammanställs och analyseras för att besvara forskningsfrågan (Ericsson Barajas, Forsberg & Wengström, 2013). Forskningsöversikten görs genom att jag söker forskningsresultat, som är relevanta för studiens frågeställningar.

Till största delen söktes artiklar genom att använda lämpliga sökord. Det är viktigt att kvalitetsbedömningar görs av artiklarna för att förhindra felaktiga slutsatser. Jag sökte via Linköpings universitets bibliotek i databaserna Unisearch, ERIC, *Educational Resources Information Center*, samt Google Scholar med begränsning till peer reviewed artiklar för att säkerställa den vetenskapliga kvalitén och med begränsning i tid till år 2000 och senare för att få aktuella resultat (Ericsson Barajas, Forsberg & Wengström, 2013). Peer reviewed betyder att artikeln har undergått en referee-granskning före publiceringen.
Unisearch är en sökmotor som består av olika databaser. Google Scholar är en webbsökmotor som kan användas för att få fram vetenskapliga tidskriftsartiklar och även böcker i Europa samt USA. ERIC är en bred databas som innehåller bland annat vetenskapliga tidskriftsartiklar, rapporter och avhandlingar. Artiklarna i ERIC behandlar mest om pedagogik och psykologi (Ericsson Barajas et al. 2013).

Jag använde de engelska sökorden, eftersom de svenska sökorden *svårigheter med att lösa ett linjärt ekvationssystem* och *linjära ekvationssystemets svårigheter* inte gav träffar. Sökordet *linjärt ekvationssystem* användes i Unisearch, men alla träffar var irrelevanta.

Jag använde sökorden *teaching equation system, system of linear equation, difficulties in solving linear equation system, system of equations och ”Teaching systems of linear equations in Sweden”*.
Några av dessa engelska sökord, såsom *equation** *system**, *teaching equation system,* söktes i sökmotorn Unisearch och gav träffar, som var för högre matematiknivå såsom linjär algebra eller samma artikel som i Google Scholar exempelvis artikel av Häggström (2008).

Genom kedjesökning från artikeln av Samuel et al. (2016) i Google Scholar fann jag vidare Magruder (2012) och i denna med fortsatt kedjesökning Cai & Moyer (2008).

Resultatet av artikelsökningen sammanfattas i följande artikelmatris:

TABELL 1. Artikelmatris

Sökord	Begränsningar	Antal träffar	Utvalda artiklar	Databas
Difficulties in solving linear equation system	2003 – 2017 Fulltext, enbart pdf-format	86	Samuel, Mulenga & Angel (2016), Alibali et al. (2014), Baratta (2011)	Eric

System of equations	2003 – 2017 Fulltext, p	49	Falcon (2009), Filloy, Rojano och Solares (2003)	Eric
”Teaching systems of linear equations in Sweden”	2008 Fulltext, pdf-format	1	Häggström (2008)	Google scholar

2.2 Urval av artiklar

Urvalskriterierna som jag utgick från i mitt arbete är enligt följande:

- Artikeln måste behandla rätt årskurs för gymnasium och motsvarande,
- Artikeln tar upp elevernas lösningsmetoder inom ämnet linjära ekvationer och linjära ekvationssystem
- Artikel måste vara publicerad tidigast år 2000.

Sökorden gav många träffar, därför undersökte jag de 10 första artiklarna vid varje sökning. Av dessa läste jag först deras titlar samt abstract. Om dessa var relevanta med hänsyn till mina urvalskriterier läste jag hela artikeltexten och gjorde en kvalitetsvärdering. Irrelevanta artiklar uteslöts direkt efter granskning av deras abstract.

I de flesta sökta artiklar undersöktes yngre eller äldre elever i skolan, vilket gjorde det svårare att generera en studie om gymnasieelevers svårigheter att lösa linjära ekvationer och linjära ekvationssystem. Med hänsyn till mina urvalskriterier gjordes en kvalitetsvärdering och enbart för min frågeställning relevanta artiklar utvaldes.

Artiklarna analyserades med en s.k. empiristyrd tematisk analys, där artikelförfattarnas slutsatser om observerade matematiska svårigheter att lösa linjära ekvationer och linjära ekvationssystem bildade utgångpunkten för konstruktionen av teman (Bryman, 2002).

För att kunna skapa en övergripande bild av de utvalda artiklarna, sammanfattas dem i tabellen nedan, Tabell 2. Detta gör enklare att se de relevanta artiklar som kan användas i detta arbete.

TABELL 2. Artikelsammanfattning

Författare	Titel	Sammanfattning
Alibali et al. (2014)	Middle School Students' Conceptual Understanding of	En studie som visar att elevernas svårigheter att lösa ekvationer är att de

	Equations: Evidence from Writing Story Problems	missuppfattar betydelsen av algebraiska symboler, att de har svårt att hantera flera operationer i en ekvation, samt att de har svårt att tolka uppgifter med text och formulera rätt ekvation.
Baratta (2011)	Linear equations equivalence= success	Elevers förmåga att lösa linjära ekvationer studeras. Dessutom visas hur lösningstekniken kan påverka elevernas förmåga och kunskaper. Vid algebraiska lösningsmetoder märks elevens svårighet i deras tolkningar av likhetstecknet.
Cai och Moyer (2008)	Developing algebraic thinking in earlier grades: Some insights from international comparative studies	Denna studie jämför elevernas kunskaper i algebra, speciellt linjära ekvationer i Kina och USA. Där analyseras även svårigheter som elever i grundskolan har att utöka sina matematiska kunskaper från aritmetik till algebra.
Falcon (2009)	Algebraic Reasoning in the Middle Grades: A View of Student Strategies in Pictorial and Algebraic System of Equations	Elevernas resonemang samt kunskapsutveckling studerades för att se vilka svårigheter de har att lösa ekvationssystem med två och tre okända variabler både grafiskt och algebraiskt. I studien visas även elevens inlärningsförmåga i att hitta metoder för att lösa ekvationssystem.
Filloy et al. (2003)	Two meanings of the ”Equal” sign and senses of comparison and substitution methods	I studien analyseras vad likhetstecken betyder samt matematiska syntaxen i linjära ekvationer och i lösning av linjära

		ekvationssystem med substitutionsmetoden.
Häggström (2008)	Teaching systems of linear equations in Sweden and China: What is made possible to learn?	En studie om hur undervisning och inlärning kan påverka elevens förståelse i att lösa linjära ekvationssystem med två variabler. Han tar upp undervisningsstrategier och olika elevsvårigheter att lösa ekvationssystem. Han jämför Sverige och Kina i att undervisa linjära ekvationer och linjära ekvationssystem.
Magruder (2012)	Solving linear equarions: A comparison of concrete and virtual manipulatives in middle school mathematics	En undersökning om elevernas svårigheter att lösa linjära ekvationer baserad på stadium av deras tillvägagångssätt och tänkande.
Samuel et al. (2016)	An Investigation into Challenges Faced by Secondary School Teachers and Pupils in Algebraic Linear Equations: A Case of Mufulira District, Zambia	Elevernas resonemang om lösning av linjära ekvationer undersöks. Studien visar olika svårigheter hos elever, bland annat svårigheter i att gruppera termer i ekvationen, betydelsen av likhetstecknet och variabler.

