Linköpings universitet | Institutionen för beteendevetenskap och lärande
Examensarbete, 15 hp | Speciallärarprogrammet 90 hp
Vårterminen 2019 | ISRN-nr: LIU-IBL/SPLÄR-A-19/07-SE

Algebra på gymnasiet = Svårt?!

- Förekomst av felsvar och feltyper vid åk 1-gymnasieelevers beräkningar inom algebra

---

Algebra at the Upper Secondary School = Difficult?!
- Occurrence of Error and Error Types in Calculations with Algebra among Students at the Upper Secondary School

Jevgenia Hendsel
Susanna Kronbäck

Handledare: Joakim Samuelsson
Examinator: Rickard Östergren

Linköpings universitet
SE-581 83 Linköping
013-28 10 00, www.liu.se

Sammanfattning/abstract

Innehållet i denna studie handlar om att kategorisera olika typer av fel som elever i åk 1 på gymnasiet gör i algebra. Data utgörs av 80 elevprov skrivna av elever på samhällsvetenskapsprogrammet och VVS- och fastighetsprogrammet läsåren 2017/2018 och 2018/2019. Uppgifterna som eleverna har fått göra är lösa ekvationer, förenkla uttryck, räkna värdet av ett uttryck samt problemlösning. Vi har analyserat elevernas svar och kategoriserat fel som eleverna gör i totalt sex feltyper:

1. Förståelsefel eller fel i begreppslig uppfattning, 2. Procedurfel, 3. Modelleringsfel eller problemlösningsfel, 4. Resonemangsfel, 5. Redovisningsfel eller kommunikationsfel,
6. Övriga fel.

I vårt resultat presenterar vi varje feltyp och illustrerar med elevexempel. Med tidigare forskning som utgångspunkt identifierar och diskuterar vi vilka missuppfattningar och svårigheter kan vara den bakomliggande orsaken till att eleverna gjort dessa fel. Om vi lärare vet vilka fel eleverna kan göra i algebra samt har förståelse för vilka missuppfattningar kan ligga bakom dessa fel kan vi planera vår undervisning på ett bättre sätt och förebygga att dessa feltyper uppstår. Detta är viktigt för alla elever men, särskilt för elever i matematiksvårigheter.

Några exempel på orsaker är att eleverna inte uppfattar variabelns (x) symboliska värde, förstår inte olika variablers generella beteckning (a och b), att variabeln kan representera en siffra, eleverna övergeneraliserar, förstår inte räkning med negativa tal, kan inte hantera aritmetik, förstår inte likhetstecknets betydelse, har oeffektivt resonemang (gissar, testar sig fram), samt skriver av uppgiften fel.

Nyckelord

algebra, matematiksvårigheter, felanalys, feltyper

Innehåll

1. Inledning

Efterfrågan från samhället på personer med matematikintensiva utbildningar är mycket större än tillgången. Detta gäller främst områden inom naturvetenskap, teknik och datavetenskap (Lithner, 2000). Att vara framgångsrik i matematik är ofta nyckel till framgång i utbildningen som helhet. Matematik fungerar som kritiskt filter för den som genomgår en utbildning – misslyckas en elev i matematik får det större och vidare konsekvenser än att misslyckas i många andra ämnen (Engström, 2015). Studiemisslyckande är ett problem, förutom ur samhällsperspektivet, även för individens perspektiv. 10 – 40 % av studenter (beroende på studieinriktning) avbryter sina högskolestudier i matematik samt 20 – 50 % av de som fullföljer studierna gör det med mycket stora svårigheter (Lithner, 2000).

Vi har arbetat som matematiklärare på gymnasiet i flera år. Båda har, oberoende av varandra, sett att för elever som börjar på gymnasiet verkar algebra vara svårare än något annat område i matematik. Vi har även år efter år lagt märke till att eleverna gör liknande fel vid räkneoperationer i algebra, oavsett om de läser ett högskoleförberedande program eller ett yrkesprogram. Algebra verkar vara svårt för många elever, men enligt våra observationer, speciellt för lågpresterande elever (elever som befinner sig i matematiksvårigheter). Enligt Häggström (1996) har många av de svårigheter som elever får med algebra sitt ursprung i aritmetik, men visar sig först när man börjar med algebra. Många upplever vägen mot algebra som abstrakt och snårig och ser inte meningen med den. Om man då inte lyckas kan det hända att man både tappar intresset och får en negativ inställning till hela matematikämnet (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 1997).

Ett syfte med matematiken på gymnasieskolan är att eleverna utvecklar förmågan att arbeta matematiskt, vilket innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp, metoder samt olika strategier för att kunna lösa matematiska problem (Skolverket, 2011). Många problemuppgifter på gymnasiets matematikkurser kan lösas med hjälp av algebran. Vidare bör eleverna kunna hantera algebra för att förstå högre matematikkurser. Dessa kurser utgör i sin tur den plattform som högskolestudier bygger på. Matematiska modeller används på alla nivåer i samhället, mer eller mindre synligt. Att förstå och kunna använda formler, tabeller och diagram är därför en nödvändig demokratisk kompetens (Skolverket, 2011).

Algebrakunskaperna har länge ansetts vara en kritisk bro över till högre studier (Hu, Son, & Hodge, 2016), en inkörsport (*gateway*) till abstrakt tänkande (Witzel, Mercer, & Miller, 2003), eller till och med en portvakt (*gatekeeper*) (Gojak, 2013; Booth & Newton, 2012) för högre studier för de som haft det eller har svårt för matematik. Då algebra tillhör kategorin *abstrakt tänkande* krävs det någon sorts mognad, tålmodighet och konceptuell förståelse just för det abstrakta (Gojak, 2013). Att arbeta med abstrakt fakta eller information är att förstå teoretiska egenskaper och tänka bortom vad man kan se eller röra vid. Det kan även anses som medvetenhet att en symbol kan betyda olika saker. Symbolen kan stå för något känt eller icke-känt (Witzel, Mercer, & Miller, 2003). Detta abstrakta tänkande har många elever svårigheter med och algebran känns därmed svårbegriplig. Algebran har alltid varit en stötesten för eleverna (Persson, 2005). Persson (2005) anser att algebran utgör på mer än ett sätt ”bokstavliga svårigheter” i matematiklärandet. Dessutom förväntas även att elever med olika inlärningssvårigheter ska uppnå samma standardkunskaper i algebra som i andra ämnen (Ketterlin-Geller & Chard, 2011). Lärare har under alla tider kämpat med att utveckla undervisningsmetoder som underlättar algebraförståelsen och hjälper eleverna att skaffa sig den algebraiska grund de måste stå på för att klara vidare studier och de krav som deras framtida yrke ställer (Persson, 2005).

Vi vill definiera svårigheter och missuppfattningar som kan ligga bakom många fel som eleverna gör, och som därför särskilt borde uppmärksammas i undervisningen. I vårt kommande arbete som speciallärare på gymnasiet ser vi det som viktigt att ta fram kunskap om vilka fallgropar som finns kopplade till undervisning av algebra, speciellt vad som gäller lågpresterande elever eller elever som befinner sig i matematiksvårigheter.

Denna studie handlar om att identifiera, beskriva, kategorisera och analysera fel som första årets gymnasieelever gör inom området algebra. Data för vår studie utgörs av algebraprov som elever i år 1 på två gymnasieskolor i Södermanland/Stockholms län har skrivit under läsåren 2017/2018 och 2018/2019. Eleverna går på samhällsvetenskapliga (högskoleförberedande) program och yrkesprogram och läser kurser Matematik 1b respektive Matematik 1a.

2. Syfte och frågeställning

För att belysa problematiken som eleverna har inom algebra, så är vårt övergripande syfte med vår studie att identifiera, beskriva och analysera fel som första årets gymnasieelever gör eller har med sig inom området ”Algebra”.

Huvudfrågan vi söker svar på är:

Vilka typer av fel gör eleverna inom Algebra?

Då vi enbart vill titta på första årets gymnasieelever vill vi begränsa oss och ställa följande delfrågor:

- Vilka typer av fel gör eleverna när de räknar med *ekvationer*?
- Vilka typer av fel gör eleverna när de utför *förenklingar* inom algebran?
- Vilka typer av fel gör eleverna när de räknar ut ett *uttrycks värde*?
- Vilka typer av fel gör eleverna vid *problemlösning* inom algebra?

Genom att utgå från de felsvar som förekommer kan man se vilken förståelse eller vilka missuppfattningar som ligger bakom vanliga feltyper. Detta är värdefullt för oss som blivande speciallärare i matematik och förhoppningsvis även för andra matematiklärare.

3. Centrala begrepp

Här förklarar vi några begrepp som är relevanta för vår studie:

Matematiksvårigheter, algebra, förmågor.

3.1 Matematiksvårigheter – vad är det?

Ur ett specialpedagogiskt perspektiv är det viktigt att vi i samband med analysen av feltyper i algebra även tittar på vad matematiksvårigheter är.

Alla elever möter svårigheter och skapar missuppfattningar när de lär sig matematik, en del gör det mera sällan, andra gör det oftare (McIntosh, 2009). McIntosh (2009) menar att en del av dessa svårigheter är av enklare slag, tillfälliga och lätta att övervinna – men många är resultatet av brister i begreppsförståelse. Sådana fel är sällan slumpartade. De är resultatet av att eleven försökt förstå och använda logik som inte passar i situationen. Missuppfattningar grundar sig ofta på bristande erfarenhet eller otillräcklig undervisning. Lewis (2014) menar att varje elev har en samling av s.k. bestående uppfattningar (*persistent understandings*) av matematiska begrepp som kan vara felaktiga och dessa kan medföra att eleverna gör fel i beräkningar. Lewis (2014) illustrerar detta med bl. a. ett exempel då en elev skulle förklara vad 2/4 innebär. Eleven ritade en rektangel, delade den i *sex* lika stora delar och skuggade två delar. Två skuggade delar och fyra oskuggade delar föreställde i elevens värld 2/4. Ett sådant bestående uppfattning (bristande konceptuell kunskap) av bråk kan i sin tur leda till felsvar och stora svårigheter vid bråkräkning (Lewis, 2014). Att ändra sig i sitt sätt att tänka är något som många har svårt med, trots övning och instruktioner (McNeil & Alibali, 2005). McNeil och Alibali (2005) kallar detta fenomen för *change-resistance*, vilket skulle kunna översättas till ”motstånd mot ändring”.

Specialpedagogiska skolmyndigheten (SPSM) definierar två huvudkategorier av matematiksvårigheter: *specifika matematiksvårigheter/dyskalkyli* och *generella matematiksvårigheter.* Det är betydligt större grupp elever som har generella matematiksvårigheter än som har dyskalkyli. Det är många olika faktorer som enligt SPSM kan ligga till grund för dessa generella matematiksvårigheter, inte minst brister i den grundläggande pedagogiken som barn och elever möter. Problem i den matematiska utvecklingen kan också orsakas av läs- och skrivsvårigheter eller koncentrationssvårigheter.
Begreppet specifika räknesvårigheter eller dyskalkyli innebär enligt SPSM att problemet finns inom grundläggande räkneläran, att hantera tal och antalsuppfattning. En gemensam faktor för detta är just svårigheten som eleven har att snabbt tolka och tillgodogöra sig siffror, tal och antal i skilda situationer. Om en diagnos sätts så finns det för närvarande två aktuella internationella diagnostiska system:
ICD - 10, ”International Classification of Diseases”, utgiven av Världshälsoorganisationen, WHO där diagnoskoden relaterad till matematiksvårigheterna är F81.2.
DSM - 5, ”Diagnostic and Statistical Manual of mental disorders” utgiven av den amerikanska psykiatriska föreningen, där diagnoskoden är 315.1.

I Sverige tillämpas i första hand ICD-10, som definierar specifika räknesvårigheter på följande sätt:

> ” …en specifik försämring av matematiska färdigheter som inte kan förklaras av psykisk utvecklingsstörning eller bristfällig skolgång. Räknesvårigheterna innefattar bristande förmåga att behärska basala räknefärdigheter som addition, subtraktion, multiplikation och division snarare än de mer abstrakta matematiska färdigheter som krävs i algebra, trigonometri, geometri och komplexa beräkningar.” (Fokusrapport, 2015, s 6).

Definitionen ovan innebär att det måste finnas en diskrepans (skillnad) mellan generell begåvning och matematisk förmåga. Med andra ord är svag begåvning inte samma som dyskalkyli. En viktig aspekt av dyskalkyli är heterogenitet: svårigheterna ser väldigt olika ut både mellan olika individer och för en och samma individ över tid (Fokusrapport, 2015).

Generella kognitiva förmågor som kan kopplas till matematik är språklig eller fonologisk förmåga, numeriska färdigheter, symboliska färdigheter, icke-symboliska färdigheter, spatial förmåga, arbetsminne, korttidsminne, långtidsminne, logiskt tänkande, och exekutiva funktioner (planerande förmåga) (Caviola & Lucangeli, 2015).

Det finns olika begrepp för att beskriva matematiksvårigheter:

- Mathematical learning disability, MLD (matematiska inlärningssvårigheter) (Karagiannakis & Cooreman, 2015)
- Developmetal dyscalculia, DD (utvecklingsdyskalkyli) (Bugden & Ansari, 2015)
- Mathematical disorder, MD (specifika matematiksvårigheter) (Desoete, De Weerd, Vanderswalmen, & DeBond, 2014)
- Mathematical difficulties, MD (matematiksvårigheter) (Schwenk, Sasanguie, Kuhn, Kempe, Doebler, & Holling, 2017)

Matematiska inlärningssvårigheter, MLD är inte samma som allmänna inlärningssvårigheter och omfattar inte alla former av matematiksvårigheter. MLD och dyskalkyli används ofta synonymt i forskningslitteraturen och anger att de matematiska svårigheterna beror på en störning hos individen (Fokusrapport, 2015). Karagiannakis och Cooreman (2015) t ex menar att MLD är mycket bredare begrepp än dyskalkyli. Dessutom är dyskalkyli ett omstritt begrepp och det saknas en generell definition av fenomenet. Forskare, politiker och lärare använder olika innebörd när de diskuterar dyskalkyli. Forskningen om dyskalkyli går framåt, men ligger ännu långt efter forskning om andra inlärningsstörningar, t ex om dyslexi. Forskarna är inte heller överens om ”core deficits” (huvudproblem) för dyskalkyli. Hur stor utbredning (prevalens) har dyskalkyli? Uppskattning varierar eftersom forskningen inte är överens om var och hur gränserna ska dras mellan matematiksvårigheter som naturlig variation och en störning som innebär en kvalitativ avvikelse från den naturliga variationen (Engström, 2015). Oftast föreslås att 4 – 6 % av befolkningen har dyskalkyli. För närvarande är de flesta forskarna överens om att bevis på dyskalkyli har hittats snarare än att ge en fast definition av diagnosen (Emerson, 2015).

Enligt Kaufmann et al. (2013), kännetecknas dyskalkyli av heterogenitet: svårigheterna ser väldigt olika ut både mellan olika individer och för en och samma individ över tid. Ramaa (2015) menar att varje barn med dyskalkyli uppvisar en unik profil av styrkor och svagheter i olika kriterier.

Det går att urskilja två subtyper av dyskalkyli – *primär* och *sekundär* dyskalkyli (Kaufmann et.al., 2013). *Primär* dyskalkyli – en störning i den grundläggande förmågan att uppfatta och representera numeriska kvantiteter. Det är alltså individuella brister i numeriska eller aritmetiska funktioner på beteendenivå, kognitiv/neuropsykologisk nivå eller neurologisk nivå. *Sekundär* dyskalkyli – de numerära/aritmetiska nedsättningarna är orsakade av icke-numeriska nedsättningar, som till exempel uppmärksamhetsstörningar.

Lewis (2014) medger att det råder enighet bland forskarna att MLD har ett biologiskt eller kognitivt ursprung. Hon menar att det är vanligt att förklara MLD med enbart otillräcklig automatisering av aritmetiska numeriska fakta och föreslår en alternativ förklaring till MLD – kvalitativa skillnader i förståelse av matematiska begrepp vilket kan leda till mer komplex förståelse av MLD.

Dyskalkyli förekommer ofta i kombination med andra funktionsnedsättningar, så kallad komorbiditet (Kaufmann et al., 2013; Engström, 2015). Dyslexi och ADHD är oftast förekommande. Både matematik och läsning är kognitivt krävande verksamheter. Dessutom måste man vara uppmärksam, koncentrerad, uthållig, ha bra arbetsminne och kunna tänka abstrakt. Däremot har dyslexi och dyskalkyli olika genetisk och neurobiologisk natur.

Fokusrapporten (2015) ger två olika förklaringsmodeller finns till fenomenet dyskalkyli: domängenerell kognitiv störning och domänspecifika numeriska störningar.

3.1.1 Domängenerell kognitiv störning

Denna förklaring menar att dyskalkyli beror på en störning i en eller flera generella kognitiva förmågor, framförallt arbetsminne, semantiskt långtidsminne och exekutiva funktioner. Både arbetsminnet och exekutiva funktioner understödjer hanteringen av de olika aritmetiska processerna medan det semantiska långtidsminnet är viktigt för att lagra kunskap om matematiska begrepp, beräkningsprocedurer, problemlösningsstrategier samt för att lära in och lagra aritmetiska fakta (t ex $6 \cdot 3 = 18$) (Fokusrapporten, 2015).

3.1.2 Domänspecifika numeriska störningar

Denna förklaring handlar om antalsuppfattning som definieras som en medfödd förmåga att uppfatta exakta eller approximativa antal icke-symboliskt, d.v.s. uppfatta mängden, exakt eller på ett ungefär. Det kallas för det *approximativa antalssystemet, ANS* (Karagiannakis & Cooreman, 2015). ANS, antas utgöra grunden för att förvärva och utveckla det symboliska talsystemet genom att symbolerna (siffror, räkneord) kopplas på en inre tallinje. Enligt ANS – teorin beror dyskalkyli på att individen har en störning i ANS. Kvaliteten på den inre tallinjen är bristfällig, vilket gör det svårt att representera antal och skilja mellan antalsmängder. Denna bristande precision gör det även svårt att etablera ett välfungerade symboliskt talsystem och goda aritmetiska färdigheter. Den här störningen kallas ofta även för *number sense deficit*. T ex kan inte eleverna automatiskt avgöra att $8 + 7$ är en mer än $7 + 7$, utan att de måste räkna varje gång; samt har inte automatiserat att $7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3$ (Sharma, 2015).

3.1.3 The access deficit hypothesis

Ytterligare en hypotes som förklarar dyskalkyli är *The access deficit hypothesis*. Den handlar om en defekt koppling mellan det symboliska och icke-symboliska medfödda systemet. Denna hypotes menar att dyskalkyli inte beror på problem med att förstå exakta eller approximativa antal i sig, utan att svårigheten ligger i *kopplingen* mellan de numeriska symbolerna (siffror/tal) och deras mentala magnitudrepresentationer. Det vill säga, att koppla ihop det förvärvade symboliska systemet med det medfödda icke-symboliska representationssystemet (Fokusrapport, 2015).

