Linköpings universitet | Matematiska institutionen
Forskningskonsumtion, 15 hp | Ämneslärarprogrammet
Vårterminen 2019 | LiU-LÄR-MG-A—2019/11—SE

På vilka sätt kan lärare hjälpa elever i matematiksvårigheter?

– En litteraturstudie

In what ways can teachers help students in mathematical difficulties?
– A literature study

Kim Björk
Amanda Engdahl

Handledare: Joakim Samuelsson
Examinator: Jonas Bergman Ärlebäck

Linköpings universitet
SE-581 83 Linköping, Sweden
013-28 10 00, www.liu.se

LINKÖPINGS UNIVERSITET	Institutionen för (ange institution) 581 83 LINKÖPING	**Seminariedatum** 2019-05-29

Språk	**Rapporttyp**	**ISRN-nummer** (fyll i löpnr)
x Svenska/Swedish Engelska/English	Examensarbete grundnivå	LiU-LÄR-MG-A--2019/11--SE

Titel På vilka sätt kan lärare hjälpa elever i matematiksvårigheter? – En litteraturstudie

Title In what ways can teachers help students in mathematical difficulties? – A literature study

Författare Kim björk och Amanda Engdahl

Sammanfattning

Det finns möjligheter för elever i matematiksvårigheter att nå skolans kunskapskrav i ämnet matematik om de får hjälp i form av effektiva interventioner. Därför är det av intresse att undersöka vilka undervisningsmetoder som ingår i effektiva interventioner.
Frågeställningarna för denna litteraturstudie är:

- På vilka sätt kan lärare stötta elever i matematiksvårigheter?
    - Vilka undervisningsmetoder har visats vara gynnsamma för elever i matematiksvårigheter?
    - Vilka representationsformer använder lärare för att stötta elever i matematiksvårigheter?
- Hur påverkar undervisnings- och representationsformer elevers matematiska förmågor?

I resultatet framkommer det att effektiva interventioner inkluderar muntliga och skriftliga instruktioner (med hjälp av visuellt stöd), datorstöd, laborativ undervisning och självbedömning samt olika kombinationer av dessa. Hur effektfull en intervention är mäts med hjälp av effektstorlek och alla artiklar som ingår i denna litteraturstudie har i metaanalyser bedömts ha stor effektstorlek.

Abstract

There are opportunities for students in mathematical difficulties to reach the school's requirements in mathematics if they receive help in form of effective interventions. Therefore, it is of intrest to investigate which teaching methods are inlcluded in effective interventions.

The questions for this literature study are:

- In what ways can teachers support students in mathematical difficulties?
    - What teaching methods have shown to be beneficial for students in mathematical difficulties?
    - What forms of representation do teachers use to support students in mathematical difficulties?
- How does teaching methods and reprepresentations influence the mathematical abilities of students?

The result shows that effective inteventions include verbal and written instructions (using visual support), computer support, laboratory teaching and self-assessment, as well as various combinations of the mentioned interventions. The effectiveness of an intervention is measured by means of effect size. All articles included in this literature study have in meta-analyzes been considered to have a large effect size.

Nyckelord Matematiksvårigheter, interventioner, mathematics difficulties, interventions

Innehållsförteckning

1 Inledning

Att visa omsorg och förståelse för människors olikheter är en av svenska skolans grundläggande värden (Skolverket, 2018). Inget barn är den andra lik och utifrån ett relationellt (specialpedagogiskt) perspektiv ligger det på skolans ansvar att bemöta alla elever utifrån elevernas egna förutsättningar och möjligheter (Nilholm, 2007). För att förtydliga innebär det att eleverna inte bär ett ansvar att anpassa sig efter rådande kunskapsstruktur i skolan (ibid). Det är med andra ord varje barns rättighet att få de förutsättningar de behöver för att tillägna sig den kunskap och de förmågor som skolans kunskapskrav och läroplan förmedlar. Därför argumenterar vi som blivande ämneslärare i matematik att det är viktigt att, utifrån ett professionsperspektiv, undersöka vad litteraturen säger om hur man på bästa sätt möter och hjälper elever i matematiksvårigheter. Som läsaren kommer bli varse om i bakgrunden skriver Malmer (2002) att om en elev inte når målen i styrdokumenten anses eleven ha inlärningssvårigheter. En elev i *matematiksvårigheter* kan tänkas vara en elev som inte uppfyller kunskapskraven för ämnet matematik i skolan. För denna litteraturstudie är därför kategorin ”elever i matematiksvårigheter” bred och innefattar alla elever i grundskolan som av olika anledningar inte klarar målen i styrdokumenten för ämnet matematik. Med det sagt har vi alltså inte exkluderat elever med olika typer av inlärningssvårigheter, såsom exempelvis dyskalkyli som innefattar särskilda inlärningssvårigheter för ämnet matematik. Dock har vi i denna studie medvetet valt att inte fördjupa oss ytterligare i definitioner för dyskalkyli då det inte är studiens syfte samt att dyskalkyli inte heller är en lika väldefinierad diagnos som exempelvis dyslexi (Chinn, 2017). Det råder alltså oenigheter hos forskarlag kring definitionen av dyskalkyli, liksom hur man går tillväga för att diagnostisera tillståndet (ibid). Vidare syftar uttrycket ”elever *i* matematiksvårigheter” att betona att en elev endast är i en svårighet eller problematisk situation i *relation* till något, i detta fall i relation till skolans kunskapskrav. Vi vill med detta belysa att denna studie läses i skenet av det relationella perspektivet.

Matematiksvårigheter kan ta sig i uttryck på olika sätt och bero på olika saker, såsom exempelvis nedsatt: korttidsminne, arbetsminne och matematiskt långtidsminne (Chinn, 2017). Vidare skriver Chinn att en elev, trots svårigheter, kan bli en effektiv matematiker. Med effektiv matematiker menas en elev som uppfyller skolans mål för ämnet matematik liksom kan klara av den matematik som eleven möter i sin normala vardag. Men om matematiska misslyckanden upprepar sig om och om igen över tid kan eleven internalisera det till en negativ karaktär och kan då leda till att elevens potential aldrig förverkligas. Detta är något vi, på flera sätt, känner igen i mötet med en del elever i matematiksvårigheter. Vi tycker därför det är viktigt att undersöka om det finns några särskilda undervisningsmetoder och representationsformer som fungerar bra för elever i matematiksvårigheter.

Att lära sig matematik är inte bara viktigt som en del av ett kulturhistoriskt arv utan en nödvändighet för att delta i samhällets beslutsprocesser: "Kunskaper i matematik ger människor förutsättningar att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocesser" (Skolverket, 2018, s. 54). Det är därför viktigt att hjälpa elever i matematiksvårigheter att tillägna sig de grundläggande matematiska förmågorna, om vi ser på det utifrån ett demokratiskt medborgarperspektiv. För att ge ett exempel kan det tänkas vara viktigt att kritiskt kunna tolka statistik och data i nyhetsartiklar (och liknande medier), liksom att se källkritiskt på eventuella bakomliggande motiv hos författaren.

Stenhags studie (2010) kopplar matematik till den *formella förmågan* vilket innebär att kunskaper från matematikundervisningen kan underlätta annat lärande. Stenhags *formalbildningsargument* är ytterligare ett argument till att hjälpa elever i matematiksvårigheter att lyckas i ämnet.

1.1 Syfte

Vårt syfte med denna studie är att undersöka vad forskningslitteraturen säger om hur man på bästa sätt möter och hjälper elever i matematiksvårigheter.

1.2 Frågeställningar

Vi har valt följande frågeställningar:

- På vilka sätt kan lärare stötta elever i matematiksvårigheter?
    - Vilka undervisningsmetoder har visats vara gynnsamma för elever i matematiksvårigheter?
    - Vilka representationsformer använder lärare för att stötta elever i matematiksvårigheter?
- Hur påverkar undervisnings- och representationsformer elevers utveckling av matematiska förmågor?

2 Bakgrund

I bakgrunden kommer vi gå igenom det som i läroplanen benämns som centralt innehåll för ämnet matematik liksom de kunskapskrav som eleverna förväntas bedömas efter. Därefter presenterar vi, för vår frågeställning, relevanta matematiska förmågor. Vi gör detta då vi vill att läsaren ska få en känsla för vilken typ av matematik och förväntningar som eleven möter i skolan. Sedan tar vi upp vad som kan tänkas känneteckna elever i matematiksvårigheter och vad matematiksvårigheter kan vara. Slutligen skriver vi om olika undervisningsmetoder i matematik som förekommer i skolan.

2.1 Allmänna matematiksvårigheter

Malmer (2002) skriver att i skolan har en elev *inlärningssvårigheter* om eleven inte når målen för godkänt betyg i styrdokumenten. I matematiken kan alltså detta innebära att en elev i *matematiksvårigheter* är en elev som inte uppfyller kunskapskraven för matematik i skolan. Det kan finnas ett flertal olika faktorer som kan ligga till grund för matematiksvårigheter; bland annat läs- och skrivsvårigheter eller koncentrationssvårigheter, men även brister i pedagogiken som eleven möter i skolan (SPSM, 2019). Lunde (2011) skriver om åtta olika kännetecken man kan hitta hos elever i matematiksvårigheter:

1. Spegelvändning av siffror och tal, t.ex. 15 och 51.

2. Bristande sekvensering, framförallt vid jämförelser av tal och när det gäller de olika leden i sättet att lösa en viss typ av uppgifter (algoritmer).

3. Symbolsäkerheten - knuten till ett svagt visuellt minne. De olika symbolerna har inte fått ett så tydligt innehåll att eleven förstår meningen och användningen.

4. Bristande spatial förmåga - som rör själva perceptionen av siffror och symboler.

5. Korttidsminnet - som har att göra med förmågan att minnas information om tal hämtade från läroboken/arbetshäftet och kunna överföra dem till arbetsboken, eller förmågan att minnas tal som man hört och som därefter ska användas.

6. Långtidsminnet - som gör att automatiseringen inte fungerar och att man inte kommer ihåg fakta.

7. Begreppsbildningen - litet ordförråd och språksvårigheter

8. Bristande kognitiv förmåga, svaga färdigheter.

(Lunde, 2011, s. 44)

Malmer (2002) lyfter kombinationen av läs-/skrivsvårigheter och matematiksvårigheter. Hon skriver att den språkliga kompetensen lägger grunden för all inlärning och att språk och symboler även har en stor och avgörande roll inom matematiken. Om man har dyslektiska svårigheter kan det vara jobbigt med symboler både inom språk och matematik. Inom matematiken kan det vara lätt att förväxla olika symboler som är lika varandra, såsom + och - eller < och >, samt att vissa siffror som liknar varandra (såsom 1 och 7, 6 och 9). Det kan även ske en förväxling mellan ord som är nära varandra i uttalet t.ex. 15 och 51, liksom 16 och 61. Om man säger ordet sjutton (17) så ljudar man ordet "sju" först vilket medför att eleven skriver siffran 71 istället för 17. Elever kan även ha problem med uppställningar av vanliga algoritmer. Exempelvis när man räknar med uppställning så behöver man ändra riktningen man räknar i. I en vanlig uppgift (125 + 200 = 325) så räknar man från vänster till höger medan i en uppställning räknar både uppifrån och ner och från höger till vänster (ibid).

Lunde (2011) skriver att elever i matematiksvårigheter ofta presterar bra inom taluppfattning när det handlar om naturliga tal och att eleverna även då bemästras de fyra räknesätten (aritmetik). Men så fort det handlar om bråk, procent, problemlösningar, geometri och mått framkommer stora svårigheter. Några andra kännetecken för elever i matematiksvårigheter är att de kan ha svårt med antingen korttidsminnet eller långtidsminnet eller samspelet dem emellan. Något man ofta kan se hos elever i matematiksvårigheter är att det ofta tar lång tid för dem att komma fram till ett svar och att detta är oberoende av vilket räknesätt som används. Eleverna har även svårt att välja strategier och ofta använder de sig av samma strategi för olika uppgiftstyper (ibid).