2.3 Analysmetod

Utifrån forskningsfråga analyserades de utvalda artiklarna. Analysen av utvalda artiklar utgick dessutom från urvalskriterierna som nämns tidigare i avsnitt 2.2.

För analysen av artiklarna valdes en empiristyrd tematisk analys (Langemar, 2012). Jag gick först igenom artiklarnas text och markerade de avsnitt, som var relevanta för min frågeställning och sorterade sedan citaten utifrån de övergripande begrepp (blivande teman), som jag observerade. För vart och ett av dessa preliminära teman gick jag igenom texten ytterligare en gång och sammanställde allt, som hade samband med detta tema. När detta hade genomförts gjorde jag en slutgiltig definition av de teman, som jag använder i kapitlet 3, Resultat och analys.

3. Resultat och analys

I kapitlet redovisas för varje artikel dess innehåll och där funna slutgiltiga teman (i fetstil), belysta med relevanta textavsnitt. Avsnittet avslutas med en tabell över samtliga dessa teman (Tabell 3).

3.1 Alibali, Stephens, Brown, Kao och Nathan (2014)

Alibali, Stephens, Brown, Kao och Nathan (2014) beskriver elevernas svårigheter att lösa ekvationer på följande sätt. ” Looking through symbols” innebär att elever kan återkoppla till sina tidigare algebrakunskaper när de ser symbolerna, vilket visar att de har förstått begreppen variabel och ekvation. ”Looking at symbols” innebär däremot att elever ser symboler utan att veta vad begreppet variabler betyder. De saknar den begreppsmässiga förståelsen av algebraiska symboler [**Att förstå variabler (bokstavsymboler), konstanter och koefficienter samt deras roll**], vilket gör det svårt för dem att återkoppla till sina tidigare algebrakunskaper och att lösa ekvationer. Dessa konceptuella missuppfattningar beror på att elever använder fel inlärd lösningsprocedur eller en felaktig algebraisk syntax, det vill säga använder felaktiga räkneregler eller bryter mot teckenkonventionerna. Fel inlärd lösningsprocedur kan innebära att elever använder multiplikation eller subtraktion istället för addition, till exempel konstruerade de följande berättelse till ekvationen $63 + n - 13 = 91$:

> ”Alayna har 63 M&M (godisar) och ger några till en vän. Sedan ger en annan vän henne 13 M&Ms. Nu har hon 91 M&Ms. Hur många M&Ms gav hon (till den första) vännen?" (min översättning)

Den ekvation som denna berättelse ger, är dock $63 - n + 13 = 91$, där n betecknar det okända antalet istället för den givna, eftersom de har svårt att identifiera vilken operation de behöver använda i lösningsproceduren [**Att ha procedurförståelse för lösningsprocessen**]. Den operation, vars betydelse elever har svårast att förstå och kunna välja vid rätt tillfälle är multiplikation. Elever har vidare svårigheter med den algebraiska syntaxen [**Att kunna den algebraiska syntaxen och det språket**], det vill säga de räkneregler och konventioner som finns för de algebraiska tecknen, när flera variabler uppträder i ekvationen och flera operationer behövs [**Att lösa linjära ekvationer genom att utföra flera operstioner**]. Detta leder också till att elever gör algebraiska feltolkningar av textuppgifter [**Att tolka textuppgifter**].

Alibali et al. (2014) nämner vidare att elever kan försumma att ta med delar av det matematiska innehållet i den givna ekvation, när de konstruerar en berättelse i en vardaglig kontext, som svarar mot ekvationen; de gör ett så kallad utlämnad-matematiskt-innehållsfel.

> ”Utelämnat-matematiskt-innehållsfel är de fel, där elever försummar att ta med delar av det matematiska innehållet i sina berättelser. I exemplets berättelse beskrev eleven en multiplikativ relation innehållande 6 men utelämnade den resulterande storheten, 78 ….när ett element utelämnades var det oftast antingen start- eller resultatstorheten. I de fall, då en

> matematisk operation saknades, handlade det emellertid oftast om multiplikation.” (min översättning)

Förutom utelämnat-matematiskt-innehållsfel har elever ingen handling i berättelse för en given ekvation, no-story-action. Med det menar Alibali et al. (2014) att eleverna har svårt med att förse en berättelse i en kontext, utgående från en given ekvation [**Att tolka textuppgifter och av de formulera linjära ekvationer och linjära ekvationssystem eller vice versa**], t ex. $4 \times 13 + 25 = n$, där eleven skrev följande berättelse:

> ”Kevin bor på en bondgård. Han har 4×13 grisar. Nästa dag har han fått 25 fler. Hur många har han nu?” (min översättning)

Eleven ger här ingen berättelse för multiplikationsoperationen i sin kontext. Elever kan utöver dessa svårigheter lägga till matematiskt-innehåll, i sin berättelse, som inte finns med i den givna ekvationen. Alibali et al. (2014) kommer i sin analys fram till följande resultat:

> ”Analyserna av dessa mest frekventa fel – Fel operationer, Ingen handling i berättelsen, Saknat matematiskt innehåll och Tillagt matematiskt innehåll – konvergerar till hypotesen att elever saknar en fullt utvecklad begreppsmässig förståelse av operationen av multiplikation och dess symboliska representation.” (min översättning)
>
> (Alibali, Stephens, Brown, Kao och Nathan, 2014)

Teman:

- **Att förstå variabler (bokstavsymboler), konstanter och koefficienter samt deras roll**
- **Att ha procedurförståelse för lösningsprocessen**
- **Att kunna tolka textuppgifter och av de formulera linjära ekvationer och linjära ekvationssystem eller vice versa**
- **Att lösa linjära ekvationer genom att utföra flera operationer**
- **Att kunna den algebraiska syntaxen och det språket**

3.2 Baratta (2011)

Baratta (2011) lägger vikt på elevernas uppfattning av likhetstecken vid lösning av linjära ekvationer. Det innebär att om eleven ska lyckas med att lösa linjära ekvationer så är det ganska viktigt att eleven utökar sin uppfattning av likvärdighet från en operation till en ekvivalens. För att kunna eleven omvandla dessa uppfattningar innan de börjar med mer

komplexa algebraiska världen ska eleven förstå meningen med likvärdigheten i en ekvation menar forskaren.
Baratta (2011) beskriver den så kallad balansmodellen för att utveckla elevers förståelse av ekvationer och likhetstecknets betydelse. De kan då faktiskt förstå att vänsterledet ska vara lika mycket som högerledet, vilket ger dem möjlighet att uppfatta likhetstecknets betydelse. Baratta (2011) nämner att elever har svårt att förstå denna modell och därför leder det till att de får svårare att uppfatta vad likhetstecknet betyder [**Att förstå likhetstecknets betydelse**], exempelvis i ekvationen $2x + 4 = x + 5$.