3.2 Vad är algebra?

Skulle vi fråga en verksam matematiker, en elev på högstadiet eller en elev på gymnasiet, vad **algebra** är skulle vi förmodligen få olika svar. Matematikern skulle troligen svara att algebra är en huvudgren i ämnet matematik vid universitetet, eleven på högstadiet svarar kanske att algebra är räkning med bokstäver istället för med siffror, såsom förenkling av uttryck, eller att lösa ekvationer som innehåller många obekanta, och eleven på gymnasiet kan svara att algebra kan handla om att t ex lösa andragradsekvationer med hjälp av formler man lär sig i skolan (Dahl, 1996).

Algebran använder sig av symbolspråket, som är det mest tekniska språk som finns. Detta symbolspråk har haft 400 år på sig att utvecklas. Tidigt lär vi oss symbolerna för de fyra räknesätten: addition (+), subtraktion (-), multiplikation (·) samt division (÷). Dessa symboler kan variera något mellan olika nationer och sammanhang. Vi har även symboler för många andra operationer, såsom kvadratroten ur ett positivt tal ($\sqrt{b}$). Alla dessa räkneoperationer lyder vissa allmänna lagar, t ex $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$ (kommutativa lagen), $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associativa lagen), $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributiva lagen) osv. Med hjälp av dessa lagar lär vi oss att förenkla uttryck som har formulerats på algebrans symbolspråk (Dahl, 1996). Bokstavssymbolerna ersätter siffersymboler och gör det möjligt att räkna med ”godtyckliga” tal (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 1997).

Den moderna algebran, som utvecklats under de senaste 150 åren, har preciserat vilka de allmänna räknelagarna är och identifierat vilka som är de mest grundläggande. Detta har lett till att det inte bara är talen som lyder dessa lagar utan även helt andra matematiska objekt, så som avbildningar och symmetrier. Algebran har på detta sätt frigjort sig från talen och blivit en självständig gren av matematiken (Dahl, 1996).

Ordet *algebra* kommer från arabiskan, *al-jabr*, som betyder återställa eller lägga ihop. Ordet finns i titeln på en lärobok i räkning från 800-talet, *al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr w'al-muqabala,* av den arabiske matematikern al-Kowarizmi. Matematiskt syftar *al-jabr w'al-muqabala* på de operationer som man brukar använda för att lösa ekvationer och som går ut på att få x ensamt genom att lägga till eller dra ifrån lika mycket på båda leden av en ekvation.

Exempel: $x - 3 = 7$

al-jabr: $(x - 3) + 3 = 7 + 3$

$x = 10$

Exempel: $x + 3 = 8$

al-muqabal: $(x + 3) - 3 = 7 - 3$

$x = 4$

al-Kowarizmi beskriver lösningen av ett problem m.h.a ett räkneschema, *algoritm*. Han var dock inte först med att beskriva lösningar på detta sätt. Metoden var nära 3000 år gammal och var vanlig i de gamla högkulturerna i Egypten, Babylonien, Indien och Kina. al-Kowarizmis skrev sin lärobok för att den skulle vara praktiskt användbar för människor som sysslade med handel, sjöfart, bygg, osv (Dahl, 1996). Denna algoritm kallar vi i detta arbete för *balansmetoden*, en benämning som används ofta i läroböcker i matematik.

Palm (2008) skriver att algebra för matematik är vad grammatik är för språk. Utan en god kunskap i grammatik kan man aldrig bli riktigt duktig på ett främmande språk, varken muntligt eller skriftligt. Visst kan man göra sig förstådd, men då handlar det mer om enklare sammanhang och oftast muntligt. I matematik är det samma sak - utan gedigna kunskaper i algebra kommer man aldrig att få tillgång till de kraftfulla verktyg den kan erbjuda som hjälp vid problemlösning och djupare matematisk förståelse. Detta är något som även Hudson och Miller (2006) menar:

> “Teaching students to think algebraically provides them a problem-solving tool for life.”
> (Hudson & Miller, 2006, s 484).

Det algebraiska språket är ett standardverktyg för att precist hantera tal och funktioner. Den är även en grund för vidare studier. Detta språk utgör dessutom ett verktyg för tänkande, och möjliggör för eleven att upptäcka enkelhet och struktur i komplexa sammanhang och generalitet ur det enskilda fallet. Att lära sig algebra är en lång, men också viktig process i en elevs matematiska utveckling (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 1997).

Skolmatematikens hörnstenar är aritmetik och geometri. För många är algebra synonymt med bokstavsräkning, vilket i sig kan tolkas som ren procedurinriktad inställning. Man *räknar* med bokstäver istället för enbart med siffror. Bokstavssymbolerna är ”det nya” synliga skillnaden mellan algebran och aritmetiken för eleverna. Siffror är också symboler, men eleverna refererar siffror till endast tal. Användningen av bokstavssymboler är det synliga beviset på att det handlar om algebra. I **skolalgebran** går det att ange fyra olika sammanhang där bokstavssymboler används, vad de står för och vilken matematisk aktivitet de uppmanar till (se fig 1) (Usiskin, 1999). Algebra går att se som:

Figur 1 (Usiskin, 1999)

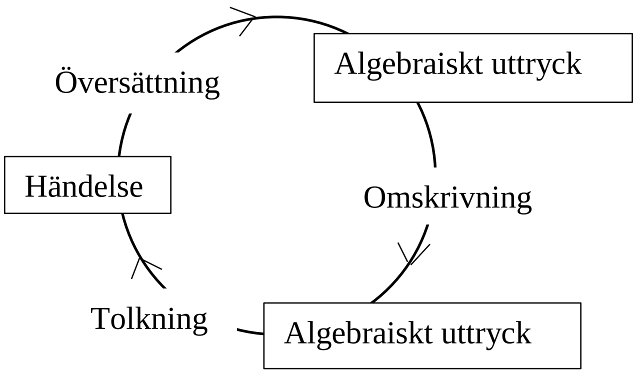
Algebra som	*Bokstavssymbol som*	*Aktivitet*
a) Problemlösningsverktyg	Obekant, konstant	Lösa, förenkla
b) Generaliserad aritmetik	Mönsterbeskrivande	Översätta, generalisera
c) Studium av relationer	Variabel, parameter	Relatera, göra grafer

d) Studium av strukturer	Godtyckliga symboler	Omskriva, motivera

Som lärare är det viktigt att i undervisningen hålla isär dessa aspekter.

När man arbetar algebraiskt är det nödvändigt att kunna hantera tre olika faser av beräkningar. Dessa tre faser är *översättning*, *omskrivning* och *tolkning*. Detta arbete med algebran kallas för den *algebraiska cykeln* (se fig 2 nedan):

Fig 2 (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 1997)



Ett problem beskrivs ofta med vanligt språk, ibland tillsammans med en bild (här händelse). Genom översättning i fas 1 kan man få ett matematiskt symboluttryck, som kan bearbetas med algebraisk omskrivning (även kallad *manipulering*) i fas 2 (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 1997). Detta innebär att eleven ska förstå problemet i det första steget, och sedan formulera problemet till en matematisk modell i steg. Med algebrans hjälp ska eleven på detta sätt finna en lösning till problemet eller en beskrivning av situationen genom att i fas 3 tolka det symboluttryck man erhållit till vanligt språk (eller bild) (De Lange, 2006). När eleven hanterar alla dessa tre faser blir hens kunskaper i algebra funktionella, d v s användbara vid problemlösning. Varje fas har även sin speciella problematik, men alla tre handlar om att på något sätt översätta. Översättningen kan vara från ord eller bild till symboluttryck, från ett symboluttryck till ett annat, från ett symboluttryck till ord eller bild, osv. Ingen av dessa tre faser är viktigare än någon annan. Om någon av faserna fallerar är de andra oanvändbara. I skolan används mycket tid åt omskrivningar och betydligt mindre åt översättning och tolkning. På detta sätt kan algebra bli ensidig och monoton; något man gör mekaniskt (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 1997).

3.3 Förmågor

Målen för alla gymnasiekurser i matematik uttrycks som sju olika **förmågor.** Dessa är inte kopplade till något specifikt matematiskt innehåll, de är på det sättet generella. Förmågorna utvecklas genom att ett specifikt innehåll bearbetas. De förmågor som uttrycks i målen är: begreppsförmåga, procedurförmåga, problemlösningsförmåga, modelleringsförmåga, resonemangsförmåga, kommunikationsförmåga och relevansförmåga (Skolverket, 2019).

3.3.1 Begreppsförmåga

Begreppsförmåga innebär att eleven ska kunna använda begrepp (definitioner och deras egenskaper) och veta varför begreppen är viktiga, i vilka situationer de är användbara (hur begreppen används) och hur olika representationer (ord, symboler, bilder och animationer) kan vara användbara för olika syften. Sambanden mellan begreppen, d.v.s. relationer mellan olika begrepp, gör att matematiken formar en helhet. Nya begrepp knyts till och fördjupar kunskapen om redan bekanta begrepp (Skolverket, 2019).

3.3.2 Procedurförmåga

Procedurförmåga innebär att eleven ska kunna tillämpa olika matematiska procedurer och rutiner så att säkerhet, precision och effektivitet stärks. Här ingår att kunna lösa uppgifter av standardkaraktär (rutinuppgifter). Även hantering av digitala verktyg samt val av en lämplig procedur; i form av algoritm, ingår i denna förmåga (Skolverket, 2019).

3.3.3 Problemlösningsförmåga

Ett mål med undervisningen är att ge eleverna förmåga att lösa matematiska problem. Här innebär problemlösningsförmågan att eleven ska kunna analysera och tolka problem, vilket även inkluderar ett medvetet användande av problemlösningsstrategier (förenklingar, lämpliga beteckningar, ändra förutsättningar). I denna förmåga ska eleven kunna värdera sitt resonemang och resultat (Skolverket, 2019).

Problemlösning kan även ses som ett medel för att utveckla övriga matematiska förmågor. Genom att arbeta med lösningsstrategier kan processen med problemlösning lättare systematiseras. Eleverna bör ges förutsättningar för metakognitiva reflektioner, som t ex tänka högt, söka alternativa lösningar, diskutera och värdera lösningar, metoder, strategier och resultat, för att på så sätt utveckla sin problemlösningsförmåga (Skolverket, 2019).

3.3.4 Modelleringsförmåga

Modelleringsförmåga innebär att eleven ska kunna formulera en matematisk beskrivning utifrån en realistisk situation. En realistisk situation kan t ex vara problem eller uppgift inom karaktärsämnen, privatekonomi eller samhällslivet. Här handlar det om att själv utforma en koppling i form av en modell snarare än att använda färdigformulerade modeller. I de fall där modellen redan är färdig innebär modelleringsförmågan att kunna använda modellens egenskaper för att lösa ett matematiskt problem eller en standarduppgift. Denna förmåga innebär även att eleven ska kunna tolka resultatets relation till den verklighetssituation man hade från början och utvärdera modellens egenskaper och begränsningar i denna situation (Skolverket, 2019).

3.3.5 Resonemangsförmåga

Resonemangsförmåga innebär att eleven ska kunna föra matematiska resonemang som involverar matematiska begrepp och metoder samt utgör lösningar på problem och modelleringssituationer. Resonemang innefattar att t ex testa, föreslå, förutsäga, gissa, ifrågasätta, förklara, finna mönster, generalisera eller argumentera, formulera och allmänt undersöka hypoteser samt genomföra bevis i tal och skrift. Eleven ska även inse skillnader mellan gissningar och välgrundade påståenden (Skolverket, 2019).

3.3.6 Kommunikationsförmåga

Kommunikationsförmåga är inte bara att kunna kommunicera m.h.a. termer, symboler, tabeller och grafer, utan även m.h.a. ord, bilder, animationer, ritningar, gestaltningar och modeller. Eleven ska kunna anpassa sin kommunikation till sammanhanget (Skolverket, 2019).

3.3.7 Relevansförmåga

Relevansförmåga innebär att eleven ska kunna sätta in matematiken i ett större sammanhang. Denna förmåga utvecklas i arbete med matematiska problem som har betydelse för privatekonomi, samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen (karaktärsämnen). Undervisningen har möjlighet att stötta utvecklingen av förmåga genom att synliggöra matematiken i ett yrkesarbete (Skolverket, 2019).

4. Tidigare forskning

4.1 Vad säger forskning om vilka faktorer kan leda till matematiksvårigheter

Forskare skiljer på *yttre* och *inre* villkor som påverkar en elevs matematikutveckling (Engvall, 2013; Hattie, 2008; Säljö, 2000; Chapin & O'Connor, 2007).

Till de *yttre* villkoren hör:

- elevernas identitet: genus, etnicitet, socioekonomisk status;
- undervisningen (eller sättet att organisera undervisningen). Här menas klassrumskultur, normer, klimat och språkanvändning och relationer elev – lärare.

Till de *inre* villkoren hör:

- kognitiva villkor (tänkandet, intelligensen, minnet);
- icke-kognitiva villkor som motivation och attityd.

Inre villkor kan vara ärftliga (Kaufmann, et al., 2013) och de är inneboende hos eleven: intelligens, arbetsminne, långtidsminne, exekutiva funktioner (planerande förmåga), motivation och attityder. Yttre och inre villkor påverkar varandra.

Istället för att säga *matematiksvårigheter* använder Engström (2015) termen *låga prestationer i matematik* för att beskriva elever som inte får godkänt betyg i matematik. Det är en neutral term eftersom i den ligger inte några orsaker till en elevs låga prestationer och inte tillskriver eleven några egenskaper. Engström (2015) är kritisk till det faktum att skolan sjukdomsförklarar avvikande elever. Han menar att om vissa elever har en långsam räkneutveckling ska dessa mötas med pedagogiska åtgärder och inte med medicinska åtgärder.

Vi kommer dock i detta arbete att använda termen **matematiksvårigheter** som en samlingsterm för alla sorters problem i matematik. Matematiksvårigheter som fenomen går inte att behandla som strikt ämnesproblem. Med tanke på både yttre och inre villkor ska vi framförallt titta på följande orsaker till elevernas matematiksvårigheter: socioekonomisk tillhörighet, matematikångest, undermålig undervisning och kognitiva nedsättningar.

Hudson och Miller (2006) skriver att forskningen inom kognitiv vetenskap har definierat tre kunskapsområden inom matematik: konceptuell kunskap, procedurell kunskap och **deklarativ kunskap.** Till dessa tre tillkommer även det fjärde kunskapsområde – problemlösning. Vad som anses vara ett problem är individuellt utifrån elevernas erfarenheter och den kunskapsnivå som elever befinner sig. Konceptuell kunskap står för begreppskunskap eller

begreppsförståelse. Procedurell kunskap är en analys av vilka olika steg och i vilken ordning som är nödvändiga att genomföra för att lösa ett specifikt problem. Procedurell kunskap och konceptuell kunskap utvecklas växelvis och är knutna till varandra (Hudson & Miller, 2006).
Deklarativ kunskap kan beskrivas som kunskap som hämtas direkt från minnet utan att tveka. Man kan någonting med flyt. Man kan läsa av klockan snabbt, automatisera talkombinationer, multiplikationstabeller, veta hur mycket är femkrona värd osv. Deklarativ kunskap används ofta utanför skolans värld. Hudson och Miller (2006) menar att det är först när eleverna förstått begrepp och lärt sig procedurer som är kopplade till begreppet som det är dags att utveckla den deklarativa kunskapen. Det är oftast just deklarativ kunskap som eleverna i matematiksvårigheter har problem med: att hämta kunskaper från långtidsminnet, de automatiserade kunskaperna har inte automatiserats.

4.1.1 Socioekonomisk tillhörighet (SES)

Barnen från låginkomstfamiljer börjar skolan med svagare matematikkunskaper än barn från familjer med mer välbeställda bakgrunder. Detta ligger till grund till svaga matematiska kunskaper senare i grundskolan (Rittle-Johnson et al., 2016). Ramaa (2015) menar att barn från familjer med mer välbeställda bakgrunder utvecklar ofta matematikkunskaper på ett snabbare sätt och deras utvecklingsbanor är inte samma som för barn från låginkomstfamiljer. Hög frånvaro, problematiska hemförhållanden och föräldrarnas utbildning spelar roll för elevernas matematikutveckling. Högre socioekonomi, föräldrarnas högre utbildningsbakgrund samt kulturellt kapital påverkar eleverna så att de presterar bättre i skolan (Woolfolk & Karlberg, 2015). Föräldrarnas utbildningsnivå och inkomst samt deras engagemang i barnens skolgång har betydelse för elevernas skolresultat. Svag självbild och inlärd hjälplöshet kopplas till låg socioekonomisk status (Woolfolk & Karlberg, 2015).
Å andra sidan kan man nämna att i Brasilien lär sig barn som säljer godis utan att någonsin ha gått i skolan – sofistikerad matematik så att de kan köpa från grossister, sälja och göra vinst. Det är ett exempel på att kultur och social kontext formar vad och hur barn lär sig om världen (Woolfolk & Karlberg, 2015).

4.1.2 Matematikångest

När det gäller misslyckanden i skolan kan *ångest* vara både orsak och verkan – elever presterar dåligt eftersom de känner ångest, och deras dåliga resultat ökar ångesten (Woolfolk & Karlberg, 2015). Matematik antas vanligtvis utlösa starkare känslomässiga reaktioner och särskilt ångest än de flesta andra akademiska ämnen, därför forskas det specifikt om matematikångest. Matematikångest har definierats som "en känsla av spänning och obehag som påverkar hanteringen av tal och lösningen av matematiska problem i vanliga liv och akademiska situationer" (Dowker, Sarkar, & Looi, 2016). Det är oklart i vilken utsträckning matematikångest orsakar matematiska svårigheter och i vilken utsträckning matematiska svårigheter och misslyckanden orsakar matematikångest. Matematikångest kan påverka elevens prestationer när eleven arbetar med uppgifterna som kräver arbetsminnet. Studier visar att ångesten blockerar arbetsminne, särskilt inom aritmetiken, när eleven måste hålla flera tal i minnet (Dowker et al., 2016). Uppmärksamheten riktas bort från det matematiska problemet. Istället tänker eleven på hur dålig hen är. Ångesten blockerar arbetsminnet så att oavsett vilken kapacitet deras arbetsminne har blir användandet av det väldigt begränsat (Ramirez, Chang, Maloney, Levine, & Beilock, 2015). Elever med högutvecklad matematikångest likställer genomförande av matematiska uppgifter med en kroppslig skada. Ångest uppstår innan, inte under bearbetandet av en uppgift. Därför visar dessa elever redan i tidig ålder mycket av undvikande beteende (Moore, Mc Auley, Allred, & Ashcraft, 2015). Antal elever som har matematikångest ökar med ålder. Större andel av äldre elever har matematikångest. Därutöver uppstår matematikångest oftare hos flickor. Antagligen är det normer som skapar stress (Ramirez et al., 2015).

4.1.3 Undermålig undervisning

Det har gjorts många studier kring hur elever uppfattar bokstavssymboler (variabelbegrepp) i matematiken, d.v.s. *tolkning* i den tidigare nämnda algebraiska cykeln (se bl.a. Radford, 2000; Cañadas, Molina, & del Río, 2018; Quinlan, 1992). I dessa studier har man identifierat fem hierarkiskt ordnade nivåer av elevuppfattningar (Quinlan, 1992):

Nivå 1: Bokstaven ses som ett objekt som saknar mening, eller dess värde fås som bokstavens plats i alfabetet.

