Linköpings Universitet
Institutionen för beteendevetenskap
LiU-PEK-R-266, 2020
Licentiatavhandling

Coachande nätbaserade samtal om matematik

En studie om hur matematikcoacher
stöttar elever vid problemlösning

Pether Sundström

Licentiatavhandling

Coachande nätbaserade samtal om matematik

En studie om hur matematikcoacher stöttar elever vid problemlösning

Pether Sundström

Institutionen för beteendevetenskap och lärande

Linköpings universitet

ISBN: 978-91-7929-842-5

LiU-PEK-R-266

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Institutionen för beteendevetenskap och lärande

LiU-PEK-R-266

ISBN: 978-91-7929-842-5

Linköpings universitet

Institutionen för beteendevetenskap och lärande

SE-581 83 Linköping, Sweden

Tel 013-28 10 00

Tryck: Linköpings universitet, LiU-Tryck 2020

Innehållsförteckning

Förord.....	5
Bakgrund.....	7
IT som förändringsagent för matematikundervisning	9
Matematikcoacher	12
Sammanfattning.....	14
Syfte	15
Skolmatematik	17
Kunskaper i matematik	18
Hur matematikundervisning kan gå till	25
Problemlösning	26
Datorn som pedagogiskt verktyg i matematikundervisning	31
Datorn som coach	33
Lärarledd coachning via datorn	36
Lärande kommunikation	39
Kontext	40
Mediering.....	41
Språket	42
Proximala utvecklingszonen	45
Scaffolding.....	47
Metod	49
Studiens design	49
Urval	50
Analys	51
Kvalitetsaspekter	53
Perspektivmedvetenhet	53
Etiskt värde	54
Resultat.....	57
Inventerande kontext	58
Ämnesövergripande inventerande kontext ...	58
Ämnesspecifik inventerande kontext.....	62
Sammanfattning	78
Orienterande kontexter	78

Handlingsorienterande kontext.....	79
Förklaringsorienterande kontext.....	84
Sammanfattning.....	91
Diskussion.....	95
Matematikcoachning och problemlösning.....	95
Matematikcoachens stöttning i olika kontexter	96
Inventeringens betydelse	101
Avslutning och fortsatt forskning	103
Referenser	105

Förord

Arbetet med att studera hur mattecoacher hjälper elever vid problemlösning i matematik har varit givande. Det har bidragit till att jag själv fått ny kunskap om vilken roll språket har i utvecklingen av matematiskt kunnande hos elever. Processen med denna skrift har förutom att det varit lärorikt även varit intressant och utmanande. En utmaning har legat i att hålla fart och fokus då tiden för avhandlingsarbetet tidvis tryckts undan av mycket undervisning. Jag är tacksam för att Institutionen för beteendevetenskap och lärande har givit mig möjlighet att kunna kompetensutveckla mig i kombination med min lärartjänst. Det är många som under den här processen bidragit med både kunskap och uppmuntran och nu har fått tillfälle att rikta mitt tack till er.

Först vill jag rikta ett stort tack till mina handledare Joakim Samuelsson och Marcus Samuelsson som med en perfekt balans av både piska och morot fått mig framåt i skrivandet. Er hjälp med innehåll, upplägg och kloka råd om hur saker bör uttryckas har varit ovärderliga. Att bli ifrågasatt av er med skärpa men även med humor och värme har varit utvecklande på flera plan. Fredrik Jeppsson är jag också skyldig ett stort tack för din läsning och dina mycket värdefulla råd om teoretiska tankar som hjälpte mig att komma i mål. Jag vill även tacka Stefan Stenbom som gjorde det möjligt att få tillgång till de chattar jag analyserat.

Ett stort tack skickar jag till er kollegor som med läsning, frågor och hejarop hjälpt mig. Ett särskilt tack till dig Rickard Östergren för att du i lägen när jag helst velat glömma skrivandet uppmuntrat och puffat på mig. Ulla-Britt Persson får också ett speciellt tack för att du tog dig tid att hitta alla skavanker i texten.

Sist men inte minst riktar jag ett tack till min familj som på olika sätt hållit lågan levande med visat intresse för hur det går i arbetet. Min fru Birgitta är nog lika glad som jag att det hela är över. Tack kära du för att du underlättat med markservice när inte arbetstiden räckt till.

Linköping 28 augusti 2020

Pether

Bakgrund

När jag började att undervisa i matematik var det naturligt för mig att använda det undervisningssätt som användes när jag läste matematik på lärarutbildningen. Eleverna ägnade den mesta lektionstiden åt att träna individuellt genom att lösa uppgifter i läromedlet som användes. Jag funderade inte så mycket på om det var det bästa sättet för eleverna att lära sig. Istället la jag fokus på att fundera på hur jag som lärare skulle förklara hur uppgifterna skulle lösas och i vilken takt eleverna borde arbeta med uppgifter så att kapitlet i boken skulle vara klart till provet. Resultatet blev att eleverna fick försöka förstå mycket av det matematiska innehållet på egen hand. Tiden att hjälpa varje elev blev mycket kort. Att mycket matematikundervisning i Sverige har gått till på ovanstående sätt stöds av resultatet i en rapport från Skolverket (2004). Det framkom att 95 procent av undervisningstiden var eleverna lämnade åt sig själva att försöka lära sig matematik (Skolverket, 2004). Den typen av undervisning har fortsatt vara ett vanligt inslag i svenska matematikklassrum vilket framkommer i TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*), 2007 (Skolverket 2008a) och TIMSS, 2011 (Skolverket 2012). Denna form av undervisning blir utsatt för kritik då den riktar uppmärksamheten mot framför allt elevernas förmåga att utföra beräkningar. Andra förmågor som eleverna också förväntas utveckla såsom problemlösningsförmåga, kommunikationsförmåga, resonemangsförmåga och begreppslig förmåga hålls tillbaka med sådan undervisning. Samtidigt som kritik riktas mot undervisningen i matematik presterar eleverna sämre i matematik. Internationella studier visar att våra svenska 15-åringar under lång tid sjunkit resultatmässigt jämfört med elever i andra länder exempelvis Programme for International Student Assessment (PISA) 2000 och 2003 presterade svenska 15-åringar över snittet av medlemsländerna i *Organisationen för ekonomiskt samarbete och utveckling* (OECD) i samtliga tre kunskapsområden som undersöktes. I undersökningen PISA 2012 visade det sig att i 25 av 34 länder hade 15-åringarna bättre resultat än svenska 15-åringar. I PISA 2015 framkom det att svenska 15-åringar presterade bättre än de gjorde 2012 och i undersökningen 2018 presterade eleverna bättre än genomsnittet i OECD. Under de år som elevernas prestationer försämrades var de svenska 15-åringarnas förmåga att lösa matematiska problem sämre. Hagland, Hedrén och Taflin (2005) menar att elevernas möjlighet att utveckla förståelse för matematiska begrepp ökar då undervisningen baseras på problemlösning. Dessutom blir eleverna bättre på att tänka

logiskt och systematiskt när de lär sig att lösa matematiska problem (Hagland et al. 2005).

För att utveckla matematikundervisningen så att en högre måluppfyllelse uppnås har flera olika förslag på hur matematikundervisningen kan förändras beskrivits. I litteraturen förs användandet av informationsteknik (IT) i skolan fram som ett sätt att öka måluppfyllelsen (Hylén, 2013). I resonemanget om IT förekommer begreppen informationsteknologi samt informations och kommunikationsteknologi (IKT). IT är ett övergripande begrepp som handlar om de framsteg som gjorts inom datateknik. IKT är ett samlingsnamn för den del av IT som rör kommunikation mellan människor. Jag har valt att använda det uttryck som förekommer i den litteratur som jag hänvisar till. Som ett led i att öka måluppfyllelsen med IT gav regeringen i uppdrag åt Skolverket att ta fram en IT-strategi.

Strategierna ska bidra till ökad måluppfyllelse och likvärdighet genom att den strategiska potential som IT har tillvaratas i hela skolväsendet. (Utbildningsdepartementet, 2015).

Citatet ovan visar att det finns en tillit till att IT kan bidra till att utbildningsväsendet kommer att lyckas hjälpa eleverna att lära sig mer och dessutom bidra till att skolan blir mer jämlik om IT används. I Lgr 11 nämns att undervisningen i matematik ska syfta till att eleverna ska kunna använda digitala verktyg för att klara vissa verksamheter i matematik.

Vidare ska eleverna genom undervisningen ges möjligheter att utveckla kunskaper i att använda digital teknik för att kunna undersöka problemställningar, göra beräkningar och för att presentera och tolka data. (Lgr11, 2019, s. 55)

Ovanstående citat visar att det finns en tro på att IT i skolan bidrar till bättre lärande. Detta bidrar till att göra det intressant att undersöka hur datorn används för att stötta elevers lärande.

På den skola jag arbetade 1995 installerades 25 datorer i en datasal. Ett antal program installerades på datorerna, några av dem matematikprogram. Inför en matematiklektion frågade en elev om vi

skulle vara i datasalen och när jag svarade att vi inte skulle vara det så sa eleven ”Nej, det är alldeles för roligt va?”.

Intresset från eleverna på skolan var stort för att få använda datorer under lektionstid. Elevers intresse för IT i undervisningen stöds av E-learning Nordic (2006) en studie som genomfördes av *Ramboll Management* på uppdrag av the Norwegian Ministry of Education and Research, det Danska Undervisningsministeriet, Svenska myndigheten för skolutveckling, och the Finnish National Board of Education. Studien visade att eleverna själva upplevde att användandet av IT hade en positiv effekt på deras inläring och att eleverna ville att IT skulle användas i större utsträckning i undervisningen. Även lärarna som deltog i undersökningen menade att användandet av IT hade en positiv effekt på elevernas lärande.

En liknande reflektion gjorde jag när jag undervisade i matematik. När eleverna fick arbeta med matematikprogram på datorerna upptäckte jag att flera av dem hade större tålamod och vilja att anstränga sig med lösningen av matematikuppgiften när de stötte på svårigheter. De visade också en större vilja att hitta egna lösningar än när de satt och löste matematikuppgifter i matematikboken. Att motivationen ökar hos eleverna när de använder IT stöds av flera internationella studier (se exempelvis Crawford & Vahey, 2002; Balanskat, Blamire & Kefala, 2006)

Myndigheten för skolutveckling presenterade en analys av 21 internationella rapporter om hur användningen av IT i undervisningen kan påverka elevers lärande. Analysen visade att datorer har en positiv effekt på motivationen hos eleverna och även en positiv effekt på lärandet (Myndigheten för skolutveckling, 2007).

IT som förändringsagent för matematikundervisning

Tidigare i texten beskrevs att det fanns förväntningar på IT i skolmatematiken framskrivet i Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011 (Lgr 11). I vidare perspektiv kan ses att kunna använda IT är en viktig kompetens för att exempelvis kunna leva i informationssamhället (Europaparlamentets och rådets rekommendation 2006).

Europaparlamentet och Europeiska rådet har givit rekommendationer om åtta nyckelkompetenser för livslångt lärande. De åtta nyckelkompetenserna är:

- 1) Kommunikation på modersmålet
- 2) Kommunikation på främmande språk
- 3) Matematiskt kunnande och grundläggande vetenskaplig och teknisk kompetens
- 4) Digital kompetens
- 5) Lära att lära
- 6) Social och medborgerlig kompetens
- 7) Initiativförmåga och företaganda
- 8) Kulturell medvetenhet och kulturella uttrycksformer
(Europaparlamentets och rådets rekommendation 2006)

En av de åtta nyckelkompetenserna är således digital kompetens och med det avser Europarådet att kunna använda samhällets informationsteknik på ett säkert sätt och ha ett kritiskt förhållningssätt i användandet. Det betyder också att medborgarna ska kunna använda datorer för att utbyta information samt för att kommunicera och delta i nätverk via internet. När Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011 (Lgr 11) skrevs fanns en intention att Europarådets åtta nyckelkompetenser skulle finnas med vilket kan vara en förklaring till att användandet av datorer tydligare skrivits fram i den nya läroplanen (Dnr 84-2008:3780). Skolverket fick 2015 i uppdrag av Regeringen att ta fram en ny IT- och digitaliseringsstrategi. I uppdraget ingick att göra förändringar i läroplaner och kursplaner för att bland annat programmering skulle ingå i undervisningen (Regeringsbeslut U2015/04666/S). Detta ledde till att programmering infördes i matematikämnets kursplan. En av målsättningarna med dessa förändringar var att med hjälp av IT öka måluppfyllelsen.

Strategierna ska bidra till ökad måluppfyllelse och likvärdighet genom att den strategiska potential som IT har tillvaratas i hela skolväsendet. (Regeringsbeslut U2015/04666/S, s. 1).

IT-användningen i Sverige ligger i topp i internationella jämförelser. Det finns datorer i de flesta hem i Sverige och jämfört med

många andra länder är tillgången till internet stor (Dutta, Geiger & Lanvin, 2015). Svenska elever använder ofta datorer hemma för att exempelvis spela spel, söka information och göra skolarbeten. Vid internationella jämförelser och undersökningar om hur mycket datorer används i undervisning ser det annorlunda ut. Trots att tillgången till datorer ökat i svensk skola så har inte användningen i undervisningen ökat i någon större omfattning (Skolverket 2016). Något som skulle kunna vara en förklaring är att lärarna saknar kompetens om hur IT kan implementeras i undervisningen.

När Skolverket (2008b) redovisade sitt uppdrag att bedöma utvecklingsbehovet av IT-användningen i skolan pekar de på två saker, (a) att det krävs en pedagogisk diskussion om möjligheter och hinder med IT och (b) att det finns ett behov av att göra en plan för hur lärare ska få tillgång till tekniken och kompetens att använda den. Skolverket har fått ett tydligt uppdrag av regeringen att underlätta för pedagoger att i större utsträckning använda IT i utbildningssyfte (U2015/04666/S).

Blomhøj (2001) hävdar att IT, och med det menar han datorer med matematikprogram, inte kan betraktas som ett neutralt redskap i matematikundervisningen. Det krävs att lärarna förändrar både form och innehåll i undervisningen då de börjar använda IT i undervisningen därför att IT ger en ny didaktisk situation. Det stöds även av Resic och Cukle (2013) som menar att IT ger en ny dimension till undervisningen då den tekniken öppnar möjligheter att på kort tid representera det matematiska innehållet på många olika sätt med bilder, filmer och animeringar. Trots att IT ger många nya möjligheter så finns också vissa utmaningar som lärarna måste ta hänsyn till när IT införs i undervisningen enligt Blomhøj (2001). Något som nämns är att eleverna måste ha initiativet i verksamheten och det sker genom att läraren skapar en lärmiljö som uppmuntrar eleverna att exempelvis utforska samband mellan matematiska begrepp. Om det inte sker så kommer eleverna att hamna i att försöka kopiera det de tror att läraren vill att de ska göra och då finns en risk att fokus flyttas från matematiskt lärande till att fundera på vad som ska göras. Blomhøj (2001) menar vidare att införandet av IT i matematikundervisningen ställer nya krav på lärarna. Det är viktigt att organisera arbetet på ett sådant sätt att verksamheten handlar om att upptäcka mönster och samband i matematikinnehållet (Blomhøj, 2001).

En forskningsöversikt som genomfördes i Storbritannien fann att även om många studier visar på att IT har positiva effekter på elevernas

lärande i matematik så var det inte enkelt att bevisa att IT var den enda framgångsfaktorn (Balanskat, Blamire, & Kefala, 2006). Något som de kunde påvisa med säkerhet var att hur lärarna använde IT i undervisningen hade stor betydelse för hur mycket eleverna lärde sig. En viktig faktor var hur integrerad IT-användningen var i undervisningen. I de fall där IT användes som en naturlig del i undervisningen och under lång tid bidrog det till att eleverna presterade bättre (Balanskat, Blamire, & Kefala, 2006). Liknande resultat framkommer i redovisningen av en metastudie gjord i USA med fokus på datorns betydelse för lärandet i matematik. Elevers prestation jämfördes där en grupp hade datorstödd undervisning och en annan hade undervisning utan dator. Resultatet i metastudien visade att vilken av grupperna som presterade bäst var beroende av hur datorn användes i undervisningen (Li & Ma, 2010). Det som avgjorde skillnaden var om datorn var en integrerad del av undervisningen och användes som ett av flera sätt att lära sig matematik eller om datorn användes som ett hjälpmedel för att exempelvis utföra beräkningar. Det som gav bäst resultat på elevernas lärande var när datorn blev en integrerad del av undervisningen (Li & Ma, 2010). Att oreflekterat säga att IT i matematikundervisning hjälper eleverna att lära sig matematik stämmer alltså inte.

Forskningen ger enligt Li och Ma (2010) en bild av att IT i matematikundervisningen inte som en enskild faktor underlättar elevernas lärande men kan vara en hjälp för lärare att exempelvis representera matematiskt innehåll på ett varierande sätt. Detta ligger i linje med Blomhøj (2001) som beskriver att IT används för att förmedla förståelse för matematiskt innehåll genom olika sätt att representera innehållet. Användandet av IT kan vara en resurs för ett socialt samspel mellan elever som tillsammans med lärare skapar förståelse för matematiska begrepp. IT kan även användas som ett verktyg för att kommunicera om matematiskt innehåll.

Matematikcoacher

Det har gjorts flera satsningar i Sverige för att med hjälp av IT stödja elevernas lärande. En tidig start var Datorn i Skolan som startade 1974 som blev en satsning för att elever skulle få kunskaper om vad en dator är och hur man använder den. Precis som idag fördes möjligheten att träna problemlösningsförmåga fram som något som användandet av datorn kunde bidra med. En mer nutida satsning är ”En till en” (en dator till varje elev) som många kommuner investerar i (Grönlund 2014).

Datorn i skolan var en satsning där kunskaper om datorn låg i fokus och det kan sägas om införandet av programmering i kursplanerna också. Det handlar om att skapa en förståelse för hur IT fungerar. Ett annat sätt att se på användandet av IT är att sätta fokus på kunskaper i ett ämne och använda datorn som ett hjälpmedel för att förstå och upptäcka kunskapsinnehållet. Som diskuterats ovan finns det stöd för att IT kan vara en resurs för lärandet och då är det viktigt att se på vilket sätt IT kan användas. En satsning som gjorts i matematik är mattecoacher på nätet. Det startade som ett projekt på Kungliga Tekniska Högskolan (KTH) där syftet var att öka den digitala kompetensen hos lärarstudenter och bidra till ökad måluppfyllnad i matematik bland Stockholms elever (Stenbom, 2010). Via chatt har elever möjlighet att få hjälp av lärarstudenter med matematik när de till exempel jobbar med läxor eller sitter hemma och förbereder sig inför prov.

Projektet är ett samarbete mellan ett antal kommuner och universitet. Eleverna använder ett webb-baserat program för att chatta med lärarstudenter som studerar matematik vid universitetet (Hrastinski & Stenbom 2013). Forskningen som bedrivs om det här sättet att undervisa är indelad i tre olika inriktningar.