Även Lunde (2011) pratar om procedurkunskap och konceptuell kunskap som de två grundläggande färdigheterna inom matematiken. Procedurkunskap kommer till uttryck när eleven arbetar med räkning eller löser enklare uppgifter som innehåller addition, subtraktion, räkne- och talfaktastrategier. Konceptuell kunskap handlar om kognitiva funktioner som inte direkt kan iakttagas utan först när man gör observationer eller tester som undersöker detta.

Antalsförståelse är en konceptuell kunskap och om man som elev har en fullt utvecklad antalsförståelse så kan man exempelvis se mängden 12 som sammansatt av 12 lika eller olika element, vilken även är sammansatt av andra mängder såsom 5 + 7 eller 2 + 2 + 2 + 3 + 3 eller att mängden 12 har ett element mer än mängden 11 (ibid).

2.2 Centralt innehåll och kunskapskrav

I läroplanen framgår vad som räknas som *centralt innehåll* i respektive skolämne för varje årskurs liksom vilka *kunskapskrav* som ska bedömas (Skolverket, 2018). Läroplanen kan därför tänkas vara en viktig vägvisare för hur det matematiska innehållet ska behandlas och bedömas. Vi tror också att läroplanen är grunden för en likvärdig utbildning för alla elever och vi vill därför i bakgrunden introducera läsaren till vad matematik är inom ramen för undervisning i skolan årskurs 7-9. Det kan dock vara intressant att tillägga att lärare anses vara autonoma yrkesutövare, vilka styrdokument och skolledare kan ha svårt att påverka eller styra över (Chinn, 2017). När svenska skolan decentraliserades under 90-talet kom ansvaret och resurserna för skolan att läggas på kommunerna (Berhanu, 2011), varför lokala tolkningar av styrdokumenten kan tänkas vara troliga. Med andra ord kan lärares varierade didaktiska tolkningar av styrdokument påverka det pedagogiska arbetet i skolan och därmed också vilken matematik som förmedlas till eleverna. Detta är dock inget vi kommer diskutera vidare i vårt arbete men värt att ha i åtanke när man diskuterar det matematiska innehållet i skolan.

Taluppfattning och tals användning, *algebra*, *geometri*, *sannolikhet och statistik*, *samband och förändring* och *problemlösning* är de matematiska områden som läroplanen listar som det centrala innehållet i matematik för årskurs 7-9 (Skolverket, 2018). Då det har visat sig att matematiksvårigheter ofta handlar om bristande förmåga att "plocka fram" talfakta från minnet (Chinn, 2017; Lunde, 2011) kommer vi i detalj presentera taluppfattning och behandla de övriga ur ett helhetsperspektiv (talfakta ingår även i de övriga fem områdena). I *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik* skrivs att taluppfattning "handlar om förståelse för tals betydelse, relationer och storlek, [vilken] är grundläggande för att kunna utveckla kunskaper i matematik" (Skolverket, 2017, s. 12). Vidare handlar området om *beräkningsmetoder* och hur det används och kommentarmaterialet betonar ett *successivt* arbete för att utvidga talområdet. Successivt arbete kan tolkas bottna i Vygotskijs teori om den proximala utvecklingszonen ZPD (eng. "Zone of Proximal Development"). I stora drag innebär teorin att eleven lär sig "undan för undan" mot ett mer abstrakt tänkande och att undervisningen ska syfta till att eleven stimuleras att lära sig nya kunskaper i ett närliggande område där kunskapen kan tänkas vara tillgänglig för eleven (Skott, Jess, Hansen & Lundin, 2010). Vi tänker att teorin om ZPD har relevans när vi tolkar det centrala innehållet utifrån vad eleverna ska ha med sig från taluppfattning och tals användning från årskurs 4-6. I *taluppfattning och tals användning* för årskurs 7-9 ingår:

- Reella tal och deras egenskaper samt deras användning i vardagliga och matematiska situationer.
- Talsystemets utveckling från naturliga tal till reella tal. Metoder för beräkningar som använts i olika historiska och kulturella sammanhang.
- Tal i potensform. Grundpotensform för att uttrycka små och stora tal samt användning av prefix.
- Centrala metoder för beräkningar med tal i bråk- och decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och digital teknik. Metodernas användning i olika situationer.
- Rimlighetsbedömning vid uppskattningar och beräkningar i vardagliga och matematiska situationer och inom andra ämnesområden.

(Skolverket, 2018, s. 58)

Om vi exempelvis tittar på den första punkten kan vi jämföra de *reella talen* med vad eleverna i årskurs 4-6 ska ha lärt sig om *rationella tal.* Vi kan se en utvidgad förståelse från att ha behandlat rationella tal (heltal och bråktal med heltal) till att även *inkludera* irrationella tal. (Irrationella som t.ex. $\sqrt{2}$ är tal går ej skriva som en kvot med heltal). Vidare är *centrala metoder för beräkning* en del i det centrala innehållet (för tals användning) där kommentarmaterialet återigen lyfter progression från yngre till högre åldrar (Skolverket, 2017). Grundläggande aritmetik (de fyra räknesätten) är räkneoperationer som eleverna behöver behärska för att kunna arbeta med andra områden i matematik. När eleverna börjar högstadiet förväntas de ha arbetat med centrala beräkningsmetoder (med naturliga tal) liksom överslagsräkning för tal i decimalform. I årskurs 7-9 är det därför en progression för eleverna att t.ex. använda de reella talen i ett "utvidgat talområde" (Skolverket, 2017).

2.3 Matematiska förmågor

Kommentarmaterial till kursplanen i matematik (Skolverket, 2017) förmedlar matematik som något mer än enbart matematisk fakta och att lärarens uppdrag är att få eleven intresserad och nyfiken av ämnet. Skolverket menar att matematik är "ett nyttoverktyg (...), ett språk, ett kulturarv, en konstform och en vetenskap” (Skolverket, 2017, s. 5). I skolans uppdrag ingår även att *bedöma* elevens matematiska kunskaper och detta görs mot läroplanens kunskapskrav. Från kunskapskraven kan man skönja ett kunskapsperspektiv som uttrycks av *matematiska förmågor.* Jahnke (2016) redogör för kursplanens historia och ser en utveckling från 1962 till 1994 gällande preciseringen av kvalitéer när det kommer till att behärska matematik. Från 1994 till 2011 preciseras även stoffet ytterligare för att inkludera mer exempel kring *vilka* begrepp och metoder som kunskapskraven syftar på. Ett mer nyanserat sätt att värdera kunskap var kärnan som kortfattat kan förklaras att man gick från kvantitet (flera olika *typer* av kunskaper) till att samla dessa kunskaper i en och samma uppgift och utföra den på ett förfinat sätt. Kunskapskraven mäter idag förmågor i förhållande till stoffet (ibid.) och de fem förmågor som tränas och testas i årskurs 7-9 är förmågan att: använda och hantera *begrepp*; *kommunicera*; *resonera*; hantera *procedur (metod)*; och hantera *problem.* Av dessa fem förmågor kan begrepp- och procedurförmåga (metod) tänkas vara de förmågor elever i matematiksvårigheter inledningsvis har svårt för om vi kopplar dessa förmågor till förmågan att plocka fram talfakta från minnet. Begrepp- och procedurförmåga, alltså förståelse och färdighet, är beroende av varandra (Jahnke, 2016) - vilket är något vi kommer fördjupa oss i ytterligare.

I kunskapskraven står det att för betyget E ska eleven vid slutet av årskurs 9 bland annat ha:

> (...) grundläggande kunskaper om matematiska begrepp och visar det genom att använda dem i välkända sammanhang på ett i huvudsak fungerande sätt. Eleven kan även beskriva olika begrepp med hjälp av matematiska uttrycksformer på ett i huvudsak fungerande sätt. I beskrivningarna kan eleven växla mellan olika uttrycksformer samt föra enkla resonemang kring hur begreppen relaterar till varandra.
> (Skolverket, 2018, s. 62)

Att hantera begrepp är mer än enbart faktakunskaper vilket Jahnke (2016) illustrerar genom en analogi med Platons kunskapsfilosofi som lyfter “gnuggandet” av begrepp i den kontext som eleven befinner sig i. Att minnas lösryckt fakta räcker inte, skriver Jahnke. När eleven kan länka begrepp till andra, liksom para ihop begrepp med representationer, har eleven förmågan att hantera begrepp. Jahnke använder bilden av ett rep tvinnat av mindre trådar för att förklara begrepp och deras relation till andra begrepp.

I utdraget från kunskapskraven ska eleven även visa hur hen kan *använda* begreppen i välkända sammanhang. Med detta menas att eleven kan följa eller utföra och använda t.ex. en metod, en algoritm eller en regel. De kanske mest grundläggande procedurerna är räknelära (aritmetik) (Jahnke, 2016) vilket är det som ofta ställer till det för eleverna om de har svårt att plocka fram talfakta från minnet. Jahnke förklarar också skolans matematik som uppbyggd av dels rutinuppgifter, för vilka begreppen och metoderna är standardiserade och rutinmässigt inövade och dels av problemuppgifter, för vilka proceduren inte är given. För nya och oförutsägbara situationer räcker inte förståelse och färdighet - *förtrogenhet* med matematiken, förmågan att hantera problem, behövs också - varför just förmågan att hantera problem är en matematisk förmåga som också tränas och testas i skolan (ibid.). Vidare menar Chinn (2017) att elever i matematiksvårigheter ofta uppvisar problem med de förmågor som vi just nämnt. I kursplanen för matematik finns även förmågan att resonera och kommunicera (Skolverket, 2018), som vi inte valt som centrala förmågor i detta arbete, men som givetvis är lika viktiga för eleverna att bli förtrogna med i sin skolgång.

Vilka typer av problematik som karaktäriserar elever i matematiksvårigheter varierar och har även av flera författare beskrivits som svåravgränsade och luddigt formulerade (Chinn, 2017; Lunde, 2011). Hur vi som lärare på bästa sätt hjälper elever i matematiksvårigheter verkar vara nära sammankopplat till hur vi väljer att bedöma och se på dessa elever (Chodura, Kuhn & Holling, 2015). Nedan kommer vi att presentera ett *urval* av vad litteraturen säger om allmänna matematiksvårigheter.

2.4 Matematikundervisning

Ernest (1991) beskriver fem olika ideologier för undervisning i matematik. Den första ideologin är *Industrial Trainer* där läraren ska överföra sin kunskap till eleverna och eleverna mekaniskt arbetar med uppgifter som de blivit tilldelade av läraren. Inga hjälpmedel är tillåtna utan allt ska göras med penna och papper. Den andra ideologin är *Technological Pragmatist*, där läraren ska visa matematiska tillämpningar och eleverna arbetar med färdighetsträning genom praktiska övningar. *Old Humanist* är den tredje ideologin och i den ska läraren visa matematiska strukturer genom förklaring och motivering. Här används visuella verktyg och man fokuserar på att eleverna ska förstå innan de tillämpar kunskaper. I den fjärde ideologin *Progressive Educator* ska läraren skapa olika miljöer där eleverna ska göra sina egna upptäckter inom matematiken. Eleverna ska arbeta genom att undersöka, upptäcka, leka, diskutera och samarbeta. I den femte och sista ideologin *Public Educator* ska läraren skapa relevanta miljöer där eleverna och läraren ska diskutera, ställa frågor och förhandla för att eleven ska lära sig matematik (ibid).

I så kallad *frontalundervisning* anser man att eleverna lär sig bäst när läraren leder undervisningen genom att ge instruktioner och ställa frågor. Läraren själv ska vara aktiv samtidigt som nya uppgifter och områden som introduceras är välplanerade och genomtänkta innan de presenteras. Det är fokus på att eleverna ska ha förstått det läraren gått igenom innan eleverna får arbeta på egen hand, så delen självständigt arbete kan bli mindre i denna undervisningsmetod jämfört med andra undervisningsmetoder. När man fokuserar på elevernas förståelse är det en fördel om läraren planerar lektionen så att läraren verkligen hinner med det hen tänkt ta upp. Varje lektion bör också ha en genomgång i början av lektionen och en sammanfattning i slutet (Reynolds & Muijs, 1999).