Nivå 2: Det är tillräckligt att pröva med **ett** tal istället för bokstaven.

Nivå 3: Det är nödvändigt att pröva med flera tal.

Nivå 4: Man uppfattar bokstaven som representant för en klass av tal. Det räcker att pröva med något av dessa tal.

Nivå 5: Man uppfattar bokstaven som en representant för en klass av tal. Man behöver inte pröva med något av dessa tal.

Många elever har svårt att uppnå de två sista nivåerna (4 och 5), och alltför många befinner sig på nivå 1. Att uppfatta en bokstavssymbol i en ekvation som ett specifikt okänt tal är lättare.

Det är variabelbegreppet som skapar svårigheter. Algebraundervisningen bör fokusera på att för eleverna levandegöra och bygga upp mening i det algebraiska symbolspråket. Dessa motsvarar *översättning* och *tolkning* i den algebraiska cykeln (se fig 2). Ett av huvudmålen i aritmetikundervisningen har varit en god taluppfattning (*number sense*). Motsvarande huvudmål i algebraundervisningen kan vara symbolkänsla (*symbol sense*) (Arcavi, 1994), vilket kan tolkas som förståelse av algebra. God taluppfattning är en nödvändig grund för att symbolkänslan ska utvecklas (Picciotto & Wah, 1993).

Rakes, Valentine, McGatha, & Ronau (2010) studerade 594 olika forskningsstudier om algebraundervisning mellan 1968 och 2008. 82 av dessa studier handlade om interventioner i algebra och hade tillräckligt med data för att kunna räkna ut effektstorlek på förbättring i elevprestationer. 25 studier bland dessa handlade om algebraundervisning mot ökat konceptuell (begreppslig) kunskap och resten handlade om ökat procedurell kunskap. Författaren har konstaterat att även om det har uppmätts positiv effekt i elevprestationer i algebra i studier mot procedurell kunskap så var det statistiskt signifikant att effekten i studier mot konceptuell kunskap var dubbelt så stor. Rakes et al (2010) menar att eleverna kan t ex lära sig uppsättning av procedurer för ekvationslösning på formen $ax + b = c$ men när de möter ekvationerna på formen $ax + b = cx + d$ räcker inte denna uppsättning av procedurer längre och eleverna får problem. Därför menar Rakes et al (2010) att eleverna som enbart har skaffat sig procedurell kunskap kan ”gå vilse” när de utsätts för obekanta situationer och de saknar förmågan att tillämpa viktiga matematiska begrepp i dessa situationer.

Kalder (2012) ställer sig frågan om det är vi matematiklärare som bidrar till att eleverna gör misstag i sina beräkningar. I sin artikel beskriver hon tre sätt som lärare undervisar som kan bidra till negativa konsekvenser för eleven vid senare tillfälle. Första sättet vi lärare gör för att missgynna våra elever är olika minnesregler och generaliseringar, som ofta används för att eleverna ska komma ihåg olika beräkningsmetoder. Kalder (2012) anser att dessa förhindrar eleverna istället. Ett exempel är ordet PAMUDAS som är avsedd att underlätta eleven att räkna i rätt ordning. Bokstäverna står för olika räkneoperationer; PA – parentes, Mu – multiplikation, D – division, A – addition och S – subtraktion. Oftast påpekar läraren att multiplikation och division är likvärdiga, men när eleven väl sitter där med ordet framför sig, så ser den bara att Mu står innan D. Problemet här blir att eleven utför multiplikationen först istället för att betrakta multiplikation och division som likvärdiga och räkna från vänster till höger (Kalder, 2012), t ex. $6/3 \cdot 2$, blir då 1 (istället för 4); eleven räknar multiplikationen först. Däremot stämmer ordningen att addition utföres först innan subtraktion. Dessa två sätt motsäger varandra (multiplikation och division är likvärdiga, men inte addition och subtraktion) (Kalder, 2012). Kalder (2012) beskriver här även när man introducerar eleverna för funktionsbeteckningen $f(x)$ (uttalas f av x) så tror eleverna att de ska utföra räkneoperationen $f \cdot x$ då de lärt sig att $3(2) = 3 \cdot 2$, tal utanför parentes ska multipliceras med tal inne i parentesen. Det andra sättet som läraren missgynnar elever, är *Imprecise directions* vilket kan översättas till oklara instruktioner. Många lärare uppmanar elever att lösa ekvationer av typen $3x + 4 = 25$. Inga specifika instruktioner ges av läraren på hur eleven ska lösa denna typ av ekvation. Eleven uppfattar som att hen ska hitta den saknade roten för att få ekvationen att bli sann. Att ”lösa” problem blir ekvivalent med att hitta roten till en ekvation. Läraren bör istället fråga någonting oväntat som att ”Du har givet $3x + 4 = 25$, vad blir då $x + 1$”, för att eleven ska uppfatta varför det är viktigt att följa givna lösningsinstruktioner. Ett annat exempel är begreppet ”Förenkla”. Om en elev får instruktionen ”Förenkla $\sqrt{12}$”, vad ska hen då göra? Vad vi kan tänkas vilja att eleven svarar är antingen $\sqrt{12}$ eller $2\sqrt{3}$, men mest troligt tror eleven att hen ska svara 3,464. Om vi inte vill att eleven svarar i decimalform, måste vi specificera våra instruktioner till ”Omskriv $\sqrt{12}$ genom att använda överenskomna regler för kvadratrötter” (Kalder, 2012). Det tredje sättet vi lärare missgynnar våra elever anser Kalder (2012) vara *Imprecise language*, vilket kan översättas som *otydligt språk*. Ett par vardagsord som många lärare använder är ”ändra” och ”tar ut varandra”. Ett exempel är att eleven får uttrycket $3x - 4$ och ska ”Ange uttryckets värde då $x = 2$”. Många lärare uppmanar eleven att ”ändra” x:et till 2 och beräkna vad uttrycket blir då. Ingenstans i matematikens lexikon finns begreppet ”ändra”. Om vi istället använder ordet ”substituera” variabeln med 2 så kommer detta löna sig längre fram. Begreppet substitution blir då meningsfullt och kan användas utan tvekan vid lösning av ekvationssystem (Kalder, 2012). Det andra ordet, ”tar ut varandra”, kan eleven tolka som att ingenting blir kvar. Titta på följande exempel ”förenkla uttrycket $\frac{2x}{x}$” får eleven fram svaret 2. Eleven tänker sig att x:en försvinner eftersom de ”tar ut varandra” (ingenting blir kvar). Med samma princip kan då eleven då tänka att uttrycket $\frac{x^2}{x^2(x+1)}$ blir $x + 1$, eftersom x^2 försvinner och inget blir kvar. Kalders (2012) slutsats är att lärarnas slarviga matematiska språk vid tidig ålder kan påverka elevernas matematiska förståelse negativt. Dock poängterar hon att matematiska misstag elimineras inte helt trots att läraren konstant använder korrekt terminologi.

Pedagogiska och didaktiska förutsättningar påverkar elevers möjligheter till matematikutveckling. Flera av forskare påpekar att matematikundervisning på olika stadier fokuserar på metoder och inte på förståelse. Neuman (2013) menar att alla barn under de första åren i livet utvecklar en intuitiv matematikfärdighet men i början av skolstarten möter de mer formaliserad matematik. Engström (2015) menar i sin tur att undervisningen inte stannar upp utan den går vidare hela tiden. Skillnader i prestationer blir snabbt tydliga. En del elever förstår aritmetikens räknelagar fort, automatiserar tabellerna och räknar snabbt i läroboken. Medan andra elever kämpar hårt för att förstå de mest enkla talrelationer och lyckas inte automatisera tabellerna. Det leder till skillnader i motivation, intresse, uthållighet och uppmärksamhet. Enligt Lunde (2011) är det vid övergången från tredje klass till fjärde klass i grundskolan som utvecklingen stagnerar. Det är då matematiken utvidgas och blir mer komplicerad. Även kravet på läskunnighet ökar. Spridningen mellan eleverna i en årskurs ökar för varje år. Engström (2015) menar att i en femteklass kan man möta elever som de facto befinner på en prestationsnivå på allt från årskurs 2 till årskurs 8. Ju längre upp i grundskolan man kommer ju lägre andel av det nya stoffet behärskar eleverna. Man kan tala om en gradvis utslagning av eleverna med svagaste prestationerna. Det handlar om en bristande kognitiv behärskning i ett för dem alltför krävande undervisningsstoff. När de lägst presterande eleverna har kommit till årskurs 9 har de för länge sedan slagits ut från skolans matematikundervisning (Engström, 2015). Samtidigt menar Engström (2015) att variation av elevers prestationer är en del av *naturlig variation av olikheter.*

4.1.4 Kognitiva nedsättningar

Den naturliga variationen beskrivs med en normalfördelningskurva. Exempelvis är det lika naturligt (normalt) att vara 200 cm lång som att vara 155 cm, det är bara *mindre vanligt* att vara så lång eller kort. Angående begåvning, mätt i IQ (intelligenskvot) så är medelvärdet 100 och standardavvikelse 15. Två tredjedelar av alla människor ligger på IQ mellan 85 och 115, vilket kallas för normalbegåvning. I intervallet 70 – 85 talar man om svag begåvning, och under 70 om utvecklingsstörning. Individer med IQ mellan 115 och 130 kallas för högbegåvade och över 130 – särbegåvade. Att ha mycket höga eller mycket låga prestationer i matematik enligt Engström (2015), är mindre vanligt men behöver inte vara onormalt. Den största delen av elever med låga prestationer ligger inom normala variationen, endast en mindre del har *en störning eller en funktionsnedsättning*. En funktionsnedsättning är en nedsättning av fysisk, psykisk eller intellektuell funktionsförmåga.

4.2 Vad säger tidigare forskning om elevernas svårigheter i algebra

Palm (2008) gjorde en fältstudie med 60 elever i kursen Matematik B (motsvarar någon av dagens Matematik 2-kurs) i årskurs 1 på naturvetenskapliga programmet för att se vilka missuppfattningar elever hade i algebra, för att sedan kunna ge några förslag från forskningen och litteratur kring hur lärare kan bemöta och bättre förstå dessa missuppfattningar. Lärarnas undervisningsstil och deras tolkning av elevernas missuppfattningar, delade han in i två teorier; behaviorismen och konstruktivismen. Ur konstruktivistiskt perspektiv kunde elevernas missuppfattningar kategoriseras i *övergeneralisering*, *ytinlärning* och *rena gissningar*. Övergeneralisering innebär att eleverna använder sig av en algebraisk räkneoperation i ett sammanhang där den inte är tillämpbar. Ytinlärning innebär att nytt kunskapsstoff som en elev ska ta till sig måste sättas i relation till den kunskap hen redan besitter. Hittar eleven ingen relation mellan det nya och det gamla måste denna nya kunskap förvaras temporärt i minnet. Så länge denna kunskap befinner sig i denna temporära minnesplats är den ytinlärd och svår att komma ihåg (Palm, 2008). Ett undervisningstips som Palm (2008) gav var att läraren använder sig av motexempel, s.k. *counterexamples*, för att göra eleverna uppmärksamma på olika metoders begränsningar. Ett annat tips som Palm (2008) ger är att konfrontera eleverna med olika uttryck samtidigt och be dem reda ut likheter och skillnader mellan dessa uttryck, samt motivera varför de måste hanteras olika. Dock poängterar Palm (2008) att denna studie inte är något som kan generaliseras då underlaget varit så litet.

Hu, Son och Hodge (2016) undersökte 20 amerikanska och 20 kinesiska matematiklärares tolkningar och svar på elevers felaktiga lösningar på *nollproduktmetoden* vid beräkningar med andragradsekvationer. Båda lärargrupperna fick se ett problem som tillverkats av Ellerton och Clements år 2011 (se rutan nedan) för att testa lärarnas kunskaper om andragradsekvationer. Problemet hade lösts av den fiktiva eleven Amy (se figur nästa sida).

Figur 3 (Hu, Son, & Hodge, 2016)

Students were asked to solve $(x+2)(2x+5)=0$, then to check their answer. One student, Amy, wrote the following (line numbers have been added):

$(x+2)(2x+5)=0$	*Line 1*
$2x^2+5x+4x+10=0$	*Line 2*
$2x^2+9x+10=0$	*Line 3*
$(2x+5)(x+2)=0$	*Line 4*
$(2x+5)=0 \; and \; (x+2)=0$	*Line 5*
$2x=-5 \; and \; x=-2$	*Line 6*
$x=-\frac{5}{2} \; and \; x=-2$	*Line 7*

Check: Put $x=-5/2$ in $(2x+5)$, and put $x=-2$ in $(x+2)$.
Thus, when $x=-5/2$ and $x=-2$, $(2x+5)(x+2)$ is equal to 0×0 which is equal to 0. Since 0 is on the right-hand side of the original equation, it follows that $x=-5/2$ and $x=-2$ are the correct solutions.

Lärarnas uppgift var att analysera och ge respons på vilka fel de såg att eleven Amy gjort. Lärarna skulle även beskriva hur de skulle hjälpa eleven att komma till rätta med sina misstag. Därefter analyserades lärarnas svar både kvantitativt (hur många fel de hittade) och kvalitativt (hur eleven skulle behjälpas). Undersökningen resulterade i att de kinesiska lärarna upptäckte fler felaktigheter på studentens lösning än de amerikanska lärarna. Båda lärargrupperna ansåg att elevens fel var av konceptuell karaktär, men endast några av de kinesiska lärarna gav exempel på vilken typ av hjälp eleven borde få. Ingen av de amerikanska lärarna gav någon negativ utvärdering av Amys lösning. Ingen av de kinesiska lärarna gav någon positiv feedback på Amys lösning. De amerikanska lärarna var mer toleranta på elevens misstag än de kinesiska. Som slutsats drogs att fler lärare måste tränas i att hitta felaktigheter i elevers lösningar, då det är ur dessa felaktigheter som eleverna ska lära sig av. Vidare slutsats var att om elever ska lära sig något av sina misstag måste de veta varför och hur de gjort misstaget, därför måste blivande lärare tränas i att ge respons på felaktigheter på olika sätt (Hu, Son, & Hodge, 2016). Dessa forskare gav inga konkreta tips på hur elevers misstag kan behjälpas.

Träff & Samuelsson (2013) har undersökt fel som eleverna gör vid utförandet av de aritmetiska beräkningarna och grupperat fel som eleverna begår i huvudsakligen fem olika typer:

- Mindre räknefel (när eleven tänker sex plus sju men räknar fel och får svar 14).
- Fel räkneoperation (istället för 7 + 5 räknar eleven 7 – 5 = 2).
- Subtrahera mindre från det större oavsett position (eleven räknar 51 – 49 = 18).
- Växlingsfel (olika typer av växlingsfel).
- Orimliga resonemang.

Olteanu (2003) i sin longitudinella studie kom fram till att en av orsakerna till elevernas svårigheter i algebra är bland annat begränsad uppfattning av negativa tal, minustecknets och likhetstecknets betydelse. Detta kan leda till att elever har svårt med att förenkla uttryck. Exempelvis, 63 % av elever i studien svarar fel när de behöver ange motsatta uttrycket till uttrycket (3 + x). Eleverna svarar (– 3 + x) eller (3 – x). Olteanu (2003) menar att felet kan orsakas av att eleverna förmodligen inte ser uttrycket (3 + x) som ett algebraiskt objekt med en viss struktur, utan som en operation. De ser 3 och x för sig och de skriver det motsatta enbart för ett av dem. Ett annat exempel, när eleverna löser t ex ekvationen $4x - 12 = 0$ på följande sätt: $x = 12 = 12/4 = 3$. Trots att svaret är rätt visar lösningen att eleven inte har förstått innebörden i likhetstecken och vad det innebär att ”beräkna” och ”lösa”. Även detta kan i fortsättningen leda till missuppfattningar i ”förenkla uttrycket” och ”lösa ekvationen”.
Även Bentley och Bentley (2016) menar att begreppet likhet är centralt inom algebran.
När eleverna får en ekvation $3x + 5 = 5x - 1$ tror de att det är något uttryck som har blivit förenklat fel. Enligt Bentley och Bentley (2016) är den *dynamiska* uppfattningen av likhetstecknet, ett *blir*-tänkande orsaken till svårigheten. Eleverna tror att den beräkning som görs i vänstra ledet ska *bli* det som står i det högra, ett s.k. ”operation = svar”– tänkande. Siffrorna är till höger, där operationen av talet sker, och svaret är på höger sida. Likhetstecknet tolkas då som ”totala” mängden (McNeil & Alibali, 2005). Denna dynamiska uppfattningen skapar enligt Bentley och Bentley (2016) en blockering, så att vissa ekvationer inte kan lösas. Lärare måste då jobba för att eleven skapar sig den *statiska* uppfattningen, att det ska vara lika mycket i det vänstra ledet som i det högra ledet. Det är nödvändigt att eleven kan tolka likhetstecknet som *är lika med* eller *är lika mycket som*, d.v.s. att vänster och höger led i en ekvation står för lika stora tal. Likheten kan läsas både från vänster till höger och tvärtom, att båda led ”finns” samtidigt och är likvärdiga, ekvivalenta (Vincent, Bardini, Pierce, & Pearn, 2015).

Problemuppgifter är oftast baserad på en text, ett s.k. lästal. Texten kan variera i längd och ge olika mycket information till uppgiftslösaren. Att använda sig av algebriskt resonemang är tänkt att vara ett verktyg i dessa sammanhang. Många forskare, däribland Powell och Fuchs (2014) har sett att det finns ett samband i algebraisk resonemang mellan elever som kämpar med svårigheter i generell räkning och elever som kämpar med svårigheter att lösa lästal (*word problem difficulty*). Sambandet Powell och Fuchs (2014) såg var att elever som har svårigheter med lästal, oavsett om de har svårighter med generell räkning eller inte, svarade rätt på färre uppgifter där det krävdes algebraisk resonemang än elever som inte har svårigheter med lästal.

5. Metod

Syftet med denna studie är att analysera och beskriva vilka feltyper som elever i åk 1 på gymnasiet gör vid algebraberäkningar. Vi har valt att göra detta genom att använda oss av kvalitativ metod för att få svar på våra forskningsfrågor. Kvalitativa studier enligt Bryman, (2018) bygger på en forskningsstrategi där tonvikten ligger på ord än på kvantifiering vid insamling och analys av data. Till vår studie har vi valt *kategorisering* som enligt Fejes och Thornberg (2015) är en av huvudmetoder i kvalitativ analys. Datamaterialet kodas i kategorier. Genom att analysera likheter och skillnader reduceras och struktureras den stora datamassan till ett antal kategorier.

Vi har gjort en empirisk studie av algebraprov som första årets gymnasieelever från två olika gymnasieskolor har skrivit. I dessa prov har vi valt att undersöka de mest typiska standarduppgifter inom algebra som ingår i både kurser Matematik 1b och Matematik 1a. Dessa standarduppgifter handlar om att lösa ekvationer, förenkla algebraiska uttryck, räkna ut värdet av uttrycket samt lösa problem med hjälp av algebra. Därefter har vi sammanställt, tolkat och analyserat felsvaren. Vidare har vi bearbetat våra resultat och kategoriserat felsvaren till olika feltyper.