- a) Inriktningen fokuserar på hur coachning ska genomföras via nätet för att eleverna ska lära sig så mycket som möjligt (Hrastinski & Stenbom 2013).
- b) Forskningen inriktas mot hur verktyget som används ska utformas (Hrastinski & Stenbom 2013).
- c) Inriktningen studerar hur man med hjälp av de lagrade konversationsloggarna ska kunna utveckla både pedagogik och teknik (Hrastinski & Stenbom 2013).

En stor utmaning med coachning är att coachen måste kunna avgöra vilken matematisk kompetens eleven har för att kunna anpassa coachningen så att eleven förstår men samtidigt blir utmanad att reflektera över matematikinnehållet (Hrastinski & Stenbom 2013).

Det är framför allt tre aspekter som är viktiga för en lyckad coaching, (a) engagemang, (b) kognitiv synvinkel och (c) det sociala samspelet (Stenbom, Hrastinski, och Cleveland-Innes, 2012).

Engagemang innebär att coachen måste vara engagerad så att eleven känner sig uppmärksamrad. Det får till exempel inte ta för lång tid innan eleven får respons från coachen. Det är viktigt menar Stenbom,

Hrastinski, och Cleveland-Innes (2012) att coachen för ett resonemang med eleven och får eleven att känna sig delaktigt samtidigt som coachen måste leda eleven framåt i arbetet med att lösa uppgiften. Stenbom, Hrastinski, och Cleveland-Innes (2012) kopplar detta till undervisningen.

Den *kognitiva synvinkeln* innebär att coachen ska försöka få eleven att förstå uppgiftens karaktär. Det gör coachen genom att tillsammans med eleven söka fakta och vilka matematiska idéer som är kopplade till uppgiften. Tillsammans försöker matematikcoachen och eleven att testa olika sätt att lösa uppgiften.

Den tredje aspekten som coachen bör ha i beaktande för att coachningen ska bli lyckad är det *sociala samspelet*. Något som lyfts fram är vikten av att ha ett gott samtalsklimat mellan eleven och matematikcoachen. (Stenbom, Hrastinski, & Cleveland-Innes 2012)

Hrastinski, Edman, Soames, Andersson och Kawnine (2012) har också undersökt vilka utmaningar matematikcoacher ser med coachning via nätet. Detta gjordes för att finna sätt att underlätta uppdraget att hjälpa elever med matematik. De fann att det är viktigt att coachen skapar en god kontakt med eleven för att kunna ge hjälp inom elevens proximala utvecklingszon.

Sammanfattningsvis kan sägas att de studier som det hänvisats till ovan berör olika aspekter av hur kommunikationen mellan matematikcoach och elev hanteras. Matematikcoachens uppgift är förutom att ha ett bra samtalsklimat fokusera på lösningsprocedurer och att stötta eleverna i deras strävan att förstå matematiken.

Sammanfattning

Det som sagts här kan sammanfattas med att eleverna i svensk skola, även om de i den senaste undersökningen vänt en negativ trend, under lång tid presterat sämre vid internationella jämförelser i matematik. Ett område där eleverna blir sämre är problemlösning. Detta har inneburit att det finns ett behov av att finna nya undervisningsmetoder som hjälper eleverna att förstå matematik bättre. Man sätter tilltro till att användandet av IT i undervisningen ska leda till att eleverna lär sig mer matematik. Ett sätt att använda IT är att kommunicera via dator där matematikcoacher stöttar elever i deras strävan att förstå matematik.

Syfte

Syftet med denna studie är att beskriva och analysera webb-baserade kommunikationschattar mellan elever och mattecoacher när de arbetar med problemlösning inom matematik. De frågeställningar som jag vill ge svar på i studien är följande.

- Vad karaktäriserar de sätt på vilka matematikcoacherna stöttar de elever som deltar i webb-baserade chatforum?
- Vad görs möjligt för eleverna att lära sig i en webb-baserad chatt med matematikcoacher?

Skolmatematik

Det som ska undervisas i matematik beskrivs i kursplaner och innehållet i dessa blir det som ger en bild av vad skolmatematiken är. Då kursplanerna genom åren har förändrats så har även bilden av vad matematik är förändrats. Enligt Undervisningsplan för rikets folkskolor (1919) ska eleverna undervisas i räkning och geometri så att de ”efter deras ålder och utveckling” får insikt och färdighet i räkning. I Normalplanen för undervisning i folkskolor och småskolor (1900) kallas ämnet för räkning. Det ger en fingervisning om att det handlar om övande verksamhet. I metodiska anvisningar står det att:

Hufvudräkning (tillämpande) så väl med sak- som sifferexempel bör flitigt öfvas dels i samband med den skriftliga räkningen, dels särskildt och företrädesvis omfatta sådana uppgifter som komma till användning i det praktiska livet (Normalplanen för undervisning i folkskolor och småskolor 1900 s.32).

I de tidiga kursplanerna (Lgr 62, Lgr 69) beskrevs matematikämnet som ett ämne som fokuserade på beräkningar, medan de senare kursplanerna ger en mer omfattande bild av vad matematik är. Exempelvis beskrivs matematik i Lpo 94 som ett ämne där undervisningen i matematik ska sträva mot att eleven stärks i det egna tänkandet och den egna förmågan att använda matematik i olika situationer. I Lgr 11 ges en bild av ett ämne vars syfte är att ge kunskaper som gör dem användbara i vardagen i fler sammanhang än bara i matematikklassrummet. Dessutom ska undervisningen leda till att eleven får en tilltro till sin egen förmåga att kunna använda matematiken i olika sammanhang. Ska detta bli möjligt måste man utgå från var eleven befinner sig i tänkandet om sig själv och sin egen matematiska förmåga. Det ställer också krav på vilka aktiviteter som förekommer i undervisningen. För att eleven ska kunna bilda sig en uppfattning om sitt tänkande i matematik måste det förekomma diskussioner där eleverna får möjlighet att uttrycka sina tankar om matematik och även höra andras tankar.

I Lgr 11 framhålls vidare att matematikämnet ska ge eleverna sådana kunskaper att de kan fatta välgrundade beslut. I både Lpo94 och Lgr 11 beskrivs att eleverna ska utveckla förmåga a) att förstå och använda matematiska begrepp, b) att formulera och lösa matematiska problem, c) att välja lämpliga beräkningsmetoder och att kunna utföra beräkningar, d) att föra och följa matematiska resonemang och e) att

kommunicera med olika uttrycksformer och argumentera och redogöra för olika frågeställningar. De uttrycks på lite olika sätt i de två läroplanerna men det handlar i stort om samma saker. I Lpo94 beskrivs de kunskaper som eleverna ska uppnå för betyget godkänt som kunskaper i det matematiska innehållet. För högre betyg beskrivs de förmågor som eleverna ska utveckla i kvalitetsnivåer. I Lgr 11 beskrivs kvalitetsnivåer av de förmågor som eleverna ska utveckla för alla betygssteg. Det har alltså skett en förskjutning från kunskaper i ett givet matematiskt innehåll till vilken kvalitet som eleverna visar i de olika förmågorna.

Kunskaper i matematik

Syftet med denna genomgång är inte att vara heltäckande kring begreppet kunskap. Jag vill här göra läsaren uppmärksam på att det finns olika former av kunskap och att vi faktiskt enligt grundskolans kursplaner ska rikta uppmärksamheten mot dessa. Kunskap är inget entydigt inom olika skolämnen utan snarare något mångfacetterat

Matematisk kunskap kan beskrivas som en tudelad kunskap. Den ena delen handlar om att förstå matematiska begrepp och deras inbördes relationer. Den andra delen handlar om att kunna hantera procedurer (se till exempel Carpenter, 1986; Skemp, 1976). En skillnad mellan dessa är enligt Hiebert och Lefevre (1986) att procedurell kunskap handlar om saker som man lär sig utantill medan begreppslig kunskap kräver reflektion. Hiebert & Lefevre (1986) delade upp procedurellt kunnande i två delar där den ena delen kan handla om tabellkunskaper och den andra delen kan vara att lära sig att stegvis utföra en beräkning. Begreppslig kunskap handlar om förmågan att se hur olika begrepp är relaterade till varandra (Hiebert & Lefevre 1986). Carpenter (1986) använder begreppen *conceptual knowledge* respektive *procedural knowledge* för att på liknande sätt beskriva matematisk kunskap. Samuelsson (2007b) översätter Carpenters begrepp med begreppsligt kunnande och färdighetskunnande. Begreppslig kunskap menar Samuelsson (2007b) kan definieras som fakta vilka tillåter flexibel användning genom att de har samma referensram. Färdigheter handlar dels om kunskap om matematiska symboler och hur de förhåller sig till varandra, dels kunskap om de regler som styr hur man kan manipulera med dessa symboler som till exempel i algoritmer. (Samuelsson 2007b).

Skemp (1976) anser att man kan betrakta matematikämnet utifrån två skilda perspektiv och han använder beteckningarna *instrumental understanding* (veta hur) och *relational understanding* (förståelse). *Instrumental understanding*, kan handla om problemlösning och då har eleven färdiga strategier för att lösa uppgiften. *Relational understanding*, innebär att eleven har förmågan att med hjälp av att ha en förståelse för det matematiska innehållet kunna konstruera sina egna planer för hur ett matematiskt problem kan lösas.

Gemensamt för författarna är således att de lyfter en procedurinriktad och en begreppsriktad kunskap.

I dag har diskussionen vidgats. Diskussionen handlar om vad matematisk kompetens är. För matematikämnet har flera olika taxonomier tagits fram och dessa beskriver matematisk kompetens.

I Sverige beskriver Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM) målet med matematikundervisning i sin rapport *Hög tid för matematik* (Johansson m.fl., 2001). Bland annat skriver de att målet med matematikundervisning är att eleverna ska utveckla såväl intresse för matematik som matematiska förmågor. Kunnandet som ska uppnås i matematikundervisningen enligt Johansson m.fl., (2001) stämmer väl överens med kunnandet som beskrivs i Lgr 11. Detsamma gäller den beskrivning matematisk kunskap som Johansson m.fl. (2001) beskrev. Nedan följer den beskrivningen.

a) Produktivt förhållningssätt: att se matematik som meningsfull, användbar och värdefull, relaterat till stark tilltro till den egna förmågan att utöva matematik i vardagsliv, samhällsliv, kommande studier och yrkesliv.

b) Helhetsperspektiv: att se matematikens roll, värde och egenvärde i ett historiskt, kulturellt och samhälleligt perspektiv.

c) Begreppslig förståelse: att begripa innebörden av matematiska begrepp och operationer och hur dessa bildar sammanhängande nätverk.

d) Behärskande av procedurer: att på ett flexibelt, precist och effektivt sätt tillämpa olika slags procedurer.

e) Kommunikationsförmåga: att i tal och skrift kunna diskutera och argumentera kring frågeställningar i matematik.

f) Strategisk kompetens: att formulera, representera och lösa matematiska problem – såväl inommatematiska som vardagliga tillämpningar.

g) Argumentationsförmåga: att tänka logiskt och reflektera, samt förklara, troliggöra och berättiga matematiska påståenden.

Enligt rapporten är kunskapsaspekterna sammanflätande och de samspekar med affektiva aspekter. (Johansson m.fl., 2001, s. 43).

Ytterligare ett sätt att se på kompetens i matematik har utvecklats i en rapport Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark (KOM-rapporten, 2002). En av frågorna som skulle besvaras var vilka matematiska kompetenser eleverna skulle ha efter olika stadier i utbildningssystemet (Niss & Jensen, 2002). De delade in kompetenserna i två huvudtyper, att kunna fråga och svara i matematik och att kunna hantera matematikens språk och redskap. För att kunna fråga och svara i matematik bör eleven ha:

- tankegångskompetens,
- problembehandlingskompetens,
- modelleringskompetens,
- argumentationskompetens.

För att kunna hantera matematikens språk och redskap bör eleven ha:

- representationskompetens,
- symbol och formaliseringskompetens,
- kommunikationskompetens,
- hjälpmedelskompetens.

Figur 1

Illustration av vad kunnande i matematik kan vara Niss och Højgaard-Jensen (2002).

En närmare beskrivning av de två huvudkompetenserna och dess delar skulle kunna göras enligt följande. Huvudkompetensen att fråga och svara i, med och om matematik handlar om att kunna ställa rätt typ av frågor. Det innebär även att ha en blick för de svar som leder till ökad kunskap *tankegångskompetens*, och att kunna svara på sådana frågor. Det är frågor som handlar om att kunna förstå matematiska begrepp. Vidare innebär denna kompetens att kunna formulera och lösa matematiska problem *problemlösningskompetens* och *modelleringskompetens*. Vidare handlar den här huvudkompetensen om att kunna förstå, bedöma och ta fram argument för svar på matematiska problem *resonemangskompetens* (Niss & Jensen, 2002).

Huvudkompetensen att använda språk och redskap i matematik handlar om att kunna använda olika representationsformer av matematiska fakta *representationskompetens*. Vidare innebär det att kunna hantera de särskilda representationer som utgörs av matematikens symboler och formler *symbol- och formaliseringskompetens*. En annan del av den kompetensen handlar om att kunna kommunicera i och om matematik *kommunikationskompetens*. Dessutom beskrivs att kunna använda och förhålla sig till olika tekniska

hjälpmedel inom matematiken *hjälpmedelskompetens*. En kort sammanfattning skulle kunna beskriva att den första huvudkompetensen att fråga och svara i, med och om matematik innebär att tänka om matematik och den andra att använda språk och redskap i matematik innebär att använda matematik (Niss & Jensen, 2002).

I USA utvecklade Kilpatrick, Swafford, och Findell (2001) ett ramverk för motsvarande grundskola och gymnasium. Utifrån fem kompetenser som är relaterade till varandra beskrivs matematisk kompetens. De fem kompetenserna är:

- Begreppsförståelse
- Räknefärdighet
- Problemlösningsförmåga
- Matematiskt- logiskt resonemang
- En positiv inställning till matematik

Begreppsförståelse

Begreppsförståelse innebär mer än att bara ha kunskap om fakta och regler. Det handlar även om att ha en förmåga att se samband mellan teorier och procedurer. Att till exempel kunna lösa ett matematiskt problem på flera sätt.

Räknefärdighet

Inom denna kompetens ryms förmågan att utföra beräkningar såväl med papper och penna som att beräkna med huvudräkning. Det innefattar även att göra överslagsberäkningar och att bedöma rimligheten i ett svar.

Problemlösningsförmåga

Den här kompetensen inbegriper förmågan att omsätta ett matematiskt problem i en matematisk modell som leder till en lösning på problemet. Dessutom innebär problemlösningsförmåga att kunna formulera matematiska problem utifrån en vardagssituation. Vidare ryms förmågan att kunna representera problemet på olika matematiska sätt såsom grafiskt, aritmetiskt och algebraiskt.

Matematiskt- logiskt resonemang

Här ryms förmågan att argumentera och att föra i bevis och förklara varför ett svar är rimligt. Det handlar även om att föra ett logiskt resonemang och att se mönster samt att kunna reflektera över varför en lösning är matematiskt logisk och en annan inte.

En positiv inställning till matematiken

Det innebär att ha förmågan att kunna se sin egen och samhällets nytta av matematiken. Den rymmer även att utveckla positiva tankar om matematik eftersom det leder till att det blir lättare att lära sig matematik om det finns en positiv inställning till ämnet.

Sammanfattningsvis kan vi i ovanstående taxonomier se att matematisk kunskap är något mångfacetterat. Detta avspeglas även i Lgr 11. Där presenteras kunskaper som förmågor som eleverna ska utveckla.

- formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder
- använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp
- välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter,
- föra och följa matematiska resonemang, och
- använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser (Skolverket, 2019 s.2)

Kunskap är alltså inget som beskrivs entydigt inom matematikdidaktisk forskning utan snarare något som är sammansatt av många olika delar som binds samman och samtidigt är beroende av varandra.

I det här avsnittet har skolmatematiken behandlats utifrån det som kan kopplas till vad som ska läras. Nedanstående tabell sammanfattar jag hur kompetenserna i de olika utredningarna är relaterade till Lgr 11.

Tabell 1

Sammanfattning av kompetenser i matematik (Efter inspiration av Engvall, 2013, s. 46)

Lgr 11	NCM (Johansson et al. (2001))	GY 07 Skolverket (2007)	KOM-rapport (2002)	Kilpatrick et al. (2001)
Begreppslig förståelse	Begreppslig förståelse	Förmåga att förstå och använda matematikens begrepp	Tankegångs- kompetens Symbol och formalism- kompetens	Begrepps- förståelse
Problemlösnings- förmåga	Strategisk kompetens	Förmåga att hantera problem	Problemlösnings- kompetens Modellerings- kompetens	Problemlösnings- förmåga
Metod och beräknings- förmåga	Behärskande av procedurer	Förmåga att använda procedurer	Hjälpmedels- kompetens och Resonemangs- kompetens	Räknefärdighet
Kommunikations- förmåga	Kommunikations- förmåga Argumentations- förmåga	Förmåga att kommunicera och argumentera	Kommunikation skompetens	
Resonemangs- förmåga			Resonemangs- kompetens Representations- kompetens	Matematik- logiskt resonemang
Intresse för matematik och tilltro till förmåga att använda matematik	Produktivt förhållningssätt Helhets- perspektiv	Förmåga att knyta matematiken till omvärlden	Positiv inställning till matematik	

Tabellen ovan sammanfattar hur matematiskt kompetens beskrivs i olika rapporter och kursplaner. Trots vissa skillnader finns det enighet i synen på matematisk kompetens. Kilpatrick et al. (2003) har inte med kommunikationsförmåga. Det som rör elevernas förhållningssätt till matematiken skiljer sig också åt där Lgr 11 beskriver att eleverna ska få tilltro till sin egen förmåga att använda matematik och att de ska få intresse för matematiken. I KOM-rapporten

uttrycks det som att eleverna ska få en positiv inställning till matematiken. Trots att beskrivningarna ovan innehåller ett fåtal skillnader i beskrivningen av vad matematisk kompetens är så kan det ändå sägas att det finns en samstämmighet i synen på matematisk kompetens. Jämför vi med tidigare läroplaner så finns en förskjutning från matematik som ett övningsämne där räkningen står i fokus till en syn där matematisk kompetens ses som en kombination av olika förmågor (Engvall 2013). I nästa avsnitt kommer frågan hur skolmatematiken kan undervisas att bearbetas.