Enskilt arbete är kanske det första man förknippar med matematikundervisning. Bergqvist (2007) skriver att en anledning till att lärare använder sig av denna undervisningsmetod är att de inte riktigt vet hur de som lärare ska bemöta och undervisa i helklass när elevernas kunskaper skiljer sig sinsemellan. För att göra det enklare och för att man inte riktigt vet något annat sätt låter man eleverna arbetar enskilt (ibid). Undersökningar visar att de elever som får arbeta mycket med läroboken som primär kunskapskälla och genom självständigt arbete får det svårare att utveckla sitt matematiska tänkande, vilket leder till att deras resultat försämras (Reynolds & Muijs, 1999). Lärarens roll blir här att finnas till hjälp om eleverna behöver och att se till att elevernas kunskapsutveckling ändå är positiv. För att enskilt arbete ska vara en framgångsrik undervisningsmetod måste man som elev vara bra på att planera och strukturera sitt eget arbete och det krävs en viss mognad av eleven (Bergqvist, 2007).

En fördel med grupparbeten jämfört med lärarledda lektioner i helklass är att eleverna kommer bli mer medvetna om hur de själva tänker och resonerar (Cederhem, 2008). Lärarens ansvar är att sätta ihop fungerande grupper och läraren behöver ha kontroll på att gruppernas arbete går bra (Hammar Chiriac & Hempel, 2005). Läraren ska inte nivågruppera grupperna utan det är viktigt att läraren ser detta tillfälle som en chans för eleverna att utveckla sina matematiska förmågor och kunskaper, oavsett nivå (Engström, 2003). Det är viktigt att uppgiften som grupperna ska jobba med presenteras tydligt och bra av läraren. Uppgiften måste även vara meningsfull och inte gå att lösa av en enskild person. För att ett grupparbete ska fungera så måste eleverna anstränga sig (Hammar Chiriac & Hempel, 2005).

När uppgifter ska lösas på lektionen ska algoritmer vara som ett hjälpmedel - men för elever i matematiksvårigheter som inte behärskar detta blir det en jobbig situation. I sådana situationer är tekniska hjälpmedel såsom datorer och miniräknare nödvändiga verktyg (Magne, 1998). Genom att använda miniräknare i undervisningen har klyftan mellan de "bästa" och de "sämsta" minskat och läraren kan lägga mer fokus på hur eleverna tänker och lär sig matematik. Det har även visats att elever som behärskar att använda sig av en miniräknare har bättre taluppfattning och förstår textuppgifter bättre än vad andra elever gör (Cederhem, 2008).

När man använder sig av problemlösning som metod i undervisningen är det meningen att eleverna ska lära sig genom att reflektera och diskutera med varandra. Uppgifterna som eleverna får ska vara tydliga att förstå och det ska kännas som en utmaning samt att det ska gå att lösa problemet på flera olika sätt (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005). Ett matematiskt problem uppstår när en elev stöter på en utmaning (Magne, 1998). Det är viktigt att uppgifterna som eleverna får blandas mellan det praktiska, konkreta och abstrakta för att undervisningen ska bli lyckad. Lärarens uppgift är bland annat att vägleda och uppmuntra eleverna och även leda helklassdiskussioner på ett utvecklande sätt (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005).

Undervisning utomhus kan bidra till att eleverna enklare tar till sig undervisningen än om den sker inomhus (Dahlgren & Szczepanski, 1997). Genom att ha undervisning utomhus ger det stora möjligheter att använda sig av material som naturen förser mer, vilket är gratis, för att konkretisera matematiken (Cederhem, 2008). När undervisningen är utomhus får eleverna utnyttja alla sina sinnen och genom att både ha varit fysiskt och mentalt engagerad kommer eleverna minnas vad de arbetat med enklare (Dahlgren & Szczepanski, 1997). Det finns även utmaningar med att ha undervisningen utomhus. Det är oftast en högre risk att vara utomhus än inomhus och lärarens kompetens bidrar på ett mer avgörande sätt till om undervisningen lyckas eller ej. Även tidsaspekten spelar roll om lärare och elever behöver ta sig långa vägar för att komma till den plats där läraren har tänkt sig genomföra undervisningen på (Dyment, 2005).

Laborativ matematikundervisning passar till alla områden inom matematiken. Laborativ matematik är inte en undervisningsmetod bara för elever som är i matematiksvårigheter utan gynnar alla elever. För att laborativ undervisning ska få ett positivt resultat behöver lektionerna vara väl genomtänkta (Malmer, 2002). Det krävs mycket av läraren för att kunna genomföra laborativ matematikundervisning. För det första måste läraren ha goda ämneskunskaper och läraren måste även vara bra på att lyssna på eleverna så att hen kan hjälpa eleverna på bästa sätt när de stöter på problem. Läraren måste även se till att det finns bra material att arbeta med och allt detta blir enklare om läraren brinner för sitt ämne och att arbeta laborativt (Cederhem, 2008). Att arbeta laborativt är till fördel för elever i matematiksvårigheter då de får använda sig av flera sinnen vilket gör att eleverna enklare får en bättre förståelse (Malmer, 2002).

Malmer (2002) skriver att innehållet i undervisningen måste anpassas efter elevernas förutsättningar. Vidare medför detta att läraren måste vara flexibel i sitt undervisningssätt då alla elever har olika förutsättningar. Läraren måste kunna variera både svårighetsgrad och representationssätt. För att skapa en bra lärandemiljö skriver Malmer att det är viktigt att läraren är noga i sitt sätt att planlägga arbetet. Hon tar upp fyra frågor som hon anser vara viktiga att tänka på innan man går in i klassrummet:

- Vilka *mål* vill jag uppnå?
- Vilka *moment* anser jag skall bli föremål för undervisning?
- Vilka *inlärningsbetingelser* har jag att ta hänsyn till?
- Vilket *arbetssätt* och vilka *arbetsformer* väljer jag?

(Malmer, 2002, s. 27)

Om man ställer dessa frågor kommer elevgruppens sammansättning bli styrande och innehållet, undervisningsmetoder och hjälpmedel kommer att variera. Malmer trycker även på att det är viktigt att alla elever måste få känna att de har möjligheter och att de känner sig sedda och accepterade. Hon skriver vidare att detta endast kan ske om eleverna får arbeta med lämpligt innehåll på den nivån och i den takt de har förutsättningar för (Malmer, 2002).

3 Metod

I denna del kommer vi att presentera hur vi gått tillväga för att hitta de artiklar vi använt oss av i vår litteraturstudie. Vi kommer även att presenter urval och begränsningar vi har gjort och sedan en tabell över alla de artiklar vi har valt. Avslutningsvis är en analys på hur vi har undersökt och studerat artiklarna.

3.1 Litteratursökning

Vi började vår litteratursökning genom att söka på Linköpings universitetsbiblioteks hemsida genom söktjänsten UniSearch. Vi sökte efter artiklar som handlade om matematiksvårigheter och undervisningsmetoder, och hittade då två aktuella metaanalyser (Dennis et al., 2016; Chodura, Kuhn & Holling, 2015). En metaanalys sammanställer data och forskningsresultat som tagits fram av andra forskare och sammanställer och presenterar dessa. De två metaanalyserna sammanfattar flera artiklar/studier inom vårt intresseområde och frågeställningar. I de här två metaanalyserna hittade vi de artiklar som vi valt att ha med i vår undersökning.

3.2 Urval och begränsningar

I de två olika metaanalyserna valde vi att fokusera på den del som behandlar *effektstorlek*. Effektstorlek är *förhållandet* i mätvärdenas variation, alltså hur medelvärdet har utvecklats i en testgrupp (Meyvis & van Osselaer, 2018). Med effektstorlek kan skillnad mellan två grupper kvantifieras (Coe, 2002). I flertalet artiklar vi läst jämförs testresultat mellan elever i matematiksvårigheter som deltagit i en interventionsgrupp med en kontrollgrupp. Förhållandet dem emellan, det vill säga variationen i medelvärdet i de båda grupperna, kan beskrivas i termer av effektstorlek och ju större effektstorlek, desto större effekt tillskrevs interventionen. För oss innebär det att studier med stor effektstorlek har undersökt en intervention som visat sig vara effektiv för elever i matematiksvårigheter. Alla våra valda artiklar hade en effektstorlek som var 0,8 eller högre, högsta effektstorlek var 2,58. Gemensamt för alla artiklar är att de mäter effektstorlek genom "kontrast", alltså genom att ställa resultat från eftertest gjorda av elever i matematiksvårigheter som deltagit i en intervention mot åtminstone en kontrollgrupp eller liknande grupper. För att begränsa oss ytterligare, och vara säkra att artiklarna var intressanta för vår frågeställning, läste vi sammanfattningen på alla artiklar som hade hög effektstorlek (0,8 eller högre). Ytterligare ett urvalskriterium var att artiklarna hade en kombination av nyckelorden "mathematics difficulties"/"mathematics learning difficulties" och "interventionprogram". Alla artiklar vi valde ut var peer-reviewed. Studien från Lee (1992) är en del av en doktorsavhandling från universitetet i Ohio (USA) som är granskad med ett peer-reviewed förfarande, vilket framgår i avhandlingen. Nedan presenteras de 10 artiklar som vi har undersökt i denna studie och alla fick vi tag på genom söktjänsten UniSearch.

3.3 Redovisning av litteraturen

Tabell 1: Här redovisas artiklarna som vi valt att använda oss av i vår litteraturstudie.

Titel	**Författare**	**År**	**Land**
Do we need a special intervention program for children with mathematical learning disabilities or is private tutoring sufficient?	Lambert, K., Spinath, B.	2014	Tyskland
Effects of cognitive strategy interventions and cognitive moderators on word problem solving in children at risk for problem solving difficulties	Swanson, H. L., Lussier, C., Orosco, M.	2013	USA
Enhancing third-grade students' mathematical problem solving with self-regulated learning strategies	Fuchs, L. S., Fuchs, D., Prentice, K., Burch, M., Hamlett, C. L., Owen, R., Schroeter, K.	2003	USA
Responsiveness to mathematical problem-solving instruction: comparing students at risk of mathematics disability with and without risk of reading disability	Fuchs, L. S., Fuchs, D., Prentice, K.	2004	USA
Response to specific training for students with different levels of mathematical difficulties	Re A. M., Pedron M., Tressoldi P. E., Lucangeli, D. I.	2014	Italien
Improving at-risk learners' understanding of fractions	Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Long, J., Namkung, J., Hamlett, C. L., Cirino, P. T., Siegler, R., Changas, P.	2013	USA
Explicitly teaching for transfer: effects on the mathematical problem-solving performance of students with mathematics disabilities	Fuchs, L. S., Fuchs, D., Hamlett, C. L., Appleton, A. C.	2002	USA
Effect of a computer-delivered math fact intervention as a supplemental intervention for math in third and fourth grades	Burns, M. K., Kanive, R., DeGrande, M.	2012	USA
Contribution of equal-sign instruction beyond word-problem tutoring for third-grade students with mathematics difficulty	Powell, S. R., Fuchs, L. S.	2010	USA

The effectiveness of a novel direct instructional approach on math word problem solving skills of elementary students with learning disabilities	Lee, J. W.	1992	USA

3.4 Analys

I vårt resultat har vi sammanställt tio olika studiers syfte, metod och resultat. Vi har läst hela artiklarna och undersökt syftet, metoden och resultatet i varje studie. När vi läste artiklarna utgick vi från tre frågor. (1) *Vad är syftet med studien?* Denna fråga hade vi med för att veta att studien var relevant för vår undersökning. (2) *Hur har studien utförts? Vilken metod har använts?* Dessa frågor svarar på vår första frågeställning som handlar om vilka undervisningsmetoder som är gynnsamma för elever i matematiksvårigheter och även vilka representationsformer som lärare kan använda sig av. (3) *Vad är resultatet i studien?* Detta svarar på vår andra frågeställning om hur undervisningsmetoderna och representationsformerna påverkar elevers utveckling av de matematiska förmågorna. Genom att utgå från de här tre frågorna undersökte vi vilka undervisningsmetoder och representationsformer som studierna använt sig av och även hur de matematiska förmågorna påverkade elever i matematiksvårigheter. Därefter delade vi in de tio artiklarna utifrån vilken/vilka undervisningsmetoder som är mest representerade i studien. Det är fyra artiklar under *instruktioner*, tre under *instruktioner + självbedömning*, en under i*nstruktioner + datorstöd*, en under (enbart) *datorstöd* och en under *laborativt arbete*.
Undervisningsmetoderna blev även våra underrubriker i resultatet. Till varje underrubrik kommer vi förklara kort hur vi tolkar undervisningsmetoderna i underrubriken. I slutet av resultatet har vi gjort en sammanfattande tabell av artiklarna som även blir en sammanfattning av våra frågeställningar. I *tabell 2* framgår vilka de insatta undervisningsmetoderna är (alltså våra underrubriker) och vilka representationsformer som används i de olika metoderna. I tabellen framgår även vilka förmågor som har förbättrats hos elever i matematiksvårigheter med hjälp av undervisningsmetoderna och representationsformerna.