Teman:

- **Att förstå likhetstecknets betydelse**

3.3 Cai och Moyer (2008)

Cai och Moyer (2006) gör en studie om elever i mellanstadiet som har svårt att lära sig algebra och jämför bland annat kinesiska och nordamerikanska elever. Det är många elever som har svårt att utöka sina kunskaper från aritmetik till algebra, vilket ses som ett hinder för att få nya kunskaper i algebra. Det krävs många svårbegripliga anpassningar för att utveckla sina kunskaper från aritmetik till algebra anser Cai och Moyer (2008). Exempelvis kan följande svårbegripliga anpassningar vara:

- Att fokusera på operationer så väl som deras inverser, och på tanken att göra sådana eller inte [**Att kunna genomföra inversa operationer**],
- Att fokusera på både att representera problem, alltså att kunna resonera uppgiften på olika sätt för att lösa ekvationen aritmetiskt och algebraiskt, och att lösa dem snarare än bara lösa dem, [**Att förstå begreppet ”lösa en linjär ekvation”**]
- Att fokusera igen på likhetstecknets betydelse [**Att förstå likhetstecknets betydelse**]. (Cai och Moyer 2008, s. 4)

Teman:

- **Att kunna genomföra inversa operationer**
- **Att förstå begreppet ”lösa en linjär ekvation”**
- **Att förstå likhetstecknets betydelse**

3.4 Falcon (2009)

Falcon (2009) studerar grundskoleelevernas algebraiska resonemang i västra Texas, då de löser ett linjärt ekvationssystem utan att veta den algebraiska algoritmen. I studien sätts levers konstruktiva inlärningsförmåga i fokus då de använder metoder för att lösa linjära ekvationssystem både på algebraiskt och grafiskt sätt. Forskaren hävdar att det är väldigt viktigt med elevernas algebraiska resonemang i grundskolan för att kunna lyckas med vidare matematiska studier för högre nivå, tex. gymnasieskolan.

Falcon (2009) hävdar även att orsaken till att elever inte klarar att lösa en ekvation är att de inte har en bra uppfattning av likhetstecknets betydelse [**Att förstå likhetstecknets betydelse**]. För dem kan det vara svårt att förstå likhetstecknet betyder en balans mellan ekvationens båda led och därför leder till att elever lösa ekvationer felaktigt.

Forskaren påvisar att vissa elever i studien har förstått att värdet på variabeln x är det samma i båda ekvationerna i systemet, däremot löser de ut ena variabeln, x, och försummar andra variabeln, y, vid lösning av linjära ekvationssystem med substitutionsmetoden [**Att lösa ut båda variablerna, x och y, i systemet, dvs inte försummar ena variabeln vid lösning av linjära ekvationssystem med substitutionsmetoden**].

Falcon (2009) påpekar i sin studie att även om eleven använder sig av rätt metod för att lösa ett linjärt ekvationssystem så kommer den inte klara av att lösa systemet. Detta beror på att eleven saknar den konceptuella uppfattningen av ekvationslösning för att kunna behärska lösning av ett linjärt ekvationssystem som består av två eller tre linjära ekvationer [**Att förstå begreppet ”lösa en linjär ekvation”**].

Teman:

- **Att förstå likhetstecknets betydelse**
- **Att lösa ut båda variablerna, x och y, i systemet, dvs inte försummar ena variabeln vid lösning av linjära ekvationssystem med substitutionsmetoden**
- **Att förstå begreppet ”lösa en linjär ekvation”**

3.5 Filloy, Rojano och Solares (2003)

Filloy, Rojano och Solares (2003) introducerar meningen med likhetstecken vid lösning av ekvationssystem med substitutionsmetoden och jämförelsemetoden, exempelvis $\begin{cases} y = 12 - x \\ 5x - 6 = y \end{cases}$. Forskarna studerar elevernas lösningstillvägagång och den algebraiska syntaxen. De påpekar vikten av att behärska den algebraiska syntaxen för att kunna lösa linjära ekvationssystem med två ekvationer och två obekanta x och y. För att kunna använda substitutionsmetoden korrekt måste man förstå den algebraiska syntaxen och att variabeln x och variabeln y står för samma tal i de båda ekvationerna [**Att förstå variabler (bokstavsymboler), konstanter och koefficienter samt deras roll**], så att tex system $\begin{cases} y = 12 - x \\ 5x - 6 = y \end{cases}$ leder till ekvationen $12 - x = 5x - 6$.

Forskarna nämner vidare att det finns skillnader av likhetstecknets betydelse. En kunnig elev löser systemet med substitutionsmetoden genom att använda ekvivalens mellan två uttryck, tex i ovanstående uttrycken $12 - x$ och $5x - 6$, vilket ger ekvationen $12 - x = 5x - 6$, medan andra elever läser av ekvationerna genom att fokusera på operationskedjan.

I exemplet $\begin{cases} 4x - 3 = y \\ 6x = y - 7 \end{cases}$ visar eleven att den kan transformera systemet till $\begin{cases} 4x - 3 = y \\ 6x + 7 = y \end{cases}$ och sedan jämför ekvationerna genom att läsa av dem, att ekvationen ”$4x - 3 = y$ säger att 4 gånger x minus 3 är lika med y” och ekvationen ” $6x + 7 = y$ säger att 6 x plus 7blir y”, min översättning.