Hur matematikundervisning kan gå till

När elever och lärare samlas för att ha en matematiklektion arrangeras arbetet förhoppningsvis på ett sätt så att eleverna lär sig så mycket matematik som möjligt. Läraren har valt ut och introducerar olika aktiviteter för att eleverna ska lära sig matematik. Eleverna utför de aktiviteter som läraren valt ut för att lära sig och de använder ett antal hjälpmedel för att lyckas. Det här kan kallas undervisningsmetoder enligt Marton (2000). I forskning om matematikundervisning diskuteras en mängd olika arbetsmetoder till exempel:

- Traditionell undervisning som innebär att läraren har en genomgång av något moment och därefter arbetar eleverna individuellt med arbetsuppgifter i en matematikbok. Läraren går runt och hjälper eleverna med de svårigheter som eleverna stöter på (Samuelsson, 2008; Neuman, 1987; Magne, 1998; Engström, 1993; Carlgren & Marton, 2002).
- Laborativ undervisning där lärare och elever använder olika representationer i sitt arbete med matematiken (Sveider 2016).
- Individuellt arbete som innebär att eleverna sitter och arbetar individuellt i matematikboken. Läraren fungerar som handledare och går runt och hjälper eleverna med de svårigheter som uppstår (Samuelsson 2007a).

Centralt i alla undervisningsmetoder är dialogen mellan lärare och elever, vilket studeras i denna studie. Skolforskningsinstitutet (2017) gjorde en forskningsöversikt med syftet att undersöka vad som kännetecknar dialoger som engagerar elever i resonemang om matematik och vad som kännetecknar lärares ledning av sådana resonemang. Man fann att klassrumsdialogerna kan delas upp i tre olika

typer: *disputerande*, *kumulativa* och *utforskande* samtal. När eleverna diskuterar olika matematiska lösningar genom att jämföra och förklara dessa kan det beskrivas som utforskande samtal (Kazemi & Stipek, 2001; McCrone, 2005). Dessa skiljer sig från *disputerande* och *kumulativa* samtal där eleverna antingen argumenterar för sin egen förståelse av ett matematiskt fenomen eller okritiskt accepterar någon annans förklaring. Något som Kazemi och Stipek (2001) framhåller är att för att ett samtal om matematik ska betraktas som utforskande bör förklaringarna bestå av matematiska argument och inte vara fokuserade på procedurellt resonemang där eleven exempelvis bara stegvis beskriver en lösning. Läraren kan hjälpa eleverna till utforskande samtal genom att peka på mönster och föreslår alternativa tankesätt och lösningar på matematiska problem och söker nå överenskommelse med hjälp av matematisk argumentation (Kazemi & Stipek, 2001). Den forskning som Skolforskningsinstitutet (2017) studerat är utförd i klassundervisning och i den här studien sker konversationerna mellan matematikcoachen och en elev. Trots denna skillnad kan det vara av intresse att studera dessa chattar mellan matematikcoachen och elev i relation till utforskande samtal eftersom konversationerna behandlar matematik.

Vilken metod som är mest effektiv för att lära sig matematik diskuteras inom forskningsfältet. Reynolds och Muijs (1999) visade i en forskningsöversikt att eleverna lärde sig mer om läraren ledde undervisningen än om de satt och räknade individuellt. Det var mer effektivt om läraren höll i genomgångar och visade exempel på hur uppgifter skulle lösas och förde en diskussion med eleverna om det matematiska innehållet än att eleverna enskilt försökte genom att räkna uppgifter och titta på exempel i läroboken försökte förstå det matematiska innehållet. Reynolds och Muijs (1999) menar att även om den här typen av undervisning där läraren leder undervisningen är mest effektiv så betyder inte det att individuell träning är dålig utan tvärtom både viktigt för att inte säga nödvändig för att eleverna ska lära sig så mycket som möjligt. Däremot är det så att om läraren förlitar sig för mycket på individuellt räknande så blir elevernas lärande mindre effektivt.

Problemlösning

Ovan har vad man ska lära sig och hur man ska lära sig matematik beskrivits. En förmåga som undervisningen i matematik ska utveckla hos eleverna, och som är central i denna studie, är förmågan att lösa

matematiska problem (Skolverket 2019). Enligt Polya (1945) är problemlösning i matematik den mest centrala aktiviteten i matematikundervisning. Schoenfeld (1992) menar att ett matematiskt problem kännetecknas av att det är en uppgift som inte är känd för en elev och där lösningsmetoden inte direkt är uppenbar. Dessa för eleven okända uppgifter tillsammans med en vilja att lösa uppgiften sätter igång en process där eleven behöver ha tillgång till olika strategier och olika erfarenheter från liknande uppgifter för att kunna lösa problemet (Polya 1945, Schoenfeld 1985).

Problemlösning är både en del av det centrala innehållet i Lgr 11 och en del av kunskapskraven i matematik. I det centrala innehållet beskrivs att undervisningen bland annat ska erbjuda eleverna olika strategier för lösning av matematiska problem. Eleverna ska även lära sig värdera olika lösningar på matematiska problem. I kunskapskraven beskrivs grader av kvalitet på dessa kunskaper. Problemlösning är det enda område inom matematiken som finns med i både centralt innehåll och i kunskapskraven. Det kan tolkas som att det anses vara en viktig kunskap.

Som nämnts tidigare så ska matematikuppgifter uppfylla vissa kriterier för att betraktas som problemlösningssuppgifter. Det ska vara uppgifter som någon vill eller behöver lösa, det får inte finnas en i förväg given procedur för att lösa dem och det ska innebära ansträngning av den som ska lösa uppgifterna (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005). Uppgifter som för vissa elever är rutinuppgifter är problemuppgifter för andra elever (Hagland, Hedrén & Taflin 2005). Det här innebär att en uppgift kan exempelvis vara känd för en elev men okänd för en annan. När en elev löst en viss uppgift och får en liknande och eleven direkt kan se hur den ska lösa är den att betrakta som en rutinuppgift (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005).

En rutinuppgift är således en uppgift som inte innebär någon ansträngning för en elev att lösa och som har en given procedur som används för att lösa uppgiften. Det innebär att läraren måste vara medveten om varje elevs kunskaper och förmågor när problemlösningssuppgifterna väljs.

Polya (1962) beskrev strategier för problemlösning i fyra steg: a) att förstå problemet, b) att göra upp en plan, c) att utföra planen och d) att utvärdera sin lösning av problemet. Det förs steget *att förstå problemet* handlar enligt Polya (1962) både om att förstå vad problemet

handlar om och att ha ett intresse för att lösa problem. Därför blir valet av problem viktigt så att det handlar om ett sammanhang som eleven är bekant med, samtidigt som det måste ligga på en nivå som är anpassad för elevens kunskaper så att det varken blir för lätt eller för svårt. Det andra steget *att göra upp en plan* innebär att eleven förstår hur problemets olika delar är relaterade till varandra. Det är en viktig insikt för att kunna komma fram till en plan för hur problemet kan lösas. I den här fasen kan eleven utnyttja tidigare erfarenheter av problemlösning där eleven kanske löst ett liknande problem. Den här beskrivningen har likheter med *Modellering* vilket beskrivs som att utgå från det verkliga dvs. det sammanhang som beskrivs i det matematiska problemet och söka lämplig matematisk tillämpning för att kunna lösa problemet (Bergman Ärlebäck, 2013). Den här fasen kan vara tidskrävande och det är viktigt menar Polya (1962) att eleverna är medvetna om att det kan ta tid. Det tredje steget *lösa problemet* handlar om att genomföra den plan man har. Det fjärde och sista steget *att utvärdera sin lösning* lägger Polya (1962) stor vikt vid för det är genom att granska och diskutera lösningen som eleverna bekräftar sina kunskaper och utvecklar dem samt även utvecklar sin förmåga att lösa matematiska problem.

Problemlösning kräver sålunda att eleverna behärskar många olika förmågor som till exempel begreppslig förståelse och procedurell förmåga. Man kan även se att beroende på hur verksamheten organiseras så kan problemlösning även öva argumentationsförmåga.

Wyndhamn (1993) har visat tre olika sätt att tänka om problemlösning som handlar om hur man lär sig matematik. Han menar att eleverna ska lära sig matematik a) för problemlösning, b) om problemlösning och c) genom problemlösning.

Perspektivet *för problemlösning* beskriver Wyndhamn (1993) som att eleverna lär sig matematik som exempelvis att kunna utföra beräkningar med målet att kunna lösa matematiska problem. Det andra perspektivet, *om problemlösning* beskrivs som att lära eleverna att hantera problemlösning. Detta sker på tre nivåer a) kunskapsnivån, b) den symboliska nivån och c) den fysiska nivån. När eleven har kunskaper och mål som uppfattas som meningsfulla då är det *kunskapsnivån* och när läraren använder symboler för att hjälpa eleven att förstå så beskrivs det som *den symboliska nivån*. Den tredje *fysiska nivån* beskrivs som då läraren försöker ta reda på vilka missuppfattningar eleven har. Detta görs genom att läraren rättar elevens uppgifter eller ger eleven diagnoser. De saker som eleven

missuppfattat hjälper sedan läraren till med så att eleven kan komma fram till ett korrekt svar. Det tredje perspektivet enligt Wyndhamn (1993) är *genom problemlösning* och då används problemlösandet som en hjälp för att lära sig något av det matematiska innehållet. Eleven ses inte som en passiv mottagare utan som en aktiv deltagare som använder sina tidigare kunskaper för att skapa nya.

I dag finns det många olika hjälpmedel för att lösa matematiska problem och olika sätt att representera problemen. Datorn ger många möjligheter till att sätta problemlösning i ett för eleven meningsfullt sammanhang samtidigt som datorn kan underlätta för eleven att pröva flera olika Lösningsstrategier. En studie där man med hjälp av dator tränade problemlösning visade på en positiv utveckling när det gällde elevers problemlösningsskillnader (Lee, & Chen 2009). Sedan 1970-talet har datorn använts som en pedagogisk resurs i skolorna (Farkell-Bååthe, 2000). Datorn kan betraktas som ett verktyg men även som en undervisningsmetod.

Datorn som pedagogiskt verktyg i matematikundervisning

Även om datorn har använts som pedagogiskt hjälpmedel i skolan sedan 1970-talet, är det i början av 1980-talet som datorn började användas som pedagogiskt verktyg i större omfattning (Farkell-Bååthe, 2000). Uppfattningarna om vad datorn ska användas till och hur den ska användas i undervisningen har skiftat under årens lopp. Under de tidiga satsningarna på 1970-talet funderade ansvariga för skolan mest på vilka datorer som passade bäst för skolans behov. Operativsystem och programmeringsspråk var också frågor som diskuterades (Farkell-Bååthe, 2000). Därefter har diskussion om datorns användande mer handlat om vilka program som ska användas (Hylén, 2010). Av de satsningar som gjorts sedan 1970-talet kan exempelvis nämnas Dis (Datorn i skolan). Satsningen syftade till att studera på vilket sätt användning av dator i undervisningen påverkade organisationen av undervisningen och även hur metodik och innehåll påverkades. Det var tre delar som arbetet med Dis koncentrerades kring: a) undervisning om datorer och datorers användning i samhället, b) datorn som ett sätt att modernisera undervisningen genom exempelvis som ett räknehjälpmedel, c) datorn som ett inlärningshjälpmedel (Farkell-Bååthe, 2000). Resultatet av detta blev att datalära skrevs in i läroplanen Lgr 80. Andra resultat blev exempelvis att kalkylprogram blev tillåtna på ekonomiska linjer på gymnasiet (Farkell-Bååthe, 2000).

1995 presenterade IT-kommissionen en ny pedagogik med arbetsmetoder som baserades på användandet av IT i undervisningen. Målsättningen var att datorn skulle bli ett pedagogiskt hjälpmedel. Exempel på saker som IT-kommissionen drev var att eleverna skulle ha större inflytande över kunskapsinhämtandet. Med hjälp av datorer kopplade till internet skulle eleverna på egen hand söka kunskap (Farkell-Bååthe, 2000). I slutet av 90-talet kom ITiS (IT i Skolan) där 60.000 lärare fick möjlighet att vidareutbilda sig inom IT och utveckla sin undervisning med ambition att informationstekniken skulle bli en del av undervisningen. På så sätt hoppades man att eleverna skulle få en bättre målluppfyllelse (Farkell-Bååthe, 2000). ITiS var en av de största nationella satsningar som genomförts när det gäller kompetensutveckling av lärare och IT. Efter att den satsningen avslutades 2002 så har det inte gjorts någon liknande satsning (Lund

2012). De flesta ungdomar i Sverige har idag tillgång till IKT. De har stor vana av IKT och många använder det dagligen. Redan för några år sedan använde mer än 90% av alla barn över 6 år internet. De använder IKT för att göra skolarbeten och söka fakta, titta på TV och video. Något som fått stort utrymme är att kommunicera med andra. För ungdomar idag är internet den viktigaste informationskällan (Alexanderson & Davidsson, 2016). Det innebär att ungdomar idag ser skolan som en av flera källor till kunskap. Samuelsson (2003) pekar på att IKT har gjort sitt inträde i skolan som ett komplement till den etablerade undervisningen. Behovet att kunna utnyttja tekniska hjälpmedel har setts som en viktig kunskap under lång tid. I de övergripande målen för grundskolan uttrycks det att när eleverna slutar grundskolan ska de kunna använda modern teknik som ett verktyg för kunskapssökande, kommunikation, skapande och lärande. NCTM (National Council of Teachers of Mathematics in USA) framhåller att användningen av teknologi i matematikundervisningen är en viktig del i att utveckla elevernas kunskaper i matematik.

An excellent mathematics program integrates the use of mathematical tools and technology as essential resources to help students learn and make sense of mathematical ideas, reason mathematically, and communicate their mathematical thinking
(NCTM, 2014 p. 78)

Myndigheten för skolutveckling (2007) menar att IT-användning för pedagogisk utveckling kan ha en positiv effekt om IT används för att förändra undervisningen. Om IT integreras i undervisningen och samtidigt bygger på en pedagogisk idé kan det underlätta anpassningen till varje elevs behov. Detta ligger i linje med vad Hattie och Yates (2013) presenterade i sin metanalys med fokus på effektiv undervisning. De påpekar att datorstödd undervisning har olika stor effekt beroende på i vilket sammanhang och på vilket sätt det används. Det bästa sättet enligt Hattie och Yates (2013) är när datorn blir ett komplement till den ordinarie undervisningen. Om till exempel användandet av datorn medför att eleverna ägnar mer tid åt att träna specifika färdigheter i matematik så är datorn ett effektivt komplement till ordinarie undervisning.

Föreliggande studie behandlar datorn som ett pedagogiskt verktyg i matematikundervisning där datorn används som hjälp för att matematikcoacher och elever ska kunna kommunicera.

Datorn som coach

Det finns olika sätt att använda datorn i undervisningen. Det kan handla om att använda den som ett pedagogiskt hjälpmedel för att utföra beräkningar. Datorn kan också vara ett stöd för elever att träna på olika moment i matematik. På vilket sätt datorn används som pedagogiskt stöd beror på vilken typ av mjukvara som finns installerad. De datorprogram som används för datorstödd matematikundervisning kan delas upp i två huvudgrupper a) Computer-assisted instruction (CAI) och b) Intelligent Tutor System (ITS). När man tittar på hur dessa två grupper av program används ser man att det finns likheter mellan dem. Både CAI och ITS ger feedback på elevens lösningar av matematikuppgifter och väljer uppgifter som passar för den eleven behöver träna mer på. Det som skiljer dem åt är på vilket sätt de ger återkoppling. (Steenbergen-Hu & Cooper, 2013). Ett sätt att beskriva skillnaderna mellan CAI och ITS är den distinktion som VanLehn (2006) gjorde. Han utgick ifrån hur programmen ger sin återkoppling: (a) *outerloop behaviors*, dessa program är sådana som ger feedback på elevens lösningar av matematiska uppgifter och ger förslag på nya uppgifter som är anpassade efter elevens förmåga. (b) *innerloop behaviors*, det är program som följer eleven genom lösningen på den matematiska uppgiften och ger förslag på korrigeringar under tiden som eleven jobbar med den matematiska uppgiften. Enligt VanLehn (2003) förekommer både *outerloops behaviors* och *innerloops behaviors* hos ITS-program medan CAI-program enbart erbjuder *outerloops behaviors*.

Datorn som pedagogiskt och didaktiskt stöd i matematikundervisningen visar på relativt små positiva effekter för elevernas lärande i matematik. I PISA-studien från 2015 kunde en liten positiv effekt på elevernas prestation i matematik påvisas (OECD, 2015). Detsamma visar en metaanalys som gjordes 2013 där 74 studier ingick (Cheung, & Slavin, 2013). I den metaanalysen ingick studier som undersökte effekten av tre olika grupper av datorprogram i matematikundervisningen. Dessa tre grupper av program är varianter av CAI som beskrivs ovan. Den första gruppen av datorprogram som används i matematikundervisningen handlar om program som hjälper eleven att öva på specifikt matematiska färdigheter. Det kan exempelvis vara multiplikationstabellen. Den andra gruppen är datorprogram som hjälper eleven till begreppslig förståelse genom att förklara ett matematiskt innehåll. Exempelvis kan det vara program som presenterar genomgångar av ett innehåll där bilder och modeller

används för att hjälpa eleven att förstå. Den tredje gruppen av datorprogram är en kombination av genomgång och övning. Där kan läraren lägga upp en plan för eleven i vad som ska förklaras, studeras och i vilken ordning innehållet ska presenteras. Läraren kan i dessa program följa elevens utveckling. Dessa studier behandlade i vilken mån ovan beskrivna program hjälpte eleverna att utveckla matematiska kunskaper. Där framkom att användningen av dator i undervisningen främjade elevernas prestationer i matematik i viss mån. Det var små effekter med en genomsnittlig effektstorlek för alla tre typerna av program på +0.15. Den största effektstorleken hade övningsprogrammen med en effektstorlek på +0.18 (Cheung, & Slavin, 2013).

Steenbergen-Hu, och Cooper, (2013) gjorde en metaanalys, med fokus på vilken effekt program av typen ITS har på elevers matematiklärande. Resultatet visade att elever som fick hälften av sin undervisning via ITS-program och hälften av tiden blev undervisade av lärare presterade lika bra som de elever som fick hela sin undervisning av en lärare. I metaanalysen visades inga negativa effekter av matematikundervisning stödd av ITS-program. De positiva effekterna var dock små om man jämförde med vanlig undervisning av lärare. Effektstorleken som uppmättes var mellan +0.05 och +0.09. Den största effekten var om datorstödet varade under tid kortare än ett skolår. Om testerna av elevernas kunskaper rörde något specifikt område inom matematiken gav ITS-stöd högre effekt än om testet var ett prov som omfattade ett bredare matematiskt innehåll, exempelvis ett nationellt prov. Steenbergen-Hu och Cooper (2013) menar att ITS ska ses som ett komplement till den ordinarie undervisningen och att det lämpar sig för elever som presterar som genomsnittseleven och är studiemotiverade samt kan ta eget ansvar. Det studierna visat är att elever som är lågpresterande ofta gör misstag som kan relateras till användandet av datorn mer än att det kan kopplas till uppgifterna. Lågpresterande elever har en tendens att ge upp när det går emot. De blir mer motiverade av att en lärare vägleder dem (Steenbergen-Hu & Cooper, 2013).