5.1 Urval

För att samla det empiriska materialet i vår studie använde vi oss av bekvämlighetsurval eller icke slumpmässigt urval (Bryman, 2018). Med det menas att man tar det man har tillgång till. Var och en av oss kontaktade var sin gymnasieskola i närheten. En av skolorna låg i Södermanland och är en kommunal gymnasieskola med ca 800 elever. Den andra gymnasieskolan som vi haft access till låg i Stockholms län och är en fristående yrkesgymnasieskola med VVS- och fastighetsprogrammet, ca 140 elever. Totalt har vi fått tillgång till 80 prov i algebra, som utförts av elever i åk 1 på samhällsvetenskapsprogrammet och yrkesprogrammet under år 2017, 2018 och 2019.

I utbildningen på samhällsvetenskapsprogrammet ingår kursen Matematik 1b, medan eleverna på yrkesprogrammet läser kursen Matematik 1a. Dessa två kursers centrala innehåll skiljer lite från varandra, vilket gör att Ma1b elevernas prov ser aningen annorlunda ut än Ma1a elevernas. Vissa uppgiftstyper, såsom parentesmultiplikation, anses vara grundläggande kunskaper i Ma1b men är mer avancerade kunskaper i Ma1a.

För att kunna besvara vår forskningsfråga om feltyper inom algebra gjorde vi ett urval av standarduppgifter som var gemensamma för både Ma1a och Ma1b. I urvalet ingår uppgifter att *lösa ekvationer*, *förenkla algebraiska uttryck*, *räkna ut värde av ett uttryck* samt *problemlösning*. Svårighetsgraden i uppgifterna varierar från enkla till mer komplexa, se Bilaga 1. Facit till alla uppgifter finns i Bilaga 2. Elevlösningar till dessa uppgifter granskades tills mättnad uppstod. Med mättnad ansågs att inga fler nya typer av fel upptäcktes.

5.2 Genomförande

Vi använde oss av följande steg i vår studie:

1. Datainsamling: insamling av elevprov samt avidentifiering av dessa.
2. Samla alla felaktiga lösningar vi hittar i tabeller. Vi har gjort tabeller för varje delmoment, som lösa ekvationer, förenkla uttryck, räkna ut värdet av uttrycket och problemlösning. Vi har fört in valda provuppgifter i respektive tabell och fyllt i de felaktiga lösningarna.
3. Analysera felen för att hitta samband mellan dessa och kategorisera felen därefter. Det stod snart klart att elevfelen följde ett mönster där vi kunde urskilja sex olika feltyper oavsett om uppgiften handlade om att lösa ekvationer, förenkla uttryck, räkna ut uttrycks värde eller lösa ett problem.
4. Tillverka nya tabeller för att redovisa sex feltyper. Vi gjorde nya tabeller där vi hade sortrerat elevlösningar enligt feltyperna i underkategorier som vi fyllde på med elevexempel. Denna process pågick tills vi inte hittade några nya typer av fel och mättnad uppstod.

5.3 Analys

Som metodansats använde vi kvalitativ textanalys (Fejes & Thornberg, 2015). Enligt Widén (2015) följer kvalitativ textanalys en lång historisk tolkningstradition kallad *hermeneutik*. Själva ordet hermeneutik kommer från grekiskan och betyder ungefär att tolka, utlägga, förklara. Vi har använt en induktiv forskningsansats (Widén, 2015), vi drar generella slutsatser utifrån en mängd enskilda fall.

Vi har studerat samt tolkat elevlösningar för varje delmoment – lösa ekvationer, förenkla uttryck, räkna ut värdet av uttrycket och problemlösning. Utifrån vår tolkning av elevsvaren har vi kommit fram till sex olika kategorier av feltyper. Dessa kategorier är: 1. förståelsefel eller fel i begreppslig uppfattning, 2. procedurfel, 3. modelleringsfel/problemlösningsfel, 4. resonemangsfel, 5. redovisningsfel eller kommunikationsfel och 6. övriga fel.

5.4 Forskningsetiska överväganden

Enligt Hammar Chiriac & Einarsson, (2013) är forskning viktig och nödvändig för såväl individers som samhällens utveckling. Samhället har ett berättigat krav på att forskning bedrivs. Det kallas *forskningskrav*. Å andra sidan har samhällets medlemmar ett berättigat krav på skydd mot otillbörlig insyn i sina livsförhållanden, s.k. *individskyddskravet*. Dessa två krav måste alltid vägas mot varandra. God forskningsetik innebär att det finns etiska krav i anslutning till varje forskningsstudie och till varje individ som ingår i studien. Vetenskapsrådets forskningsetiska principer handlar om hur forskaren upprätthåller individskyddskravet som består av fyra allmänna huvudkrav: *informationskrav*, *samtyckeskrav*, *konfidentialitetskrav* samt *nyttjandekrav* (Vetenskapsrådet, 2010).

5.4.1 Informationskrav

Vi har presenterat vårt syfte med studien för alla elevers vars prov vi använt (Bryman, 2018).

5.4.2 Samtyckeskrav

Vårt arbete innehåller inga frågor av privat eller etiskt känslig natur och vi har fått godkännande av skolledning på respektive skola att använda elevernas prov. Dessutom är alla elever som ingår i studien över 15 år, vilket gör att vi inte behövt få föräldrarnas godkännande av att använda deras barns prov (Vetenskapsrådet, 2017).

5.4.3 Konfidentialitetskravet

All vårt datainsamlingsmaterial har vi förvarat på ett sådant sätt att obehöriga inte kommit åt dem (Hammar Chiriac & Einarsson, 2013).

5.4.3.1 Sekretess och tystnadsplikt

Allmänna handlingar kan i vissa fall beläggas med sekretess för att skydda enskild individ inom forskning (Vetenskapsrådet, 2017). Vi har använt oss av redan insamlade data i form av prov i matematik som eleverna gjort under läsåret 2017/2018 och läsåret 2018/2019. Det faller inte under sekretesslagen. Om en uppgift är belagd med sekretess gäller även tystnadsplikt. Denna studie bygger inte på sekretessbelagda uppgifter. Tystnadsplikten är därmed inte aktuell.

5.4.3.2 Anonymitet och integritet

Provmaterialet som vi tittat på har anonymiserats. Det går inte att följa en elevs eventuella interventioner om sådant skulle ha gjorts. Elevernas personliga integritet ska skyddas. Feltyperna som angetts i resultaten går inte att spåra till någon specifik individ, utan är mer av generell karaktär.

5.4.4 Nyttjandekravet

All vårt material har endast använts i forskningssyfte (Bryman, 2018).

6. Resultatredovisning

Här kommer resultaten att presenteras utifrån följande sex feltyper som vi kunde fastställa i vårt arbete med kategorisering:

1. Förståelsefel eller fel i begreppslig uppfattning
2. Procedurfel
3. Modelleringsfel eller problemlösningsfel
4. Resonemangsfel
5. Redovisningsfel eller kommunikationsfel
6. Övriga fel

Vi har valt att dela in varje feltyp i underkategorier för att nyansera feltyperna ytterligare. Varje underkategori illustreras med fler autentiska elevexempel. Vi redovisar flera olika exempel för att illustrera att feltippning förekommer i olika typer av algebrauppgifter. Vi har bestämt oss för att redovisa varje elevlösning i sin helhet. Detta för att se hur ett eller annat misstag påverkar hela uppgiften. Vi har valt att behålla ursprungliga elevformuleringar och lösningar utan att förfina eller tillrättalägga dessa även om det matematiska språket inte alltid är det korrekta eller om uppgiften inte är slutförd.

I vissa fall har eleven gjort flera olika fel vid lösning av en och samma uppgift. I dessa fall har vi gjort en prioritering och bestämt vilket fel som är det primära. Vi nämner det primära felet först i kommentarfältet och beskriver därefter de övriga misstagen.

Provuppgifter har olika svårighetsgrader. Inom Förenkla uttryck t ex finns det något enklare uppgifter som $2a + 3b + a - 8b$ och mer komplexa uttryck som $3(x - 2y) - 4(y - 2x)$. Vi redovisar därför med flera elevexempel att en och samma feltyp kan ta form på många olika sätt.

1. Förståelsefel eller fel i begreppslig uppfattning

Algebra kännetecknas av abstrakt tänkande. Variablernas betydelse bestäms av sammanhanget. *En ekvation*, t ex $2x + 6 = 14$ innehåller alltid ett likhetstecken och en *obekant* som betecknas med *en variabel*, t ex x eller någon annan *bokstav*. $2x$ kallas för *variabelterm* och 6 kallas för *konstantterm* eller *sifferterm.* Man säger att $2x + 6$ står i vänster led, VL av ekvationen då det uttrycket står till vänster av likhetstecknet och 14 står i höger led, HL. När man löser en ekvation vill man få variabeln ensam i ena ledet. Man får addera, subtrahera, multiplicera eller dividera med vilket tal som helst om man gör likadant i båda leden (detta kallas för *balansmetod*).

$$2x + 6 = 14$$

$$2x + 6 – 6 = 14 – 6$$

$$2x = 8$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{4}$$

$$x = 2$$

I en ekvation står variabeln för *ett specifikt okänt tal.*

$5x$ och $2y + 3$ är exempel på *uttryck.* Ett algebraiskt uttryck innehåller minst en variabel. I ett algebraiskt uttryck finns bara ett led och inget likhetstecken. $2y$ innebär i algebran $2 \cdot y$. Ett multiplikationstecken mellan ett tal (kallas för koefficient) och en variabel, y utelämnas. Här är variabeln *en generell talbeteckning* och kan representera flera tal.

De flesta förståelsefel som vi har hittat handlar om att eleverna saknar förståelse att variabler kan ha olika betydelser inom algebra.

1a. Eleven adderar koefficienterna för variabeltermerna med de konstanta termerna (siffertermerna). Det innebär att eleven räknar enbart med tal och ignorerar variablerna.

Tabell 1

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
1	Vid lösning av en ekvation kommer eleven till **$15 + 4x$**	$19x$	Eleven adderar 15 som är en konstantterm med 4 som är variabelkoefficient och skriver därefter x efter 19.

Forts Tabell 1

2	Lös ekvationen ***3x + 16 = 5x – 24***	$3x + 16 - 3 = 5x - 24 - 3$ $x + 16 = 2x - 24$	Eleven räknar $3x - 3 = x$ i VL och $5x - 3 = 2x$ i HL.
3	Lös ekvationen ***7x + 15 − 2x = 60***	$15 - 9x = 60$ $15 - 9x - 9 = 60 - 9$ $15 - x = 51$ $\frac{15}{15} = \frac{51}{15} = x$	Eleven räknar $7x - 2x = -9x$ och $-9x - 9 = -x$. Eleven räknar 9 – 9 = 0 men $-x$ är kvar. Vidare använder eleven fel räknesätt, division istället för addition.
4	Förenkla uttrycket ***14x – 3(x + 6)***	$14 - 3 + 6x$	Eleven adderar $x + 6 = 6x$. Dessutom tappar eleven x vid *14* samt missar att *3* ska multipliceras in i parentesen enligt den distributiva lagen.

Det är ganska vanligt att eleverna gör flera olika typer av fel i en och samma uppgift. Eleven i Tabell 1, rad 3 gör även två andra typer av fel. Felet $7x - 2x = -9x$ kommer att beskrivas senare i kategori 2c (*eleven gör fel i beräkningar med negativa tal*) och *användning av fel räknesätt* beskrivs som feltyp 2a.

Det primära felet inom kategorin 1a kan presenteras bäst som: $15 + 4x = 19x$, $3x - 3 = x$, $5x - 3 = 2x$, $-9x - 9 = -x$, och $x + 6 = 6x$. Felet förekommer både i ekvationslösning och vid förenkling av uttryck. Samma feltyp kan ses också i t ex Tabell 3, rad 6, 8 och 10, men där är det något annat fel som är primärt.

Alla fel i Tabell 1 följer samma mönster men det framträder på olika sätt. Därför tycker vi att det är viktigt att redovisa alla fyra. I beräkningar $15 + 4x = 19x$, *rad 1* och $5x - 3 = 2x$, *rad 2* räknar elever 15 + 4 = 19 och 5 – 3 = 2 och skriver x dit därefter. Även beräkning $3x - 3 = x$ i rad 2 är av samma sort, eleven räknar 3 – 3 = 0. Eleven menar att noll inte behöver skrivas men x är kvar. Av beräkningen $x + 6 = 6x$ framgår att eleven uppfattar att x inte har någon koefficient alls, d v s noll. Då räknar eleven 0 + 6 = 6 och sedan ska x skrivas dit. Även eleven i rad 3 som räknar $-9x - 9 = -x$ tänker på samma sätt, men räknar fel och menar egentligen $9 - 9 = 0$, men $-x$ är kvar.

1b. Eleven adderar koefficienterna för olika variabler.

Tabell 2

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
5	Förenkla uttrycket $\boldsymbol{2a + 3b + a - 8b}$	$6a - 8b$	Eleven räknar $2a + 3b + a = 6a$.

Eleven i Tabell 2, rad 5 visar förståelse för att olika variabler, a och b inte ska blandas, vilket framgår av elevens svar, 6a – 8b. Trots detta räknar eleven $2a + 3b + a = 6a$.

1c. Eleven tolkar fel vad som krävs i uppgiften, t ex förenklar uttryck istället för att lösa ekvation. Felet förekommer oftast i ekvationer med variabler i båda led. Eleverna hanterar då VL och HL felaktigt. De lägger ihop (adderar eller subtraherar) variabelterm från VL med variabelterm från HL. Siffertermerna manipuleras på samma sätt. Därmed uppfattar eleven att uttrycket är förenklat och uppgiften är löst.

Tabell 3

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
6	Lös ekvationen $\boldsymbol{6x - 5 = 19 - 2x}$	$6x - 2x = 4x$ $5 + 19 = 24$ $24 + 4x = 28x$ Svar: $28x$	Eleven tolkar att uppgiften är att förenkla uttryck. HL och VL i ekvationen hanteras felaktigt. Eleven adderar konstanttermen med variabeltermen $24 + 4x = 28x$.
7		$4x - 14$	Eleven tolkar att uppgiften är att förenkla uttryck och räknar $6x - 2x = 4x$ och $19 - 5 = 14$. HL och VL i ekvationen hanteras felaktigt.
8	Lös ekvationen $\boldsymbol{5x - 24 = 3x + 16}$	$5x - 3x = 2x$ $24 + 16 = 40$ $40 + 2x = 42x$ *Svar: 42x*	Eleven tolkar att uppgiften är att förenkla uttryck. Eleven adderar konstanttermen med variabeltermen $40 + 2x = 42x$.
9	Lös ekvationen $\boldsymbol{5x - 24 = 3x + 16}$	$3x + 5x = 8x$ $16 + 24 = 40$ $8x - 40$	Eleven tolkar att uppgiften är att förenkla uttryck. HL och VL i ekvationen hanteras felaktigt.

Forts Tabell 3

10	Lös ekvationen **$5x – 24 = 3x + 16$**	$8x – 8$	Eleven tolkar att uppgiften är att förenkla uttryck. Eleven räknar $5x + 3x = 8x$ och $– 24 – 8 = 16$. HL och VL i ekvationen hanteras felaktigt.
11	Lös ekvationen **$2(2x + 1) = 3(x – 3)$**	$2x + 2 = 3x – 9$ $5x – 11$	Eleven tolkar att uppgiften är att förenkla uttryck. Eleven multiplicerar inte 2 med $2x$. HL och VL i ekvationen hanteras felaktigt.
12	Lös ekvationen $\boldsymbol{4 + \frac{x}{4} = 5 - \frac{x}{5}}$	$4 + 5 = 9$ $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} = \frac{x}{9}$ $9 - \frac{x}{9}$	Eleven tolkar att uppgiften är att förenkla uttryck, gör fel vid addition av bråk och hanterar HL och VL i ekvationen felaktigt.
13	Räkna ut värdet av uttrycket **$7x + 3(5 – 2x)$** *om* **$x = 4$**	$7 \cdot 4 + 3 \cdot 5 – 3 \cdot 2x$ $28 + 15 – 6x$ $6x – 15 + 28$ $6x – 43$	Eleven tolkar att uppgiften är att förenkla uttryck och dessutom sätter in $x = 4$ bara på ett ställe. Eleven räknar $–15 + 28 = 43$, vilket är fel.

Eleverna i Tabell 3 har *missförstått* uppgiften och förenklat uttrycket *istället* för att lösa ekvation (rad 6 – 12) eller räkna ut värdet av uttrycket (rad 13). Lösning i rad 8 börjar korrekt (även om det matematiska språket är bristfälligt). Eleven borde kommit fram till ekvationen $2x = 40$ eftersom eleven har förenklat variabeltermerna $5x – 3x = 2x$ korrekt och konstanta termerna $24 + 16 = 40$ korrekt. Eleven missar dock helt att $2x$ och 40 står i olika led av ekvationen. Eleven förenklar uttrycket $40 + 2x = 42x$, d v s gör dessutom fel av typen 1a. Gemensamt för lösningar i rad 6 – 12 är att eleverna lägger ihop (adderar eller subtraherar) variabeltermer med varandra och siffertermer med varandra utan att ta hänsyn till VL och HL.

1d. Eleven förstår inte att det finns multiplikation mellan koefficienten och variabeln. Det är en konvention i algebra att en siffra framför en variabel betyder att talet och variabeln ska multipliceras, t ex $4x$ betyder $4 \cdot x$.

Tabell 4

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
14	Räkna värdet av uttrycket $2a - 20$ om $a = 11$	$22a - 20$	Eleven tar inte bort variabeln trots att hen använder variabelns värde och räknar $2 \cdot 11 = 22$.
15	Räkna värdet av uttrycket $3a - b$ om $a = -4$ och $b = 2$	$3 - 4$ (stannar)	Elever missar multiplikation mellan 3 och a.
16		$4 + 2 = 6$	Elever missar att multiplicera 3 med -4 samt räknar $+ b$ istället för $- b$.
17		$3 - 4 \cdot 2 = 5$	Eleven använder multiplikation på fel ställe.
18	Förenkla uttryck $5x \cdot 3x$	$8x^2$	Eleven adderar koefficienterna istället för att multiplicera.
19		$5x^2$	Eleven missar att multiplicera med 3.
20		$8x$	Eleven adderar koefficienterna och missar att multiplicera $x \cdot x$.
21		$15 + 2x$	Eleven multiplicerar koefficienterna men adderar variablerna istället för att multiplicera.

Felen i rad 18 – 21, Tabell 4 är lite annorlunda än felen i rad 14 – 17 men vi bedömer att felet hör ihop med oförståelse av multiplikation mellan koefficienten och variabeln.

1e. Felaktig uppfattning av ax^2.

Tabell 5

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
22	Vid lösning av en annan ekvation kommer eleven till $2x^2 = 32$	$2x \cdot 2x = 32$ $\frac{2x}{2x} \cdot 2x = \frac{32}{2x}$ $2x = 16$ $x = 8$	Eleven räknar $2x^2 = 2x \cdot 2x$ samt missar att x inte försvinner i HL.