4 Resultat

I resultat kommer nu alla 10 artiklar som studerats att presenteras. Detta görs under fem olika underrubriker (instruktioner, instuktioner + självbedömning, instruktioner + datorstöd, datorstöd och laborativt arbete) och de kommer att presenteras närmare under varje rubrik.

4.1 Instruktioner

I nedan sammanfattning är undervisningsmetoden i artiklarna främst representerad av instruktioner. Vi tolkar instruktioner vara ett specifikt sätt att förmedla information och kunskap genom till exempel skriftligt eller muntligt språk där man kan ta hjälp av visuella verktyg eller bildstöd för att förmedla information och kunskap. Instruktioner i detta synsätt kan kopplas till Ernest (1991) tredje ideologi, Old Humanist där läraren med hjälp av bland annat visuella verktyg förklarar matematiska strukturer. Lärare motiverar eleverna och vill uppnå en förståelse hos eleverna först innan de börjar tillämpa sina kunskaper.

Swanson, Lussier och Orosco (2013) studie undersöker hur kognitiva strategier påverkar förmågan att lösa textprobelm (problem i löpande text) i matematiken för elever i matematiksvårigheter. Det är 120 elever i årskurs tre som deltagit i denna undersökning. Innan undersökningen fick alla elever genomföra ett prov i problemlösningsförmåga och de elever som presterade under eller på 25:e percentilen, på ett normativt test utformat av bland annat ”Test of Math Ability” (TOMA), hamnade i riskzon för matematiksvårighet i denna undersökning. Efter detta hade man då fått 71 elever i risk för matematiksvårigheter och 49 utan matematiksvårigheter. Nu delades alla elever upp slumpmässigt mellan fyra olika grupper. En kontrollgrupp, en grupp som fokuserade på allmänna-heuristiska strategier, en som fokuserade på visuella-schematiska strategier och en grupp som använde sig utav en kombination av båda strategierna. Varje grupp hade 20 lektionstillfällen som var 30 minuter var och som sträckte sig över en period på 8 veckor. Varje lektion var uppdelad i fyra delar, uppvärmning, instruktioner, guidade övningar och självständiga övningar. I gruppen med bara allmänna-heuristiska strategier fick eleverna lära sig att lösa problem genom att följa en punktlista där de skulle stryka under meningen med frågan i sig och göra en cirkel runt meningar med siffror i sig. Eleverna skulle även göra kvadrater runt viktiga ord i texten och stryka över de delar som är irrelevanta för att lösa uppgiften, och till slut skulle de bestämma om man ska addera eller subtrahera eller både och för att lösa problemet. I gruppen där man enbart använder visuella-schematiska strategier får eleverna lära sig att lösa problem med hjälp av två olika diagramtyper. Det första diagrammet visar hur delar bildar en hel och det andra diagrammet jämför olika kvantiteter med varandra. I den sista gruppen, som är en kombination av de två andra strategierna, används både punktlistan och diagrammen för att lösa problemen. Resultatet i studien visar att elever i matematiksvårigheter presterade bättre i de tre grupperna med insatta strategier jämfört med vad de gjorde i kontrollgruppen. Den bästa strategin var gruppen som bara använde visuella-schematiska strategier. Det visade sig även att för elever som inte är i matematiksvårigheter hade strategierna ingen större betydelse för deras förmåga att lösa textproblem (ibid).

I en studie av Fuchs et al. (2013) undersöks effekten av en intervention för elever i fjärde klass (som är i risk för att hamna i matematiksvårigheter) med fokus på förståelse för bråk. I denna studie valdes det att eleverna skulle hamna under 35:e percentilen på ”Wide Range Achievement Test–4” (WRAT-4) för att räknas som i riskzon för att hamna i matematiksvårigheter (AR-elever, eng. “At-Risk students”). Eleverna delades därefter in i två grupper. Elever som hamnade mellan 9:e - 15:e percentilen ansågs vara elever i stora svårigheter och elever mellan 15:e - 35:e percentilen ansågs vara elever i mildare svårigheter. Elever som hamnade mellan 1:a – 9:e percentilen bedömdes ha nedsatt intellektuell förmåga och exkluderas från studien då den inte var inriktad på bedömning av intellektuell förmåga. Det var 290 AR-elever som deltog från början men på grund av bortfall så blev det 259 AR-elever som deltog i studien från 53 olika fjärdeklasser från 13 olika skolor (mellan 2-8 AR-elever från varje klass). Sedan delades alla AR-elever slumpmässigt in i antingen en kontrollgrupp eller en bråk-interventionsgrupp. Därefter valdes även 292 “low-risk” elever ut (elever över 34:e percentilen) i samma proportion i klassrummen som AR-eleverna, vilka skulle fungera som en jämförelsegrupp. Men på grund av bortfall så var det 282 ”low-risk” elever som deltog i studien. Upplägget för instruktionerna skiljde sig åt mellan de olika grupperna. I kontrollgruppen utgick man från “Houghton Mifflin Math” som fokuserar på en helhetsförståelse med hjälp av flera olika hjälpmedel. Denna instruktion fick eleverna i helklass och på separata matematiktillfällen men många AR-elever deltog även på smågruppsträffar tre gånger i veckan. De arbetade med guidade övningar, självständigt arbete och länkar till livet utanför matematikklassrummet. Handledningen för interventionsgrupperna var 36 st. 30 minuters lektioner under en 12 veckorsperiod. De som höll i handledningen var forskningsstuderande och de hade två grupper var med 4 elever i varje grupp. I interventionsgrupperna fokuserade man mycket på måttolkning av bråk och arbetade med att sätta ut bråk på en tallinje mellan 0 och 1. Under veckorna 1-2 arbetade eleverna med förståelsen av bråks storlek och med att jämföra bråk, och man introducerade även ord såsom täljare och nämnare. Under vecka 3 arbetade eleverna med jämförelsen mellan bråk (samma/olika nämnare/täljare, större eller mindre). I vecka 4-5 arbetade eleverna med bråk som såg olika ut men är lika (½, 2/4, 3/6) och att sätta ut bråk på en tallinje. I vecka 6 så introducerades bråk som motsvarade talet 1 och eleverna fortsatte arbeta med tallinjer men nu utan ½ utmärkt som det varit tidigare. Under vecka 7 gjorde man en kontroll av alla begrepp och färdigheter som tagits upp dittills i interventionen. Först i vecka 8 så började eleverna arbeta med addition och subtraktion av bråk. Under veckorna 8-9 arbetade eleverna med beräkningar av bråk (addition och subtraktion) och veckorna 10-12 handlade om repetition och kontroll av vad eleverna lärt sig. Varje lektion började med en introduktion av begrepp eller färdigheter och sedan fick eleverna arbeta med grupparbete, dessa två saker tog 20 minuter tillsammans och de resterande 10 minuterna arbetade eleverna med hastighetsspel och självständigt arbete. Studien har framförallt undersökt sex olika saker: Först hur eleverna hanterade att jämföra bråk med frågor som ”är den större, mindre eller lika stor”? Sedan fick eleverna sätta ut olika bråk på en tallinje mellan 0 och 1. Därefter genomfördes ”National Assessment of Educational Progress” (NAEP) vilket innebar att man undersökte tre olika steg; helhet, delvis och enlig mätpunkter. Eleverna fick svara på 18 olika frågor med olika svarsmetoder såsom skriftligt svar, att sätta ut nummer på en tallinje eller genom att fylla i rutor. Det sista man undersökte var beräkning av bråk. Varje elev fick göra ett för- och ett eftertest där alla sex delar undersöktes. En kort sammanfattning av resultatet är att både interventionsgruppen och kontrollgruppen förbättrade sina resultatet inom alla studerade områden. Ökningen var större för interventionsgruppen än för kontrollgruppen och man kunde också se att prestationsklyftan minskade mellan interventionsgrupperna medan i kontrollgrupperna var den densamma eller ökade (ibid).

Lee (1992) undersöker (bland annat) skillnaden mellan en grupp elever med inlärningssvårigheter, vilka övar sin förmåga att lösa problemlösningsuppgifter med hjälp av en “novel approach for teaching” av addition och subtraktion i ett steg, med en kontrollgrupp som fick ordinarie undervisning. Hennes hypotes är att denna typ av undervisning bestående av generella instruktioner med hjälp av grafiska representationer och direkta instruktioner kommer ha positiv effekt liksom att den inövade förmågan att lösa problemlösningsuppgifter kommer bestå över tid. I denna text sammanfattas effekten av metoden “novel approach for teaching” som är ett sätt att hjälpa elever i inlärningssvårigheter att bli bättre problemlösare. För att mäta elevers problemlösningsförmåga användes i denna studie antal korrekta svar på 15 olika problemlösningsuppgifter med addition- eller subtraktion. Undervisningsmetoden baserades på det matematiska programmet Addison-Wesley och innefattade bland annat muntliga instruktioner liksom bildstöd; en lista med punkter beskrivande hur eleverna ska bearbeta en problemlösningsuppgift. Artikeln går grundligt igenom vilka typer av förklaringsmodeller som används i metoden, både för att förstå ordens betydelse i en problemlösningsuppgift men också grundläggande modeller för addition och subtraktion som också appliceras på själva problemlösningsuppgiften. Bland annat beskrivs operationer och tal i "talfamiljer" som t.ex. 3 + 4 = 7, liksom 4 + 3 = 7, 7 - 4 = 3 och 7 - 3 = 4. Eleven kan då i en uppgift använda sig av sin kunskap om talfamiljer för att lösa uppgiften genom att fundera över vad som saknas i t.ex. 3 + __ = 7. Deltagande i studien var elever från fjärde, femte och sjätte årskurs, alla identifierade vara i inlärningssvårigheter, totalt 49 elever från sex olika skolor (en klass från varje skola). Varje klass bestod av elever från de tre olika årskurserna. Två klasser deltog i pilotstudien (från fjärde, femte och sjätte årskurs: respektive 3, 8 och 5 st). Två klasser deltog i den aktuella studien (från fjärde, femte och sjätte årskurs: respektive 1, 8 och 9 st) (grupp 1) och två klasser var kontrollgrupp (från fjärde, femte och sjätte årskurs: respektive 2, 8 och 5 st) (grupp 2). 40% av eleverna deltog i den vanliga undervisningsformen där de fick sina instruktioner och resterande 60% av eleverna hade särskild undervisningsgrupp med speciallärare cirka 60% av dagen i separata klassrum. Ett för- och eftertest genomfördes för grupp 1 och grupp 2 och interventionen som genomfördes för grupp 1 pågick i nio dagar. För val av beräkning visar grupp 1 en ökning i testresultat med 2,61 när man tar differensen mellan före- och eftertest (12,00 - 9,39). Grupp 2 visar en försämring i testresultat med -0,57 för val av beräkning (9,36 - 9,93). I kategorin "svar" visar grupp 1 en ökning med 3,05 (10,22 - 7,17) och grupp 2 en ökning med 0,1 (7,5 - 7,4). Med detta och ytterligare resultat i studien visar att elever i inlärningssvårigheter gynnas av "novel approach for teaching" för att öka sin analytiska problemlösningsförmåga (textproblem) och resultaten mynnar ut i rekommendationer för speciallärare, författare till undervisningsmaterial och kursplanerare (ibid).