Även om effekterna är små så finns det flera undersökningar som visar på att datorn kan underlätta för eleverna att förstå matematiskt innehåll då datorn används som hjälpmedel till förklaring. Exempelvis Taber, Martens och VanMerrieboer (2004) och Adegoke (2010) visade att om datorn används för att illustrera något matematiskt innehåll och samtidigt beskriver det som illustreras antingen med text eller en berättarröst så har det visat sig att eleverna lyckas bättre på ett eftertest

än en kontrollgrupp som fått undervisning på samma innehåll med genomgång av en lärare.

Ett liknande resultat fann Gambari, Ezenwa och Anyanwu (2014) som genomförde en studie där man undersökte hur datorstödd undervisning kunde underlätta för elever att förstå geometri. Resultatet i studien visade att elever som fick undervisning via dator lärde sig mer. Testet genomfördes med för- och eftertest. En grupp elever fick geometriska begrepp förklarade med animerade bilder och förklarande text via dator och en annan grupp fick samma animering men en förklarande berättarröst. En tredje grupp fick undervisning där en lärare förklarade samma begrepp via undervisning med genomgång i helklass och där bilder ritades på tavlan. Man fann ingen signifikant skillnad mellan den grupp som fick begreppen förklarade med animerade bilder och förklarande text via dator och den grupp som fick begreppen förklarade med animerade bilder och en berättarröst. Däremot visade båda grupperna som fick undervisning via dator bättre resultat än gruppen som fick undervisning av lärare (Gambari, Ezenwa & Anyanwu 2014).

I en metastudie av Kulik och Fletcher (2016) undersöktes 50 studier om ITS. I den undersökningen framkom att ITS kan vara mycket effektivt som undervisningsmetod. Medelvärdet på effektstorleken för de 50 studierna ligger på 0.66. Kulik och Fletcher (2016) fick alltså ett annat resultat än Steenbergen-Hu och Cooper (2013) och Cheung, & Slavin, (2013). En förklaring som Kulik, och Fletcher (2016) ger på varför deras metaanalys visar på högre effekt än metanalyserna av Steenbergen-Hu och Cooper (2013) och Cheung och Slavin, (2013) är att Kulik, och Fletcher (2016) gjort en skillnad mellan CAI och ITS vilket de andra två metaanalyserna inte gjort. ITS har dubbelt så hög effekt som CAI enligt Kulik, och Fletcher (2016). Sammanfattningsvis kan sägas att datorprogram kan bli ett bra komplement för elever då det gäller att illustrera fenomen inom matematiken. Datorprogram som ger återkoppling till elever i deras process att lösa matematikuppgifter. Samtidigt behöver lågpresterande elever vägledning av en lärare för att inte löpa risk att ge upp. En kombination av dessa där datorn blir ett hjälpmedel att ge bra representationer av matematiken, samtidigt som en lärare stöttar eleven i arbetet, kan vara ett framgångsrikt sätt att undervisa i matematik.

Lärlarledd coaching via datorn

De studier som hänvisats till ovan är sådana där datorn kan sägas vara coach för elevernas lärande. Ett annat sätt är att undervisa är att en lärare handleder elever via datorn. Det finns ett begränsat antal matematikdidaktiska studier med fokus på lärlarledd coaching via dator. Lissaman, De Pomerai och Tripconey (2009) undersökte ett projekt där 16-18 åriga elever fick coaching via dator. Syftet var att få fler av dessa elever att bli behöriga för högre studier. De fördelar som redovisades var att coachningen via dator genomfördes på en tid som låg utanför skoltid och på så sätt stördes inte ordinarie undervisning för elever. En annan fördel som nämndes i undersökningen var att eleverna kunde tillgodogöra sig undervisningen i lugn och ro i hemmiljö. Nackdelar som nämndes var att det ställer krav på elevernas mognad och motivation för att dra nytta av coachningen. Lissaman, De Pomerai och Tripconey (2009) menar att några av eleverna hade behov av att vara på samma plats som en lärare för att inte tappa fokus på uppgiften.

Med syfte att undersöka hur blivande matematiklärare kunde hjälpa elever som behövde hjälp med matematikuppgifter genom coaching via dator genomförde Hrastinski och Stenbom (2013) en studie som visade att en utmaning för coacherna var att komma fram till vilken nivå eleverna låg på. Matematikcoacherna upplevde att det var svårt att veta hur de skulle hjälpa eleverna på bästa sätt. Det visade sig även att ett hinder var att kommunikationen genomfördes med textmeddelanden och det gjorde att det ibland hindrade elev och coach att uttrycka sig (Hrastinski, & Stenbom, 2013).

För att undersöka vilket innehåll som konversationerna mellan matematikcoach och elev hade vid coaching via nätet fick matematikcoacher fylla i en enkät. Genom enkäten framkom att konversationernas innehåll tre huvudområden: a) kognitivt innehåll, b) undervisningsinnehåll och c) socialt innehåll. Kognitivt innehåll rör konversation kring uppgiften. Det kan handla om hur uppgiften kan lösas. Undervisningsinnehållet innebär att matematikcoachen underlättar för eleven att förstå något. Det sociala innehållet handlar om när konversationen rör personliga saker och inte direkt handlar om den matematiska uppgiften. (Stenbom, Hrastinski, & Cleveland-Innes, 2012).

I en liknande studie studerade Stenbom, Jansson och Hulkko, (2016) vad konversationer mellan elev och matematikcoach handlade

om. I den här studien gick man igenom konversationerna. Innehållet delades upp i a) kognitivt, b) undervisnings-, c) socialt och d) emotionellt innehåll. Kognitivt innehåll rör konversation kring uppgiften. Det kan handla om hur uppgiften kan lösas. Undervisningsinnehållet innebär att matematikcoachen underlättar för eleven att förstå något. Det sociala innehållet handlar om när konversationen handlar om personliga saker och inte direkt handlar om den matematiska uppgiften. Man fann att konversationerna till stor del hade kognitivt och undervisande innehåll. Utifrån det drog de slutsatsen att matematikcoachning är ett bra komplement till ordinarie matematikundervisning.

Sammanfattningsvis kan datorn som pedagogiskt och didaktiskt verktyg i matematikundervisningen ha fördelar exempelvis vara ett stöd för att träna specifika färdigheter. Datorn kan fungera som en coach men också vara ett verktyg för att stötta en dialog mellan lärare och elever. Tidigare studier har visat på fördelar med coachning via dator. Det finns dock fortfarande många didaktiska utmaningar att utforska och i mitt avhandlingsarbete ämnar jag undersöka webb-baserade chattar som mattecoacher och elever för när de kommunicerar kring problemlösning inom matematik.

Lärande kommunikation

Syftet med denna studie är att studera och analysera webb-baserade chattar som mattecoacher och elever för när de kommunicerar kring problemlösning inom matematik. En teori som använts vid tidigare studier för att studera samtal är sociokulturell teori (Littleton & Mercer, 2013; Mercer, 2004; Nystrand, Lawrence Wu, Gamoran, Zeiser & Long, 2010; Resnick, Asterhan, & Clarke 2015).

Den har vuxit fram ur Vygotskys (1978) förklaringsmodell om hur den sociala kontexten och kulturen påverkar människans tankar och handlingar. Enligt Säljö (2005) sker lärande i interaktion mellan individer. Dialogen mellan matematikcoach och elev kan ses som det sociala sammanhang där det kan uppstå interaktion där lärande görs möjligt. Enligt Rogoff, (1990) ger individens deltagande i sådana sociala aktiviteter en möjlighet till lärande.

Det är enligt Säljö (2000) den sociala verksamheten som måste analyseras för att förstå hur lärande går till. Enligt Mercer (2004) är lärande processer något som skapas kulturellt. Kunskap ses som något som delas mellan människor och förståelse skapas gemensamt av människor (Mercer 2004). Även Säljö (2000) betraktar kunskap som något som i stor utsträckning finns mellan människor och inte enbart inom individen. När matematikcoach och elev interagerar för att gemensamt hitta en lösning på ett matematiskt problem skapas möjlighet till lärande där exempelvis matematiska begrepp kan klargöras. Säljö (2000) menar att i ett sociokulturellt perspektiv betraktas människan som en kommunikativ varelse.

I ett sociokulturellt perspektiv på mänskligt lärande och utveckling blir därför *kommunikativa processer* helt centrala.

Det är genom kommunikation som individen blir delaktig i kunskaper och färdigheter. (Säljö, 2000, s.37)

Det är genom kommunikation där antingen en elev i en klassrumssituation lyssnar på andra som diskuterar eller att eleven själv är aktiv i diskussionen som eleven får möjlighet att bli delaktig i kunskaper och färdigheter (Säljö, 2000). Kommunikationen mellan matematikcoachen och eleven ger möjlighet för individen att ta del av kunskaper och färdigheter som utbyts i kommunikationen. I sociokulturella studier fokuseras i vilken kontext kommunikationen genomförs (Mercer 2004). Det handlar också om vad som görs möjligt

att lära och hur till exempel lärare och elever kommunicerar (Mercer 2004). I de följande avsnitten presenteras ett antal centrala begrepp från den sociokulturella teorin som kommer att användas i denna studie. Följande begrepp presenteras i kontext, mediering, språket, proximala utvecklingszonen, scaffolding och appropriering.

Kontext

I det sociokulturella perspektivet anses tänkandet och kommunikationen vara tätt knutna till varandra (Säljö 2000). Människan tar till sig nya sätt att tänka, resonera och agera genom att delta i kommunikation med andra människor. Säljö (2000) menar att kommunikationen alltid är knuten till en kontext och att kontexten påverkar förståelsen av exempelvis ett matematiskt innehåll. I en studie som genomfördes av Säljö och Wyndhamn (1992) undersöktes hur väl elever lyckades att lösa en matematikuppgift beroende på vilken kontext de befanns sig i när de skulle lösa uppgiften. Uppgiften var att bestämma portot för ett brev som vägde 120 gram. När uppgiften gavs under en matematiklektion tolkade många uppgiften som en räkneuppgift och beräknade vad brevet kostade per gram och multiplicerade sedan kostnaden med 120. Eleverna hanterade uppgiften som analog med uppgifter om pris på exempelvis frukt där priset är proportionellt med vikten. Resultatet blev att deras svar kunde bli att det behövdes ett och ett halvt frimärke. När uppgiften delades ut under en samhällskunskapslektion gjorde eleverna inte den kopplingen utan löste uppgiften på andra sätt. Fler elever klarade uppgiften då den presenterades på en samhällskunskapslektion. Kontext handlar således både om vad uppgiften handlar om och i vilket sammanhang uppgiften diskuteras och löses. Aktivitet och kontext formar varandra till en helhet (Säljö 2000). Kontexten är beroende av och formar aktiviteten och aktiviteten är både beroende av och formar kontexten (Wyndhamn 2002). Elevers matematiska tänkande länkas samman med de matematiska begreppens betydelse och kontexten de förekommer i. Hung (1997) beskriver detta samband som att elever behöver skapa förståelse för matematiska problem på tre olika kontextuella nivåer: (1) *siffernivå*, (2) *problemuppgiftsnivå*, och (3) *situationsnivå* där begreppens matematiska betydelse är kopplade till sammanhanget i den matematiska problemuppgiften. Om eleven uppfattar att det endast är siffrorna som ingår i uppgiften som ska användas så görs en beräkning som i sig själv inte är felaktig. Om situationen i uppgiften liknar den ovan där eleverna skulle räkna ut portot så blir svaret på beräkningen felaktigt om svaret inte korrigeras kopplat till situationen i uppgiften. Lärare behöver hjälpa elever att se dessa tre kontextuella nivåer. I den

här studien innebär det att beroende på hur matematikcoachen uttrycker sig så kommer eleven att rikta uppmärksamheten mot olika saker. Om exempelvis matematikcoachen frågar om eleven gjort någon beräkning så kommer eleven att rikta uppmärksamheten mot beräkningar och beroende på om eleven gjort någon beräkning eller ej så kommer svaret att beröra det. Om istället matematikcoachen efterfrågar elevens förståelse av något matematiskt begrepp riktas uppmärksamheten mot det. När matematikcoachen och eleven tillsammans försöker lösa ett matematiskt problem kan det ses som en kognitiv kontext. Om matematikcoachen förklarar hur en uppgift kan lösas kan det betraktas som en kommunikativ kontext präglad av frågor och svar (Wyndhamn 2002). Säljö (2000) menar att den springande punkten för sociokulturellt perspektiv är att förstå kopplingen mellan sammanhang och individuella handlingar. Hung (1997) påpekar att eftersom elevers förståelse av matematiska problem beror på deras tidigare erfarenheter som exempelvis kulturell art så kan en lärare som ska hjälpa en elev inte utgå från att de har samma förståelse för ett matematiskt problem. Ska hjälpen bli verkningsfull för eleven måste det uppstå intersubjektivitet (Hung, 1997). Med det menas att lärare och elev har samma uppfattning om ett begrepps betydelse eller samma uppfattning om ett matematiskt problems karaktär. Av ovanstående kan tolkas att tänkande, kommunikation och fysiska handlingar är kopplade till en kontext och bör studeras som en helhet. I kontexten fyller språket en viktig funktion och blir därmed ett redskap för att förmedla omvärlden och göra den meningsfull (Säljö 2000).

Mediering

Med hjälp av olika redskap som språket, bilder och datorer förmedlas/medieras vår verklighet. Det vi förmedlar blir således påverkat av de redskap vi har (Säljö 2000). Om vi ska förmedla något genom att kommunicera via en dator kan kommunikationen hindras av hur snabbt vi kan skriva med hjälp av ett tangentbord. Är det bråttom kan det hända att vi blir mer knapphändiga med information och då ges inte en hel bild av hur vi tänker om exempelvis en matematisk uppgift. Människa och redskap fungerar i ett samspel där människan genom redskapen får kontakt med omgivningen. Genom detta samspel mellan redskap och människa kan sägas att redskapen medierar verkligheten då de används i olika sammanhang. Redskapen kan antingen vara materiella eller intellektuella, språkliga (Wyndhamn, 2002). I matematiken används olika representationsformer för att mediera det som ska förstås. Matematik upplevs i vardagssituationer, laborativt med objekt, i ritade bilder, med språkliga resonemang, med symboler i

uttryck och öppna utsagor. Att elever får möjlighet att röra sig mellan dessa olika former av representationer blir en hjälp att förstå matematiken som annars kan upplevas som abstrakt (Björklund & Grevholm 2012). Ett viktigt redskap i matematikundervisningen är språket. När en matematikcoach och en elev kommunicerar om en matematikuppgift så används det skrivna språket och de bilder de kan rita i chatverktyget det som medierar deras kunskaper. Datorn och det skrivna språket blir ett verktyg för mediering.

Språket

I det sociokulturella perspektivet har språket en viktig roll i lärandet. Lärandet i skolan beskrivs som en process där en elev blir involverad i kunskapen genom ett samtal med en lärare där båda är aktiva i ett meningsutbyte (Säljö, 2000)

”Språket erbjuder ett kraftfullt sätt att mediera verkligheten och ge perspektiv på omvärlden” (Wyndhamn, 2002, s. 99). Säljö (2000) menar att språket har tre beståndsdelar a) utpekande, b) semiotisk och c) retorisk funktion. Utpekande innebär att vi med hjälp av språket kan göra andra uppmärksamma på specifika saker. När en lärare hjälper en elev med en problemlösningsuppgift kan det handla om att läraren gör eleven uppmärksam på något som är avgörande för att kunna lösa uppgiften. Det kan handla om att peka ut vilken beräkning som ska göras eller att göra eleven uppmärksam på en formel som ska användas. Den andra beståndsdel som Säljö (2000) menar att språket har är den semiotiska som innebär att vi med språket som hjälpmedel kan ge en rik beskrivning av något fenomen och på så sätt ge det en innebörd. Språket gör det möjligt att sätta till exempel ett matematiskt fenomen i en specifik kontext som till exempel en vardaglig eller en matematisk kontext.

Den tredje beståndsdel som språket har enligt Säljö (2000) är den retoriska funktionen. Språkets retoriska funktion skapar mening i kommunikationen mellan människor (Linell, 1998). I denna studie kan det handla om att eleven och matematikcoachen argumenterar för sina ståndpunkter. Därmed skapas en gemensam kontext i skärningspunkten mellan elevens och matematikcoachs dialog.

Zevenbergen (2000) har pekat på ett problem som kan uppstå i matematikundervisningen som är relaterat till språkanvändningen. Han menar att många begrepp i matematik har en för eleverna tvetydig betydelse, t.ex. där de i en icke-matematisk kontext har en annan betydelse än i den matematiska kontexten. Den tvetydigheten kan leda till problem för eleverna att ta till sig nya begrepp. Det kan också skapa

svårigheter i kommunikationen om matematiska problem. Pimm (1987) beskriver en liknande svårighet som lärare behöver vara uppmärksamma på i undervisningen. Det handlar om uttryck som används inom matematiken och som riktar uppmärksamheten mot något matematiskt för den som ägnar sig åt matematik men för en som inte ägnar sig åt matematik får det en annan innebörd. Uttryck som exempelvis *tillsammans* och *lägga ihop* riktar uppmärksamheten mot addition om de finns i en matematikuppgift men det är inte givet i ett icke-matematiskt sammanhang. Pimm (1987) menar att elever behöver hjälp med att bli bekanta med dessa uttryck och veta vad de betyder i ett matematiskt sammanhang. exempel kan vi betrakta två frågor

- a) Finns det något jämnt primtal?
- b) Finns det några jämna primtal?

Första frågan a) är tydlig. Det efterfrågas om det finns ett jämnt primtal.

Den andra frågan är tvetydig för frågan kan besvaras med både:

- 1) Nej, det finns bara ett jämnt primtal.
- 2) Ja, 2 är ett jämnt primtal.

Ordet *några* kan uppfattas både som *flera* och *något*. Låt oss ta som exempel att en elev endast ska besvara fråga b) ovan med antingen ja eller nej. Om eleven uppfattar frågan som att det efterfrågas om det finns flera jämna tal som är primtal och svarar nej så blir svaret fel trots att eleven egentligen har kunskapen. Den här tvetydigheten menar Pimm (1987) att lärare behöver vara medvetna om och hjälpa eleverna att tänka som matematiker.