I uttrycket $2x^2$ är det enbart variabel som behöver bli upphöjt till *2*. Till skillnad från uttrycket $(2x)^2$ som innebär $2x \cdot 2x$, vilket eleven i rad 22, Tabell 5 missar.

1f. Eleven saknar förståelse att det finns två led i en ekvation.

Strategin för att lösa ekvationer med variabler i båda led som exempelvis $6x - 5 = 19 - 2x$ går ut på att samla alla *x*-termer på den sidan där det finns flest *x*-termer för att göra ekvationen något enklare. Därefter strävar man efter att få *x*-termen ensam i ena ledet.

$$6x - 5 = 19 - 2x$$
$$6x - 5 + 2x = 19 - 2x + 2x$$
$$8x - 5 = 19$$
$$8x - 5 + 5 = 19 + 5$$
$$8x = 24$$
$$\frac{8x}{8} = \frac{24}{8}$$
$$x = 3$$

Tabell 6

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
23	Lös ekvationen $\boldsymbol{2(2x + 1) = 3(x - 3)}$	$4x + 1 + 3x - 3$ $4x + 3x = x$ $1 + 3 = 4$ $x/4 = 4/1$ $x = 4$	Eleven missar att det finns två led i ekvationen och skriver allt i ett och samma led från början. Eleven gör även fel när hen multiplicerar in i parentesen.

Precis som i Tabell 3, rad 6 – 11 manipulerar eleverna med variabeltermer i rad 23, Tabell 6 utan att ta hänsyn till två led i ekvationen. Skillnaden är dock att eleven i rad 23 förstår att uppgiften går ut på att lösa ekvationen och hitta värde för *x*.

1g. Eleven saknar förståelse för att + (–) kan skrivas som **–** .

Tabell 7

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
24	Förenkla uttrycket $\boldsymbol{2a + 3b + a - 8b}$	$2a + (-5b)$	Eleven förstår inte att $2a + (-5b)$ kan skrivas som $2a - 5b$. Eleven missar även att räkna ut $2a + a$.

Forts. Tabell 7

25	Räkna värdet av uttrycket $\boldsymbol{7x + 3(5 - 2x)}$ *om* $\boldsymbol{x = 4}$	$7 \cdot 4 + 3(5 - 2 \cdot 4)$ $7 \cdot 4 = 32 \quad 2 \cdot 4 = 8$ $5 - 2 \cdot 4 = -4$ $32 + 3 = 35$ $35 + (-4)$	Eleven gör olika räknefel, prioriteringsfel och vet inte hur man räknar ut $35 + (-4)$.

1h. Eleven missar den negativa roten i andragradsekvation. Andragradsekvationer har två lösningar eller rötter, t ex ekvationen $x^2 = 81$ har lösningar $x = 9$ eftersom $9^2 = 81$ och $x = -9$ eftersom $(-9)^2 = 81$. Lösningarna kan skrivas $x = \pm 9$.

Tabell 8

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
26	Lös ekvationen $\boldsymbol{x^2 = 54}$	$x = 7{,}35$	Eleven anger endast en korrekt rot.

Förståelsefel eller fel i begreppslig uppfattning handlar inte om att eleven ”räknar” fel. Eleverna missuppfattar variabelbegreppet vilket leder till feltyper 1a, 1b och 1d. Eleverna missuppfattar ekvationer med variabler i båda led och tolkar dessa som det vore *uttryck* som behöver förenklas (feltyper 1c och 1f). Feltyper 1e, 1g och 1h bottnar i aritmetik, räkning med tal i potensform samt räkning med negativa tal.

2. Procedurfel

Procedurfel är den största gruppen. Eleverna gör fel vid olika procedurer. Ofta har eleverna lärt sig lösa ekvationerna eller förenkla uttryck rent mekaniskt eller procedurellt utan att de förstår vad olika procedurer går ut på.

2a. Eleven använder fel räknesätt. Oftast händer detta när eleven vill tillämpa balansmetoden, vilket är en av standardprocedurer vid ekvationslösning. Balansmetoden går ut på att olika termer i ekvationen elimineras en efter en, om de har motsatta tecken. T ex $-3 + 3 = 0$. Om eleven räknar istället $-3 - 3 = 0$, vilket är fel, leder detta till inkorrekt slutsvar.

Tabell 9

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
27	Lös ekvationen $\mathbf{3x - 8 + 5x + 4 = 28}$	$8x - 4 = 28$ $8x - 4 - 4 = 28 - 4$ $8x = 24$ $x = 3$	Eleven subtraherar *4* i båda leden istället för att addera och räknar fel i VL, $-4 - 4 = 0$.
28	Lös ekvationen $\mathbf{6x - 5 = 19 - 2x}$	$6x - 5 - 2x = 19 - 2x - 2x$ $4x - 5 = 19$ $4x = 24$ $x = 6$	Eleven subtraherar 2*x* i båda leden istället för att addera och räknar fel i HL, $-2x - 2x = 0$.
29		$6x - 5 + 2x = 19 - 2x + 2x$ $8x - 5 - 5 = 19 - 5$ $8x = 14$ $x = ?$	Eleven subtraherar *5* i båda leden istället för att addera och räknar fel i VL, $-5 - 5 = 0$.
30	Lös ekvationen $\mathbf{5x - 8 = 57}$	$5x - 8 = 57$ $57 - 8$ $5x = 49$	Eleven räknar 57 – 8 istället för 57 + 8.
31	Lös ekvationen $\mathbf{3x + 16 = 5x - 24}$	$3x + 5x = 16 - 24$ $8x = -4$ $\frac{8x}{8} = -\frac{4}{8}$ $x = 0{,}05$	Eleven räknar $3x + 5x$ istället för $5x - 3x$. Vidare räknar eleven $16 - 24$ istället för $16 + 24$ och gör sedan ett räknefel, – 4/8 = 0,05.
32	Lös ekvationen $\mathbf{3x + 16 = 5x - 24}$	$16 = 2x - 24$ $2x = 8$ $x = 4$	Eleven använder balansmetoden och subtraherar $3x$ i båda led utan att visa detta. Därefter räknar eleven $24 - 16 = 8$ istället för $16 + 24$.

Elever i Tabell 9, rad 27 – 32 visar att de har lärt sig vad proceduren, balansmetoden går ut på. De förstår att *x* behöver stå ensamt i ekvationen och att andra termer ska elimineras, men ändå missar att inte alla termer försvinner.

2b. Eleven räknar i fel ordning. Prioriteringsregler finns även inom aritmetik och handlar om i vilken ordning man räkna om det finns flera räknesätt i samma uttryck. Man räknar i följande ordning:

1. Parenteser
2. Potenser
3. Multiplikationer och divisioner
4. Additioner och subtraktioner

Om räknesätten är likvärdiga (som vid punkt 3) gäller räknesättet från vänster till höger (t ex $6 \div 2 \cdot 5 = 15$).

Vid ekvationslösning går man till väga i omvänt ordning för att få variabeln ensam i ena ledet.

Tabell 10

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
33	Lös ekvationen $\frac{x}{5} + 9 = 15$	$15 \cdot 5 = 75$ $75 - 9 = 66$ $x = 66$	Eleven räknar i fel ordning. Eleven skulle fått korrekt svar om hen skulle börja med att subtrahera 9 från 15 och multiplicera med 5 därefter.

2c. Eleven gör fel i beräkningar med negativa tal. Eleverna behärskar inte operationer med negativa tal fullt ut vilket orsakar olika fel i algebra. Felet förekommer vid förenkling av uttryck, förenkling av uttryck med parenteser, vid lösning av enkla ekvationer, vid lösning av ekvationer med variabler i båda led samt vid lösning av ekvationer där antingen ena ledet eller båda leden behöver förenklas först och även när man behöver räkna ut uttrycket värde.

Tabell 11

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
34	Förenkla uttrycket $2a + 3b + a - 8b$	$3a + 5b$	Eleven räknar $2a + a = 3a$ (korrekt) och $3b - 8b = 5b$ (fel).
35		$3a - 11b$	Eleven räknar $2a + a = 3a$ (korrekt) och $3b - 8b = -11b$ (fel).
36	Lös ekvationen $5x - 8 = 57$	$5x - 8 + 8 = 57 + 8$ $5x + 16 = 65$	Eleven använder balansmetoden men räknar fel i VL, $-8 + 8 = 16$.
37	Lös ekvationen $5x - 8 = 57$	$5x - 8 + 8 = 57 + 8$ $5x - 16 = 65$	Eleven använder balans metoden men räknar fel i VL, $-8 + 8 = -16$.

Forts Tabell 11

38	Lös ekvationen $\boldsymbol{3x - 8 + 5x + 4 = 28}$	$8x - 12 = 28$	Eleven räknar $3x + 5x = 8x$ (korrekt) och $- 8 + 4 = - 12$ (fel).
39		$8x + 4 = 28$	Eleven räknar $3x + 5x = 8x$ (korrekt) och $- 8 + 4 = 4$ (fel).
40	Lös ekvationen $\boldsymbol{7x + 15 - 2x = 60}$	$7x + 2x = 9x$	Eleven byter tecken framför $2x$ från minus till plus.
41	Lös ekvationen $\boldsymbol{3x + 16 = 5x - 24}$	$3x + 16 - 16 = 5x - 24 - 16$ $3x = 5x - 8$ $3x - 2x = 5x - 8 - 2x$ $x = 3x - 8$ $\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$ $x = 4$	Eleven räknar $- 24 - 16 = - 8$ i HL.
2	Lös ekvationen $\boldsymbol{2(2x + 1) = 3(x - 3)}$	$4x + 2 = 3x - 9$ $4x + 2 - 2 = 3x - 9 - 2$ $4x = 3x - 7$ $x = - 7$	Eleven öppnar parenteser i båda leden korrekt, men räknar dock fel i HL, $- 9 - 2 = - 7$.
43		$4x + 2 = 3x - 9$ $4x + 2 - 3x = 3x - 9 - 3x$ $x + 2 = 9$ $x = 7$	Eleven öppnar parenteser och tillämpar balansmetoden korrekt, men tappar bort minustecken framför 9 och får därmed fel svar.
44	Förenkla uttrycket $\boldsymbol{3(x - 2y) - 4(y - 2x)}$	$3x - 6y - 4y + 8x$ $3x + 8x - 6y - 4y$ $11x + 10y$	Eleven öppnar parenteser korrekt, men räknar (felaktigt) $- 6y - 4y = 10y$.
45		$3x - 6y - 4y + 8x$ $6y - 4y = 2y$ $3x + 8x = 11x$ $11x - 2y$	Eleven räknar $6y - 4y = 2y$ men sätter minus framför $2y$ i svaret då det fanns en minus framför $6y$.

Forts Tabell 11

46	Räkna värdet av uttrycket **$3a - b$** *om* $\boldsymbol{a = -4}$ *och* $\boldsymbol{b = 2}$	$-12 - 2 = -10$	Eleven sätter in variablernas värde i uttrycket korrekt med gör olika fel i beräkningen med negativa tal eller stannar.
47		$-12 + 2 = 10$	
48		$-12 - 2$	
49		$-12 + 2$	
50		$3 \cdot -4 - 2 = 3 \cdot (-4 - 2) =$ $3 \cdot -6 = -18$	

I rad 34 och 35, Tabell 11 har eleverna förstått principen hur uttrycket ska förenklas men de räknar fel med negativa tal och får därmed inkorrekt slutsvar. Eleven i rad 34 subtraherar minsta från det största, $3b - 8b = 5b$ medan eleven i rad 35 missar att $3b$ och $8b$ har olika tecken och räknar $3b - 8b = -11b$. Elever i rad 36, 37, 42 och 43 har förstått hur ekvationerna ska lösas och börjar tillämpa balansmetoden korrekt men räknefel som – 8 + 8 = 16, – 8 + 8 = – 16 och $-9 - 2 = -7$ leder till inkorrekt slutsvar. Elever i rad 38 – 40 vet att VL ska förenklas innan ekvationen ska lösas men räknar fel med negativa tal. Elever i rad 44 och 45 multiplicerar in i parentesen korrekt men räknar sedan fel med negativa tal. I rad 46 – 49 har eleverna förstått att 3 ska multipliceras med – 4 och alla fått de till – 12 men vid insättning av $b = 2$ får eleverna olika felaktiga svar då de hanterar minus framför b felaktigt. Elev i rad 48 kommer närmast det korrekta svaret men stannar av en okänd anledning.

2d. Eleven tillämpar den distributiva lagen felaktigt. Enligt den distributiva lagen $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ska parenteserna $3(x + 4)$ hanteras genom att 3 multipliceras med bägge termer inom parentes, x och 4: $3(x + 4) = 3x + 12$. Alla elever visar inte mellanled vid förenkling av långa uttryck vilket leder till olika fel.

Tabell 12

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
51	Förenkla uttrycket **$2a + 2(a + 3)$**	$2a + 2a + 3 = 4a + 3$	Eleven multiplicerar 2 endast med den första termen i parentesen, a men inte med 3.

Forts Tabell 12

52	Förenkla uttrycket $\boldsymbol{2a + 2(a + 3)}$	$2a + a = 3a$ $2 + 3 = 5$ $5 + 3a = 8a$	Istället för att multiplicera 2 in i parentesen adderar eleven variabeltermer med varandra och siffertermer med varandra. Eleven räknar $5 + 3a = 8$ (fel) i slutet.
53	Förenkla uttrycket $\boldsymbol{14x – 3(x + 6)}$	$11x – 6$	Eleven multiplicerar 3 endast med den första termen i parentesen, x och räknar $14x – 3x = 11x$. Eleven missar att utföra multiplikationen $3 \cdot 6$.
54	Förenkla uttrycket $\boldsymbol{14x – 3(x + 6)}$	$11x + 6$	Eleven multiplicerar 3 endast med den första termen i parentesen, x och räknar $14x – 3x = 11x$. Eleven missar att utföra multiplikationen $3 \cdot 6$ och gör teckenfel.
55	Förenkla uttrycket $\boldsymbol{14x – 3(x + 6)}$	$14x – 3x – 6$ $14 – 6 = 8$ *Svar:* $8 – 3x$	Eleven multiplicerar 3 endast med den första termen i parentesen, x och missar x vid 14.
56		$15x – 18$	Eleven räknar $14x + x = 15x$ och $3 \cdot 6 = 18$.
57		$15x + 3$	Eleven räknar $14x + x = 15x$ och $6 – 3 = 3$.
58		$13x + 3$	Eleven räknar $14x – x = 13x$ och $6 – 3 = 3$.
59	Förenkla uttrycket $\boldsymbol{3(x – 2y) – 4(y – 2x)}$	$3x – 2y – 4y – 2x$	Eleven utför multiplikation endast med den första termen i varje parentes samt missar ändra tecken.
60		$1 + 3x + 3y$	Eleven räknar siffertermer $4 – 3 = 1$ och variabeltermer $x + 2x = 3x$, $2y + y = 3y$.

Forts Tabell 12

61	Förenkla uttrycket ***3 – (2x + 3)***	$-6x - 9$	Eleven multiplicerar in *3* i parentesen istället för att ta bort parentesen och ändra tecken.
62	Räkna ut värdet av uttrycket ***7x + 3(5 – 2x)*** *om* ***x = 4***	$7 \cdot 4 + 3 \cdot 5 - 2x$ $28 + 15 - 2x$ $43 - 2 \cdot 4$ $43 - 8 = 35$	Eleven multiplicerar 3 endast med den första termen i parentesen, *5*.
63		$7 \cdot 4 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4$ $28 + 15 - 2 = 41$	Eleven multiplicerar in fel och tappar bort 4.
64		$7 \cdot 4 + 3(5 - 2 \cdot 4)$ $7 \cdot 4 + 15 - 6 \cdot 12$ $28 + 15 - 72$ $43 - 72$ -29	Istället för att multiplicera $3 \cdot 2 \cdot 4$ räknar eleven $3 \cdot 2 \cdot 4 = 6 \cdot 12$.

Felaktig tillämpning av distributiva lagen tar form på olika sätt. Eleverna i Tabell 12, rad 51, 53 – 55, 59 och 62 utför multiplikationen endast med den första termen inom parentesen och missar att multiplicera den sista termen. Eleven i rad 52, 56, 57, 58 och 60 utför ingen multiplikation alls utan adderar eller subtraherar variabeltermer med varandra och siffertermer med varandra utan att tänka på parenteser överhuvudtaget. Eleven i rad 61 tillämpar distributiva lagen i ett opassande sammanhang. Eleverna i rad 62 – 64 skulle kunna beräkna värdet av uttrycket genom att räkna ut värdet inom parentesen först $7 \cdot 4 + 3(5 - 2 \cdot 4) = 28 + 3(-3) = 29 - 9 = 19$, d v s genom att använda prioriteringsregler. Självklart går det att räkna ut värdet med hjälp av den distributiva lagen $28 + 3 \cdot 5 - 3 \cdot 2 \cdot 4 = 28 + 15 - 24 = 19$ men eleverna tappar bort sig och räknar fel. Det intressanta är lösningen i rad 64 där eleven multiplicerar en gång för mycket. Eleven räknar $3(5 - 2 \cdot 4) = 15 - 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 15 - 72$ osv.

2e. Eleven missar teckenbyte vid behandling av negativa parenteser. När man förenklar uttrycket $(5x + 3) - (x - 2y)$ ska första parentesen tas bort utan vidare men i den andra parentesen ska y-variabeln byta tecken, $5x + 3y - x + 2y = 4x + 5y$. Ett sätt att förklara teckenbyte i den andra parentesen är att den negativa parentesen $-(x - 2y)$ kan ses som en positiv parentes multiplicerad med -1. Med hjälp av den distributiva lagen räknar man då

$-1 \cdot (x-2y) = -1 \cdot x + (-1) \cdot (-2) = -x + 2y$. För att förenkla uttrycket $3(x-2y) - 4(y-2x)$ krävs det att eleven tänker på teckenbyte och behärskar den distributiva lagen, $3(x-2y) - 4(y-2x) = 3x - 6y - 4y + 8x = 11x - 10y$.

Tabell 13

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
65	Förenkla uttrycket $\boldsymbol{(5x-13)-(x-7)}$	$4x-20$	Generellt upptäckte vi att det är enbart några enstaka elever som redovisar mellanled som $5x - 13x - x + 7 = 4x - 6$. De flesta elever skriver svaret direkt och gör olika fel när de tar bort den andra parentesen.
66		$6x-20$	
67		$6x+20$	
68		$6x+6$	
69		$6x-6$	
70	Förenkla uttrycket $\boldsymbol{14x-3(x+6)}$	$11x+18$	Eleven missar att ändra tecken inuti parentesen.
71	Förenkla uttrycket $\boldsymbol{3(x-2y)-4(y-2x)}$	$3x-6y-4y-8x$ $11x+10y$	Eleven missar att ändra tecken i den andra parentesen och räknar $3x - 8x = 11x$ och $-6y - 4y = 10y$.
72		$3x+6y-4y+8x$ $3x+8x-6y+4y$ $11x-10y$	Eleven byter tecken (felaktigt) även i den första parentesen, gör teckenbyte vid y-termer och räknar till slut fel $-6y + 4y = -10y$.
73		$11x+2y$	Eleven visar inte mellanled, räknar korrekt $3x + 8x = 11x$ men räknar fel med variabeln y.
74		$2y-11x$	Eleven visar inte mellanled och räknar fel med negativa och positiva tal både för x-variabeln och för y-variabeln.
75		$5x-2y$	Eleven visar inte mellanled och räknar fel med negativa och positiva tal både för x-variabeln och för y-variabeln.