Elevens tolkning:

> *”In here ($4x - 3 = y$) says that four times ‘x’ minus three equals ‘y’. And here ($6x + 7 = y$) says that six ‘x’… plus seven!, equals ‘y’. This ($6x + 7 = y$) has to be bigger than this ($4x - 3 = y$).”* (s.227)

Eleven kommer fram till att både ekvationerna har samma okända variabler x och y vilkas värden ska bestämmas, men sätter inte uttrycken i ekvivalens för att lösa systemet. Det innebär att eleven har kunskapsbrister vad gäller uppfattning av likhetstecknets betydelse [**Att förstå likhetstecknets betydelse**]. Denna är en av svårigheter som Filloy, Rojano och Solares (2003) påpekar vid lösning av linjära ekvationssystem med substitutionsmetoden. Elever har brist på sådana kunskaper, som behövs för att upprätta den nya jämvikten, förutom svårigheter med den algebraiska syntaxen [**Att kunna den algebraiska syntaxen och det språket**].

Teman:

- **Att förstå begreppen variabler, konstanter och koefficienter samt deras roll**
- **Att förstå likhetstecknets betydelse**
- **Att kunna den algebraiska syntaxen och det språket**

3.6 Häggström (2008)

Häggström (2008) jämför svensk och kinesisk undervisning om linjära ekvationssystem med två variabler. I Sverige studerar elever ekvationssystem i gymnasiet enligt skolverket (2011) medan i Kina börjar de läsa detta ämne redan i grundskolan. Observationen utgår från sex klasser, en klass från Sverige i årskurs 9 som har läst fler ämnen än de vanliga klasserna i de vanliga kommunala skolor, två klasser från Hong Kong i årskurs 8 samt tre klasser från Shanghai i årskurs 8. Alla klasser undervisades om lösningsmetoder till sådana system, speciellt om substitutionsmetoden. Häggström (2008) tar upp elevernas observerade svårigheter att lösa sådana ekvationssystem. Svårigheterna har flera aspekter. Den ena är relationen mellan form och innebörd. Exempelvis används bokstavsymboler som x och y i olika sammanhang i uttrycken $x + 3$, i ekvationer, $x + 3 = 7$, i identiteten $x + y = y + x$, i uttrycken $x + 3 = 2y$, $(x) = x + 3$, $(x + 3) * 2y$, $x + 3 = 2y$ och i ekvationssystemet $\begin{cases} x + 3 = 2y \\ 2x - y = 11 \end{cases}$. Innebörden av bokstavsymbolerna beror på den kontext, i vilken de uppträder, exempelvis i ekvationen $x + 3 = 7$ representerar x ett specifikt, men ännu okänt tal nämligen 4. Det innebär att elever som har svårt att lösa en sådan ekvation har missförstått form och meningen av begreppen exempelvis variabeln x och likhetstecken. En del elever löser enkla ekvationer utan att förklara sina tillvägagångssätt och förstår inte ens meningen med det de gör [**Att förstå begreppet ”lösa en linjär ekvation”**]. De följer vissa regler på ett mekaniskt sätt.

En annan aspekt är relationer mellan dynamiska respektive statiska innebörden av en symbol, exempelvis likhetstecknet, som Häggström (2008) förklarar genom att ge exemplet $\frac{2}{3}$**.** Den dynamiska innebörden av bråkstrecksymbolen i uttrycket $\frac{2}{3}$ är *dividera 2 med 3,* alltså en uppmaning till eleven att göra en beräkning och medan den statiska innebörden *är två tredjedelar*, där bråket är ett objekt för eleven. I den tolkningen har eleven ingen känsla att börja en beräkning eller ens inse att det finns något som måste göras. De två olika begreppen division och bråk har samma symboliska representationen: $\frac{2}{3}$.
Ett annat exempel på denna dualism är uttryck som y=2x+3. Det kan ses som objekt, en given relation mellan variablerna x och y (statisk aspekt) eller som en uppmaning att multiplicera x med två och addera sedan tre (dynamisk aspekt) enligt Häggström (2008) och Bergsten et al. (2012).

Den dynamiska aspekten på likhetstecknet i aritmetiska uttryck, till exempel $2 + 3 = 5$, är en uppmaning ”gå från vänster till höger”, det vill säga addera 2 och 3, och resultatet blir 5. Den statiska aspekten är att likhetstecken betyder jämvikt, det innebär att samma tal står i ekvationernas båda led. Algebraiska uttryck, exempelvis $11 + x = 25$ är svårare. De flesta elever kan lösningsproceduren och förstår likhetstecknets innebörd, men behöver använda ett algebraiskt tänkesätt. I mera komplicerade ekvationer såsom $2x + 3 = 13 - x$ är likhetstecknets innebörd viktig. I den *statiska aspekten* är ekvationen ett objekt, som eleven ska behandla med algebraiska räkneregler för att bestämma x-värdet. Om elever inte förstår likhetstecknets innebörd ger det problem vid lösning av ekvationssystem, särskilt med substitutionsmetoden [**Att förstå likhetstecknets betydelse**]. Om elever saknar någon av aspekterna på likhetstecknet kan kunskapsutvecklingen hindras.

Häggström (2008) hävdar att det underlättar lösningen av linjära ekvationssystem med substitutionsmetoden om man uppfattar och hanterar algebraiska uttryck, exempelvis $ax + b$, som objekt, alltså statisk aspekt. Sättet att tolka uttryck är viktigt för lösningen av ekvationssystem med substitutionsmetoden. Det betyder att eleven ska tolka uttryck för att framställa ett resultat vid lösning av ekvationssystemet, alltså att eleven förstår meningen med att lösa ekvationssystem [**Att tolka algebraiska uttryck vid lösning av ekvationssystem med substitutionsmetoden**].

Elevernas svårigheter att lösa linjära ekvationssystem klassificeras på följande sätt enligt Häggström (2008):

- ”Eleven förstår kanske inte samma bokstav står för samma tal i båda ekvationerna [**Att förstå begreppen variabler (bokstavsymboler), kontanter och koefficienter samt deras roll**],

- Eleven kan kanske inte tillämpa att likhetsrelationen är transitiv, det vill säga $a = b$, $b = c$ medför $a = c$ [**Att förstå likhetstecknets betydelse**],
- Eleven kan kanske inte uppfatta och hantera uttryck som objekt (i substitutionsmetoden) [**Att tolka algebraiska uttryck vid lösning av ekvationssystem med substitutionsmetoden**]. ” (min översättning)

Teman:
- **Att förstå begreppet ”lösa en linjär ekvation”**
- **Att förstå begreppen variabler (bokstavsymboler), konstanter och koefficienter samt deras roll**
- **Att förstå likhetstecknets betydelse**
- **Att tolka algebraiska uttryck vid lösning av ekvationssystem med substitutionsmetoden**

3.7 Magruder (2012)

”Att lösa ekvationer är ett särskilt viktigt koncept i algebra och är en av anledningar som orsakar förvirring för elever.” (min översättning)

Magruder (2012) illustrerar detta genom att ge exempel på elevlösningar av linjära ekvationer. I exemplet $2p + 8 = 12$ klarade eleverna det första steget mot lösningen, det vill säga att subtrahera 8 från ekvationens båda led men många av eleverna kunde inte lösa den resulterande ekvationen $2p = 4$ korrekt utan skrev $p = 4$.