Ett annat problem som Zevenberg (2000) lyfter är att texten i matematiska problem ofta är kortfattad och samtidigt innehållsrik. Varje ord har en unik innebörd. Detta i kombination med att orden ofta kan betyda en annan sak i en icke-matematisk kontext gör att det kan vara svårt för eleverna att tolka ett matematiskt problem. Detta kan bli en svårighet för matematikcoachen i mötet med eleven när de resonerar om ett matematiskt problem. Eleven har erfarenheter av begrepp som används i det matematiska problemet men den erfarenheten kan innebära att begreppet har en annan innebörd för eleven än det har i det matematiska problemet. Wyndhamn, Riesbeck och Schoultz (2000) beskriver detta som två språk, ett vardagligt och ett matematiskt. De menar att lärare behöver ha kompetens att både kunna se skillnaden mellan dessa och förstå behovet av olika former av kommunikation, där den ena använder formellt matematiskt språk och den andra använder språk som är tillräckligt för vardagliga sammanhang. När läraren kan röra sig mellan dessa två ges möjlighet att stötta eleven på korrekt sätt (Wyndhamn, Riesbeck och Schoultz 2000). I vissa fall är elevens

erfarenhet av ett begrepp detsamma som den matematiska innebörden och då förstår elev och matematikcoach varandra. Ibland kan elev och matematikcoach ha olika erfarenhet av begreppet och då finns risken att de talar förbi varandra.

Då matematikcoachen ska förklara något för eleven kan det vara lika viktigt att eleven ger sin bild så att matematikcoachen kan förstå varför eleven har svårt med uppgiften. Därmed får matematikcoachen hjälp med vad som behöver förklaras. Språket ger matematikcoachen möjlighet att utforska elevens uppfattning om ett matematiskt fenomen genom att ställa frågor.

Pimm (1987) resonerar om frågor som en lärare kan använda. En typ av frågor betecknas som slutna frågor. Det är frågor där eleven ger kort respons och oftast svarar med ett ord. Syftet med den här typen av frågor menar Pimm (1987) är att läraren kan styra konversationen och ändå ha kontroll på att eleven följer resonemanget. Den här typen av frågor, där eleven förväntas ge ett ord som svar, bör inte användas i för stor utsträckning. Då kan fokus hamna på det enstaka ordet eleven ska leverera. Eleven kanske gissar vilket ord läraren vill höra istället för att fokusera på resonemanget läraren för (Pimm 1987). En annan typ av frågor beskrivs som kontrollfrågor. Syftet med dessa frågor är att läraren kan använda dem för att få insikt om eleven kan vissa fakta. De säger egentligen ingenting om elevens uppfattning utan är mer att betrakta som kunskapskontroll. Pimm (1987) menar att risken med att använda kontrollfrågor i för stor utsträckning är att eleverna uppfattar att läraren kan allt och bara kontrollerar om eleverna har den kunskap som förväntas. Eleven uppfattar då lärarens frågor som kontrollfrågor. Vill läraren ha information om elevens uppfattning om ett matematiskt fenomen eller hur en elev löst en uppgift behövs en variation av frågor som uppmuntrar till samtal om matematik där erfarenheter byts mellan elever och lärare. När lärare uppmuntrar eleverna att uttrycka sin uppfattning om exempelvis matematiska problem så ger det information om hur läraren kan hjälpa eleven (Pimm 1987). Hjälpen kan handla om att ge andra representationer eller att förklara hur en beräkning ska genomföras. I den här studien när en matematikcoach och elev kommunicerar om ett matematiskt problem kan frågor vara användbara för matematikcoachen i sin strävan att hjälpa eleven. I mötet mellan det eleven kan om det matematiska problemet och det eleven inte kan blir matematikcoachen ett stöd för eleven att klara något som inte var möjligt utan det stödet. Elev och matematikcoach rör sig i ett område där eleven med matematikcoachens hjälp kan utvecklas så när eleven nästa gång möter en liknande uppgift har eleven tillräcklig kunskap för att kunna lösa uppgiften på egen hand.

Proximala utvecklingszonen

Att människors sätt att tänka förändras och utvecklas i sociala sammanhang är en tanke som finns i det sociokulturella perspektivet (Säljö, 2000). I situationer där människor samspelar ges möjlighet att införliva, dvs appropriera kunskaper. Saker som en person i en situation inte klarar av att utföra exempelvis en matematikuppgift kan med hjälp av någon bli möjligt att klara av. När en matematikcoach och en elev diskuterar en uppgift som eleven inte kan lösa görs det möjligt för eleven att appropriera en lösningsmetod för att kunna lösa uppgiften och vid ett senare tillfälle kunna lösa en liknande uppgift på egen hand. Vygotsky (1978) utvecklade en teoretisk modell som förklarar denna utveckling. Modellen är den proximala utvecklingszonen (ZPD). Vygotsky (1978) beskriver ZPD på nedanstående sätt

The distance between the actual developmental level, as determined by independent problem solving, and the level of potential development, as determined through problem solving under adult guidance or collaboration with a more capable peer (Vygotsky 1978 s. 86)

Vygotsky (1978) beskriver att det finns ett avstånd mellan det vi klarar av just nu på egen hand och det vi skulle kunna klara av med vägledning av en skicklig person. Det avståndet kallar han för den proximala utvecklingszonen (ZPD). Det kan sägas beskriva grunden för elevers "intellektuella växande". Vygotsky (1978) menar, eleverna kan lära sig mer tillsammans med andra elever och lärare än vad de kan göra själv. I samspel med andra människor har vi möjlighet att ta till oss kunskaper från dem vi interagerar med. Att på detta sätt i samspel med andra ta till sig ny kunskap som man sedan kan använda vid ett visst tillfälle för ett givet syfte kallar Säljö (2000) för appropriering. Han menar att det kan ses som en process där kunskapen om något upptäcks och undersöks och sedan ingår i elevens repertoar så att kunskapen kan användas i ett nytt sammanhang. I matematiken kan det innebära att eleverna ska utveckla den matematiska förmågan att: a) förstå och använda matematiska begrepp, b) kunna formulera och lösa matematiska problem, c) kunna välja lämpliga beräkningsmetoder och att kunna utföra beräkningar, d) kunna föra och följa matematiska resonemang

och e) kunna kommunicera med olika uttrycksformer och argumentera och redogöra för olika frågeställningar.

Bilden nedan är ett sätt att beskriva ZPD. Det kan sägas beskriva grunden för elevers ”intellektuella växande”. Vygotskijs (1978) menar, eleverna kan lära sig mer tillsammans med andra elever och lärare än vad de kan göra själv. I samspel med andra människor har vi möjlighet att ta till oss kunskaper från dem vi interagerar med. Det finns saker eleven klarar helt på egen hand där eleven vet tillräckligt mycket om exempelvis ett matematiskt problem för att kunna lösa uppgiften utan hjälp. Sedan finns det matematiska problem där eleven har viss kompetens men inte tillräcklig för att kunna lösa problemet. Med vägledning av någon med tillräcklig insikt om problemet och eleven görs det möjligt för eleven att lösa problemet. Sedan finns det saker som eleven vid ett tillfälle inte klarar ens med vägledning av en mer erfaren person som till exempel en matematikcoach. Säljö (2000) menar att om eleven ständigt befinner sig i olika utvecklingszoner så kommer elevens kompetens att utökas. Det innebär att uppgifter som eleven för tillfället inte klarar ens med vägledning blir i framtiden möjliga att klara. Detta eftersom eleven i utvecklingszonen tillägnar sig nya kompetenser i samspel med andra.

Figur 2. Proximala utvecklingszonen ZPD

Scaffolding

När en matematikcoach genom dialog med en elev försöker hjälpa eleven att lösa ett matematiskt problem använder matematikcoachen olika strategier för att stötta eleven att kunna lösa problemet. Det kan handla om att exempelvis bryta ner problemet i mindre delar eller att tala om vilken beräkning eleven behöver göra. När matematikcoachen på olika sätt försöker stötta elevens lärande på detta sätt handlar det om vad Wood, Bruner och Ross, (1976) beskriver som scaffolding. Det innebär att matematikcoachen ger eleven stöttor som möjliggör för eleven att röra sig utanför sitt kompetensområde. Om matematikcoachen exempelvis berättar hur eleven ska komma igång för att lösa ett matematiskt problem, alternativt gör eleven uppmärksam på något begrepp som eleven behöver förstå för att kunna lösa det kan man säga att matematikcoachen använder kommunikativa stöttor (Säljö, 2000). Dessa stöttor är tillfälliga. Allteftersom eleven tar till sig nya kunskaper om hur en viss typ av matematiska problem kan lösas eller förstår viktiga matematiska begrepp så minskar behovet av dessa stöttor. Till sist besitter eleven de nödvändiga kunskaper som krävs för att kunna lösa det matematiska problemet på egen hand. Målet för matematikcoachen i det sociokulturella perspektivet blir att med anpassad stöttning hjälpa eleven till att bli en oberoende problemlösare som kan förstå vad som efterfrågas i uppgiften och kunna välja en lämplig lösningsmetod (Hartman, 2002). Avgörande för om matematikcoachens stöttning ska vara lyckosam eller inte är förmågan att förstå och närma sig hur eleven tänker om ett givet matematiskt innehåll. Det är åtminstone två saker som matematikcoachen behöver ha kunskap om. Det ena är kunskap om det matematiska problemet som eleven vill ha hjälp med och hur det kan lösas. Det andra är kunskap om vilka kunskaper eleven har (Wood et al., 1976)

Stöttor som matematikcoachen kan använda för att hjälpa eleven är enligt Van der Stuyf (2012):

- Motivera eller utnyttja elevens intresse för sådant som är relaterat till uppgiften.
- Dela upp uppgiften i mindre delar så att den blir mer hanterbar för eleven
- Peka ut saker som är viktiga att förstå för att kunna lösa uppgiften.
- Avdramatisera uppgifter för att minska risk för frustration

- Hjälpa till med att förklara vilka beräkningar som ska utföras och förklara saker som eleven behöver förstå för att klara uppgiften.

I det sociokulturella perspektivet är kommunikativa processer viktiga för det mänskliga lärandet (Säljö 2000). Språket har en central roll i människans kunskapsbildning och hur lyckosamma vi är att kommunicera erfarenheter med varandra. En del i elevers lärande handlar om att med hjälp av en kunnig lärare appropriera nya erfarenheter av att exempelvis kunna lösa matematiska problem. I nästkommande avsnitt kommer jag att redogöra för den metod jag använt i studien.

Metod

I det här kapitlet beskriver jag inledningsvis studiens design. Därefter följer i tur och ordning urval, analysmetod, studiens kvalitet och till sist beskrivs de forskningsetiska principer som jag följt i arbetet med studien.

Studiens design

I den här studien studeras kommunikationen som sker i textbaserade loggar mellan matematikcoacher och elever när de resonerar om matematikuppgifter. Det övergripande syftet är att undersöka hur kommunikationen kan beskrivas och förstås. För att kunna studera detta har jag valt det som Mercer (2004) beskriver som sociokulturell diskursanalys.

Sociokulturell diskursanalys är influerat av språkforskningen men fokuserar mer på språkets funktion som ett verktyg för att förena intellektuell aktivitet än på språket i sig själv (Mercer 2004). På samma sätt som i språkanalys inbegrips intresset för det språkliga innehållet och det sammanhängande talet där individen väljer ord beroende på sammanhang. Genom orden matematikcoacher och elever väljer kan vi få en inblick i hur matematikcoacherna stöttar eleverna och vad som görs möjligt att lära när de diskuterar det matematiska innehållet. Mercer (2004) menar att de ord som används i kommunikationen mellan människor bildar ett mönster som kan visa på bildandet av gemensam kunskap. När människor arbetar med ett gemensamt innehåll så handlar det om mer än att utbyta information och ett socialt interagerande. Det innebär även ett utbyte av tankar och uppfattningar (Mercer 2004). Dialogen människor emellan betraktas som en form av intellektuell aktivitet där tänkandet är en sorts social verksamhet. Det handlar inte enbart om att se den gemensamma tankeprocessen utan även se vad som kan utvecklas och läras i dialogen (Mercer 2004).

I nedanstående excerpt visas ett exempel på hur matematikcoachen stöttar eleven genom att rikta uppmärksamheten mot volymberäkningen av ett rätblock. Eleven ges möjlighet att beskriva sin egen förståelse och med stöd av matematikcoachens stöttning fokuseras hur man beräknar en volym av ett rätblock. Det förekommer uttryck som är specifika för den här typen av konversation. I excerpten

är deltagarnas namn borttagna men i övrigt är konversationerna oredigerade.

1. Elev: *Hej! Jag har en uppgift i min mattebok som jag undrar om du skulle vilja hjälpa till med :)*
2. Coach: *Absolut:)*
3. Elev: *Okej, Ett företag ska tillverka juicepaket som rymmer 2dl och har formen av ett rätblock. Ge förslag på vilka mått paketen kan ha.*
4. Coach: *Har du någon idé om hur du kan börja?*
5. Elev: *En dm i kubik = 1 liter*
6. Elev: *en cm i kubik = 1 ml*
7. Coach: *Så hur mycket är 2 dl om du ska använda enheten dm i kubik?*
8. Elev: *0.2 dm i kubik?*
9. Coach: *Härligt!*
10. Coach: *har du någon idé om hur du kan använda detta?*
11. Elev: *inte riktigt..*
12. Coach: *Hur beräknar man volymen på ett rätblock?*
13. Elev: *basen gånger höjden.*

Inledningen på excerpten är typisk för många av de excerpt som analyserats, det vill säga matematikmatematikcoachen hälsar välkommen och frågar vad eleven behöver hjälp med.

Eleven beskriver då ofta uppgiften antingen genom att skriva den i chatten eller genom att hänvisa till den matematikbok där uppgiften finns så att matematikcoachen kan leta upp den själv.

Urval

Det empiriska materialet i studien är chattar som förekom på det forum som *Mattecoach på nätet* erbjuder. Chattarna består av textbaserade samtal som sparats ner som textfiler, så kallade loggar. Det är dessa loggar som analyserats.

Stefan Stenbom fil. dr. KTH är den som utvecklat det chattverktyg som matematikcoacherna och eleverna använder när de interagerar på *Mattecoach på nätet*. Jag visste att de i forskningssyfte lagrade dessa kommunikationsloggar i textbaserade loggar. Jag ville studera dessa kommunikationsloggar och hörde av mig till Stefan Stenbom och professor Stefan Hrastinski och förklarade vad jag ville undersöka. De fann det intressant och de ställde sig positiva till det så jag fick en datafil med loggarna.

Enligt de årliga redovisningarna från *Mattecoach på nätet* är det många elever som söker hjälp av matematikcoacherna och på kort tid blir det stora datamängder. Under ett år kan det handla om nära 7000 konversationer. I ett första urval valde jag ut konversationer som skett med elever i årskurs nio under en tidsperiod på tre månader. På det sättet fick jag tillgång till 558 konversationer. Då syftet med min studie är att beskriva och tolka webb-baserade kommunikationschattar mellan elever och mattecoacher kring problemlösning inom matematik valdes inför nästa analys de konversationer mellan elever och matematikcoacher där de resonerar om hur matematiska problem kan lösas. När jag gått igenom materialet och valt ut de konversationer som behandlade problemlösningssuppgifter återstod de 61 konversationer som är analyserade. I resultatkapitlet redovisas exempel på återkommande mönster i konversationen mellan matematikcoacher och elever. Vissa konversationer återges i sin helhet medan andra har redigerats så att en viss del av konversationen, som är typisk för det mönster som ska belysas, redovisas (se exempelvis Edwards & Westergate, 1994; Mercer, Littleton & Wegerif, 2004).

Analys

Det insamlade materialet består som tidigare nämnts av textbaserade konversationer som förs via dator. Vid analysarbetet har jag betraktat det som att analysera konversationer. Det finns flera olika lämpliga analysmetoder för att studera samtal (se exempelvis Edwards & Westergate, 1994; Mercer, Littleton & Wegerif, 2004). I den här studien har jag inspirerats av sociokulturell diskursanalys (Mercer 2004).

Jag undersöker kommunikationen mellan matematikcoacher som är lärarstudenter och elever i årskurs nio som via chatt söker hjälp med matematikuppgifter. Samtalen speglar uppfattningar som eleven har om det matematiska innehållet och vad matematikcoachen riktar

uppmärksamheten mot. Genom en analys av kommunikationen mellan matematikcoachen och eleven ges möjlighet att studera vad som är möjligt att lära av de samtal som förs i kontexten. I den sociokulturella diskursanalysen analyseras tal som gemensamt tänkande (Mercer 2004). En sådan utgångspunkt gör det möjligt att undersöka utvecklandet av gemensam förståelse eller uppenbara missförstånd av exempelvis matematiska fenomen. I chattarna resonerar elev och matematikcoach om problemlösningssuppgifter och då använder de begrepp och uttryck som illustrerar hur matematikcoacherna stöttar eleverna och vad som görs möjligt att lära.

Den modell som ligger till grund för analysprocessen i studien utgår från den modell som Braun och Clarke (2006) beskriver för tematisk analys. De steg som den modellen inbegriper är:

1. Bekanta sig med materialet
2. Skapa preliminära koder
3. Söka efter teman
4. Granska teman
5. Definiera och namnge teman
6. Framställa rapporten

När resultatet bearbetades följdes i stort sett dessa steg.

Steg 1

För att bekanta mig med materialet gjordes en genomläsning av loggarna. I samband med det markerades avsnitt som var exempel på där matematikcoacher och elever arbetade med problemlösningssuppgifter. I kanten av markeringarna noterades vad excerpten handlade om. Dessa anteckningar gav preliminära koder som var exempel på hur matematikcoacher stöttade eleverna och vad som gjordes möjligt att lära i problemlösningssituationen. Under den här delen av analysen jobbade jag empirinära dvs jag använde direkta citat. Det kunde vara korta meningar eller något sammanhang där matematikcoacher och elever resonerade om något.

Steg 2

De direkta citat som var intressanta att analysera mer ingående började jag undersöka mönster i citaten. Genom att sätta tillfälliga koder på dem kunde jag organisera mitt material på olika sätt. För att testa om mina koder återgav vad innehållet handlade om gick jag

tillbaka till det empiriska materialet och läste sammanhangen för att se att det verkade logiskt. Dessa koder strukturerades på olika sätt för att söka vilka mönster jag kunde se i interaktionen mellan matematikcoacher och elever.

Steg 3

När det empiriska materialet var kodat och sammanställt började jag på olika sätt pröva mig fram till olika teman. Beroende på hur koderna formerades kunde olika teman formuleras. Likheter och skillnader mellan olika teman undersöktes. Till sist utkristalliserades två huvudteman, (orienterande och inventerande kontext) och utifrån dessa fann jag underteman. Vissa underteman förekom på flera ställen och för att undersöka om vissa behövde omprövas inleddes nästa steg i processen.

Steg 4

I detta steg utreddes om de teman som utkristalliserats kunde separeras från varandra. Det innebar att jag försökte beskriva skillnaderna mellan olika teman. Samtidigt undersöktes vilka likheter som fanns och därmed definierade temat. Braun och Clarke (2006) beskriver denna process som viktig för att bedöma diskursernas interna homogenitet och dess externa heterogenitet. I den ovanstående processen pendlade jag mellan del (excerpt) och helhet (chatt).