Forts Tabell 13

76	Förenkla uttrycket $\boldsymbol{3(x - 2y) - 4(y - 2x)}$	$-5x - 10y$	Eleven visar inte mellanled och räknar fel med negativa och positiva tal både för *x*-variabeln och för *y*-variabeln.

Att visa mellanled, d v s skriva ner och visa delberäkningar vid förenkling av långa algebraiska uttryck är nyckel till framgång. Eleverna skriver dock oftast enbart slutsvaret och håller delberäkningar i minnet vilket kan medföra inkorrekta svar. Fel i rad 65, 70 och 71, Tabell 13 är likartade. Eleverna missar ändra tecken i den andra parentesen. I rad 66 – 69, i uttrycket $(5x - 13) - (x - 7)$ ändrar eleverna tecken även för x och räknar $5x + x = 6x$, vilket är fel. Därefter gör eleverna även andra teckenfel. I rad 73 – 76 ser vi blandning av båda ovannämnda fel.

2f. Eleven utför inte samma operation i både vänster och höger led av en ekvation oavsiktligt. Här har vi samlat felen där eleverna visar att de har för avsikt att tillämpa balansmetoden genom att utföra samma operation i båda led, men missar att utföra beräkning i ena ledet.

Tabell 14

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
77	Lös ekvationen $\boldsymbol{7x + 15 - 2x = 60}$	$5x + 15 - 15 = 60 - 15$ $5x = 60$ $\frac{5x}{5} = \frac{60}{5}$ $x = 12$	Eleven visar att *15* ska subtraheras i båda led men missar utföra beräkning i HL.
78	Lös ekvationen $\boldsymbol{6x - 5 = 19 - 2x}$	$6x - 5 + 5 = 19 - 2x + 5$ $6x = 19 - 2x$ $6x - 2x = 4x$ $\frac{4x}{4} = \frac{19}{4}$ $x = ?$	Eleven visar att *5* ska adderas i båda led men missar utföra beräkning i HL. Därefter räknar eleven $6x - 2x = 4x$ istället för $6x + 2x$.

2g. Eleven utför inte samma operation i både vänster och höger led med avsikt. Här har vi samlat felen där eleverna visar att de har för avsikt att utföra olika operationer i HL och VL av ekvationen.

Tabell 15

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
79	Lös ekvationen $\mathbf{2(2x + 1) = 3(x - 3)}$	$4x + 2 = 3x - 9$ $4x + 2 - 2 = 3x - 9 + 2$ $4x = 3x - 7$ $4x - 3x = 3x - 3x - 7$ $x = -7$	Eleven subtraherar *2* i VL men adderar *2* i HL.
80	Lös ekvationen $\mathbf{3x + 16 = 5x - 24}$	$3x + 16 - 16 = 5x - 24 + 16$ $8x = 40$ $\frac{8x}{8} = \frac{40}{8}$ $x = 5$	Eleven subtraherar 16 i VL men adderar 16 i HL och räknar $-24 + 16 = 40$.
81	Lös ekvationen $\mathbf{4 + \frac{x}{4} = 5 - \frac{x}{5}}$	$4 + \frac{x}{4} = 5 - \frac{x}{5}$ $4 \cdot 4 + \frac{x}{4} \cdot 4 = 5 \cdot 5 - \frac{x}{5} \cdot 5$ $16 + x = 25$ $16 + x - 16 = 25 - 16$ $x = 9$	Eleven multiplicerar VL med *4* och HL med *5* och tappar bort *x* i HL.
82	Lös ekvationen $\mathbf{7x + 15 - 2x = 60}$	$7x + 2x + 15 - 2x + 2x = 60$ $9x + 15 = 60$ $x = 5$	Eleven missar att förenkla VL och adderar *2x* i VL två gånger.
83	Lös ekvationen $\mathbf{3x - 8 + 5x + 4 = 28}$	$3x - 8 + 5x + 4 = 28$ $+ 8 - 4 = -4$ $3x + 5x = 24$ $8x = 24$ $\frac{8x}{8} = \frac{24}{8}$ $x = 3$	Eleven missar att förenkla VL och att addera *8* i HL.

Feltypen 2g skiljer sig från 2f och kan betraktas som förståelsefel eller fel i begreppslig uppfattning då eleverna anser att man ska utföra olika operationer i VL och HL. Vi valde att kategorisera feltypen 2g under procedurfel för att underlätta jämförelse med feltypen 2f.

Missuppfattningen i rad 79 och 80, Tabell 15 ligger i att eleverna vill addera/subtrahera motsatta tal i HL och VL, vilket medför obalans i ekvationen. Ekvationen i rad 81 innehåller bråktal. Eleven vill få bort nämnare och väljer att multiplicera VL och HL med olika tal vilket innebär att balansen i ekvationen rubbas. I rad 82 adderar eleven ett tal i VL två gånger istället för att addera i respektive VL och HL. Eleverna i rad 82 och 83 borde förenkla VL först vilket skulle göra ekvationen enklare och felen kunde undvikas. Eleven i rad 83 missar att addera 8 i HL.

2h. Eleven hanterar felaktigt ekvationer med nämnare. Det finns olika metoder att lösa ekvationer med nämnare. En av metoderna är att multiplicera ekvationens båda led med minsta gemensamma nämnaren (mgn). Det är viktigt att alla termer multipliceras med mgn.

I ekvationen $4 + \frac{x}{4} = 5 - \frac{x}{5}$ blir mgn 20.

$$4 + \frac{x}{4} = 5 - \frac{x}{5}$$

$$4 \cdot 20 + \frac{x}{4} \cdot 20 = 5 \cdot 20 - \frac{x}{5} \cdot 20$$

$$80 + 5x = 100 - 4x$$

$$9x = 20$$

$$x = \frac{20}{9}$$

Tabell 16

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
84	Lös ekvationen $\mathbf{4 + \frac{x}{4} = 5 - \frac{x}{5}}$	$\frac{4}{1} + \frac{x}{4} = \frac{5}{1} - \frac{x}{5}$ $\frac{4x}{4} = - \frac{5x}{5}$ $x = - \frac{5x}{5}$	Eleven skriver om heltalen *4* och *5* som bråk, $4 = \frac{4}{1}$, vilket är korrekt. Därefter visar eleven bristande kunskaper vid bråkräkning.
85		$4 + \frac{x}{4} \cdot 4 = 5 - \frac{x}{5} \cdot 4$ $4 + x = 5 - \frac{x}{20}$ $4 + x = 4x$ $4x = 5 - \frac{x}{20}$	Eleven missar att multiplicera *alla* termer med 4. Eleven gör även fel vid multiplikation av bråk i HL och adderar konstanttermen med variabeltermen.

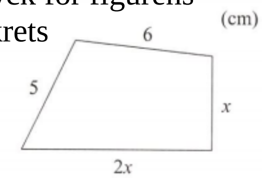
Forts Tabell 16

86	Lös ekvationen $\mathbf{4 + \frac{x}{4} = 5 - \frac{x}{5}}$	$\frac{x}{4} \cdot \frac{x}{5} = \frac{x^2}{20}$ $\frac{x^2}{20} + 4 = \frac{x^2}{24}$ $\frac{x^2}{24} - 5 = \frac{x^2}{15}$	Det är svårt att hitta en förklaring till elevens fel utan att samtala med eleven.

Felen i Tabell 16 är inte av samma sort. Eleven i rad 85 vill använda balansmetoden och multiplicera både VL och HL med *4* missar att utföra multiplikation med en av termerna i HL. Vidare gör eleven, precis som eleven i rad 84 fel i bråkräkning.

2i. Eleven förenklar inte uttrycket så långt som möjligt.

Tabell 17

	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
87	Förenkla uttrycket ***(5x – 13) – (x – 7)***	*5x – 13 – x + 7*	Eleven missar att förenkla uttrycket ytterligare.
88	Ange ett algebraiskt uttryck för figurens omkrets 	*2x + x + 5 + 6*	Eleven missar att förenkla uttrycket ytterligare.

2j. Eleven gör olika räknefel, avrundningsfel, svarar med fel antal decimaler.

Tabell 18

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
89	Förenkla uttrycket ***14x – 3(x + 6)***	*10x – 18*	Eleven räknar *14x – 3x = 10x.*
90		*11x – 15*	Eleven räknar *3 · 6 = 15.*
91	I en problemlösning kommer fram till ekvationen ***8x = 240***	$\frac{8x}{8} = \frac{240}{8}$ *x = 60*	Eleven räknar *240/8 =60.*
92	Lösa ekvationen $\mathbf{x^2 = 54}$**.** Svara med två decimaler.	*x = ±7,3*	Eleven svarar med fel antal decimaler.

Forts Tabell 18

93		*x = 7,3*	Avrundningsfel förekommer även om eleven anger endast en rot.

Procedurfel och förståelsefel eller fel i begreppslig uppfattning går i varandra och det är svårt att dra gränsen mellan dessa två felkategorier. Bakom varje procedur ligger (ska ligga) förståelse varför proceduren ska utföras på ett visst sätt. Vår bedömning är att begreppslig missuppfattning kan resulteras i felaktigt genomförda procedurer.

3. Modelleringsfel eller problemlösningsfel

Algebran är ett viktigt redskap i matematiken, särskilt vid problemlösning. Här krävs både fantasi och att behärska strategier. Här behöver man göra ett antagande, införa variabler och eventuellt rita figurer. Därefter behöver man ställa upp en ekvation utifrån problemet (en matematisk modell). Till slut behöver man lösa ekvationen samt kontrollera att svaret är rimligt, se den tidigare nämnda algebraiska cykeln (se fig 2).

Tabell 19

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
94	Niklas har 40 kr mer än Sofia. Elin har tre gånger så mycket som Sofia. Tillsammans har Niklas, Elin och Sofia 500 kr. Hur mycket har var och en? Lös med ekvation.	Sofia *x* Niklas *x+40* Elin *3x* $3x + 40 = 500$ $3x + 40 - 40 = 500 - 40$ $3x = 460$ $\frac{3x}{3} = \frac{460}{3}$ $x = 153{,}3$	Elever inför en variabel och ställer upp korrekta uttryck men missar att det borde vara fler *x* i ekvationen.

Forts Tabell 19

95	Niklas har 40 kr mer än Sofia. Elin har tre gånger så mycket som Sofia. Tillsammans har Niklas, Elin och Sofia 500 kr. Hur mycket har var och en? Lös med en ekvation.	$4x + 40 = 500$ $4x + 40 - 40 = 500 - 40$ $4x = 460$ $\frac{4x}{4} = \frac{460}{4}$ $x = 115$ Sofia $115 + 40 = 155$ Niklas $115 \cdot 3 = 345$ Elin	Eleven inför en variabel utan att förklara vad den står för och missar ett x i ekvationen.

Generellt vid problemlösning i matematik krävs det helt olika steg: modellering, beräkning och rimlighetsbedömning. Eleven behöver skapa en matematisk modell, en beräkningsuppställning som kan innehålla ett eller flera räknesätt. När modellen är färdig börjar själva beräkningen. När eleven har fått svaret behöver hen bedöma om svaret är rimligt.

Att lösa problem genom att modellera ett algebraiskt uttryck till en konkret situation och ställa upp en ekvation som gör möjligt att lösa problemet är en aktivitet som många av eleverna aldrig kommer fram till. Abstraktionsnivån är för hög. Eleverna i rad 94 och 95, Tabell 19 har kommit långt i modelleringsfasen genom att ställa upp de korrekta algebraiska uttrycken till hur mycket pengar har varje elev. Eleverna missar dock att överföra egna algebraiska uttryck till en korrekt ekvation. Eleverna ställer upp felaktiga ekvationer men gör korrekta beräkningar. Felet ligger fortfarande inom modelleringsfasen.

4. Resonemangsfel

Resonemang i matematik kan ses på två olika sätt. Dels kan man presentera ett färdigt och korrekt resonemang om något, t ex formella bevis med logiska slutsatser eller informella förklaringar. Ett exempel är att eleven kan använda Pythagoras sats ($a^2 + b^2 = c^2$) för att visa att en triangel är rätvinklig.

Man kan även använda resonemang som ett medel för att nå slutsatser. Här kan eleven använda sig av prövningar, ifrågasättanden och gissningar för att komma fram till ett resultat.

En elev ska kunna motivera eller förklara det matematiska innehållet utifrån sin egen rådande kunskap.

4a. Eleven använder ett oeffektivt resonemang. Resonemang innefattar allt från att testa, gissa och förklara till att genomföra skriftligt bevis. En systematisk prövning kan vara framgångsrik i vissa situationer men kan även vara oeffektiv och tidskrävande i andra situationer, där t ex lösning med en ekvation vore att föredra.

Tabell 20

<table>
<tr><th>Rad</th><th>Uppgift</th><th>Elevsvar</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>96</td><td rowspan="2">Niklas har 40 kr mer än Sofia.
Elin har tre gånger så mycket som Sofia.
Tillsammans har Niklas, Elin och Sofia 500 kr. Hur mycket har var och en?
Lös med ekvation.</td><td>90 60 120 110 80
130 100 160 150 120
270 180 360 330 240

Sofia 92 kr, Niklas 132 kr, Elin 276 kr</td><td>Eleven redovisar hur hen testar sig fram till svaret.</td></tr>
<tr><td>97</td><td>$x + y + s = 500$

Sofia 92 kr, Niklas 132 kr, Elin 276 kr</td><td>Eleven inför tre variabler men använder inte dessa utan skriver korrekta svaret direkt utan någon redovisning.</td></tr>
</table>

4b. Eleven följer inte anvisningarna. Vid problemlösning med ekvation inför eleven variabler men missar något av villkoren i problemet.

Tabell 21

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
98	I en rektangel är den långa sidan 3 gånger så lång som den korta sidan. Hur långa är sidorna i rektangeln om omkretsen är 240 meter? Lös med ekvation.	$x + x + x + 20 + x + 20 = 240$ $4x + 40 – 40 = 240 - 40$ $\frac{4x}{4} = \frac{200}{4}$ $x = 50$ $50 + 20 = 70$ $70 + 70 + 50 + 50 = 240$ *m*	Eleven ritar en rektangel, kallar kortsidan för *x* och långsidan för *x+20*. Eleven missar att den långa sidan ska vara 3 gånger så lång som den korta sidan.

4c. Eleven drar fel slutsats eller drar ingen slutsats.

Tabell 22

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
99	Lös ekvationen $\boldsymbol{\frac{x}{5} + 9 = 15}$	$\frac{x}{5} + 9 = 15$ $\frac{x}{5} + 9 - 9 = 15 - 9$ $\frac{x}{5} = 6$ $x = 6$	Eleven löser ekvationen korrekt fram till $\frac{x}{5} = 6.$ Därefter drar eleven fel slutsats.
100	Lös ekvationen $\boldsymbol{4 + \frac{x}{4} = 5 - \frac{x}{5}}$	$20 \cdot 4 + 20 \cdot \frac{x}{4} = 20 \cdot 5 - 20 \cdot \frac{x}{5}$ $80 + 5x = 100 - 4x$ $80 + 5x - 80 = 100 - 4x - 80$ $5x = 20 - 4x$ $9x = 20$ $\frac{9x}{9} = \frac{20}{9}$	Eleven har löst ekvationen nästan korrekt men slutgiltig slutsats saknas.

Fel i resonemang kan uppstå på olika stadier av problemlösning. I rad 98, Tabell 22, ligger resonemangsfel i modelleringsfasen. Dels missar eleven ett villkor i uppgiften, dels visar inte algebraiska uttryck för rektangels sidolängd. I rad 97 saknas resonemang överhuvudtaget, trots att eleven gör ett försök till modellering. I rad 96 ser vi ett resonemang ”pröva sig fram till rätt svar” som inte är effektiv i situationen. I rad 99 och 100 ligger felaktigt resonemang i slutfasen. Eleven behöver bedöma om svaret är rimligt.

5. Redovisningsfel eller kommunikationsfel

Varje gång eleven löser en uppgift i matematik behöver eleven kommunicera sin lösning med hjälp av termer, symboler, tabeller, grafer, bilder, ritningar, modeller, mm. Vid skriftliga prov är enbart skriftlig kommunikation möjlig. Det innebär att eleverna måste kunna redovisa alla sina tankegångar skriftligt.

5a. Eleven redovisar endast numeriskt att lösningen stämmer.

Tabell 23

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
101	Lös ekvationen $5x - 8 = 57$	$5 \cdot 13 - 8 = 57$ $x = 13$	Eleven anger ett korrekt svar, redovisar numeriskt att svaret stämmer men visar inte vägen fram till svaret.
102	Lös ekvationen $7x + 15 - 2x = 60$	$7 \cdot 9 + 15 - 2 \cdot 9 = 60$ $x = 9$	Eleven anger ett korrekt svar, redovisar numeriskt att svaret stämmer men visar inte vägen fram till svaret.
103	Lös ekvationen $6x - 5 = 19 - 2x$	$6 \cdot 3 - 5 = 19 - 2 \cdot 3$ $x = 3$	Eleven anger ett korrekt svar, redovisar numeriskt att svaret stämmer men visar inte vägen fram till svaret.
104		$6 \cdot 6 = 36,\ 2 \cdot 6 = 12,$ $36 - 12 = 24,\ 24 - 5 = 19$ $x = 6$	Eleven får ett inkorrekt svar utan att redovisa vägen fram till svaret. Eleven gör en felaktig numerisk redovisning att svaret stämmer genom att hantera VL och HL felaktigt.
105	Niklas har 40 kr mer än Sofia. Elin har tre gånger så mycket som Sofia. Tillsammans har Niklas, Elin och Sofia 500 kr. Hur mycket har var och en? Lös med ekvation.	$Sofia\ 92\ kr,$ $Niklas\ 132\ kr,$ $Elin\ 276\ kr.$ $92+132+276=500$	Eleven skriver enbart korrekt svar och redovisar att den totala summan stämmer.

5b. Eleven anger endast svar utan någon redovisning.

Tabell 24

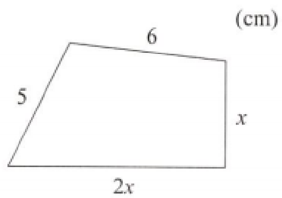
Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
106	Lös ekvationen $\frac{x}{5} + 9 = 15$	$x = 30$	Eleven anger enbart ett korrekt svar.

Forts Tabell 24

107	I en rektangel är den långa sidan 3 gånger så lång som den korta sidan. Hur långa är sidorna i rektangeln om omkretsen är 240 meter? Lös med ekvation.	Eleven ritar en rektangel och skriver numeriska (felaktiga) värden vid sidorna: 40 vid kortsidorna och 70 vid långsidorna.	Svaret är felaktigt och redovisningen saknas helt.
108		Eleven ritar en rektangel och skriver numeriska (felaktiga) värden vid sidorna: 60 vid kortsidorna och 180 vid långsidorna.	Svaret är felaktigt och redovisningen saknas helt.