Magruder (2012) undersökte elevers lösningar och hantering av linjära ekvationer. Han studerade 60 högstadieelever i tre olika klasser med observationer, intervjuer, förtest och eftertest och konstaterade följande elevsvårigheter:

- Missuppfattningar av betydelsen av likhetstecken [**Att förstå likhetstecknets betydelse**]
- Missuppfattningar av begreppet koefficient, exempelvis i ekvationen $2x + 3 = 11$ missförstod elever koefficienten 2 och kunde inte skilja mellan 2 som koefficient och 2 som konstant [**Att förstå skillnaden mellan konstanter och koefficienter**]
- Missuppfattning av begreppet konstant [**Att förstå begreppen variabler, konstanter och koefficienter samt deras roll**]
- Innebörden av lösningen till en linjär ekvation [**Att förstå begreppet ”lösa en linjär ekvation”**].

Alla dessa svårigheter speglas i följande elevlösning av ekvationen $4x - 1 = 7$

(Magruder, 2012; s. 79)

Dessutom förekom talrika andra misstag, tex svårighet att lösa ekvationen $2x = 2$.
Vidare påpekas svårigheten att hantera minustecken korrekt [**Att hantera negativa tecken vid lösning av ekvationer**], i dessa två aspekter, den statiska i exempelvis (-7) för det negativa talet och den dynamiska i till exempel uttrycken $2x - 7y$ och $7 - 3$. Den svårigheten ledde till missförstånd av bokstavsymbolen, variabeln, i en ekvation [**Att förstå variabler och deras roll**]. Eleverna hade vidare svårt att hantera ekvationer som $-6x = 24$, där koefficienten är negativ. I ekvationen $4 - x = 5$ har elever svårt att förstå att negativa tecknet står framför variabeln och därför transformerar de ekvationen fel till $x = 5 - 4$.

Magruder (2012) framhåller att den konceptuella förståelsen är viktig för korrekt lösning av linjära ekvationer, eftersom den leder till att elevens procedurförmåga ökar och eleven kan använda rätt procedur och korrekta lösningsmetoder. Elever med enbart god procedurförmåga kunde lösa ett antal likartade testuppgifter, medan elever med god konceptuell förståelse löste de flesta av testuppgifterna.
Konceptuell förståelse innebär att eleven förstår meningen med likhetstecken, konstanter och koefficienter och så kallad inversa operationer, dvs addition av lämpliga tal till en ekvations båda led och multiplikation av leden med lämpliga tal. Exempelvis i ekvationen $3x - 2 = x + 4$ subtraherar eleven 2 från båda leden för att lösa ekvationen. Det visar att eleven saknar förståelse av invers operationen [**Att kunna genomföra inversa operationer**], dvs att addera 2 till båda leden istället för att subtrahera 2.
Procedurförståelsen innebär att eleven kan använda den algebraiska syntaxen korrekt under sin lösningsprocess.
Ett exempel. En elev löste ekvationen $7b - 6 = 3b + 2$ korrekt, förklarade lösningsgången i text bredvid lösningen och visade därigenom konceptuell förståelse bland annat av den statiska aspekten av likhetstecknet, alltså balansmodellen. I den enklare ekvationen $x + 3 = 8$ missuppfattar eleven proceduren, subtraherar 5 istället för 3 från ekvationens båda led, men visar konceptuell förståelse. Subtraktion av 3 gav en annan elev utan sådan förståelse resultatet $0 = 5$.
Efter addition av $2x$ i ekvationen $-2x + 7 = 3x + 2$ får många elever det korrekta resultatet $7 = 5x + 2$, men sedan subtraherade de 2 från konstanten 2 och termen $5x$ och får det

felaktiga resultatet $7 = 3x$. Eleven visar kunskap om invers operation, men brister i förståelse av konstant och variabel.

Teman:

- **Att förstå likhetstecknets betydelse**
- **Att förstå skillnaden mellan konstanter och koefficienter**
- **Att förstå begreppet ”lösa en linjär ekvation”**
- **Att hantera negativa tecken vid lösning av ekvationer**
- **Att förstå begreppen variabler, konstanter och koefficienter samt deras roll**
- **Att kunna genomföra inversa operationer**

3.8 Samuel, Mulenga och Angel (2016)

Samuel, Mulenga och Angel (2016) studerade 80 elever i fyra skolor i Zambia. Forskarna skriver att eleverna förutom missuppfattningar av likhetstecknets betydelse [**Att förstå likhetstecknets betydelse**] i linjära ekvationer har svårt att förstå begreppen variabel och koefficient [**Att förstå begreppen variabler och koefficienter**] och att de kan sakna den begreppsmässiga förståelsen av procedurkunskapen om lösningsmetoden [**Att ha procedurförståelse för lösningsprocessen**]. Av observationerna drog forskarna slutsatsen att elevsvårigheterna var följande:

- Att tolka en matematisk text med algebraiska symboler och formulera en linjär ekvation utgående från en textuppgift [**Att kunna tolka textuppgifter och av dem formulera linjära ekvationer och linjära ekvationssystem eller vice versa**]
- Att manipulera algebraiska uttryck [**Att kunna hantera och förenkla algebraiska uttryck**]

Av dessa var manipuleringen av algebraiska uttryck det största problemet för eleverna, även enligt deras egen åsikt. Eleverna nämnde svårigheten att lära algebraiska begrepp, tex koefficient, och svårigheten att kunna gruppera liknande termer i en ekvation.