Steg 5

Med utgångspunkt i steg fyra definierades och namngavs de olika temana. Avslutningsvis formulerades rapporten.

Kvalitetsaspekter

För att studien ska kunna sägas ha kvalitet bör man som forskare reflektera över ett antal aspekter. Larsson (2005) beskriver några kvalitetskriterier i kvalitativ forskning. Exempel på relevanta kriterier för denna studie som han beskriver är a) perspektivmedvetenhet, b) etiskt värde. Nedan redogör jag för dessa kriterier och hur jag har beaktat dem i mitt arbete.

Perspektivmedvetenhet

Den första kvalitetsaspekten som Larsson (2005) tar upp är perspektivmedvetenhet. Den beskrivs som ett sätt att göra forskningen

tillgänglig för kritisk granskning. Vid tolkning av data har forskare en förförståelse som påverkar tolkningen. Genom att redovisa vår förförståelse vi har så blir utgångspunkten för tolkningen tydlig och det menar Larsson (2005) är ett kvalitetskrav. Det förhållningssättet är likt det som beskrivs som reflexivitet hos till exempel Haynes (2012). Hon menar att det handlar om att forskaren ska vara medveten om sin egen roll och på vilket sätt det påverkar både forskningsprocessen och resultatet. Vår förförståelse förändras när vi lär oss nya saker och den påverkar i sin tur vår forskning (Haynes, 2012). Två nyckelbegrepp när det gäller reflexiv forskning som lyfts fram av Alvesson och Skoldberg (2000) är tolkning och reflektion. Den tolkning forskaren gör är inte enbart byggd på de data som finns tillgänglig utan även influerad av forskarens föreställningar om det som studeras. I mitt fall innebär detta att jag genom mitt arbete vid universitetet som lärarutbildare med inriktning mot matematik har träffat många lärare och blivande lärare i olika sammanhang. Dessutom har jag undervisat i matematik i årskurs 6-9 under många år. De erfarenheter jag skaffat mig på dessa sätt gör att jag har en bild av hur jag som lärare kan förhålla mig till elever som ber om hjälp med någon matematikuppgift. Det här har inneburit att jag fått fundera flera gånger när jag analyserat kommunikation mellan matematikcoacher och elever över vad det är som visar sig i det empiriska materialet. Detta görs för att analysen grundar sig på empiriska materialet och inte mina antaganden om det jag studerar. Något annat som jag fått distansera mig ifrån är hur resonemanget om matematiskt innehåll ska tolkas. Jag fick vara uppmärksam på om det är mina lärarögon som låg bakom det jag kom fram till. En svårighet är att vid kodningen göra alltför långt dragna tolkningar och komma för fort fram till kontexter. Det har krävts flera varv så att det empiriska materialet fick vara vägledande vid analysen.

Etiskt värde

Forskning som inbegriper människor och i det här fallet barn väcker frågor av etisk karaktär. Det är en avvägning mellan att studera människor fritt och att respektera de människor som studeras. En etisk aspekt som Larsson (2005) lyfter är risken för att gruppen som studeras, i den här studien elever och matematikcoacher, kan drabbas av tolkningar och slutsatser. I den här studien skulle det kunna vara att matematikcoacherna felaktigt framställs som att inte hjälpa eleverna på ett bra sätt. Forskning som bedrivs på internet i exempelvis olika forum väcker ytterligare frågor eftersom internet kan betraktas som allmän egendom. Eftersom det som skrivs på i ett allmänt forum kan vara lättillgängligt och kan därmed inleda tankar om att det är fritt att

använda (Berg 2001). I den här studien har jag inte studerat ett chatttrum som är öppet för vem som helst. De som deltar i *Mattcoach på nätet* har inloggning och i samband med att de loggar in så informeras de och/eller deras föräldrar om att konversationen sparas dels för att utveckla programvaran och för att bedriva forskning. Tillsammans med det formulär de fyller i för samtycke finns information om vilken typ av data som samlas in och sparas samt vad den kommer att användas till. De elever som ingår i den här studien är 15 år och äldre. Därmed uppfylls Vetenskapsrådets (2002) princip om informationskravet och samtyckeskravet. För att uppfylla konfidentialitetskravet har alla namn tagits bort och alla annan information som skulle kunna leda till att de personer som ingår i studien kan identifieras. Nyttjandekravet uppfylls då det empiriska materialet jag fått tillgång till endast används för forskning.

Resultat

I det här avsnittet kommer jag att beskriva resultaten av min studie. I min analys har jag identifierat två huvudkontexter som kännetecknar kommunikationen mellan matematikcoach och elev när de diskuterar hur olika matematiska problem kan lösas. De två huvudkontexterna benämns a) *inventerande*, och b) *orienterande*.

Den *inventerande kontexten* kännetecknas av att matematikcoachen ställer frågor som ger eleven möjlighet att uttrycka sina kunskaper i det här fallet handlar det om kunskaper i matematik. När eleverna besvarar matematikcoachens frågor är det även möjligt för matematikcoachen att få kunskap om vad eleven klarar självständigt och vad eleven behöver ha hjälp med i problemlösningssituationen.

I den *orienterande kontexten* försöker matematikcoachen rikta elevens uppmärksamhet mot något matematiskt ämnes- eller kunskapsområde. På så sätt stöttar matematikcoachen eleven att komma vidare i problemlösningsprocessen.

Inom var och en av dessa två huvudkontexter ryms ytterligare varianter av underkontexter.

De kontexter som uppstår i matematikcoachens stöttning kan handla om att lösa problemet eller elevens förståelse av något matematiskt fenomen. I dessa kontexter görs det möjligt för eleven att appropriera matematiska begrepp och procedurer.

En grov bild av hur dessa kontexter kan variera kan beskrivas som nedan.

Figur 3 En beskrivning av de kontexter som uppstår i chattarna och det som görs möjligt att appropriera.

Inventerande kontext

I det empiriska materialet har jag identifierat två varianter av frågor som matematikcoachen använder för att få insikt om vad eleverna förstår. Det är frågor som antingen är a) *ämnesövergripande* eller b) *ämnesspecifika*. Ämnesövergripande frågor kan exempelvis vara att matematikcoachen frågar om eleven börjat lösa uppgiften. Den är alltså inte kopplad till ett specifikt innehåll. Ämnesspecifika frågor däremot riktas mot något specifikt ämnesinnehåll som exempelvis elevernas kunskaper i relation till något matematiskt innehåll.

Ämnesövergripande inventerande kontext

Vid analysen av kommunikationen mellan matematikcoacher och elever har jag funnit att matematikcoacherna försöker förstå vad eleverna har gjort för att lösa uppgiften. Dessa inventerande frågor kan vara såväl *bakåtsyftande* som *framåtsyftande*. Skillnaden är att de bakåtsyftande efterfrågar om eleven gjort något försök tidigare och de framåtsyftande efterfrågar om eleven vet vad som ska göras i nästa steg.

Inventerande bakåtsyftande innebär att matematikcoachen söker svar på om eleven gjort något försök att komma igång med problemlösningen.

I nedanstående excerpt vill eleven ha hjälp med en uppgift. Eleven förklarar att en pizzarestaurang säljer två storlekar på pizza, med samma tjocklek. Den stora har radien 30% större än den lilla och är 50% dyrare än den lilla. Eleven förväntas beräkna vilken pizza de ska köpa för att få så mycket pizza för pengarna som möjligt.

1. *Coach: Har du försökt något själv?*
2. *Elev: ja*
3. *Coach: Hur har du gjort när du har försökt?*
4. *Elev: jag har gjort exempel å radier*
5. *Elev: på**
6. *Coach: Okej, hur har du sedan gått vidare?:)*
7. *Elev: sedan kunde jag inte göra mer*
8. *Elev: blev förvirrade*

I excerpten ovan bjuder matematikcoachen in eleven till att vara aktiv i kommunikationen genom att fråga om eleven försökt lösa uppgiften på egen hand (rad 1). Matematikcoachens fråga riktar uppmärksamheten mot elevens handlande. Eleven svarar ja på frågan (rad 2) och matematikcoachen fortsätter med att be eleven beskriva hur hen gjort (rad 3). Genom att fråga hur eleven gjort kan matematikcoachen få insikt i hur långt eleven kommit i processen att lösa uppgiften. Det kan även ge möjlighet att få någon insikt i hur eleven förstått det matematiska problemet. Eleven förklarar att hen gjort exempel på radier (rad 4). Matematikcoachen fortsätter och frågar hur eleven gått vidare (rad 6). Matematikcoachens frågor riktar uppmärksamheten mot elevens handlande. Då frågorna inte rör något specifikt matematikinnehåll utan handlar om vad och hur eleven gjort något kan det betraktas som ämnesövergripande frågor.

Det som utmärker *inventerande* framåtsyftande är att matematikcoachen ställer frågor om hur eleven ska gå vidare och vad eleven ska göra. Det har framkommit tre varianter av försöksinventerande framåtsyftande frågor a) *frågor som riktas mot aktivitet*, b) *frågor som riktas mot tänkande om uppgiften* och c) *frågor som riktas mot en lösning av problemet*. Frågor som riktas mot aktivitet innebär exempelvis att matematikcoachen frågar om eleven vet vad som ska göras för att komma igång med lösning av problemet. I nedanstående exempel inventerar matematikcoachen om eleven vet vad som ska utföras för att komma vidare. I exemplet vill eleven ha hjälp med att räkna ut om en stor bägare med popcorn som kostar 30 kr ger mer popcorn för pengarna än tre små bägare som kostar 10 kr styck. Bägarna har samma höjd, men den stora har dubbelt så stor diameter som den lilla. Eleven ska motivera sitt svar.

1. *Coach: ok! :)*
2. *Coach: hur tror du att du ska göra?*
3. *Elev: Vi säger att den lilla konen har en radie som är 2 cm lång. Medans den stora bägaren har en diameter med en radie som är 4 cm lång. Dem har båda en höjd med 20 cm*
4. *Elev: Lilla konens volym: $(2 \cdot 2 \cdot 3,14) \cdot 20 / 3 \sim 83,74$ kubikcentimeter*

I excerpten ovan ger matematikcoachen en uppmuntrande återkoppling (rad 1) på elevens beskrivning av uppgiften. Det kan tolkas som en kommunikativ stötta som matematikcoachen använder för att uppmuntra eleven att besvara frågan. Sedan ger matematikcoachen eleven initiativet genom att ställa en ämnesövergripande fråga om vad eleven tror att hen ska göra (rad 2). Dessa frågor kan tolkas som att matematikcoachen undersöker vad eleven klarar på egen hand. Eleven upprepar uppgiftens givna fakta (rad 3) och beräknar därefter den lilla konens volym (rad 4). Elevens svar tyder på att eleven uppfattar frågan som en uppmaning att utföra beräkningar.

Ett annat sätt att fråga om hur eleven vill gå vidare kan vara att ställa frågan om eleven har någon idé på hur hen kan börja för att lösa matematikuppgiften. Det som karaktäriserar den här typen av fråga är att den exempelvis kan leda in resonemanget antingen på hur eleven har förstått problemet eller om eleven hur en given formel ska användas.

I nedanstående excerpt vill eleven ha hjälp med en uppgift där eleven förväntas bevisa att cylinderns volym är tre gånger så stor som en kon med samma basyta.

1. *Coach: Hej och välkommen!*
2. *Elev: hur kan man bevisa att konen är 3 gånger så liten som en cylinder med samma bas?*
3. *Coach: Har du någon idé om hur du kan börja?*
4. *Elev: inte riktigt*

Ovanstående excerpt är ett exempel på när matematikcoachen inventerar elevens tankar. För att få reda på det frågar matematikcoachen om eleven har någon egen idé om hur hen kan börja för att kunna lösa uppgiften (rad 3). Elevens svar (rad 4) är ett tvekan. Svaret kan tolkas som att eleven är osäker. Elevens osäkerhet kan handla både om vad matematikcoachen frågar om och osäkerhet om hur eleven tänkt om inledningen på problemlösningen. Ytterligare ett sätt att vara framåtsyftande med allmänna frågor kan vara att fråga om eleven har något förslag på hur uppgiften kan lösas. Karaktäristiskt för den här typen av *inventerande framåtsyftande* fråga är att den inriktas mot processen som leder fram till ett svar. De

tidigare presenterade frågorna har riktat uppmärksamhet mot inledningen av problemlösningen.

I nedanstående excerpt vill en elev ha hjälp med en uppgift som innebär att räkna ut hur många kuber med sidan 5 cm som får plats i en låda med innermått 30 cm x 18 cm x 21 cm.

1. *Coach: Okej, här gäller det att tänka på vad som är möjligt i verkligheten och inte bara matematiskt. Har du något förslag?*
2. *Elev: på vad?*
3. *Coach: På hur många kuber som går in i lådan*

Matematikcoachen inventerar framåtsyftande för att undersöka om eleven vet vad som ska göras i excerpten ovan. Matematikcoachen ger först en vägledning om att det gäller att tänka på uppgiftens anknytning till en verklig situation och frågar om eleven har något förslag (rad 1). Det kan tolkas som att matematikcoachen vill bilda sig en uppfattning om det är så att eleven har förstått problemet. Eleven förefaller inte förstå vad matematikcoachen frågar efter (rad 2). En tolkning kan vara att frågan är så ämnesövergripande att eleven inte förstår vad matematikcoachen vill ha förslag på. Matematikcoachen använder en kommunikativ stötta för att hjälpa eleven genom att precisera sin fråga (rad 3). Kommunikationen kan betraktas som inventerande då matematikcoachen inventerar hur eleven tänker om uppgiften inledningsvis (rad 1). Matematikcoachens fråga (rad 1) handlar inte om något specifikt matematikinnehåll och därför kan frågan sägas vara av ämnesövergripande karaktär.

Ett sätt är att när matematikcoachen försöker förstå hur en elev förstått det matematiska problemet blir språket ett viktigt redskap för hur eleven uppfattar vad matematikcoachen frågar efter. Matematikcoachen ställer frågor som handlar om vad eleverna gjort och vad eleven tror är nästa steg. Sådana frågor kan vara en hjälp för att matematikcoachen ska kunna hjälpa eleven att bli en självständig problemlösare. Beroende på hur specifika matematikcoachens frågor är så får det olika resultat. I de fall då matematikcoachen ställer frågor som exempelvis om eleven har någon idé om hur hen kan börja eller om matematikcoachen ber eleven beskriva hur hen har försökt något så tycks eleverna uppfatta dessa olika frågor som att de ska redovisa

vad de räknat. En tolkning är att trots att de inventerande frågorna är ämnesövergripande verkar de hjälpa eleven att uppfatta det som matematikcoachen frågar efter och belysa vilka procedurer eleven har prövat eller har för avsikt att pröva.

Ämnesspecifik inventerande kontext

En ämnesspecifik inventerande kontext kännetecknas av att matematikcoachen ställer ämnesspecifika frågor till eleven. Matematikcoachen kan sägas undersöka vad eleven kan och vad matematikcoachen behöver göra för att kunna hjälpa eleven fram i problemlösningsprocessen.

Analysen av kommunikationen mellan matematikcoacher och elever visar exempel på hur matematikcoachen ställer ämnesspecifika inventerande frågor i relation till elevernas insikter om matematiska a) *begrepp* och b) *procedurer*. Matematikcoacherna använder sig vidare av inventerande c) *lotsande* frågor när de leder eleverna genom problemlösningen.

Begreppsinventerande kontext

Matematikcoachen inventerar elevens uppfattningar om matematiska begrepp. Dessa frågor kan vara a) *begreppsinventerande specifika frågor* och b) *begreppsinventerande processinriktade frågor*. Exempel på begreppsinventerande specifika frågor kan vara kunskapsfrågor som rör ett specifikt matematiskt begrepp. Begreppsinventerande processinriktade frågor riktas mot matematiska begrepp som är viktiga att förstå för att avancera i problemlösningsprocessen.

Begreppsinventerande specifika frågor

Begreppsinventerande specifika frågor innebär att matematikcoachen ställer frågor som gör det möjligt att förstå exempelvis elevens förståelse för det matematiska begreppet. Det kan exempelvis handla om sannolikhet.

I excerpten nedan vill en elev ha hjälp med att beräkna sannolikheten för vinst i ett lotteri. Eleven får välja hur många lotter som ska säljas. Målet är att få intäkter på mellan 5000 kr och 10 000 kr. Hälften av intäkterna ska gå till vinster i lotteriet. Eleven bestämmer att hälften av lotterna ska vara vinstlotter.

1. *Coach: Så hur stor är sannolikheten att jag vinner om jag köper en lott av dig?*
2. *Elev: hm, 150/300*
3. *Elev: det måste väl vara 50-50? 50% chans?*
4. *Coach: jepp*
5. *Coach: Om jag nu vinner, hur mkt pengar vinner jag?*
6. *Elev: priset tror jag inte behöver bestå utav pengar, men om det gjorde det är det väll 50 kr?*
7. *Coach: jepp*
8. *Coach: så jag betalar 50 kr för en lott och sen så vinner jag 50 kr, lite snålt kan jag tycka, haha ;)*
9. *Coach: Har du några andra sköna priser du vill ha istället för pengar?*
10. *Elev: haha ja tänkte inte på priset :s men något som är värt 150 kronor eller som man kan tänka sig vinna på ett lotteri mer en 50 kronor kan väll till exempel vara en fotboll eller liknande prylar?*
11. *Coach: Okaj!*
12. *Coach: Så hur många fotbollar kan du dela ut om du vinsten sammanlagt ska va värd 7500 kr?*
13. *Elev: 150?*
14. *Coach: vad är värdet på varje fotboll?*
15. *Elev: vi kan säga 250 för varje fotboll?*
16. *Coach: okaj!*
17. *Coach: så om varje fotboll är värd 250 kr, och sammanlagt ska vinsten vara värd 7500 kr, hur många fotbollar kan du då dela ut?*
18. *Elev: 30 stycken bollar*
19. *Elev: det här vart ju inte så bra..*
20. *Coach: jooo vi fortsätter!*
21. *Coach: hur stor chans har jag nu att vinna, om det är 30 lotter och 30 vinster?*
22. *Elev: 10%?*
23. *Coach: jepp!*

Inledningsvis i ovanstående excerpt inventerar matematikcoachen elevens förståelse för begreppet sannolikhet genom att ställa en fråga om hur stor chans den som deltar i lotteriet har att vinna i lotteriet (rad 1). För att kunna besvara frågan behöver eleven förstå att dividera antalet önskade utfall med antalet möjliga utfall. Genom sin fråga ger matematikcoachen eleven möjligheten att visa sin förståelse för begreppet sannolikhet. Eleven svarar att chansen att vinna är 50%. I rad (5) följer matematikcoachen upp elevens svar och frågar hur många kronor deltagaren kan vinna. För att kunna besvara den här frågan behöver eleven förstå att när sannolikheten för vinst är beräknad så kan det utnyttjas för att beräkna vinstsumman. Utifrån det kan sägas att även den här frågan handlar om sannolikhet. Matematikcoachen följer upp elevens svar med att påpeka att den som deltar i lotteriet får dålig utdelning på sin insats (rad 8). I (rad 8) kommenterar matematikcoachen det och uppmuntrar eleven att resonera vidare om en annan lösning på uppgiften och ber att eleven ska ge förslag på vinst istället för pengar (rad 9). Matematikcoachen inventerar elevens förståelse av begreppet sannolikhet ytterligare genom att ställa frågor som leder fram till hur antalet vinster påverkar sannolikheten att vinna (rad 21).