5c. Eleven löser uppgiften utan att använda algebra.

Tabell 25

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
109	a) Ange ett algebraiskt uttryck för figurens omkrets.  b) Hur lång är längsta sidan om omkretsen är 23 cm?	a) O = $3x + 11$ $b)\ 23 - 11 = 12$ $\frac{12}{3} = 4$ $Svar$: $Längsta\ sida$ är $8\ cm$.	Eleven löser uppgift b) korrekt men tar inte hjälp av uttrycket för omkretsen i uppg. a). Eleven förväntas lösa ekvationen $3x + 11 = 23$.

5d. Felaktig notation.

Tabell 26

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
110	Lös ekvationen $\boldsymbol{x^2 = 54}$	$x^2 = \pm \sqrt[2]{54}$	Eleven borde ha skrivit $x = \pm \sqrt[2]{54}$
111		$x = \sqrt[\mp 2]{54}$	Eleven placerar ± på fel ställe.

Kommunikationsförmågan och resonemangsförmågan flyter in i varandra. Det gäller alltså inte bara att lösa uppgiften utan även att kunna redovisa, kommunicera sina tankegångar.

6. Övriga fel

I denna kategori har vi samlat alla fel där eleven t ex skriver av uppgiften fel, tappar bort en siffra eller en variabel, skriver en siffra otydligt och sen tolkar den som en annan siffra (ex. 1 blir 4, 3 blir 5 osv.).

Tabell 27

Rad	Uppgift	Elevsvar	Kommentar
112	Lös ekvationen $\boldsymbol{7x + 15 - 2x = 60}$	$7x + 2x + 15 = 60$ $9x + 15 = 60$	Eleven räknar med fel tecken framför $2x$ i VL.
113	Förenkla uttrycket $\boldsymbol{2a + 3b + a - 8b}$	$3a - 5$	Eleven tappar bort variabel b.
114	Räkna ut värdet av uttrycket $\boldsymbol{7x + 3(5 - 2x)}$ *om* $\boldsymbol{x = 4}$	$7 \cdot 4 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4$ $28 + 15 - 2 = 41$	Sista siffran 4 skriver eleven otydligt så att den liknar siffran 1 och räknar därför $2 \cdot 1 = 2$.

Huvudfrågan vi sökte svar på var: Vilka typer av fel gör eleverna inom Algebra? Vi har fått svar på huvudfrågan då vi sett vilka fel eleverna gör i algebra. Delfrågorna hjälpte oss att identifiera och påbörja en kategorisering av feltyperna. Felen vi hittade var av varierande karaktär. Feltyperna kan vi sammanfatta i en översiktstabell (se nästa sida):

Översiktstabell

1. Förståelsefel eller fel i begreppslig uppfattning **1a.** Eleven adderar koefficienterna för variabeltermerna med de konstanta termerna (siffertermerna). **1b.** Eleven adderar koefficienterna för olika variabler. **1c.** Eleven tolkar fel vad som krävs i uppgiften. **1d.** Eleven förstår inte att det finns multiplikation mellan koefficienten och variabeln. **1e.** Felaktig uppfattning av ax^2. **1f.** Eleven saknar förståelse att det finns två led i en ekvation. **1g.** Eleven saknar förståelse för att + (–) kan skrivas som – . **1h.** Eleven missar den negativa roten i andragradsekvation.	**2. Procedurfel** **2a.** Eleven använder fel räknesätt. **2b.** Eleven räknar i fel ordning. **2c.** Eleven gör fel i beräkningar med negativa tal. **2d.** Eleven tillämpar den distributiva lagen felaktigt. **2e.** Eleven missar teckenbyte vid behandling av negativa parenteser. **2f.** Eleven utför inte samma operation i både vänster och höger led av en ekvation oavsiktligt. **2g.** Eleven utför inte samma operation i både vänster och höger led med avsikt. **2h.** Eleven hanterar felaktigt ekvationer med nämnare. **2i.** Eleven förenklar inte uttrycket så långt som möjligt. **2j.** Eleven gör olika räknefel, avrundningsfel, svarar med fel antal decimaler.
3. Modelleringsfel/problemlösningsfel	**4. Resonemangsfel** **4a.** Eleven använder ett oeffektivt resonemang. **4b.** Eleven följer inte anvisningarna. **4c.** Eleven drar fel slutsats eller drar ingen slutsats.
5. Redovisningsfel eller kommunikationsfel **5a.** Eleven redovisar endast numeriskt att lösningen stämmer. **5b.** Eleven anger endast svar utan någon redovisning. **5c.** Eleven löser uppgiften utan att använda algebra. **5d.** Felaktig notation.	**6. Övriga fel**

Alla dessa feltyper förekommer i ekvationer, vid förenklingar, vid beräkningar av ett uttrycks värde och vid problemlösningar.

7. Diskussion och slutsats

I Översiktstabellen har vi redovisat 6 olika feltyper som vi har observerat i vår studie av gymnasielevers algebraprov. För att visa olika nyanser som alla dessa feltyper består av har vi dessutom delat in dessa 6 feltyper i 25 underkategorier. Eleverna skrev sina prov *efter* att de fått undervisning i algebra. Vi har tittat på alla 80 prov utan att vi visste vilka prov genomfördes av eleverna i matematiksvårigheter. Därmed kunde vi inte urskilja om elever i matematiksvårigheter gör andra typer av fel som övriga elever eller inte. Vårt syfte var att redovisa mångfald av fel som eleverna *kan* göra i algebra, vid ekvationslösning, vid förenkling av uttryck, vid beräkningar av ett uttrycks värde och vid problemlösningar. Kunskap om dessa feltyper och om vilka missuppfattningar som ligger bakom dessa feltyper kan hjälpa oss lärare att ändra vår undervisning och förebygga att dessa fel uppstår. Det är särskilt viktigt för elever i matematiksvårigheter som ofta upplever algebran som svårbegriplig. Tidigare forskning har påpekat att elever i matematiksvårigheter stöter på problem i algebran p.g.a. svag symbolförståelse, svårigheter i aritmetik och i problemlösning samt p.g.a. generalisering. Därför kommer vi att diskutera feltyper i Översiktstabell mot bakgrund av tidigare forskning.

7.1 Svag symbolförståelse

Bentley och Bentley (2016) beskriver att felet **1a,** Eleven adderar koefficienterna för variabeltermerna med de konstanta termerna (siffertermerna), se Tabell 1, uppkommer eftersom eleverna inte uppfattar att variabler har någon symbolisk mening, s.k. *icke-symbolisk presentation.* De menar att felet 1a är vanligt för de yngre eleverna, när de börjar arbeta med algebra. Då kan de förenkla uttrycket $15 + 4x$ till 19. Efter hand brukar eleverna inse att variabeln inte kan ignoreras utan att den måste hanteras på något sätt. Då kan uttrycket $15 + 4x$ förenklas till $19x$ vilket enligt Bentley och Bentley (2016) är ett bra tecken på begynnande förståelse av variabel men att läraren då måste fånga upp eleven och förklara variabelns betydelse i kontexten för eleven. Ingen av eleverna i vår studie hade förenklat $15 + 4x$ till 19 vilket innebär att dessa elever hade kommit till förståelse att variabeln inte kan ignoreras.

Feltypen 1a tillsammans med **1b**, Eleven adderar koefficienterna för olika variabler, se Tabell 2, tyder på att dessa elever har tagit till sig att variabeln kan fungera som en *generell talbeteckning* och kan därmed representera flera tal. För att eleverna ska undvika att blanda variablerna av olika sorter (feltyp 1b) kopplas ofta variablerna *a* till *a*pelsiner och *b* till *b*ananer i undervisningen. Man adderar eller subtraherar apelsiner och bananer var sig och får $2a + 3b + a + 5b = 3a + 8b$. Bentley och Bentley (2016) kallar sådan undervisning för *objektrepresentation* och menar att det är ganska olämplig begreppsmodell. Den fungerar vid addition/subtraktion men inte t ex vid multiplikation. När eleverna behöver förenkla uttrycket $a^2 \cdot 2a^2$ (feltyp **1d,** Eleven förstår inte att det finns multiplikation mellan koefficienten och variabeln**,** Tabell 4 rad18 – 21) får man en multiplikation av apelsiner; apelsin multiplicerad med apelsin, vilket saknar begreppslig betydelse. Även Bergsten, Häggström och Lindberg (1997) tar upp variablernas betydelse, eller icke-betydelse för eleverna. De menar att många elever använder bokstäver, variabler, som objekt eller som förkortningar, inte som symboler för tal. Poon och Leung (2009) anser att denna typ av fel är rotad i svag symbol förståelse och oförståelse av räkneoperationer. Arcavi (1994) menar att individer som vet hur man utför algebraiska manipulationer, men inte ser symbolernas möjliga relevans för att avslöja strukturen hos ett problem, har inte fullt ut utvecklat sin symbol känsla.

Bentley och Bentley (2016) beskriver att när eleverna behöver räkna ut värdet för utrycket $2x$ då $x = 7$ kan eleverna få värdet 27. De menar att variabeln representerar en siffra och inte ett tal, sifferepresentation. I vår studie såg vi att eleverna gör liknande fel (feltyp 1d, se Tabell 4 rad 14 – 17). Det är en konvention i algebra att en siffra framför en variabel betyder att talet och variabeln ska multipliceras, men en siffra framför en annan siffra betyder ett sammansatt tal. Bentley och Bentley (2016) föreslår att man ska skriva $2x$ som $2 \cdot x$ för att undvika misstaget. Vi kan då konstatera att även eleverna på gymnasiet kan behöva öva på skrivsättet $2 \cdot x$ för att feltypen 1d ska undvikas.

7.2 Likhetstecknets betydelse

Vi vill lyfta fram feltypen där elever använder likhetstecknet felaktigt och ge den en egen rubrik, trots att likhetstecknet i sig är en symbol och hamnar under symbolförståelsen.

Feltyper **1f**, Eleven saknar förståelse att det finns två led i en ekvation, och delvis **1c,** Eleven tolkar fel vad som krävs i uppgiften, Tabell 3 rad 6 – 12, handlar om att eleverna har svårigheter vid ekvationslösning med variabler i båda led. Vi har tidigare tagit upp betydelsen av likhetstecknet. Bentley och Bentley (2016) menar att eleverna som enbart har den dynamiska uppfattningen av likhetstecknet (blir-tänkande) har blivit blockerade i sin utveckling och kan därmed inte lösa den typen av ekvationer. Bentley och Bentley (2016) föreslår luckövningar av typen 7 – 4 = _ + 2 för utvecklingen av den statiska uppfattningen av likhetstecknet och som det framgår av vår studie behövs det även på gymnasiet.

Ett vanligt fel som många elever gör, oavsett om de har matematiksvårigheter eller inte, är att de skriver uträkningen på ett led, t. ex. $3x + 4 = 19 = 3x/3 = 15/3 = 5$, istället för att sära varje steg för sig; $3x + 4 = 19$, $3x = 15$, $x = 15/3$, $x = 5$. Här har eleverna tänkt att likhetstecknet står för räkneoperationen ”ger”, samt inte förstått att även likhetstecknet är en symbol som står för likhet mellan två sidor (Poon & Leung, 2010; Vincent, Bardini, Pierce, & Pearn, 2015), det som står längst ut på vänstra ledet ska vara ekvivalent med det som står längst ut på höger sidan.

7.3 Övergeneralisering

Feltypen **1h,** Eleven missar den negativa roten i andragradsekvation, Tabell 8 hade tidigare förklarats av Bentley och Bentley (2016) som menar att eleverna missar en negativ rot vid ekvationslösning som följd av *övergeneralisering* från ekvationer av första graden där det bara finns en rot. Vår egen lärarerfarenhet av undervisning på högstadiet och gymnasiet säger att det är vi lärare själva som bidrar till feltypen 1h. Eleverna lär sig räkna med Pythagoras sats långt innan de lär sig lösa enkla andragrdsekvationer $x^2 = 25$. Att det rent teoretiskt ska finnas en negativ rot när eleven beräknar hypotenusan i en rätvinklig triangel nämns i undevisningen enbart lite, utan att fästa för mycket uppmärksamhet vid det. När eleven då vid beräkning av hypotenusan skriver $x^2 = 25$, $x = 5$, dvs hypotenusan är 5 cm lång anses detta som korrekt svar. När eleven senare jobbar med algebra behöver eleven lära om sig att ekvationen $x^2 = 25$ har två lösningar $x = \pm 5$ vilket kan leda till förvirring (Bentley & Bentley, 2016).

Feltyper **2f,** Eleven utför inte samma operation i både vänster och höger led av en ekvation oavsiktligt och **2g,** Eleven utför inte samma operation i både vänster och höger led med avsikt, är av en procedurell karaktär. Skillnaden är dock att elever som gör fel av typen 2f har en intention till en korrekt genomförande av balansmetoden men missar att utföra beräkning i ena ledet. I feltyp 2g visar elever från början att de ska utföra olika operationer i VL och HL, vilket innebär obalans i ekvationen. Orsaken kan vara antingen att eleverna har tränat för lite på det momentet eller som t ex i Tabell 15 rad 81 har övergeneraliserat, tillämpat en procedur som inte passar i sammanhanget. Eleven har multiplicerat VL med 4 och HL med 5. Eleven använder samma strategi som krävs när man ska hitta minsta gemensamma nämnare, 20 i det här fallet. Då behöver bråket $\frac{x}{4}$ förlängas med 5 och $\frac{x}{5}$ med 4. Eleven förlänger dessutom bråken felaktigt, men det primära felet är att eleven missar att bråken står i olika led. Eleven försöker använda samma strategi i båda led utan att egentligen förstå de matematiska reglerna (Poon & Leung, 2010).

7.4 Svårigheter med aritmetiken

Feltyper **1g,** Eleven saknar förståelse för att +(–) kan skrivas som –, se Tabell 7 hör ihop med feltypen och **2c,** Eleven gör fel i beräkningar med negativa tal. Båda handlar om att eleverna behöver träna mer på räkning med negativa tal. Flera forskare har poängterat detta, bl.a. Olteanu (2003), Palm (2008) och Bentley och Bentley (2016). Svårigheter med algebra bottnar i det här fallet i aritmetik. Elever har fått för lite träning i räkning med negativa tal eller kanske har aldrig försått hur man räknar med dem. Feltypen 2c kan även kopplas med det som Träff och Samuelsson (2013) beskriver att eleverna subtraherar mindre från det större oavsett position. I vår studie blir det *6 – 10 = 4*. Sådana fel ser vi i t ex Tabell 11 rad 34 och 39.

Även feltyper **2a,** Eleven använder fel räknesätt, **2b**, Eleven räknar i fel ordning, **2e**, Eleven missar teckenbyte vid behandling av negativa parenteser, **2h**, Eleven hanterar felaktigt ekvationer med nämnare och **2j,** Eleven gör olika räknefel, avrundningsfel, svarar med fel antal decimaler, bottnar i aritmetik. En del elever har bristande kunskaper i hur de fyra räknesätten hör ihop. Eleverna som inte förstår att addition och subtraktion är *motsatta* räknesätt får stora svårigheter inom algebra. Rakes et al (2010) menar att lärare behöver ägna mycket tid att koppla algebra till aritmetik innan man går vidare algebrans grundläggande struktur. I verkligheten spenderar lärare istället en väldigt kort period för att överblicka aritmetiken och går fort in på olika algebraiska procedurer vilket gör ofta att eleverna inte förstår de abstrakta strukturella begrepp som är nödvändiga för att förstå procedurer.

Feltyp **5a,** Eleven redovisar endast numeriskt att lösningen stämmer (Tabell 23 rad 101 – 105), visar att eleverna har begreppslig förståelse för ekvationer, att det ska vara lika mycket i VL som i HL men de har inte lärt sig *proceduren*, varken balansmetod eller någon annan metod. Eleverna visar begreppsförmåga men inte procedurförmåga (Bentley & Bentley, 2016). Eleven kan ha lärt sig lösa ekvationer genom att testa olika tal tills ekvationen stämmer. Detta kan leda till att eleven inte vill använda ekvationer vid lösningen. Bokstäverna, variablerna, används som objekt eller förkortningar, inte som symboler för tal (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 1997).

7.5 Prioriteringsregler

Att eleverna har svårt med parenteser är välkänt och välbeskrivet av olika forskare. Enligt prioriteringreglerna som eleverna lär sig redan på mellanstadiet inom aritmetik ska numeriska uttryck inom parentes räknas ut först. Under högstadiet tillkommer negativa tal som oftast skrivs inom parentes. När eleven behöver räkna ut t ex 6 · (–3) brukar elever reagera: ”inom parentes räknas ut först”, vilket är övergeneralisering och inte passar i det här fallet. Inom algebra tillkommer olika uttryck inom parentes som behöver hanteras på olika sätt. Feltyper **2d,** Eleven tillämpar den distributiva lagen felaktigt, och **2e,** Eleven missar teckenbyte vid behandling av negativa parenteser, är välomskrivna av olika forskare. Oftast beskriver dock forskare felaktig tillämpning av den distributiva lagen då elever enbart multiplicerar in den första termen in i parentesen, Tabell 12 rad 51 – 55, 59 (Bentley & Bentley, 2016).

I vår studie upptäckte vi att eleverna ibland försöker sortera variabeltermer med varandra och siffertermer med varandra utan att tänka på parenteser överhuvudtaget (se Tabell 12 rad 56 – 58). Vi har inte sett denna feltyp i andra studier. Felet 2e skulle delvis kunna avhjälpas av eleverna själva om de skulle redovisa (eller snarare ta hjälp av) mellanled (se Tabell 13 rad 65 – 70). Det är lärarens uppgift att motivera eleverna att skriva ner mellanled och inte skriva slutgiltiga svaret direkt. Det är vår uppgift som lärare att motivera eleverna att skriva ner mellanled och inte skriva slutgiltiga svaret direkt.

7.6 Svårigheter med problemlösning

Ett stort antal elever lämnar problemlösningsuppgifterna (5 och 6, se Bilaga 1) på provet obesvarade. De vet helt enkelt inte hur problemuppgifterna ska angripas. Meningen med algebra är att den ska ge verktyg för att lösa problem! Vid problemlösning är det oftast först när problemet blir så komplext, att de andra verktygen inte räcker till, som användningen av ekvationer känns motiverad (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 1997). Fokus i undervisningen brukar ligga mer på procedurer och mindre på problemlösning (Skolverket, 2019; Samuelsson 2005). Lithner (2000) har analyserat innehållet i matematiska skolböcker. Här kom han fram till att ca 70 % av uppgifterna kan lösas genom strategivalet att identifiera liknande lösta exempel eller någon form av regel, och strategigenomförandet är att kopiera dessa. Uppgifterna löses utan att egentligen använda sig av något resonemang. Detta är ett ytligt sätt att lära sig matematik. I ca 20 % av uppgifterna är strategivalet fortfarande att identifiera liknande exempel eller regler, men man måste göra en mindre lokal modifiering av lösningsmetoden i strategigenomförandet. I 10 % av uppgifterna måste egna resonemang konstrueras. Dessa kan kallas ”kreativa problem” och återfinns nästan bara bland de svåra uppgifterna i slutet, vilket medför att merparten av de studerande kanske aldrig ens provar denna typ av uppgift (Lithner, 2000). Vår slutsats är att lågpresterande elever eller elever i matematiksvårigheter fastnar i algebraiska procedurer och kommer aldrig till problemlösning.