De deltagande lärarna angav följande svårigheter:

- Eleverna har svårt att förenkla algebraiska uttryck
- Eleverna lär sig alltid algebraiska ekvationer på ett abstrakt sätt utan att använda sig av konkreta exempel såsom hantering av objekt som algebraiska plattor,
- Eleverna utmanar alltid att läsa och förstå matematiska påstående och fokuserar mest på att memorisera lösningsproceduren utan att förstå den,
- Eleverna känner inte igen eller förstår algebraiska termer som koefficient, konstant, variabel, förenkla. (min översättning, s. 103)

Forskarna ger följande exempel på elevlösningar:

I:

$$11 - 3x \ = \ 18 - 4x$$
$$x\,(11 - 3) – (18 - 4x)$$
$$8 \ - \ 12$$
$$x = \ -4$$

II

$$11 - 3x \ = \ 18 \ - 4x$$
$$= 8x \ = \ 14x$$
$$-14x – 8x$$
$$= \ -6x$$

III

$$7 + 9 \ = \ x \ + 10$$
$$= \ 7 \ + \ 9 \ = \ x$$
$$x = \ 16 – \ 10$$
$$x \ = \ 4$$

IV

$$5(2 - x) – \ 3(2x + 1) \ = \ 40$$
$$(10 - 5x) – \ (-6x + 3)\ 40$$
$$5x \ - \ 9x \ = \ 40$$
$$-40 – \ 5x \ = \ 9x$$
$$-35x \ = \ 9x$$
$$-9x – \ 35x$$
$$x \ = \ -26$$

(Samuel, Mulenga och Angel, 2016; s. 103)

och analyserar dessa på följande sätt:

Lösningarna visar att eleverna inte kan hantera och förenkla algebraiska uttryck [**Att hantera och förenkla algebraiska uttryck**]
och ekvationer, speciellt faktoriseras $11 - 3x$ som $x\ (11 - 3)$, det vill säga att de saknar förkunskaper i algebraiska uttryck och linjära ekvationer.
De har svårt att

- gruppera likadana termer, till exempel i ekvation II till $4x \ - \ 3x \ = \ 18 – \ 11$ [**Att kunna kombinera likadana termer**]
- manipulera algebraiska uttryck och ekvationer
- förstå betydelsen av likhetstecknet, av koefficienterna 3 och 4 och konstanterna 11 och 18 i ekvation I [**Att förstå begreppen likhetstecken, koefficienter och konstanter**]

- förstå begreppet ”lösa en linjär ekvation”, vilket framgår av elevlösningarna av ekvationerna I-IV [**Att förstå begreppet ”lösa en linjär ekvation”**]
- skriva en konkret och korrekt lösning; eleverna har förmodligen svårt med matematiska språket i alla ovanstående ekvationerna [**Att kunna den algebraiska syntaxen och det språket**].
- att förstå skillnaden mellan konstanter och koefficienter som visas i ekvation IV [**Att förstå skillnaden mellan konstanter och koefficienter**]

Teman:
- **Att förstå likhetstecknets betydelse**
- **Att förstå begreppen variabler, konstanter och koefficienter och deras roll**
- **Att ha procedurförståelse för lösningsprocessen**
- **Att hantera och förenkla algebraiska uttryck**
- **Att kunna kombinera likadana termer**
- **Att förstå begreppet ”lösa en linjär ekvation”**
- **Att kunna den algebraiska syntaxen och det språket**
- **Att förstå skillnaden mellan konstanter och koefficienter**

En sammanfattning av de olika temana i de olika artiklar konstrueras här nedan i tabell 3. Sammanfattningen förtydligar de matematiska svårigheterna som elever har vid lösning av linjära ekvationer och linjära ekvationssystem. I tabellen nedan medföljer forskarna och även förklaring till teman.

TABELL 3. Kategorisering av i litteraturen funna matematiska svårigheter att lösa linjära ekvationer och ekvationssystem

Svårigheter	Artikel
Att förstå likhetstecknets betydelse. Tex. att kunna förstå uttrycken $2x + 3$ och $5x - 2$ i ekvationen $2x + 3 = 5x - 2$ är lika stora, dvs. den statiska aspekten av likhetstecknet, (balansmodellen).	Magruder (2012), Bergsten et al. (2012), Baratta (2011), Falcon (2009), Filloy et al. (2003), Samuel et al. (2016), Häggström (2008), Cai och Moyer (2006)
Att förstå begreppen variabler (bokstavssymboler), konstanter och koefficienter och deras roll. Att exempelvis förstår vad x och y stå för samt förstå hur variablerna hanteras i en ekvation. Alltså att förstå x-värdet är det samma i båda leden i ekvationen $2x +$	Magruder (2012), Bergsten et al. (2012), Häggström (2008), Alibali et al. (2014), Samuel et al. (2016), Filloy et al. (2003)

$3 = 5x - 2$, koefficienterna i termerna 2x är 2 och 5x är 5, konstanterna i ekvationen är 3 och (-2).	
Att förstå skillnaden mellan konstanter och koefficienter. Alltså förstår 40 i ekvationen $5x = 40$ är en konstant och 5 är en koefficient.	Magruder (2012), Samuel et al. (2016),
Att kunna kombinera likadana termer (konstanttermer med konstanttermer, variabeltermer med variabeltermer). För att kombinera likadana termer i ekvationen $10 - 5x - 6x - 3 = 40$ behövs att kombinera variabeltermer med varandra och på samma sätt Konstanttermer vid lösning av ekvationen, dvs $-5x - 6x = 40 - 10 + 3$.	Magruder (2012), Samuel et al. (2016)
Att kunna genomföra inversa operationer. I ekvation $2x + 3 = 5x - 2$, inversa operationen för 2x är $(-2x)$ och för 2 är (-2), alltså $3 + 2 = 5x - 2x$.	Magruder (2012), Cai och Moyer (2006)
Att ha procedurförståelse för lösningsprocessen. Att exempelvis kunna lösa ekvationen $5(2 - x) - 3(2x + 1) = 40$, genom att multiplicera 5 och (-3) in i parentesen och får $10 - 5x\ - 6x - 3 = 40$.	Magruder (2012), Alibalai et al. (2014), Samuel et al. (2016)
Att kunna hantera och förenkla algebraiska uttryck. Ex. förenkling av uttrycket $10 - 5x - 6x - 3$ är $7 - 11x$.	Samuel et al. (2016)
Att förstå begreppet ”lösa en linjär ekvation”.	Magruder (2012), Falcon (2009),