I Powell och Fuchs (2010) studie undersöker och bedömer de hur instruktioner om lika-med-tecknets (=) betydelse påverkar förståelsen för symbolen (som en relationell symbol) och textproblem för elever i årskurs tre i "Mathematical Disabilities" (MD). För att förtydliga skriver författarna att algebraiska uttryck, och särskilt uppgifter med ord som ska överföras till matematiska uttryck, försvåras om eleverna inte förstår betydelsen av lika-med-tecknet. Vidare skriver Powell och Fuchs att elever kan bära med sig felaktiga tolkningar av symbolen till skolstart, liksom att skolböcker och grundskolans utbildning medför att lika-med-tecknet tolkas vara en uppmaning att *göra något* eller finna *totalen av något*. Författarna vill undersöka om elever i MD presterar bättre i uppgifter relaterade till textproblem och algebra (jämfört med elever i en kontrollgrupp) om de undervisas i ett skapa sig en *relationell* tolkning av symbolen i kombination med undervisning i textproblem. Studien genomfördes med elever från 51 olika klasser i årskurs tre från 18 olika skolor. Elever som efter screening bedömdes vara i MD (under olika percentiler beroende på screeningtest) valdes sedan ut som deltagare i studien. Powell och Fuchs intresserar sig även för interventioner för elever i "Mathematical Difficulties and Reading Difficulties" (MDRD) vilket inte berörs i denna sammanfattning. I kategorin elever som enbart är i MD deltog 23 elever (i undervisning i textproblem deltog 9 elever, i kombinerad undervisning deltog 6 elever och i kontrollgruppen deltog 8 elever). Totalt var det 60 elever som deltog i, den för sammanfattningen aktuella, studien. Effektiviteten har mätts genom att jämföra för- och eftertest där eleverna bland annat testades på definition av lika-med-tecknet liksom uppgifter som går ut på att undersöka om olika likheter stämmer eller inte stämmer samt textproblem. För att förstå den insamlade datan har författarna även samlat in motsvarande testdata från 90 elever som ej är i MD. Interventionen pågick i fem veckor med totalt 15 sessioner (tre per vecka) där varje session varade cirka 25 till 30 minuter. Undervisningen kring textproblem syftade till att bredda elevernas scheman över textproblem och kategorisera olika typer av problem. Undervisningen som även kombinerade förståelse för lika-med-tecknet fick denna typ av undervisning (instruktion) vid varje session innan de arbetade med textproblem. Fokus kunde vara exempelvis att bredda elevernas vokabulär: lika, samma, sidor. Resultaten visar att kombinerad undervisning har störst effekt för lösningar av öppna ekvationer (ej standard) med en förbättring på 6,83 (differens mellan före- och eftertest) jämfört med undervisning i textproblem (1,67) liksom kontrollgruppen (0,38). Likaså visar resultaten att kombinerad undervisning har effekt för lösningen av uppgifter med lika-med-tecknet (förbättring med 4,5 jämfört med 1,11 i undervisning i textproblem liksom -0,50 i kontrollgruppen) (ibid).

4.2 Instruktioner + självbedömning

I de här artiklarna är den främsta undervisningsmetoden både instruktioner och självbedömning. Instruktionsdelen är här densamma som i 4.1. Självbedömning representerades i de analyserade studierna som ett sätt för eleverna att skapa sig en egen bild och kontroll på sitt eget lärande genom att rätta, berätta, diskutera och bedöma sitt eget arbete. I de här artiklarna kan man som i 4.1 se Ernest (1991) tredje ideologi Old Humanist men här kan man även se Ernest femte ideologi Public Educator. I den femte ideologin ska eleverna lära sig att diskutera och ställa frågor för att lära sig matematik och läraren ska skapa relevanta miljöer där det är accepterat och möjligt att gör så.

Fuchs, et al. (2003) studie undersöker om “Self-Regulated Learning strategies” (SRL) påverkar problemlösningsförmågan till det positiva. I undersökning är det 24 olika lärare och 395 elever i årskurs tre som har deltagit. Lärarna blev slumpmässigt indelade i tre olika grupper: en kontrollgrupp; en överföringsgrupp; och en överföring + SRL grupp. Eleverna blev indelade i tre olika grupper av sin lärare baserad på tidigare års prestationer och klassrumsobservationer: “high achiever” (HA); ”average-achiever” (AA); och “low achiever” (LA). I kontrollgrupperna var det 22% HA, 50% AA och 28% LA, i överföringsgrupperna var det 23% HA, 49% AA och 27% LA och i överföring + SRL grupperna så var det 23% HA, 52% AA och 25% LA. Interventionen omtalade 5 områden med 6 lektioner vardera samt 2 sammanfattande lektioner, totalt 32 tillfällen. Det genomfördes två lektioner i veckan och under dessa arbetade man med ett, för varje område, specifikt problem. Alla lärare utgick från samma läroplan vilket gjorde att de undervisade samma sak samma vecka. Grupperna med bara överföring fokuserade på regler för problemlösning och hade fyra delar de följde: (1) De första tre veckorna (område 1) ägnade man sig åt grundläggande instruktioner för problemlösningar; (2) Man ägnade ett område till att fokusera på problem som handlar om inköpslistor; (3) I slutet av varje lektion fick man själv arbeta med ett problem och rätta det med facit; (4) Man fick alltid med sig ett problem i läxa hem som man skulle lämna in morgonen efter. I de grupperna som hade överföring + SRL infördes självreglerande inlärningsstrategier genom 6 moment: (1) När eleverna hade gjort klart sitt självständiga problem för lektionen fick de bedöma deras egen insats med hjälp av en nyckel som var specifik för området. Eleverna fick poäng för hur bra deras uträkning och bedömningen av sig själva var; (2) Under de fem olika områdena hade varje elev ett eget papper i en mapp där man höll koll på hur många poäng man fått under varje lektion i ett diagram; (3) I början av varje lektion fick eleverna titta på sina diagram för att se hur många poäng man fått sist och peppa sig för att få bättre eller lika bra som sist; (4) Innan eleverna lämnade in sina läxor fick de rätta sina läxor själva med hjälp av facit; (5) I början av lektionerna 1, 3, 4, 5 och 6 inom varje område fick eleverna berätta hur de använt sig av varje områdes specifika problem utanför matematikklassrummet; (6) Här gjorde läraren en klassgraf över alla som lämnat in läxan. Varje område började med att en forskarassistent höll i första lektionen (läraren var närvarande) men sedan höll läraren i resterande lektioner. Alla elever fick göra ett för- och ett eftertest som man sedan mätte skillnaderna på för att se om det skett en förbättring. Resultaten i studien visar att grupperna med överföring + SRL hade störst förbättring, därefter grupperna med bara överföring och minst förbättring hade kontrollgrupperna. För HA-elever var det en överlägsen förbättring i grupperna med överföring + SRL medan för AA- och LA-eleverna var förbättringen mellan bara överföringsgrupperna och grupperna med överförings + SRL ungefär samma. Alltså var kombinationen överföring + SRL mest effektiv för de redan högpresterande (HA) eleverna men visade även en förbättring hos både medel- (AA) och lågpresterande (LA) eleverna (ibid).

I en annan studie av delvis samma forskarlag (Fuchs, Fuchs, & Prentice, 2004) har man återigen undersökt problemlösning men i denna studie har man undersökt hur det skiljer sig mellan (a) elever utan att vara i risk för några svårigheter alls; (b) elever i risk för matematiksvårigheter (för problemlösning); (c) elever i risk för lässvårigheter; och (d) elever i både risk för matematik- och lässvårigheter. För att räknas som att man har svårigheter i denna studie så studerade man fjolårets resultat på ”TerraNova state assessment” och man använde en 25:e percentilen som “cutoff”. Författarna hade även en gräns som man behövde vara över för att inte räknas var i risk för svårigheter och det var den 40:e percentilen. I undersökningen deltog 16 lärare i årskurs tre och deras klasser, 8 klasser som kontrollgrupper och 8 klasser där man arbetade med överföring + självreglering (interventionsgrupper). Eleverna delades in i fyra grupper, “no disability risk” (NDR), “at risk for both reading and mathematics disability” (RDR/MDR), “at risk for mathematics disability only” (MDR) och “at risk for reading disability only” (RDR). Det var totalt 201 elever som deltog och i kontrollgrupperna var det 60 NDR, 20 RDR/MDR, 5 MDR och 12 RDR elever. I interventionsgrupperna var det 69 NDR, 12 RDR/MDR, 8 MDR och 15 RDR elever. Denna studie genomfördes på ungefär samma sätt som studien av Fuchs et al. (2003) och omfattar 5 områden med 6 lektioner (2 lektioner i veckan) under varje område och sedan två lektioner i slutet av undersökningen. I första området jobbade man med grunderna i matematiska problemlösningar. Det resterande 4 områdena arbetade man med överföringsinstruktioner och självreglering. I de fyra sista områdena arbetade man med en viss sorts problem; *shopping list problem*, *half problem*, *bag problem* och *pictograph problem*. Överföringsinstruktionerna hade tre steg: (1) läraren lärde ut själva idén om överföring; (2) läraren lärde ut knep som kunde hjälpa eleven förstå problemet; och (3) läraren presenterade lösningar på textuppgifter/problem som de tyckte var svåra med uppgifter som de kände igen och kunde. Eleverna skulle även försöka koppla problemlösningskunskapen utanför klassrummet. Självregleringen gick till på samma sätt som i Fuchs et al. (2003). Med hjälp av för- och eftertester och observationer mätte man: (1) elevernas *förståelse* av problemet; (2) elevens *beräkning* av problemet; och (3) elevernas *förklaring* av arbetet med ord/matematiska ord och symboler. De undersökte med hjälp av två olika sorters problem *direkt överföring* och *”nära” överföring.* Direkt överföring är uppgifter där det var likadana uppgifter som de jobbat med bortsett från t.ex. siffrorna (kunna överföra kunskapen direkt) och “nära” överföringsuppgifter är uppgifter som skiljer sig lite från det de tidigare jobbat med. Resultatet i studien visade att interventionsgrupperna (de som arbetat med överföring och självreglering) hade förbättrar sig mer på alla områden jämfört med kontrollgrupperna. Men att grupperna NDR förbättrade sig alltid mest och grupperna RDR/MDR förbättrade sig alltid minst om man studerade interventionsgrupperna. Alltså att interventionen visade sig var bäst för elever utan några svårigheter (NDR) och sämst för elever i både matematisk- och lässvårigheter (RDR/MDR). Men om man kollade skillnaden på RDR/MDR i interventionsgruppen och i kontrollgruppen så hade de i interventionsgruppen förbättrat sig mer (ibid).