Eleverna som vågar ge sig på problemlösningsuppgifterna gör fel av typer **3**, Modelleringsfel eller problemlösningsfel, **4a,** Eleven använder ett oeffektivt resonemang, och **4b**, Eleven följer inte anvisningarna. Eleven som löser problemet i Tabell 19 rad 94 ställer upp korrekta uttryck för hur mycket pengar varje person har. Att eleven skriver sedan *3x* istället för *5x* kan bero på att eleven resonerar: tre personer, alltså *3x*. Eleven som löser problemet i Tabell 20 rad 97 inför tre olika variabler som hen inte använder sig av. Då det står i uppgiften: *Lös med ekvation,* inför eleven ekvationen som hen sedan har ingen nytta av. Vi kan dra slutsats att eleverna med lösningar i Tabell 19 rad 94 och Tabell 20 rad 97 har inte tillägnat sig verktyg för problemlösning med algebra. Kan hända att dessa elever har svårigheter med lästal med eller utan svårighter i generella räkning (Powell & Fuchs, 2014).

En svårighet med att ställa upp en ekvation, utifrån en text, är att texten beskriver problemets struktur, inte vilka beräkningar som ger lösningen. Eleven måste våga använda okända tal som om de vore kända (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 1997). Elever har ofta svårt att förstå vad uppgiften handlar om. Ett sätt att hjälpa elever att klara detta bättre (problemlösning med ekvation) är att lära eleverna läsa och diskutera *innehållet i uppgiften* innan de försöker lösa den (Grønmo, 1999).

Att feltypen **5c**, Eleven löser uppgiften utan att använda algebra (Tabell 24 rad 109), kan överhuvudtaget kallas för fel kan diskuteras. Eleven löser uppgift *b* utan att använda uttrycket för omkretsen som eleven själv hade ställt upp i uppgift *a*. Vår slutsats är att denna elev har inte tillägnat sig verktyg för problemlösning med algebra men kan ändå lösa problemet med andra metoder. Feltyper 5a och 5c finns inte beskrivet i andra studier vi tittat på.

7.7 Slarvfel

Felen i kategori **6,** Övriga fel (Tabell 27 rad 112 – 114), som bl.a. beskriver felaktiga avskrivningar, brukar i dagligt tal kallas för *slarvfel*.

8. Vidare forskning

I vår studie hade vi tillgång till 80 skriftliga prov i algebra skrivna av första årets gymnasieelever. Vi kunde endast göra vår egen tolkning av elevernas misstag, fel och missuppfattningar. Som vidare forskning kan vi därför föreslå att komplettera studie om elevfel i algebra med elevintervjuer. Kombinera ett skriftligt algebraprov med enskilda samtal där eleverna efteråt kan kommentera hur de tänkt när de räknat och svarat på uppgifterna. Då kan det komma fram vad som är orsaken till att eleven gör fel.

Ett annat förslag på vidare forskning är att studera specifikt elever i matematiksvårigheter, samt jämföra om fel som dessa elever gör i algebra skiljer sig från fel som övriga elever gör. Detta för att hitta ett bättre sätt att undervisa dessa elever i algebra.

9. Referenser

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics 14(3)*, pp. 24-35.

Bentley, P.-O., & Bentley, C. (2016). *Milstolpar och fallgropar i matematikinlärning - Matematikdidaktsk teori om misstag, orsaker och åtgärder.* Stockholm: Liber.

Bergsten, C., Häggström, J., & Lindberg, L. (1997). *Nämnaren Tema - Algebra för alla.* Göteborg: Göteborgs universitet.

Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology*, 247-253.

Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder. 3:e upplagan.* Malmö: Liber Ekonomi.

Bugden, S., & Ansari, D. (2015). How can cognitive developmental neuroscience constrain our understanding of developmental dyscalculia? In S. Chinn, *The Routledge International Handbook of Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties* (pp. 18-43). New York: Routledge.

Cañadas, M. C., Molina, M., & del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem-posing. *Educational Studies in Mathematics 98*, pp. 19-37.

Caviola, S., & Lucangeli, D. (2015). Lights and shadows of mental arithmetic. Analysis of cognitive processes in typical and atypical development. In S. Chinn, *Routledge international handbook of Dyscalculia and mathematical learning difficulties* (pp. 304-314). New York: Routledge.

Chapin, S. H., & O'Connor, C. (2007). Academically producive talk: Supporting students' learning in mathematics. In M. M. Strutchens, & P. C. Elliot, *The learning of Mathematics (Sixty-ninth yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics)* (pp. 7-20). Reston: VA:NCTM.

Dahl, K. (1996). *Den fantastiska mateamtiken.* Stockholm: Fischer & Co.

De Lange, J. (2006). Mathematical literacy for living from OECD-PISA. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics vol 25*, 13-35.

Desoete, A., De Weerd, F., Vanderswalmen, R., & DeBond, A. (2014). How Persistent is a Diagnosies of Mathematical Disorder at an Early Age? A Longitudinal Study. *Interntional Journal for Research in Learning Disabilities 2(1)*, 42-71.

Dowker, A., Sarkar, A., & Looi, C. Y. (2016, April 25). Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? *Frontiers in Psychology 7*, p. doi: 10.3389/fpsyg.2016.00508.

Emerson, J. (2015). The enigma of dyscalculia. In S. Chinn, *The routledge international handbook of Dyscalculia and mathematical learning difficulties* (pp. 217-227). New York: Routledge.

Engström, A. (2015). *Specialpedagogiska frågeställningar i matematik.* Karlstad: Karlstads Universitet - Fakulteten för hälsa, natur- och teknikvetenskap.

Engvall, M. (2013). *Handlingar i matematikklassrummet: en studie av undervisningsverksamheter på lågstadiet då räknemetoder för addition och subtraktion är i fokus.* Linköping: Linköpings Universitet.

Fejes, A., & Thornberg, R. (2015). *Handbok i kvalitativ analys.* Stockholm: Liber.

Fokusrapport. (2015). *Dyskalkyli.* Stockholm: Stockholms läns landsting.

Gojak, L. M. (2013, December 3). *Algebra: Not "If" but "When"*. Retrieved from The National Council of Teachers of Mathematics (Inc) : www.nctm.org/News-and-Calendar/Messages-from-the-President/Archive/Linda-M_-Gojak/Algebra_-Not-_if_-but-_When_/

Grønmo, L. S. (1999). En bokstav kan säga mer än tusen ord. *Nämnaren nr 4*, pp. 20-26.

Hammar Chiriac, E., & Einarsson, C. (2013). *Gruppobservationer. 2:a upplagan.* Lund: Studentlitteratur.

Hattie, J. (2008). *Visible learning: A synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement.* London: Routledge.

Hu, Q., Son, J.-W., & Hodge, L. (2016). How teachers in China and U.S. respond to student errors in solving quadratic equations. *Mathematical Knowledge for Teaching*, pp. 458-465.

Hudson, P., & Miller, S. P. (2006). *Designing and Implementing Mathematics Instruction for Students with Diverse Learning Needs.* Boston: Pearson.

Häggström, J. (1996). Förstå algebra. *Nämnaren 1*, pp. 38-44.

Kalder, R. S. (2012). Are we contributing to our students' mistakes? *Mathematics teacher, vol 106. No 2.*, 90-91.

Karagiannakis, G. N., & Cooreman, A. (2015). Focused MLD intervention based on the classification of MLD subtypes. In S. Chinn, *The routledge international handbook of Dyscalculia and mathematical learning difficulties* (pp. 265-276). New York: Routledge.

Kaufmann, L., Mazzocco, M. M., Dowker, A., von Aster, M., Göbel, S. M., Grabner, R. H., . . . Nuerk, H.-C. (2013). Dyscalculia from a developmental and differential perspective. *Frontiers in Psychology 4 (August) 516*, 1-5.

Ketterlin-Geller, L. R., & Chard, D. J. (2011, Maj). Algebra readiness for students with learning difficulties in grades 4-8: Support though the study of number. *Australian Journal of Learning Difficulties Vol 16 No 1*, pp. 65-78.

Lewis, K. (2014). Difference not deficit: reconceptualizing mathematical learning disabilites. *Journal for Research in Mathematics Education 45(3),* 351-396.

Lithner, J. (2000). Varför blir matematik så svårt? *Nämnaren nr 4*, pp. 46-51.

Lunde, O. (2011). *När siffror skapar kaos.* Stockholm: Liber.

McIntosh, A. (2009). *Förstå och använda tal - en handbok.* Göteborg: Göteborgs Universitet.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005, Juli/Augusti). Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Patterns Hinders Learning and Performance on Equations. *Child Development (Vol 76, Number 4)*, pp. 883-899.

Moore, A. M., Mc Auley, A. J., Allred, G. A., & Ashcraft, M. H. (2015). Mathematics anxiety, working memory, and mathematical performance. The triple-task effect and the affective drop in performance. In S. Chinn, *The routledge international handbook of Dyscalculia and mathematical learning difficulties* (pp. 326-336). New York: Routledge.

Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nordic Studies in Mathematics Education 18(2)*, pp. 3-46.

Olteanu, C. (2003). Algebra - viktigt men svårt. *Nämnaren nr 3*, pp. 35-39.

Palm, A. (2008). Missuppfattningar i algebra - Problem för läraren eller eleven? *Nämnaren nr 3*, pp. 38-42.

Persson, P.-E. (2005). *Bokstavliga svårigheter - Faktorer som påverkar gymnasieelevers algebralärande.* Luleå: Luleå Teknsiska Universitet.

Picciotto, H., & Wah, A. (1993). A new Algebra: Tools, themes, concepts. *Journal of Mathematical Behavior 12*, pp. 19-42.

Poon, K.-K., & Leung, C.-K. (2010, Januari). Pilot study on algebra learning among junios secondary students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol 41, No 1*, pp. 49-62.

Powell, S. R., & Fuchs, L. S. (2014). Does Early Algebraic Reasoning Differ as a Function of Students' Difficulty with Calculations versus Word Problems? *Learning Disabilities Research & Practice, 29 No 3*, pp. 106-116.

Quinlan, A. (1992). Levels of understanding of algebraic symbols and relationship with sucess on algebraic tasks. In A. Baturo, & T. Cooper, *New directions in algebra education* (pp. 124-157). Red Hill: Old: Centre for Mathematics and Science Education, Queensland University of Technology.

Radford, L. (2000). Signs and Meanings in Students' Emergent Algebraic Thinking: a Seimiotic Analysis. *Educational Studies in Mathematics 42*, pp. 237-268.

Rakes, C. R., Valentine, J. C., McGatha, M. B., & Ronau, R. N. (2010). Methods of Instuctional Improvement in Algebra: A Systematic Review and Meta-Analysis. *Review of Educational Research 80 (3)*, pp. 372-400.

Ramaa, S. (2015). Arithmetic difficulties among socially disadvantaged children and children with dyscalculia. In S. Chinn, & (Ed), *The Routledge international handbook of Dyscalculia and mathematical learning difficulties* (pp. 146-165). New York: Routledge.

Ramirez, G., Chang, H., Maloney, E. A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2015). On the relationship between math anxiety and math achievement in early elementary school: The role of problem solving strategies. *Journal of Experimental Child Psychology 141*, 83-100.

Samuelsson, J. (2005). *Lärarstudenternas erfarenheter av matematikundervisning. Vad händer när eleverna inte förstår?* Linköping: Linköpings Universitet e-press.

Schwenk, C., Sasanguie, D., Kuhn, J.-T., Kempe, S., Doebler, P., & Holling, H. (2017). (Non-)symbolic magnitude processing in children with mathematical difficulties: A meta-analysis. *Research in Developmental Disabilities 64(May)*, 152-167.

Sharma, M. C. (2015). Numbersence. A window into dyscalculia and other mathematical difficulties. In S. Chinn, *The routledge international handbook of Dyscalculia and mathematical learning difficulties* (pp. 277-291). New York: Routledge.

Skolverket. (2008). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007: En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar berkäningsprocedurer (Analysrapport till 323: 2008).* Stockholm: Fritzes.

Skolverket. (2011). *Läroplan för gymnasieskolan*. Retrieved from https://www.skolverket.se/undervisning/gymnasieskolan/laroplan-program-och-amnen-i-gymnasieskolan/gymnasieprogrammen/amne?url=1530314731%2Fsyllabuscw%2Fjsp%2Fsubject.htm%3FsubjectCode%3DMAT%26courseCode%3DMATMAT01b%26tos%3Dgy&sv.url=12.5dfee44715d35a5cdfa

Skolverket. (2019). *Kommentarsmaterial till ämnesplanen i matematik i gymnasieskolan*. Retrieved from https://www.skolverket.se/download/18.6011fe501629fd150a2893a/1530187438471/Kommentarmaterial_gymnasieskolan_matematik.pdf

SPSM. (2012). *Specialpedagogiska skolmyndighet*. Retrieved from https://www.spsm.se/

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv.* Stockholm: Prisma.

Träff, U., & Samuelsson, J. (2013). An analysis of errors in multi-digit arithmetic and arithmetic word problem solving in chlidren with mathematical learning difficulties. *Special Education 28*, 121-132.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of school algebra and uses of variables. In B. Moses, *Algebraic Thinking, Grades K-12; National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)* (pp. 7-13). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningsed.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Widén, P. (2015). Kvalitativ textanalys. In A. Fejes, & R. Thornberg, *Handbok i kvalitativ analys* (pp. 176-193). Stockholm: Liber.

Vincent, J., Bardini, C., Pierce, R., & Pearn, C. (2015). Misuse of the equals sign: An entrenched practice from early primary years to tertiary mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal 29(2)*, pp. 31-39.

Witzel, B. S., Mercer, C. D., & Miller, D. M. (2003). Teaching Algebra to Students with Learning Difficulties: An Investigation of an Explicit Instruction Model. *Learning Disabilities Research & Practice, 18(2)*, pp. 121-131.

Woolfolk, A., & Karlberg, M. (2015). *Pedagogisk psykologi.* Edinburgh Gate: Pearsons Education Ltd.

Bilaga 1

Provuppgifter

1. Lös ekvationerna

a) $5x - 8 = 57$

b) $\frac{x}{5} + 9 = 15$

c) $7x + 15 - 2x = 60$

d) $3x - 8 + 5x + 4 = 28$

e) $3x + 16 = 5x - 24$

f) $5x - 24 = 3x + 16$

g) $6x - 5 = 19 - 2x$

h) $4 + \frac{x}{4} = 5 - \frac{x}{5}$

i) $2(2x + 1) = 3(x - 3)$

j) $x^2 = 54$

k) $2x^2 = 32$

2. Förenkla uttrycket

a) $2a + 3b + a - 8b$

b) $(5x - 13) - (x - 7)$

c) $a + 2(a + 3)$

d) $3 - (2x + 3)$

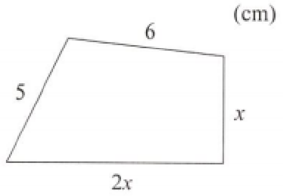
e) $14x - 3(x + 6)$

f) $3(x - 2y) - 4(y - 2x)$

g) $5x \cdot 3x$

3. Räkna ut värdet av uttrycket

a) $3a - 20 \text{ om } a = 11$
b) $3a - b \text{ om } a = -4 \text{ och } b = 2$
c) $7x + 3(5 - 2x) \text{ om } x = 4$



4. a) Ange ett algebraiskt uttryck för figurens omkrets.

b) Hur lång är den längsta sidan om omkretsen är 23 cm?

5. Niklas har 40 kr mer än Sofia. Elin har tre gånger så mycket som Sofia. Tillsammans har Niklas, Elin och Sofia 500 kr. Hur mycket har var och en? Lös med ekvation.

6. I en rektangel är den långa sidan 3 gånger så lång som den korta sidan. Hur långa är sidorna i rektangeln om omkretsen är 240 meter? Lös med ekvation.

Bilaga 2

Facit till provuppgifterna

1. Lös ekvationerna

a) $5x - 8 = 57$

$x = 13$

b) $\frac{x}{5} + 9 = 15$

$x = 30$

c) $7x + 15 - 2x = 60$

$x = 9$

d) $3x - 8 + 5x + 4 = 28$

$x = 4$

e) $3x + 16 = 5x - 24$

$x = 20$

f) $5x - 24 = 3x + 16$

$x = 20$

g) $6x - 5 = 19 - 2x$

$x = 3$

h) $4 + \frac{x}{4} = 5 - \frac{x}{5}$

$x = \frac{20}{9}$

i) $2(2x + 1) = 3(x - 3)$

$x = - 11$

j) $x^2 = 54$

$x = \pm 7{,}34$

k) $2x^2 = 32$

$x = \pm 4$

2. Förenkla uttrycket

a) $a + 3b + a - 8b = 3a - 5b$

b) $(5x - 13) - (x - 7) = 4x - 6$

c) $a + 2(a + 3) = 3a + 6$

d) $\mathbf{3 - (2x + 3) = -2x}$

e) $\mathbf{14x - 3(x + 6)}$ **= *11x – 18***

f) $\mathbf{3(x - 2y) - 4(y - 2x)}$ **= *11x – 10y***

g) $\mathbf{5x \cdot 3x = 15x^2}$

3. Räkna ut värdet av uttrycket

a) ***3a – 20 om a = 11***

Svar: 13

b) $\mathbf{3a - b\ om\ a = -4\ och\ b = 2}$

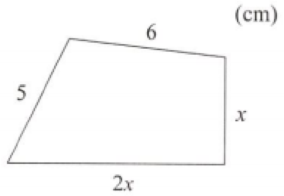
Svar: - 14

c) ***7x*** $\mathbf{+3(5 - 2x)\ om\ x = 4}$

Svar: 19

4. a) Ange ett algebraiskt uttryck för figurens omkrets.

b) Hur lång är den längsta sidan om omkretsen är 23 cm?



a) O = 3*x* + 11

b) Svar: Den längsta sidan är 8 cm.

5. Niklas har 40 kr mer än Sofia. Elin har tre gånger så mycket som Sofia. Tillsammans har Niklas, Elin och Sofia 500 kr. Hur mycket har var och en? Lös med ekvation.

Lösning:

Sofia: *x*

Niklas: *x* + 40

Elin: 3*x*

***x* + *x* + 40 + 3*x* = 500**

5*x* = 460

***x* = 92**

Svar: Sofia har 92 kr, Niklas 132 kr och Elin 276 kr.

6. I en rektangel är den långa sidan 3 gånger så lång som den korta sidan. Hur långa är sidorna i rektangeln om omkretsen är 240 meter? Lös med ekvation.

Lösning:

Omkrets = $3x + x + 3x + x = 240$

$8x = 240$

$x = 30$

Kortsidor x, Långsidor 3x

Svar: Kortsidor är 30 m långa och långsidor är 90 m.