Att kunna använda sig av rätt lösningsmetod för att lösa en linjär ekvation.	Samuel et al. (2016), Cai och Moyer (2006) Häggström (2008)
Att kunna tolka textuppgifter och av dem formulera linjära ekvationer och linjära ekvationssystem eller vice versa Alltså eleven formulerar en textuppgift utifrån en linjär ekvation tex. ekvationen $63 + n - 13 = 91$ tolkas enligt följande: Sara har 63 godbitar och får ett antal bitar från en vän. Sedan ger en annan vän 13 godisbitar och får kvar 91 bitar. Hur många godisbitar får hon från sin vän?	Alibali et al. (2014) Samuel et al. (2016)
Att lösa linjära ekvationer genom att utföra flera operationer. Alltså kunna multiplicera in, addera, subtrahera och förenkla tex. ekvationen $5(2 - x) - 3(2x + 1) = 40$ $10 - 5x - 6x - 3 = 40$ $-11x = 33$	Alibali et al. (2014)
Att kunna den algebraiska syntaxen och det språket. att kunna räkneregler och konventioner i ekvationer som innehåller flera operationer som i exemplet: $5(2 - x) - 3(2x + 1) = 40$ $10 - 5x - 6x - 3 = 40$ $-11x = 33$ $x = -3$	Alibali et al. (2014), Filloy et al. (2003), Samuel et al. (2016)
Att tolka algebraiska uttryck vid lösning av linjära ekvationer och linjära ekvationssystem med substitutionsmetoden, dvs att förstå meningen med att lösa ekvationssystem. Att sätta uttrycken lika med varandra som $4x - 3 = 6x + 7$, och förstår hur samt varför x-värdet ska lösas. Sedan lösningen	Häggström (2008)

ska fortsättas med att lösa ut y-värdet i det linjära ekvationssystemet $\begin{cases} 4x - 3 = y \\ 6x = y - 7 \end{cases}$.	
Att hantera negativa tecken vid lösning av linjära ekvationer. Att kunna lösa linjära ekvationer tex. $4 - x = 5$ som kan transformeras till $x = 4 - 5$, där lösningen blir $x = -1$.	Magruder (2012)
Att lösa ut båda variablerna, x och y, i systemet, dvs inte försummar ena variabeln vid lösning av linjära ekvationssystem med substitutionsmetoden. Vid lösning av ett linjärt ekvationssystem bör båda variabler lösas ut. Tex. $\begin{cases} 4x - 3 = y \\ 6x = y - 7 \end{cases}$, som ger lösningen $\begin{cases} x = -5 \\ y = -23 \end{cases}$.	Falcon (2009)

4. Diskussion

4.1 Resultatdiskussion

Resultatet indikerar att forskningsartiklarna i högsta grad har påpekat att eleverna missuppfattar likhetstecknets betydelse. Varje artikel identifierar vissa svårigheter och på grund av detta är det svårt att finna motsägelser mellan artiklarnas resultat. De flesta artiklarna nämner mest det pedagogiska perspektivet, tex Häggström (2008), och detta gör att jag har använt enbart de delar av artikel som handlar om elevers matematiska svårigheter. Forskningsstudierna, som nämnts i resultatet, visar att de svårigheter som elever har att lösa linjära ekvationssystem mestadels uppkommer då de använder substitutionsmetoden. Detta kan bero på att elever saknar den konceptuella förståelsen av algebraiska uttryck, eftersom de har svårt att hantera proceduren att lösa en linjär ekvation. Dessutom kan elevens matematiska kunskapsnivå spela en stor roll när det gäller procedurförståelse vid beräkning av aritmetiska uttryck. Det innebär att eleven kan ha svårigheter att hantera operationstecken såsom negativa tecknen. Det vanligaste felet som eleverna gör och som gör det svårt för dem att hantera ett algebraiskt uttryck är det negativa tecknet. Det leder till att eleven missuppfattar hur lösningen bör fortsättas för att komma fram till resultatet. Negativa tecken kan påverka alltså operationen, inte minst då eleven kombinerar likadana termer. Det kan även vara svårt då negativa tecknet står framför en variabel tex. $-x$, där många elever behärskar inte den konceptuella uppfattningen, alltså att det står (-1) framför x.

Alibali et al. (2014) tar fram svårigheten att elever tolkar ekvationer felaktigt, vilket leder till att de får svårare att formulera en berättelse i en praktisk kontext till en given ekvation. Å andra sidan hävdar Samuel et al. (2016) att elever har svårt att formulera linjära ekvationer utgående från textuppgifter. Enligt dessa författare och Filloy et al. (2003) gör elevers bristande procedurförståelse, formulering och tolkning av linjära ekvationer det svårt för dem att tillämpa en korrekt algebraisk syntax när de formulerar sina ekvationer.

Häggström (2008) anger också de två aspekterna av t ex. likhetstecknet, den statiska respektive den dynamiska aspekten, som en förklaring av svårigheterna, vilket de andra forskningsartiklarna inte nämner. Utförliga tolkningar inom matematiken, specifikt algebra, gör det enklare för lärare att förstå elevens tankande, i sin tur kan detta påverka undervisningen. Det leder till att läraren kan lättare bedöma vilka matematiska svårigheter eleven har för att kunna stödja den för ett lyckat lärande i algebra.

Det viktigaste resultatet i detta arbete är att elever förutom procedurförståelsen bör ha konceptuell förståelse för linjära ekvationer för att kunna lösa linjära ekvationssystem korrekt. Det innebär att förstå innebörden och meningen med likhetstecken, konstanter, koefficienter och inversa operationer. Med det menar jag att elevers förkunskaper om linjära ekvationer är mycket viktiga för att de ska kunna få procedurkunskaper och inte minst begreppskunskaper om linjära ekvationssystem.

Resultatet visar även att om elever missuppfattar de elementära begreppen såsom variabler, konstanter, koefficienter och likhetstecknets betydelse kommer de inte kunna behärska den algebraiska syntaxen. Det leder till att eleven hanterar negativa tecken, algebraiska uttryck och löser ekvationen på felaktigt sätt.

4.2 Metoddiskussion

Med utgångspunkt från syftet och frågeställningen i denna studie, bestämdes ämnet. Eftersom ämnet var ganska svårt för att finna relevanta artiklar användes några sökmotorer, av vilka den mest användbara var ERIC. Därefter begränsades sökningen för att kunna nå önskvärda resultat. Forskningsstudier avgränsades under 2000-talet för att få senaste forskningsresultat där visar vilka matematiska svårigheter eleverna har vid lösning av linjära ekvationer. De flesta funna internationella studier gällde nivåer, svarade mot matematiknivån i gymnasieskolan här i Sverige.

Analysen och klassificeringen ger en bild av elevernas svårigheter i algebra. Jag har baserat min analys på egna tolkningar av texterna och det är möjligt att författarna har haft andra implicita intentioner med sina exempel som skiljer sig från mina tolkningar, vilket kunde genererat en annan klassificering.