Re, Pedron, Tressoldi och Lucangelis (2014) studie undersöker effekten av individuell undervisning för elever i matematiksvårigheter. I undersökningen deltar 54 elever som man får följa mellan andra till femte klass. Med hjälp av barnpsykiatriker och psykologer delade man in elever i matematiksvårigheter i olika grupper beroende på svårighetsgrad. 19 elever var i grova matematiksvårigheter och 35 elever var i mildare matematiksvårigheter. Dessa elever delades sedan slumpmässigt in i att antingen tillhöra en kontrollgrupp eller en interventionsgrupp. I kontrollgruppen blev det 9 elever i grova matematiksvårigheter och 18 i mildare matematiksvårigheter. I interventionsgrupperna blev det då 10 i grova matematiksvårigheter och 17 i mildare matematiksvårigheter. Eleverna som var i kontrollgrupperna undervisades av vanlig lärare medan eleverna i interventionsgrupperna undervisades av en psykolog som hade specialiserat sig på inlärningssvårigheter. I interventionsgrupperna var uppgifterna anpassade till individen utifrån dess svårigheter i matematiken medan i kontrollgrupperna fick de vanlig undervisning. Både kontrollpersonerna och interventionspersonerna skulle gå igen olika studiefaser: (1) Bestämning av svårigheter; (2) att hitta det eleven har svårast för och jobba med det (bara för interventionsgrupperna); (3) Träning under 32 veckors tid, under september - december tränade man 2 gånger i veckan medan januari- maj tränade man 1 gång i veckan, alla träningstillfällen var 75 minuter långa (med 15 minuters paus); (4) Efterbedömning - vilken samlades in under en veckas period. På träningstillfällena i interventionsgrupperna började man med att presentera uppgiften och dess mål och syfte för att skapa förståelse hos eleven. Sedan arbetade eleven med olika material och presenterade olika strategier att lösa uppgiften på. Efter diskuterades och jämfördes olika strategier. Både eleven och psykologen fick sammanfatta arbetet och eleven fick även göra en självutvärdering på sitt arbete. Sedan fick eleven öva på de olika strategierna man har diskuterat. I kontrollgrupperna arbetade eleverna inte med specifika uppgifter som var kopplade till varje individs svårigheter utan där arbetade eleverna med t.ex. uppgifter man inte blivit klar med i den ordinarie skolan. Alla elever fick göra ett för- och eftertest. Författarna har observerat: (1) *huvudräkning* och då har man mätt både hur snabbt eleven räknar och på hur många fel eleven gjort; (2) *Skriftliga beräkningar* och då mäter man hur många rätt man har; (3) *aritmetisk fakta* där det mäts hur många fel eleven gjort; och (4) *numerisk kunskap* som också är mätt på antal rätta svar. En kort sammanfattning av resultatet är att interventionsgrupperna både för elever i grova och mildare matematiksvårigheter var deras förbättring mycket större i alla fallen. I kontrollgrupperna för både grova och mildare svårigheter hade elevernas prestation i hur snabbt man utförde huvudräkning försämrats mellan för- och eftertester. Medan för interventionsgrupperna hade en förbättring skett på alla områden (ibid).

4.3 Instruktioner + datorstöd

Här var både instruktioner och datorstöd de metoder som användes mest i undervisningen. Datorstöd kan exempelvis vara olika matematikprogram, både för genomgångar och övning. Instruktioner är detsamma som i 4.1 och 4.2. Som i 4.1 och 4.2 kan man se Ernest (1991) tredje ideologi (Old Humanist) här med. En annan av Ernest ideologier som kan ses i denna sammanfattning är den andra ideologin, Technological Pragmatist. I denna ideologi ska eleverna jobba praktiskt med hjälp av t.ex. tekniska hjälpmedel.

Författarna Fuchs, Fuchs, Hamlett och Appleton (2002) undersöker i sin studie om eleverna kan förbättra sin problemlösningsförmåga om de undervisas i hur man kan *överföra* ("transfer") den abstrakta matematiken i en känd problemlösningsuppgift till en ny okänd ("novel") uppgift. Författarna undersöker även om eleverna kan förbättra sin problemlösningsförmåga genom att avkoda och exkludera icke väsentlig information för att enklare navigera i uppgiften. Studien är baserad på ett ramverk av Cooper och Sweller (1987) samt Salomon och Perkin (1989) och studien behandlar fyra olika typer av problemlösningsuppgifter: *shopping list problem structure*, *half problem structure*, *bag problem structure* och *pictograph problem structure*. Författarna poängterar att den experimentella undervisningens fokus ligger i igenkänning av uppgifternas struktur snarare än själva storyn i sig. Deltagande i studien var 40 elever i årskurs fyra från tre olika skolor som av speciallärare rapporterades vara i MD. Eleverna delades in i fyra lika stora grupper: lärarledd undervisning, datorledd undervisning, lärarledd och datorledd undervisning samt en kontrollgrupp. Alla elever fick samma grundläggande undervisning om hur man "tacklar" problemlösning i matematik. Denna undervisning bestod av sex lektioner (två till tre lektioner per vecka och cirka 25-40 minuter per lektion). De tre experimentella grupperna fick kompletterande undervisning i fyra "omgångar" (en per problemlösningstyp), totalt 24 lektioner (två per vecka) för den lärarledda respektive den datorledda gruppen samt totalt 48 (24+24) för gruppen som fick både och. All kompletterande undervisning skedde utanför den vanliga undervisningen. Under interventionens gång observerades undervisningen och en forskare samlade in data i form av elevernas arbeten. Utöver detta deltog ytterligare en observatör för att säkerställa att ingen elev kopierade någon annans elevs arbete. Det utfördes även ett för- och eftertest. I resultatet gjordes en analys av respektive grupps resultat på dessa test och själva analysmetoden "kontrast" innebar att effektiviteten mättes genom att ställa resultaten mot varandra och mot kontrollgruppen. En kort sammanfattning av resultaten visar att de lärarledda grupperna liksom gruppen som hade tillgång till både lärare och dator presterade bättre vid eftertest för variabeln *story problems* jämfört med de som endast hade datorledd undervisning och kontrollgruppen. För variabeln *transfer story problems* hade även gruppen med endast datorledd undervisning effekt, gentemot kontrollgruppen (ibid).

4.4 Datorstöd

I den artikeln som klassificerats under rubriken datorstöd var det den främsta undervisningsmetoden som användes. Som vi tidigare beskrivit är datorstöd t.ex. olika matematikprogram, som används både för genomgångar och övning. Som i 4.3 så kan man se Ernest (1991) andra ideologi, Technological Pragmatist här. I den ideologin ska eleverna jobba praktiskt med t.ex. tekniska hjälpmedel för att lära sig matematik.

Studien av Burns, Kanive och DeGrande (2012) syftar till att undersöka effekterna av "Computer-Based Math Fluency" (CBMF) som intervention för elever som bedöms vara i riskzon för att vara i MD. Författarna har tre huvudspår, bland annat att jämföra hastigheten i utvecklingen hos dessa elever som deltagit i CBMF med en kontrollgrupp. Ett annat av huvudspåren är att undersöka andelen elever med risk för att vara i MD som fortfarande befinner sig inom riskzonen även efter avslutad intervention. I studien deltog 145 elever från årskurs tre och 86 elever från årskurs fyra, liksom en kontrollgrupp med 150 elever från årskurs tre och 90 elever från årskurs fyra. Alla deltagande elever i studien hade presterat under den 25:e percentilen på ”Star Math” och identifierades därför vara inom riskzon för att vara i matematiksvårigheter. Interventionen pågick i 8-15 veckor, tre gånger i veckan. Till undersökningen samlades data in både innan och efter interventionen i form av för- och eftertest liksom screening. Testet bestod av 24 uppgifter genererade av en dator bland 2000 uppgifter. Elevernas svar poängsattes automatiskt genom jämförelse med normdata från mer än 29 000 elever. Själva interventionen bestod av ett datorprogram (MFF) vilket syftar till att förbättra elevernas förmåga att räkna med de fyra räknesätten. Programmet antogs kunna hjälpa eleverna till ökat flyt och att mindre kognitiv kraft lades på dessa grundläggande operationer. Eleverna spenderade cirka 5-15 minuter per session med självständigt arbete vid datorn. Varje session bestod av 40 matematikuppgifter (en uppgift i taget på skärmen). Resultaten visade att eleverna som deltagit i CBMF hade utvecklat sin förmåga till beräkning med de fyra räknesätten. Poängmässigt hade gruppen CBMF ökat med 9.87 (23.71-13.84) och kontrollgruppen 5.67 (18.60-12.93). Författarna poängterar i sin teoridel och hypotes, att för en intervention ska vara effektiv är själva *levererandet* av interventionen viktig. Och att intervention en-till-en eller i mindre grupp resursmässigt inte alltid är möjligt i skolan. Vad gällande författarnas fråga om andel elever som fortfarande låg i riskzonen för att vara i MD efter intervention visar datan att 42,8 % av eleverna från årskurs tre som deltog i CBMF hamnade över 25:e percentilen (30,6% i kontrollgruppen). Vid jämförelse visar resultatet en signifikant effekt av interventionen (ibid).

4.5 Laborativt arbete

I denna artikel jobbades det främst med laborativa arbetssätt, vilket innebär att eleverna arbetar med konkret material och/eller tillsammans med visuellt bildstöd. Syftet är att eleven ska börja i en konkret matematik för att sedan gå över i en abstrakt matematik. Här kan man se Ernest (1991) fjärde ideologi Progressiv Educater. I den ideologin ska läraren skapa olika miljöer för att eleverna ska kunna göra egna upptäckter inom matematiken. Eleverna arbetar genom att undersöka, upptäcka, leka, diskutera och samarbeta.

Lambert och Spinath (2014) undersöker effekten av “Waterglass Intervention Program” (WIP) för elever i “mathematical learning disabilities” (MLD) i Tyskland. Elever anses vara i MLD om de presterar under den 16:e percentilen på ett ”standardiserat matematiktest” (författarnas egna översättning). Med effekten av WIP menas hur väl elever som genomgått programmet presterar på ett standardiserat matematikprov, betyg samt föräldrars värdering - i förhållande till kontrollgruppen. Studien har gjorts på 26 elever i MLD som genomgått WIP samt en kontrollgrupp på 20 elever i MLD som fått "private tutoring" (PT). WIP ett komplext program som riktar sig till elever alla åldrar i skolan och grundar sig i en "triple-code-model" av ämnet matematik: representation av matematik i ord som "åtta" i både tal och skrift, liksom arabiska siffor "8" för exakt beräkning samt förståelse för numerisk magnitud och kvantitet. Numerisk magnitud innebär förenklat tals storlek, exempelvis att talet 100 är större än talet 90, eller att mängden 100 stycken kolor är mer än 90 stycken kolor. WIP förklaras med hjälp av en modell med vattenglas med lika delar vatten. Ett fullt vattenglas går att dela in i tio lika stora klunkar och med hjälp av en klunk från vardera tio (likadana) fulla glas får vi ett fullt glas. Elever i WIP tilldelas information både genom direkt kommunikation men framförallt tränas de i att läsa information själva. PT beskrivs vara en traditionell modell med utgångspunkt i skolans genomgångar, repetition samt träning inför prov. Studien har genomförts genom individuell bedömning av eleverna vid en eller två sessioner under cirka två timmar. Eleverna har även genomgått tester både precis innan och efter en individuell intervention. Varaktigheten av interventionerna har varierat beroende på elevens kunskap: lärare och föräldrar hade i studien en muntlig överenskommelse när eleven skulle avsluta interventionen. Ofta berodde avslutad intervention på att eleven verkade ha uppnått sin klass nivå eller inte verkade visa någon progression alls under flera månader. Sammanfattningsvis visar studien att för matematisk prestation var effekten av tid och grupp, liksom effekten av tid * grupp interaktion, signifikant. Särskilt *interaktionen* kunde ses ha stor effektstorlek då flera elever som deltagit i WIP presterade inom normalområdet för matematisk prestation vid slutet av interventionen tillskillnad från de elever som tilldelats PT. Vad gällande betyg i matematik har tid en signifikant effekt medan grupp inte har det. Däremot har tid * grupp interaktion även här en signifikant effekt. Föräldrarnas värdering i resultaten visar bland annat effekten av tid ha en signifikant effekt gällande barnets matematiska prestation medan ingen signifikant effekt för grupp kunde påvisas.