Matematikcoachen kan med hjälp av frågor till exempel (rad1) avgöra om eleven förstår eller ej. Med den frågan pekar matematikcoachen ut det som är viktigt att förstå för att kunna lösa uppgiften.

Begreppsinventerande processinriktade frågor

Inventerande processinriktade begreppsfrågor innebär att matematikcoachen ställer frågor som har med relationer mellan matematiska begrepp att göra. Frågorna rör innehåll som eleven behöver förstå för att komma vidare i problemlösningen. Dessa inventerande processinriktade begreppsfrågor rör olika steg i problemlösningsprocessen a) *förstå problemet*, b) *modellering av problemet* och c) *lösning av problemet*. Det som skiljer dessa tre varianter åt är att inventeringen sker i olika delar i problemlösningsprocessen. Där den första varianten rör sig i den första delen att förstå problemet och den andra varianten rör sig i den delen av problemlösningsprocessen där det handlar om att hitta en modell för att lösa problemet. Den tredje varianten av inventerande frågor rör sig i slutskedet där det handlar om att lösa problemet och komma fram till ett svar.

Nedanstående excerpt är ett exempel på frågor som handlar om att *förstå problemet*. Det innebär att matematikcoachen inventerar elevens insikter om matematiska begrepp som är avgörande att ha kunskap om för att förstå vad det matematiska problemet handlar om och komma vidare i problemlösningsprocessen. En elev vill ha hjälp med en uppgift där hen förväntas ge förslag på mått på en juiceförpackning som har formen av ett rätblock och rymmer 2dl.

1. Elev: En dm i kubik = 1 liter
2. Elev: en cm i kubik = 1 ml
3. Coach: Så hur mycket är 2 dl om du ska använda enheten dm i kubik?
4. Elev: 0.2 dm i kubik?
5. Coach: Härligt!
6. Coach: har du någon idé om hur du kan använda detta?
7. Elev: inte riktigt.
8. Coach: Hur beräknar man volymen på ett rätblock?
9. Elev: basen gånger höjden.

Matematikcoachen inventerar om eleven kan uttrycka 2 dl i kubikdecimeter (rad 3). Genom sin fråga delar matematikcoachen upp uppgiften i mindre delar och det blir ett stöd för eleven att komma vidare i problemlösningen. För att kunna svara på frågan måste eleven förstå relationen mellan begreppen deciliter och kubikdecimeter. Genom sin fråga ger matematikcoachen eleven möjlighet att visa förståelse för relationen mellan de matematiska begreppen kubikdecimeter och liter. Matematikcoachen följer upp elevens svar, (rad 4), med att fråga om eleven har någon idé om hur svaret kan användas (rad 6). Det här är ytterligare ett exempel på en kommunikativ stötta där problemet delas upp i hanterbara delar för eleven. För att kunna besvara den frågan måste eleven veta hur volymbegreppet relateras till längdmåtten på ett rätblock. När matematikcoachen ställer den frågan ges eleven möjlighet att förklara relationen mellan de matematiska begreppen deciliter och kubikdecimeter. Elevens ges även möjlighet att visa hur man med hjälp av en given formel kan beräkna volym av ett rätblock. Eleven svarar tvekande (rad 7) på matematikcoachens fråga om eleven vet hur 0,2 kubikdecimeter kan användas för att måttsätta förpackningen. Eleven tycks inte i det ögonblicket kunna använda relationen mellan volym och längdmått.

Däremot redovisar eleven formeln för beräkning av volymen på ett rätblock (rad 9) när matematikcoachen efterfrågar den. Det kan tolkas som att då uppmärksamheten riktas mot den begreppsliga förståelsen (rad 6) förstår inte eleven, men när uppmärksamheten riktas mot det procedurella (rad 8) så förstår eleven matematikcoachens fråga. Genom att rikta uppmärksamheten mot det procedurella så leder matematikcoachen eleven vidare mot en lösning av problemet. Den frågan kan tolkas som kommunikativ stötta som pekar på vilken beräkning som ska genomföras. Då matematikcoachen frågar efter elevens förståelse för hur volymenheter kan relateras till varandra kan kommunikationen betraktas som inventerande. De frågor matematikcoachen ställer rör förståelse av problemet.

I exemplet ovan inventerar matematikcoachen elevens förståelse av problemet. Ett annat sätt där matematikcoachen inventerar elevens förståelse för begrepp är att inventera mot *modellering av problemet*. Det innebär att matematikcoachen ställer frågor om matematiska begrepp som riktar uppmärksamhet mot att hitta en strategi dvs en modell som kan användas för att lösa problemet. Det kan vara en eller flera beräkningar eller att komma fram till en figur som underlättar att hitta en väg som leder till en lösning på problemet.

Matematikcoachen ställer en fråga om vilken form den geometriska figuren kan ha. Frågan tolkas av eleven som att hen ska ange en matematisk modell för hur volymen ska beräknas.

Eleven i nedanstående excerpt vill ha hjälp med en uppgift där eleven förväntas ange mått på en juiceförpackning som rymmer 2 dl.

1. *Coach: Okej, det kan man ju göra på rätt många sätt, har du något förslag på hur man kan designa en?*
2. *Elev: Ja en cylinder eller rätblock*
3. *Elev: vi gör ett rätblock*
4. *Elev: b gånger höjden*

I excerpten ovan besvarar eleven matematikcoachens fråga med att beskriva förpackningens form som en cylinder eller ett rätblock. Eleven använder matematiska begrepp för att beskriva vilka former förpackningen kan ha (rad 2). Något senare visar eleven förståelse för begreppet rätblock genom att tala om hur formeln för beräkning av

volymen ser ut. Elevens svar på matematikcoachens fråga kan ge information om vad eleven förstår av problemet och hur eleven tänker modellera uppgiften. Matematikcoachens inledning (rad 1) kan ses som en stötta då fokus sätts på vilken form förpackningen ska ha.

Ett tredje sätt som matematikcoacherna är begreppsinventerande och processinriktad är att matematikcoachen inte inventerar elevens förståelse för problemet utan istället ställer en fråga som leder direkt till en *lösning av problemet*.

Eleven i nedanstående excerpt vill ha hjälp med att föreslå form och mått på en juiceförpackning som ska rymma 4 dl.

1. *Coach: Du får testa dig fram. Bestäm att din basyta till exempel är 0.4 dm i kvadrat. vad behöver då höjden vara för att du ska 0,2 dm i kubik?*
2. *Elev: 0.5 dm*
3. *Coach: Bra!*
4. *Coach: Då har juicepaketet höjden 0.5 dm. Vilka mått har basytan?*
5. *Elev: det blir en decimal.*
6. *Coach: förstår inte riktigt vad du menar?*
7. *Elev: eller? jag gör nog fel.*
8. *Elev: jag tänkte om det var en kub.*
9. *Coach: det är inte säkert. basytan är 0.4 dm i kvadrat. Vilka mått kan basytan ha för att det ska få arean 0.4 dm i kvadrat?*
10. *Elev: men 0,4 och 1 dm*
11. *Coach: Alldeles riktigt!*
12. *Elev: eller 0.2 gånger 2 dm*
13. *Coach: :)*

Uppgiften i excerpten ovan handlar om relationen mellan längdmått, areamått och volym. Matematikcoachen definierar den relationen genom att fråga vilken höjd förpackningen ska ha med en given basyta (rad 1). Frågan får flera funktioner då den dels vägleder eleven genom

att bryta ner problemet och riktar uppmärksamhet mot vilken beräkning som behöver göras. Dels kan den ge matematikcoachen information om elevens förståelse för relationen mellan begreppen area och längd. Eleven visar förståelse för den relationen genom att redovisa en höjd på förpackningen som är relevant för den givna basytan (rad 2). När eleven föreslagit ett mått på höjden i förpackningen fortsätter matematikcoachen med att fråga om eleven har några förslag på vilka mått botten på förpackningen kan ha (rad 9) och riktar uppmärksamheten på vilken beräkning som står på tur. När eleven presenterar ett förslag ger matematikcoachen positiv återkoppling och då presenterar eleven ytterligare ett förslag (rad 3). Då matematikcoachen frågar om eleven har några förslag på mått kan det betraktas som inventerande. Elevens svar (rad 10 och 12) visar förståelse för hur arean på en rektangel beräknas. Matematikcoachen använder kommunikativa stöttor på olika sätt för att hjälpa eleven att lösa uppgiften. Ett exempel är när matematikcoachen frågar vilken höjd förpackningen ska ha med en given basyta (rad 1). Ett annat exempel är när matematikcoachen uppmuntrar elevens svar (rad 11). Matematikcoachens frågor rör modellering och lösning av problemet.

Sammanfattningsvis kan sägas att matematikcoachen inventerar elevens begreppsförståelse genom att ställa frågor om något specifikt matematiskt begrepp för att peka ut saker som är viktiga att förstå för att kunna lösa uppgiften. Matematikcoachen kan även ställa frågor om matematiska begrepp som kan relateras till a) *förstå problemet*, b) *modellering av problemet* och c) *lösning av problemet*.

Procedurinventerande kontext

Procedurinventerande kontext kännetecknas av att matematikcoachen ställer frågor om beräkningar som är relevanta för uppgiften. Matematikcoachen ställer två typer av frågor, a) *fokus på procedur*, dvs frågor om hur eleven har räknat, och b) *fokus på val av procedur*, dvs vilka procedurer som eleven vill använda för att lösa det matematiska problemet.

Inventerande frågor med fokus på procedur

Inventerande frågor med fokus på procedur kännetecknas av frågor som gör det möjligt för matematikcoachen att förstå hur eleven räknat.

I excerpten nedan vill en elev ha hjälp med att räkna ut hur många tusentals liter syre det finns i ett rum. Måttén på rummet är 6,0 m långt, 3,8 m brett och 2,5 m högt och luften består till 21% av syre.

1. Elev: jag har redan räknat ut volymen för hela rummet
2. Elev: och det blev 68,84 m³
3. Coach: Hmm, det fick jag också första gången jag slog det på miniräknaren. Men när jag dubbelkollade så fick jag ett annat tal.
4. Coach: Hur räknade du?
5. Elev: basytan gånger höjden
6. Coach: Och hur stor är basytan?
7. Elev: $6 * 3,8 = 22,8$
8. Elev: $22,8 * 2,8 = 63,84 \text{ m}^3$
9. Coach: Basytan stämmer, men höjden är 2,5.. ;-)
10. Elev: oj! okej, så det blir alltså 57 m³!
11. Coach: Precis!

Excerpten ovan är ett exempel på när matematikcoachen inventerar hur eleven har räknat (rad 4). Eleven presenterar en plan på hur uppgiften kan lösas. Eleven presenterar en modell som kan användas och beskriver vad hen kommit fram till (rad 1-2). Matematikcoachens svar kan tolkas som att elevens beräkning är felaktig (rad 3). Matematikcoachen frågar hur eleven har räknat istället för att säga att det är fel och visa hur beräkningen ska göras (rad 4). Med sin fråga sätter matematikcoachen fokus på beräkningen. Dessutom ger matematikcoachens fråga eleven möjlighet att visa om felet beror på en missuppfattning av problemet eller om det handlar om något slags räknefel. Det visar sig att eleven förstått problemet och hur beräkningen ska göras och att felet beror på ett avskrivningsfel (rad 13) vilket leder till ett räknefel. Matematikcoachen försöker att avdramatisera elevens felaktiga svar genom att ställa frågor som leder fram till att inse att svårigheten inte ligger i modelleringen utan i att eleven skrivit av fel.

Inventerande frågor med fokus på val av procedur

Ovanstående exempel handlar om att matematikcoachen inventerar hur eleven utfört en beräkning. Matematikcoachen kan även inventera

vilka beräkningar eleven gjort. Det kan göras på olika sätt a) *inventera vilken procedur eleven har använt*, b) *inventera vilken procedur eleven vill använda* och c) *inventera om eleven kan utföra en given beräkning*.

I nedanstående excerpt ställer matematikcoachen frågor för att kontrollera vilken formel eleven använt.

Eleven vill ha hjälp med att beräkna om de ska de köpa en stor eller tre små bägare för att få mest popcorn för sina 30 kronor. Bägarna som finns i två olika storlekar har formen av en kon. De har samma höjd, men den stora har dubbelt så stor diameter som den lilla. Den stora kostar 30 kronor och den lilla kostar 10 kronor. Eleven förväntas motivera sitt svar.

1. *Elev: Det är bättre om de köper en stor bägare för att om man multiplicerar den lilla konens volym med 3 får man ungefär 251,22 kubikcentimeter. Då blir det samma pris som den stora bägaren. Fast den stora bägaren har fortfarande större volym.*
2. *Coach: ska kolla bara :)*
3. *Elev: ok*
4. *Coach: vad är det för formel som du använt för att beräkna volymen av en kon*
5. *Elev: Volym av en kon: Basytan * höjd / 3 =
(radie*radie*3,14)*höjd / 3*
6. *Coach: juste, sant sant, du har helt rätt, jag trodde att du använde formeln fel :)*

I excerpten ovan redovisar eleven sin lösning på problemet (rad 1). Matematikcoachen kontrollräknar om elevens svar stämmer (rad 2). Matematikcoachens svar i (rad 6) kan tolkas som att hen misstänker att eleven räknat fel. Istället för att ge sitt svar väljer matematikcoachen att fråga vilken formel eleven använt. (rad 4). Uppmärksamheten riktas på så sätt mot de beräkningar eleven utfört när matematikcoachen efterfrågar vilken formel eleven använt för att beräkna volymen av en kon (rad 4). För att kunna svara på den frågan måste eleven veta hur begreppet diameter relateras både till radie och volym. Matematikcoachens frågor sätter fokus på procedur som exempelvis i

rad (4). Det kan ses som ett sätt att dela upp problemet i mindre delar. Det blir en hjälp för eleven att komma vidare i problemlösningen.

Ovanstående var ett exempel på när matematikcoachen inventerar vilken formel eleven använt. Nedan kommer ett exempel på när matematikcoachen inventerar om eleven vet vilken formel som ska användas.

I nedanstående excerpt vill eleven ha hjälp med att beräkna storleken på hålet i en kaviartub. Ur en kaviartub som rymmer 180 ml kläms varje dag ut en sträng som är 24 cm lång. Det görs under 21 dagar.

1. *Coach: kan du tänka dig vad jag har ritad?*
2. *Elev: yes*
3. *Coach: det är alltså kaviarn*
4. *Coach: hur lång är den?*
5. *Coach: enligt uppgiften alltså?*
6. *Coach: ;)*
7. *Elev: den rymmer 180 ml*
8. *Coach: precis det är ju en volym*
9. *Coach: och kommer du på nån formel som man kan använda när man har den här bilden och en volym?*
10. *Elev: basytan $\times$ höjden*
11. *Elev: πr^2 är basytan*
12. *Coach: kanon!!!*

I excerpten ovan inventerar matematikcoachen elevens förståelse av problemet genom att fråga om eleven vet längden på mängden kaviar som klämts ut ur tuben (rad 4). Eleven svarar med vilken volym som ryms i tuben istället för att svara på längden av kaviarsträngen (rad 7). Istället för att säga att eleven besvarat fel fråga använder matematikcoachen elevens svar och bekräftar att det är en volym (rad 8). Sedan tar matematikcoachen elevens svar som utgångspunkt för att se om eleven har någon idé om vilken formel som kan användas för att gå vidare i problemlösningen (rad 9). Matematikcoachen riktar därmed uppmärksamheten mot val av beräkningsmetod när hen frågar om eleven kommer på någon formel som kan användas. Matematikcoachen

stöttar på två sätt i excerpten ovan, a) när matematikcoachen ritar en bild för att hjälpa eleven att förstå problemet (rad 1) och b) matematikcoachen använder elevens svar för att sätta fokus på vilken formel som är lämplig att använda för att komma vidare i problemlösningsprocessen (rad 9).

Tidigare har matematikcoachen inventerat vilken formel eleven vill använda. Nedan kommer ett exempel på när matematikcoachen inventerar om eleven kan utföra en given beräkning.

I nedanstående excerpt vill en elev ha hjälp med en uppgift där det anges att man kan baka hundra kakor av en given storlek. Eleven ska svara på hur många små kakor som kan bakas av samma deg då de små kakornas längd och bredd motsvarar hälften av de stora kakorna.

1. *Coach: Okej, vi vet alltså att förhållandet mellan kakorna är 1:2*
2. *Coach: Men eftersom Areal ökar åt två hål*
3. *Coach: håll**
4. *Coach: Vi gör så här istället, kan du räkna ut Areal för de den lilla och stora kakan?*
5. *Coach: _D*
6. *Elev: $A = b \cdot h$, så lilla kakans area är $6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$*
7. *Coach: Mycket bra!*

I excerpten ovan börjar matematikcoachen beskriva ramarna för det matematiska problemet (rad 1-3). Sedan frågar matematikcoachen om eleven kan beräkna arean på kakorna (rad 4). Istället för att eleven ska försöka förstå matematikcoachens förklaring så ges eleven möjlighet att visa sina kunskaper. Samtidigt ger matematikcoachen en vägledning om vilka ramar som gäller för uppgiften. Matematikcoachen uppmuntrar elevens beräkning av den lilla kakans area (rad 7). Det här är ett exempel på scaffolding där matematikcoachen bryter ner problemet och hjälper eleven att sätta fokus på vilken beräkning som ska utföras.

En slutsats som kan dras av den procedurinventerande kontexten är att matematikcoachen använder bakåtsyftande och framåtsyftande frågor.

De bakåtsyftande frågorna kan betraktas som kontrollfrågor där matematikcoachen dels vill kontrollera om eleven utfört en beräkning korrekt, dels kontrollera vilken formel eleven använt i sin beräkning. De framåtsyftande frågorna används för att rikta uppmärksamheten mot de beräkningar som ska göras i problemlösningsprocessen.

Inventerande lotsande frågor

Den inventerande lotsande kontexten kännetecknas av att matematikcoachen ställer frågor som driver problemlösningsprocessen mer än fokuserar på elevens förståelse av begrepp eller de procedurer som används i lösning av problemet. Matematikcoachens frågor kan ses som ett sätt att bryta ner problemet i mindre hanterbara delar. Inventerande lotsande frågor förekommer på tre olika sätt a) *lotsande frågor som fokuserar på förståelse av problemet*, b) *lotsande frågor om beslut som ska tas i lösningen av problemet* och c) *lotsande frågor om vad som ska göras härnäst i problemlösningsprocessen*.