4.3 Generell diskussion

För att läraren ska kunna nå elevens algebraiska tankande bör läraren utveckla sina pedagogiska kunskaper inom ämnet (Häggström, 2008). För att kunna variera sin undervisning på ett fruktbart sätt måste läraren vara medveten om vilka svårigheter eleven har när det gäller matematiska och inte minst algebraiska kunskaper. Undervisningsvariation förbättrar elevernas inlärning genom att stimulera deras kritiska aspekter på det undervisade ämnet under deras inlärningsperioder. Det leder till en förstärkning av deras algebraiska kunskaper, eftersom elever lär in och uppfattar samma kunskap på olika sätt. Vid en undervisning av ett linjärt ekvationssystem med substitutionsmetoden kan läraren involvera eleverna genom att ställa frågor, exempelvis ” kan vi ersätta x i den första ekvationen eller i den andra ekvationen?” (min översättning, Häggström, 2008, s.56) Detta har läraren skapat en öppen variation för elever som i sin tur gjort det möjligt för elever att uppfatta. Utöver frågeställningar vid lösning av ett system är det gynnsamt om elever får några exempel på olika linjära ekvationssystem. Exempelvis ”Lös följande ekvationssystem:

1. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3t = 5 + 2s \\ t = 7 - 2s \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2u = 3v - 5 \\ 7 - v = 2u \end{cases}$ ” (Häggström, 2008, s. 58)

Dessa tre ekvationssystem ser olika ut men i grunden är de matematiskt ekvivalenta, d.v.s. de har samma lösningsmängd. Detta visar en variationsaspekten, som påverkar elevernas inlärning i undervisningen.

Häggström (2008) hävdar att elevens möjliga inlärning, förutom att läraren genomgår det matematiska innehållet i undervisningen, är att undervisningen ska ha hög kvalitet och inte fokusera enbart på elevernas tidigare förkunskaper. Tanken med detta är att elever ser variationen i olika sätt i undervisningen för att kunna skaffa deras uppmärksamhet som förbättrar inlärningen. Eftersom algebra är ett viktigt ämne i matematiken, som elever har svårt för, är det nödvändigt att lägga vikten på den pedagogiska delen i undervisningen, exempelvis att ha bättre matematisk kommunikation i klassrummet som förstärker elevers algebraiska uppfattning. Förutom kommunikationen i undervisningen så är det ganska viktigt att involvera eleverna i ämnet som kan förbättra deras språk och tankesätt inom algebra.

4.4 Slutsats

I skolverksamheten läggs vikt vid att elever får det stöd de behöver i matematik och specifikt algebra. Det innebär att läraren bör förstå elevernas tankesätt och inte minst deras matematiska svårigheter för att kunna ge dem lämpligt stöd för bättre inlärning. Resultatet av denna studie är att om elever har tillräckliga algebraiska förkunskaper och lär sig att göra korrekta operationer i ekvationer och ekvationssystem (procedurförståelse) kommer de att gradvis kunna lösa och tolka dessa uppgifter på rätt sätt (konceptuell förståelse). Detta kan vidare hjälpa dem att utveckla även sitt algebraiska språk och att använda den algebraiska syntaxen korrekt.

Vidare kan jag konstatera att mer forskning behövs, dels för att ge en mer fullständig kategorisering av gymnasieelevers matematiska svårigheter, dels för att finna pedagogiska metoder för att hantera dessa svårigheter.

5. Implikationer till vidare forskning

För att kunna se elevernas kunskapsbrister och svårigheter att lösa linjära ekvationssystem bör det forskas vidare och djupare i ämnesområdet. Lärarna bör känna till de här svårigheterna för att kunna bättre planera sin undervisning på rätt nivå. Det leder till att läraren kan förstå elevernas brister i algebra och stödja dem för att lyfta upp deras algebraiska kunskaper.

Jag planerar att i mitt nästa examensarbete, ett produktionsarbete, undersöka empiriskt en elevgrupps hantering av ett antal linjära ekvationer och ekvationssystem, för att göra en analys av den svenska gruppens lösningar och jämföra mina resultat med dem, som jag i detta arbete har funnit i forskningslitteraturen. Detta hjälper mig som lärare att förstå flera elevsvårigheter om det finns som kan vara användbara i mitt framtida yrke. Forskningen i denna studie ger mig även en strukturerad förmåga att kunna undervisa i algebra. Det är därför viktigt att fortsätta forskningen om matematiska elevsvårigheter att lösa linjära ekvationer och linjära ekvationssystem.

6. Referenser

Alibali, M.W., Stephens, A. C., Brown, A. N., Kao, Y. S. & Nathan, M. J. (2014). Middle school students´conceptual understanding of equations: Evidence from writing story problems. *International journal of educational psychology, 3*(3), 235-264.

Baratta, W. (2011). Linear equations: equivalence = success. *Australian Mathematics Teacher 67 (4)*, 6-11.

Bryman, A. (2002). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Första upplagan. Malmö: Liber.

Cai, J. & Moyer, J. (2008). Developing algebraic thinking in earlier grades: Some insights from international comparative studies. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 169-180). Reston, VA: NCTM.

Crawford, G. (1972). *Algebra 2s, Mathematics (Experimental): 5216.24*. Washington, D.C.: Clearinghouse, Hämtad från: http://www.eric.ed.gov/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED093704.

Eriksson Barajas, K., Forsberg, C. & Wengström, Y. (2013). *Systematiska litteraturstudier i utbildningsvetenskap.* Natur och kultur. Stockholm

Falcon, R. (2009). *Algebraic reasoning in the Middle Grades: A view of Student Strategies in Pictorial and Algebraic System of Equations* (Kandidatuppsats). El Paso, Texas, University of Texas at El Paso. Hämtad från: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED525230.pdf

Filloy, E., Rojano, T. & Solares, A. (2003). Two meanings of the ”equal” sign and senses of comparison and substitution methods. *International group for the Psychology of Mathematics Education*, Volym 4, 223-230. Cinvestav,Mexico.

Häggström, J. (2008). *Teaching system of linear equations in Sweden and China: What is made possible to learn?* (Doktorsavhandling). Göteborg. Göteborgs universitet. Hämtad från: http://hdl.handle.net/2077/17286

Langemar, P. (2012). *Kvalitativ forskningsmetod i psykologi – att låta en värld öppna sig*. Liber. Stockholm.

Magruder, R. L. (2012). *Solving linear equations: a comparison of concrete and virtual manipulatives in middle school mathematics*. (Doktorsavhandling). University of Kentucky. Hämtad från: https://uknowledge.uky.edu/edc_etds/2.

Nationalencyklopedin [NE]. (2018). *Algebra*. Hämtad från: https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/algebra.

Samuel, K., Mulenga, H.M. & Angel, M. (2016). An investigation into challenges faced by secondary school teachers and pupils in algebraic linear equation: a case of Mufulira District, Zambia. *School of Mathematics and Science, 7*(26), 99-106.

Skolverket. (2011). *Läroplan för gymnasieskolan 2011*. Hämtad från https://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat. 20171128. 16:33