4.6 Sammanfattande tabell

Tabell 2: I denna tabell presenteras en sammanfattning av de insatta undervisningsmetoderna och vad som varit de mest effektiva representationsformerna. Längs till höger presenteras vilka förmågor som har förbättrats av undervisningsmetoderna och representationsformerna.

Insatt Undervisningsmetod	**Använd Representation**	**Förbättrade Förmågor**

Instruktioner	Visuellt material	Textproblemlösning Begrepp Metod
	Muntligt Verklighetsförankring	Problemlösning Begrepp Metod
Instruktioner + självbedömning	Muntligt, skriftlig text och symboler	Problemlösning
Instruktioner + datorstöd	Muntligt, visuellt, skriftligt	Textproblemlösning
Datorstöd	MFF	Metod (fluency)
Laborativt arbete	Konkret material Bildstöd	Begrepp

5 Diskussion

Vi vill i detta avsnitt diskutera resultatet i relation till vår bakgrund och vårt syfte. Först vill vi kommentera det faktum att de flesta av artiklarna i resultatdelen studerat elever i årskurs tre till fyra och att vårt intresse för elever i matematiksvårigheter primärt är för de i årskurs sju till nio. Relevansen ligger i det att de matematiksvårigheter eleverna möter i unga år kan tänkas "hänga med" upp i äldre åldrar. Lunde (2011) skriver att elever i matematiksvårigheter ofta har svårt att plocka fram talfakta ur minnet, därmed kan det tänkas vara rimligt att utan bra och effektiva interventioner kan detta försvåra matematiksituationen även i framtiden för dessa elever. Vi vill även lyfta det att vår kunskapssyn delvis grundar sig i det relationella (specialpedagogiska) perspektivet och att elevernas svårigheter därmed ställs i relation till den miljö de befinner sig i: skolans kunskapskrav, ämnesinnehåll, pedagogik m.m. Därmed lägger vi fokus på *lärarens* ansvar att hjälpa dessa elever, alla elever är olika och behoven likaså. Fortsättningsvis följer en diskussion med möjliga effektiva interventioner för att hjälpa elever i matematiksvårigheter. Den första diskussionen kring "flyt" i beräkningar (datorstöd) tar utgångspunkt i att en elev befinner sig i matematiksvårigheter endast i relation till vad som efterfrågas av dem.

5.1 Visuella verktyg

I undersökningen av Swanson, Lussier och Orosco (2013) visades det att eleverna som bara fick arbeta med visuella stöd gjorde den bästa förbättringen inom problemlösning. Det fanns en grupp som arbetade med allmänna-heuristiska strategier, vilket innebar att man använde sig av punktlistor på hur eleven ska gå tillväga för att lösa ett problem, och en grupp som arbetade både med heuristiska strategier och visuellt stöd, men dessa grupper förbättrades inte lika mycket (ibid). I denna undersökning har man använt sig av Ernest (1991) tredje ideologi (Old Humanist) som handlar om att läraren ska lära ut matematiska strukturer genom att förklara och använda sig av visuella verktyg och fokusera på elevernas förståelse. Liknande metod har använts i Fuchs et al. (2013) studie som även den visar att visuellt stöd hjälper eleverna att bli bättre på att räkna med bråk. Elevers textproblemlösningsförmåga visas även i Lee (1992) studie förbättras efter att ha arbetat med muntliga instruktioner, visuellt material och punktlistor. I Re et al. (2014) undersökte man bland annat hur bra elever var på huvudräkning, både på antal fel eleven gjorde och hur snabbt eleven räknade. Lunde (2011) tar upp att för många elever i matematiksvårigheter tar det lång tid för dem att komma fram till svaret. Detta har Re et al (2014) undersökt med hjälp av att individanpassa uppgifterna och genom att arbeta med visuellt stöd. Både självbedömning och hastigheten för huvudräkning hos eleverna i interventionsgrupperna förbättrades medan de elever i kontrollgrupperna försämrade sitt resultat i huvudräkningshastighet (ibid.). Som Malmer (2002) skriver så måste lärare bli bättre på att anpassa sig efter elevers olika förutsättningar och det är viktigt att eleverna känner sig sedda och accepterade och får jobba med lämpligt innehåll, nivå och takt utifrån elevens förutsättningar. Visuellt stöd handlar om att konkretisera matematiken för eleverna och det kan man även göra genom att gå ut i naturen och använda sig av de material som naturen tillhanda ger oss gratis (Cederhem, 2008).

5.2 Symbolsäkerhet

Om symbolsäkerhet skriver Lunde (2011) att för elever med svagt visuellt minne behövs mening och förståelse för att kunna använda symboler på ett korrekt sätt i matematiken. Powell och Fuchs (2010) visar på en intressant koppling mellan förståelse för lika-med-tecknet och förmågan att lösa textproblem. De menar på att elever inte alltför sällan har med sig en felaktig tolkning av lika-med-tecknet redan från skolstart: symbolen uppmanar elever att *göra* något eller finna totalen av, istället för att se den som en *relationell* symbol. Just textproblem försvåras i överföringen mellan textproblem till abstrakt matematik om eleverna inte har klart för sig vad lika-med-tecknet betyder (ibid). För att ge ett eget exempel: *Sara ska köpa nya kläder och hon vill ha 2 par byxor, 3 t-shirts och 6 par strumpor. Byxorna kostar 200 kr/st, t-shirtsen kostar 100 kr/st och ett par strumpor kostar 30 kr/st. Hur mycket pengar behöver Sara?* Kanske tänker eleven att den ska räkna summan av alla olika klädesplagg: 200 + 100 + 30 = 330 kr, vilket inte är korrekt. Ett annat, felaktigt sätt skulle kunna vara att eleven inte förstår användandet multiplikation: att multiplicera antalet med priset. Istället kanske eleven bara använder ett räknesätt: 200 + 2 + 100 + 3 + 30 + 6 = 341, vilket också är felaktigt.

5.3 Självbedömning

Malmer (2002) skriver om kombinationen mellan läs-/skrivsvårigheter och matematiksvårigheter. Språklig kompetens lägger grunden för alla inlärning och användningen av bokstäver och symboler påverkar matematiken också. Det är lätt att blanda ihop eller byta plats på både symboler och siffror (ibid). Fuchs, Fuchs och Prentice (2004) undersöker skillnaden i prestation mellan elever som inte är i några svårigheter, elever enbart i lässvårigheter, elever i bara matematiksvårigheter och elever som både är i lässvårigheter och matematiksvårigheter. Deras studie visade att de elever som gjorde den minsta förbättringen till följd av deras intervention var de elever som både var i matematiksvårigheter och i läs-/skrivsvårigheter. I interventionsgruppen fick eleverna instruktioner om hur man skulle överföra sin kunskap och fick arbeta med självreglering och självbedömning. Studien visade att alla elever i interventionsgruppen (oberoende svårigheter) gjorde en större förbättring inom problemlösningsrelaterade uppgifter jämfört med eleverna i kontrollgrupperna (ibid). Fuchs et al. (2003) studie undersökte om självreglering och självbedömning påverkade elevers problemlösningsförmåga. De konstaterade att elever som arbetade med självreglering/självbedömning tillsammans med instruktioner om hur man skulle överföra sin tidigare kunskap till nya problem förbättrade sin problemlösningsförmåga mer än elever som bara arbetade med att överföra tidigare kunskap (ibid).

5.4 Datorstöd

Att nationella prov (liksom "vanliga" prov i skolan) låter testa elever i matematiksvårigheter i ren huvudräkning och läsuppgifter med huvudräkning är meningslöst när det kommer till att bedöma exempelvis problemlösnings*förmåga* i matematik. Att säga att det är meningslöst är kanske dragit till sin yttersta spets men algoritmer, som ska tänkas fungera som ett hjälpmedel, är inte till någon större hjälp för elever i matematiksvårigheter (Magne, 1998). Miniräknare och datorer är bra verktyg för att hantera den kognitiva ansträngning som dessa elever måste lägga på "vanliga" beräkningar. Det finns interventioner som visat sig effektiva att hjälpa elever i matematiksvårigheter att lägga mindre kognitiv kraft på beräkningar. Vidare visar dessa interventioner att övning med tekniska hjälpmedel gör det enklare och smidigare för elever att utföra beräkningar. Datorstöd har här visat sig vara en effektiv undervisningsmetod (Burns, Kanive & DeGrande, 2012). Burns et al. skriver att utförandet av interventionen är viktig och att det i skolan är svårt att garantera undervisning en till en då det helt enkelt inte finns resurser för detta. Burns et al. studie visade att eleverna förbättrade sitt beräkningsflyt ("fluency") när de fick sitta enskilt vid datorn i 5-15 minuter per session och arbeta med en uppgift i taget och helt enkelt öva och repetera de fyra räknesätten. Dessa elever presterade senare bättre i eftertest jämfört med kontrollgruppen (ibid). Fuchs et al. (2002), vars studie undersöker tre olika konstellationer av elevgrupper mot en kontrollgrupp, menar att datorledd undervisning i kombination med lärarledd undervisning är en effektiv intervention för elever i matematiksvårigheter (i problemlösning). Alla fyra grupper (alltså även inkluderat kontrollgruppen) fick grundläggande undervisning och de elevgrupper som ingick i interventionen fick *ytterligare* undervisning. Med detta sagt, att datorstöd hjälper elever i matematiksvårigheter att lyckas med textproblem och problemlösning är inte hela sanningen. Datastöd som en intervention gavs *utöver* den vanliga undervisningen men har alltså visat sig effektiv, dels då levererandet av interventionen (genom en elev per dator) är effektiv i relation till skolans resurser (ibid).

5.5 Laborativt arbete

Laborativt arbete är effektivt för alla elevers lärande, inte bara de i matematiksvårigheter (Malmer, 2002). Det hjälper elever i matematiksvårigheter genom att de behöver använda sig av flera sinnen samtidigt, vilket gör det enklare för eleven att skapa sig en förståelse (ibid.). Ett sätt att arbeta laborativt är att ta med undervingen ut i naturen där eleverna också måste använda sig av flera sinnen vilket skapar en större förståelse för matematiken (Dahlgren & Szczepanski, 1997). I studien av Lambert och Spinath (2014) ser man att elever i matematiksvårigheter som arbetat med WIP-programmet förbättrat sin förståelse för tal under interventionens gång. WIP-programmet i sig är ett komplext program och i studien förklarar de WIP utifrån ett glas med vatten ("Waterglass Intervention Program"). Ett glas med vatten går att dela in i tio lika stora klunkar och på så sätt får eleverna en konkret modell av betydelsen för exempelvis en tiondel (1/10). I WIP arbetar man av olika former av representationer och denna form av laborativt arbete med vattenglas ska mynna ut i en ökad förståelse för tals magnitud och kvantiteter. Eleverna arbetar sedan med 1/10 som just en symbol (siffra) och även i ord; en tiondel. Studien belyser vikten av att använda flera olika sinnen vid matematikinlärning (ibid.). I Lambert och Spinath studie så har man använt sig av en blandning av Ernest (1991) andra och tredje ideologier för undervisning. Läraren har visat matematiska tillämpningar genom att förklara och motivera medan eleverna har fått arbeta praktiskt samtidigt som fokus fortfarande är på elevernas förståelse (ibid.). Vidare kan det dock tänkas vara arbetsamt för läraren att planera laborativa moment i matematik och läraren behöver veta hur hen ska arbeta med det laborativa materialet för att verkligen få en didaktisk vinning (Cederhem, 2008).

6 Sammanfattning och personliga reflektioner

Sammanfattningsvis kan vi säga att det finns möjligheter för elever i matematiksvårigheter att nå skolans kunskapskrav och därmed klara av matematiken *om* de får adekvat hjälp genom olika former av interventioner. Det känns hoppfullt. Hur bra och effektiv en intervention är mäts med hjälp av *effektstorlek* och på så sätt kan interventioner jämföras med varandra. Genom att jämföra variationen i medelvärdet från före- och eftertest hos minst två grupper (i denna sammanställning: elever i matematiksvårigheter som genomgått en intervention och en kontrollgrupp) kan vi få en effektstorlek (Meyvis & van Osselaer, 2018). I detta arbete har vi sammanställt interventioner med hög effektstorlek (>0,80), det finns studier med interventioner som har fått en lägre effektstorlek och har därmed inte haft en signifikant inverkan på elevernas matematikinlärning. Med kunskap om interventioners möjliga positiva verkan på matematikinlärning och hur de är utformade, har lärare tillgång till fler verktyg att utforma undervisningen med och därmed blir läraren bättre i att möta elever i matematiksvårigheter. Undervisningen blir på så sätt mer inkluderande tänker vi. Malmer (2002) skriver om detta och påpekar att detta kräver att läraren behöver vara flexibel i sitt sätt att undervisa. Här lyfter Malmer också den affektiva dimensionen; för att elever ska lyckas i matematik behöver de också känna att de har möjligheter, att de känner sig sedda och accepterade. Detta är i linje med vad Nilholm (2007) lyfter med det relationella perspektivet. Hur vi väljer att se på elever i matematiksvårigheter påverkar också deras möjligheter att lyckas. Är det enbart ett hopplöst fall med en elev som "bara inte kan lära sig matte"? eller ligger begränsningen i lärarens sätt att undervisa och framförallt sätt att *bemöta* eleven. Det vi i denna litteraturstudie har funnit som effektiva interventioner är de som inkluderat muntliga och skriftliga instruktioner (med hjälp av visuellt stöd), datorstöd, laborativ undervisning och självbedömning, liksom olika kombinationer av dessa.

Vi har tidigare i detta arbete återgivit att en god förståelse för likamedtecknet visats ha positiv inverkan på elevers problemlösningsförmåga (Powell & Fuchs, 2010). Vidare var det intressant att Powell och Fuchs skriver att elever kan tänkas bära med sig en felaktig tolkning om symbolen till skolan, där symbolen tolkas vara en uppmaning att ”göra något” eller finna totalen av något. Vi tror det ligger mycket i detta, för hur många gånger har man inte själv sagt i undervisningssammanhang att t.ex. 6 + 14 *blir* (!) 20? Istället för att säga att 6 + 14 är *lika med* 20 vilket är ett mer korrekt språkbruk då det betonar att symbolen är en relationell symbol. Vi vill lyfta detta då vi tror, utifrån de artiklar vi läst, att lärare behöver vara särskilt tydliga och konsekventa i sitt sätt att använda matematikens begrepp och symboler för elever i matematiksvårigheter. För att ge ytterligare ett exempel innebar en av interventionerna som Swanson, Lussier och Orosco (2013) undersökte att eleverna skulle göra kvadrater runt viktiga ord i en problemlösningsuppgift. Vi tänker att denna intervention delvis syftar till att strukturera och göra eleven uppmärksam på viktiga ord och begrepp som har betydelse för att lösa uppgiften.

Avslutningsvis vill vi i detta stycke diskutera definitionen av elever i matematiksvårigheter. I vår litteraturstudie har vi valt att övergripande använda *elever i matematiksvårigheter* för de artiklar vi studerat och presenterat i resultatet. För ett par artiklar har vi återgivit författarens egna definition (t.ex. MD). Vi definierar elever i matematiksvårigheter vara den grupp elever som i respektive artikel varit i fokus för en intervention. Vi vill dock poängtera att författaren eller de författarteam för respektive artikel inte nödvändigtvis har använt sig av samma urvalskriterier för att definiera vilka elever som ska ingå i en intervention. Gemensamt är att i alla artiklar (bortsett från två) finns angivet något matematiktest med en gräns där elever som presterar under en viss percentil (25:e – 30:e beroende på test) har fått ingå i en intervention. Det har även varit olika namn på testerna som angivits i artiklarna, så vi kan inte säga något om hur lika testerna varit. Slutligen anser vi att för våra frågeställningar har inte detta varit ett bekymmer då den grupp elever som är i matematiksvårigheter är de som är i behov av specifika undervisningsmetoder och reprsentationsformer.

7 Avslutning

Elever i matematiksvårigheter presterar oftast under den 25:e percentilen på standardiserat test men litteraturstudier visar att med hjälp av effektiva interventioner kan dessa elever prestera likvärdigt med övriga elever. Att läraren är flexibel i sitt sätt att undervisa och därmed inkluderar olika förklaringsmodeller bidrar till att elever i matematiksvårigheter lättare kan lära sig matematik. Laborativt arbete i matematik bidrar till matematikinlärningen, liksom datorstöd utöver den grundläggande undervisningen. Inför framtida arbete förespråkar vi till fortsatt undersökning hur datorstöd påverkar elever i matematiksvårigheter att förbättra sitt “flyt” av beräkning med de fyra räknesätten. Dels för att datorer, på många svenska skolor, är en självklar del i undervisningen och därför en tillgänglig resurs för matematiklärare att använda sig av men också för att vår litteraturstudie visar på att problemlösningsförmågan hos elever i matematiksvårigheter stärks om mindre kognitiv kraft läggs på vanlig beräkning.

8 Källor

Bergqvist, K. (2007). Eget arbete – Eget ansvar. I K. Granström (Red.), *Forskning om lärares arbete i klassrummet*. (s. 95–108). Stockholm: Liber Distribution.

Berhanu, G. (2011). Inclusive education in Sweden. Responses, challenges, and prospects. *Intenational Jurnal of Special Education, 26*(2), 128-148.

Burns, M. K., Kanive, R., & DeGrande, M. (2012). Effect of a computer-delivered math fact intervention as a supplemental intervention for math in third and fourth grades. *Remedial and Special Education*, *33*(3), 184–191. Hämtad från http://dx.doi.org.e.bibl.liu.se/10.1177/0741932510381652

Cederhem, P. (2008). *Undervisningsmetoder i matematikundervisningen: En kartläggning.* (Examensarbete, Linköpings Universitet, Norrköping). Hämtad från http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:18042/FULLTEXT01.pdf

Chinn, S. (2017). *The trouble with maths. A practical guide to helping learners with numeracy difficulties* (2. ed.). Oxon: Routledge.

Chodura, S., Kuhn, J-T., & Holling, H. (2015). Interventions for children with mathematical difficulties a meta-analysis. *Chodura S, Kuhn J-T, Holling H, 223*(2), 129-144. 10.1027/2151-2604/a000211

Coe, R. (2002). *It's the effect size, stupid[1] what effect size is and why it is important* (2002/9/25). Leeds: Education-line, University of Leeds.

Dahlgren, L. O., & Szczepanski, A. (1997). *Utomhuspedagogik – boklig bildning och sinnlig erfarenhet* (volym nr 31). Linköping: Skapande vetande.

Dennis, M. S, Sharp, E., Chovanes, J., Thomas, A., Burns, R. M., Custer, B., & Park, J. (2016). A meta-analysis of empirical research on teaching students with mathematics learning difficulties. *Learning Disabilities Research & Practice, 31*(3), 156-168. http://dx.doi.org.e.bibl.liu.se/10.1111/ldrp.12107

Dyment, J. E. (2005). Green school grounds as sites for outdoor learning: Barriers and opportunities. *International research in geographical and environmental education*, *1*(14), 28-45. Tasmania: University of Tasmania, Faculty of education, Launceston.

Engström, A. (2003). *Specialpedagogiska frågeställningar i matematiken* (2,. uppl.). Örebro: Örebro Universitet, Pedagogiska institutionen.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education* (1,. uppl.). London: The Falmer Press.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., & Prentice, K. (2004). Responsiveness to mathematical problem-solving instruction: Comparing students at risk of mathematics disability with and without risk of reading disability. *JOURNAL OF LEARNING DISABILITIES*, *37*(4), 293-306. https://doi-org.e.bibl.liu.se/10.1177/00222194040370040201

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Prentice, K., Burch, M., Hamlett, C. L., Owen, R., & Schroeter, K. (2003). Enhancing third-grade students' mathematical problem solving with self-regulated learning strategies. *Journal of Educational Psychology*, *95*(2), 306-315. doi:10.1037/0022-0663.95.2.306

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Hamlett, C. L., & Appleton, A. C. (2002). Explicitly teaching for transfer: Effects on the mathematical problem-solving performance of students with mathematics disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, *17*(2), 90–106. https://doi.org/10.1111/1540-5826.00036

Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Long, J., Namkung, J., Hamlett, C. L., Cirino, P. T., Jordan, N. C., Siegler, R., Gersten, R., & Changas, P. (2013). Improving at-risk learners' understanding of fractions. *Journal of Educational Psychology*, *105*(3), 683-700. http://dx.doi.org.e.bibl.liu.se/10.1037/a0032446

Hagland, K., Hedrén, R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem* (1,. uppl.). Stockholm: Liber.

Hammar Chiriac, E., & Hempel, A. (Red.). (2005). *Handbok för grupparbete – att skapa fungerande grupparbeten i undervisning* (2,. uppl). Lund: Studentlitteratur.

Jahnke, A. (2016). *Skolans och förskolans matematik - Kunskapssyn och praktik* (1,. uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Lambert, K., & Spinath, B. (2014). Do we need a special intervention program for children with mathematical learning disabilities or is private tutoring sufficient?. J*ournal for educational research online, 6*(1), 68-93. http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0111-opus-88416

Lee, J. W. (1992). *The effectiveness of a novel direct instructional approach on math word problem solving skills of elementary students with learning disabilities.* (Del av en doktorsavhandling, The Ohio State University, Ohio) Hämtad från http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=osu1487778663287618 .

Lunde, O. (2011). *När siffrorna skapar kaos: matematiksvårigheter ur ett specialpedagigiskt perspektiv* (1,. uppl.). Stockholm: Liber.

Magne, O. (1998). *Att lyckas med matematik i grundskolan* (1,. uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla* (2,. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Meyvis, T., & Van Osselaer, S. M. J. (2018). Increasing the power of your study by increasing the effect size. *Journal of Consumer Research*, *44*(5), 1157–1173. https://doi.org/10.1093/jcr/ucx110

Nilholm, C. (2007). *Perspektiv på specialpedagogik* (2,. uppl.). Lund: Studentlitteratur.

Powell, S. R., & Fuchs, L. S. (2010). Contribution of equal-sign instruction beyond word-problem tutoring for third-grade students with mathematics difficulty. *Journal of Educational Psychology*, *102*(2), 381-394. http://dx.doi.org.e.bibl.liu.se/10.1037/a0018447

Re, A. M., Pedron, M., Tressoldi, P. E., & Lucangeli, D. (2014). Response to specific training for students with different levels of mathematical difficulties. *Exceptional Children*, *80*(30), 337-352. http://dx.doi.org.e.bibl.liu.se/10.1177/0014402914522424

Reynolds, D. & Muijs, D. (1999). The effective teaching of mathematics: a review of research. *School leadership & management*, *19*(3), 273-288. https://doi.org/10.1080/13632439969032
Newcastle: University of Newcastle.

Skolverket. (2017). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik.* Hämtad 2019-03-22 från https://www.skolverket.se/getFile?file=3794

Skolverket (2018). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011: reviderad 2018*. (5., uppl.) Stockholm: Skolverket.

Skott, J., Jess, K., Hansen, H. C., & Lundin, S. (2010) *Matematik för lärare, Delta Didaktik* (1,. uppl.). Denmark, Europe: Gleerups Utbildning.

SPSM (Specialpedagogiska skolmydigheten). (2019). *Matematiksvårigheter.* Hämtad 2019-03-20 från https://www.spsm.se/funktionsnedsattningar/matematiksvarigheter/

Stenhag, S. (2010) *Betyg i matematik: vad ger grundskolans matematikbetyg för information?*. (1,. uppl.). Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis.

Swanson, H. L., Lussier, C., & Orosco, M. (2013). Effects of cognitive strategy interventions and cognitive moderators on word problem solving in children at risk for problem solving difficulties. *Learning Disabilities Research & Practice*, *28*(4), 170–183. https://doi.org/10.1111/ldrp.12019