I följande excerpt lotsar matematikcoachen med fokus på förståelse av problemet. Här handlar det om att ställa frågor om sådant som är avgörande för att förstå problemets karaktär. Frågorna är i början övergripande men när eleven inte kan svara blir frågorna mer och mer specifika och rör till sist detaljer.

En elev ha hjälp med en uppgift där eleven förväntas räkna ut hur många kuber med sidan 5 cm som får plats i en låda med innermått 30 cm x 18 cm x 21 cm.

	$\frac{30 * 18 * 21}{5 * 5 * 5}$
1. *Coach: Har du något förslag?*
 2. *Elev: på vad*
 3. *Coach: På hur många kuber som går in i lådan*
 4. *Coach: Eller hur man ska tänka för att räkna ut det*
 5. *Elev: hur gör jag nu*
 6. *Coach: Ser hur du tänker (se elevens beräkning till höger), men kom ihåg att kubernas går inte att trycka ihop så vi kan inte jämföra volymer*
 7. *Coach: Om vi tänker att boxen är 18cm hög, hur många kuber kan man då stapla på varandra därinne?*
 8. *Elev: vet ej*

9. *Elev: kan man inte göra så*
10. *Coach: Men om en kub har sidan 5 och boxen är 18cm hög. Får man till exempel plats med 4 stycken kuber på varandra?*
11. *Coach: plats**
12. *Elev: 3?*
13. *Coach: Javisst. Varför bara 3?*
14. *Elev: 3 cm över*
15. *Coach: mm, och då ryms inte en hel till kub. Så det är ju rätt*
16. *Elev: ja*

Ovanstående excerpten illustrerar hur matematikcoachen lotsar eleven med syfte att eleven ska förstå det matematiska problemets karaktär. Matematikcoachen inleder med en mer allmän fråga om eleven har något förslag (rad 1). När eleven inte verkar förstå frågan (rad 2) försöker matematikcoachen förtydliga att hen söker svar på om eleven vet hur man ska tänka för att kunna räkna ut hur många kuber som får plats i lådan. Först preciserar matematikcoachen genom att fråga hur många kuber som får plats i lådan (rad 3). I (rad 4) preciserar matematikcoachen frågan genom att fråga hur de ska tänka för att räkna ut det. Eleven svarar genom att visa sin uträkning i form av en jämförelse mellan lådans och kubernas totala volym (se till höger i marginalen). Eleven svarar med en divisionsalgoritm där lådans volym direkt jämförs med kubernas sammanlagda volym. Matematikcoachen ger en kommunikativ stötta och förklarar att det inte går att jämföra volymer (rad 6). För att förtydliga ger matematikcoachen ett exempel på en höjd på lådan och frågar hur många kuber som får plats på höjden i lådan om lådan är 18 cm hög (rad 7). För att svara på den frågan behöver eleven inse att tre kuber på varandra blir 15 cm och att det då blir 3 cm till lådans kant. Eleven förefaller inte förstå resonemanget utan frågar istället om det inte går att göra så som eleven gjort (rad 8-9). Matematikcoachen preciserar ytterligare genom att fråga om eleven tror att det går att ställa 4 kuber på höjden (rad 10). När eleven svarar att det ryms tre kuber följer matematikcoachen upp det med att fråga om varför det inte får plats fyra kuber på höjden (rad 13). Det här är ett exempel på lotsning där matematikcoachen blir mer och mer specifik i sina frågor. Matematikcoachen försöker stötta eleven genom att bryt ner problemet för att leda eleven genom problemlösningsprocessen.

Samtidigt finns en risk för att detaljnivån leder till att eleven inte riktigt förstår syftet med frågorna.

Ett annat sätt att vara lotsande är att fokusera på lösningen av problemet. De lotsande inventerande frågorna ska hjälpa eleven att genomföra enskilda moment i problemlösningsprocessen, som att fatta beslut om centrala variabler eller vilket moment som ska göras. Här sätts fokus på att sätta upp ramar för problemet och på så sätt hjälpa eleven att hitta en väg fram till lösning på problemet.

Ett exempel där matematikcoachen använder lotsande inventerande frågor för att hjälpa eleven att fatta beslut om centrala variabler illustreras i nedanstående excerpt. Eleven vill ha hjälp med en uppgift som handlar om att skapa ett lotteri. Eleven får välja hur många lotter som ska säljas men målet är att få in mellan 5000 och 10 000 kr. Hälften av intäkterna ska gå till vinster i lotteriet.

1. *Elev: Antalet lotter : 150 pris : 50*
2. *Elev: blir 7,500*
3. *Elev: hm, 50% är vinnst på, kanske 250-300 lotter*
4. *Coach: Hur menar du nu? har vi 150 lotter eller 250-300? :)*
5. *Elev: Tänkte fel där i början :/ men om jag har 250-300 lotter och minst 50% måste delas ut i vinst, vilket är hälften, runt 150 ska alltså vara vinst hade jag tänkt*
6. *Coach: du får bestämma dig för exakt hur många lotter vi ska ha :)*
7. *Elev: 300 passar väl bra då ;)*
8. *Coach: okay!*
9. *Coach: hur många av dessa ska vara vinstlotter?*
10. *Elev: 150 blir bra*
11. *Coach: okay!*
12. *Coach: och 50% av intäkterna ska delas ut i vinst, så hur många kronor blir det?*
13. *Elev: varje lott kostar 50kr, alltså 7,500*
14. *Elev: kronor*

15. *Coach: mm 7500 kr blir ju dina intäkter, o 50% av det är sedan vinsten som ska delas ut*

16. *Coach: så då blir det väl 3750 kr i vinst, har jag rätt?*

Excerpten ovan inleds med att eleven sätter upp ramar för det matematiska problemet. Det görs genom att bestämma att antalet lotter i lotteriet ska vara 150 stycken (rad 1). Sedan ändras antalet (rad 3). När matematikcoachen inte förstår vad eleven menar ber hen eleven att precisera antalet lotter (rad 6). Lite senare frågar matematikcoachen hur många vinstlotter lotteriet ska innehålla (rad 9).

I (rad 16) utför matematikcoachen en beräkning och frågar om eleven kan besvara frågan om matematikcoachen har räknat rätt. Det kan tänkas vara svårt för eleven att följa resonemanget då eleven tänker att 150 lotter motsvarar antalet vinstlotter (rad 10) medan matematikcoachen utgår från att 150 lotter är det totala antalet lotter i lotteriet (rad 15). Detta är ett exempel på lotsning där matematikcoachen bryter ner problemet i mindre delar för att leda eleven till en lösning av problemet. En tolkning är att frågorna hamnar på en detaljnivå som gör att matematikcoachen tappar resonemangskedjan vilket sker i rad (15).

Ytterligare ett sätt där matematikcoachen använder lotsande inventerande frågor är när matematikcoachen försöker förstå om eleven vet vilket nästa moment är. När eleven uppvisar osäkerhet vägleder matematikcoachen eleven genom att ställa frågor om det eleven ska fokusera på för att komma vidare. Här fokuseras på processen att komma fram till en lösning.

I nedanstående excerpt vill en elev ha hjälp med att beräkna vilken pizza den ska köpa för att få så mycket pizza som möjligt för pengarna. Det är en pizzeria som säljer runda pizzor. Det finns två storlekar, den större pizzan har en radie som är 30% större än radien på den lilla pizzan. De stora pizzorna har ett pris som är 50% högre än de mindre.

1. *Coach: Okej, hur har du sedan gått vidare? :)*

2. *Elev: sedan kunde jg inte göra mer*

3. *Elev: blev förvirrade*

4. *Coach: Om du fortsätter med att utgå från en radie som du har hittat på själv, då skulle du kunna ta reda på hur stor varje pizza är :)*
5. *Elev: ok*
6. *Elev: om vi t.ex. tar radien 3 på den lilla*
7. *Coach: Ja, vad måste du sedan göra*
8. *Elev: den stora har radien 30% större*
9. *Elev: alltså 0.3 ' 3*
10. *Elev: 0.9*
11. *Elev: vilket blir 3,9 på den stora*
12. *Coach: Alldeles riktigt :)*
13. *Elev: sedan*
14. *Elev: 10 för den lilla*
15. *Elev: vilket blir 15 på den stor*
16. *Elev: stora*
17. *Elev: kr*
18. *Coach: Precis :)*
19. *Elev: lilla 3---10 kr stora 3,9---15*
20. *Elev: vad gör jag nu*
21. *Coach: För att kunna ta reda på vilka pizza du ska köpa, är det bra att veta hur stora pizzorna är :)*
22. *Elev: aha ok*
23. *Elev: alltså den lilla*
24. *Elev: ?*
25. *Coach: Hur stor area har den lilla pizza?*

I excerpten ovan frågar matematikcoachen om eleven vet vad som är nästa steg (rad 1). För att kunna besvara den frågan behöver eleven veta vilka beräkningar som ska göras och även i vilken ordning de ska utföras. När matematikcoachen frågar hur eleven ska gå vidare erbjuder en möjlighet att beskriva sin strategi. Matematikcoachen vägleder genom att säga att eleven kan beräkna storleken på varje pizza om den radie som eleven bestämt används (rad 4). För att kunna beräkna storleken på pizzorna måste eleven veta hur storleken på en cirkel beräknas. Då det finns en given formel för att utföra den beräkningen

riktas uppmärksamheten mot att eleven ska göra en beräkning. Matematikcoachen ställer en kontrollfråga (rad 7) för att se vilken strategi eleven tänker sig. Matematikcoachen uppmuntrar eleven genom att ge positiv återkoppling när eleven beskriver korrekta beräkningar (rad 12). När eleven uppvisar osäkerhet (rad 20) ger matematikcoachen instruktioner om vad eleven ska gå vidare med (rad 21). När eleven fortsatt uppvisar osäkerhet om vad som ska göras (rad 23 och 24) ställer matematikcoachen en fråga som leder eleven in på vilken beräkning som ska göras (rad 25). Det här är ett exempel på scaffolding där matematikcoachen leder eleven genom problemlösningsprocessen med frågor som riktar uppmärksamhet mot vad som ska beräknas.

Sammanfattning

I den inventerande kontexten ställer matematikcoachen frågor för att inventera elevens kunskaper som antingen fokuserar på matematiska begrepp eller på procedurer. Matematikcoachen inventerar även genom att ställa frågor som fokuserar på antingen att lösa problemet eller förståelse av begrepp och procedurer. Då skapas en mental kontext som är inriktad på någon av dessa. Fokuserar matematikcoachen sina frågor kring matematiska begrepp så blir det följaktligen det som sätts i fokus även för eleven. Avgörande för vad uppmärksamheten riktas mot är vilken typ av frågor som matematikcoacherna använder. Frågor som till exempel börjar med *hur har du gjort?* riktar uppmärksamheten mot procedur medan frågor som exempelvis *hur mycket är 2 dl om du ska använda enheten dm i kubik?* riktar uppmärksamheten mot begrepp. Matematikcoachen använder stöttor som pekar ut begrepp som är viktiga för eleven att förstå och beräkningar som eleven ska kunna behärska för att kunna lösa problemet. Matematikcoachen delar även upp problemet i mindre delar för att göra det mer hanterligt för eleven.

Orienterande kontexter

Analysen av det empiriska materialet visade på två varianter av hur matematikcoachen interagerar orienterande. Matematikcoachen a) uppmanar eleven att utföra något som underlättar förståelsen av problemet (handlingsorienterande), och b) uppmärksammar eleven på något matematiskt innehåll (förklaringsorienterande).

Handlingsorienterande kontext

Handlingsorienterande kontext kännetecknas av att matematikcoachen hjälper eleven genom att uppmana hen att utföra något, exempelvis en viss beräkning. På så vis uppmärksammar matematikcoachen på det som är nästa steg i problemlösningsprocessen. När matematikcoachen uppmanar eleven att utföra en beräkning kan det ses som ett sätt att bryta ner problemet i mindre delar. På så sätt görs problemet mer hanterligt för eleven och det kan ses som att matematikcoachen hjälper eleven framåt i problemlösningsprocessen. Resultatet av analysen av det empiriska materialet ger vid handen att matematikcoachen kan vara handlingsorienterad på åtminstone två kvalitativt olika sätt, a) *sambandsorienterande uppmaning*, och b) *procedurorienterande uppmaning*.

Sambandsorienterande uppmaning

Sambandsorienterande uppmaning innebär att matematikcoachen uppmanar eleven att söka ett samband mellan de olika variabler som ges i det matematiska problemet.

I excerpten nedan vill en elev ha hjälp med att beräkna storleken på hålet i en kaviartub. Man vet att tuben rymmer 180 ml och att det klämts ut en 21 cm lång sträng varje dag under 24 dagar och då var tuben tom.

1. *Coach: okej, ja du behöver hitta ett samband mellan volymen på den sträng han lägger ut (rent formelmässigt) och att totala volymen är 180ml*
2. *Elev: $21 \times 24 = 504 \text{ cm}$*
3. *Elev: $B \times H = V$*
4. *Elev: Alltså borde $H/V = B$*
5. *Elev: $504/180 = 2,8$*
6. *Elev: Alltså borde basen vara 2.8 kvadratcentimeter, tycker jag*
7. *Elev: Men jag förstår inte hur jag omvandlar aren på cirkeln till Diametern*
8. *Elev: arean**

Matematikcoachen anger inte vilken formel som ska användas utan uppmanar eleven att söka ett samband mellan olika formler. Eleven visar sig ha förståelse för sambandet som matematikcoachen hänvisar till och eleven vet vad som ska göras vilket syns i elevens redovisning av sin idé till matematisk modell (rad 2-6). Eleven beräknar längden av

den kaviarsträng som kläms ur tuben (rad 2). Därefter skrivs formeln för volymen av en cylinder om så att den passar de uppgifter som är givna (rad 3). Dessa två handlingar styrker att förståelsen för sambandet är fullständig. Av elevens svar kan slutsatsen dras att elevens uppmärksamhet riktas mot att utföra beräkningar. När eleven beskriver formeln används enbart bokstavsbeteckningar (rad 3-4). Matematikcoachen och eleven är överens om innebörden utan ytterligare förklaring. Detsamma gäller omskrivningen av formeln. Uppmärksamheten riktas mot begreppslig förmåga. Då matematikcoachen uppmanar eleven att söka ett samband mellan längd och volym (rad 1).

Procedurorienterande uppmaning

Procedurorienterad uppmaning innebär att matematikcoachen säger till eleven att utföra en beräkning i problemet. I det empiriska materialet har åtminstone tre kvalitativt skilda varianter påträffats. a) *matematikcoachen talar om vad som ska beräknas i sin uppmaning*, b) *eleven uppmanas att utföra en beräkning och få instruktion om vilka siffror som ska användas* och c) *eleven uppmanas att utföra en beräkning och matematikcoachen förklarar vilka siffror som ska användas samt visar hur beräkningen ska utföras*. Det som skiljer dessa åt är hur matematikcoachen i olika grad preciserar vad som ska beräknas och hur beräkningen ska utföras när eleven uppmanas att utföra beräkningen.

Nedanstående excerpt är ett exempel på när matematikcoachen uppmanar att beräkna volymen. Eleven får ingen instruktion om vilka variabler eller siffror som ska användas.

I excerpten nedan vill eleven ha hjälp med att beräkna hur många kuber med sidan 5 cm som får plats i en låda med innermått 30 cm x 18 cm x 21 cm.

1. *Elev: små kubar med sidan 5cm ska packas i en kartong med innermått 30 cm x18cm x21cm. hur många kuber får maximalt plats i kartongen*
2. *Coach: först måste du räkna ut volymen på båda. både den lilla kuben och på kartongen. börja med det*
3. *Elev: 5x5x5*
4. *Elev: 125*

I excerpten ovan inleder matematikcoachen med att förklara vad som måste göras först (rad 2). Matematikcoachen uppmanar eleven att räkna ut volymen på både kartong och kuber (rad 2) och därmed riktas uppmärksamheten mot att utföra beräkningar. Eleven utför direkt beräkningen av kubens volym (rad 3). I uppgiften anges bara måttet på en sida. Det är underförstått att alla sidor är lika långa på en kub. Då eleven i sin uträkning gör rätt kan man utgå från att hen förstår båda begreppen kub och volym. Genom att uppmana eleven att utföra beräkningar riktas uppmärksamheten mot procedurrell förmåga. Matematikcoachen använder kommunikativa stöttor då eleven uppmanas att beräkna volymen och på det sättet leds eleven framåt i problemlösningsprocessen. Samtidigt använder matematikcoachen begrepp som är knutna till geometri som eleven måste känna till för att förstå vad matematikcoachen menar. Elevens svar (rad 3) visar att begreppet volym är bekant då eleven direkt anger hur volymen beräknas. På så sätt riktas uppmärksamheten även mot begreppslig förmåga.

Ett annat exempel på procedurorienterande uppmaning innebär att matematikcoachen orienterar mot de siffror som ska användas för lösning av problemet. Matematikcoachen förklarar inte hur de ska användas.

I excerpten nedan vill eleven ha hjälp med att räkna ut vad totalkostnaden för en soffa blir om soffan kostar 30 000 kr och 20% betalas kontant och därefter sker en avbetalning med 1635 kr i 18 månader.

1. *Elev: alltså det första jag tänkte på är $30\,000\text{kr} \cdot 0,2 = 6000\text{kr}$??*
2. *Coach: Precis, han betalar först 6000kr kontant och resten på avbetalning*
3. *Elev: sen tog jag $30\,000 - 6000 = 24\,000\text{kr}$?*
4. *Coach: Ja, han har 24000kr av soffan som han inte betalat än.*

Det har dock inte så stor betydelse, eftersom avbetalningen är en annan form av avtal. Resten han ska betala hade varit 24000kr om det inte varit någon ränta, men i avbetalningen ingår ränta och han betalar då 1635kr per månad i 18 månader. Hur mycket betalar han då i avbetalning

5. *Coach: ?*

6. *Elev: Jaha så man tar 1 635kr som han betalar i månaden gånger med 18 mån och det blir 29 430kr ? :o*
7. *Coach: Precis, så mycket får han betala i avbetalning*

Excerpten ovan inleds med att eleven visar hur hen tänkt att inleda för att kunna lösa det matematiska problemet (rad 1). Matematikcoachen bekräftar elevens inledning och förklarar vad eleven har gjort (rad 2). Matematikcoachen ger en kommunikativ stötta när eleven uppmärksammas på vilka siffror som ska användas för beräkningen men matematikcoachen förklarar inte hur de ska användas (rad 4). Det kan uppfattas som att matematikcoachen orienterar något oprecist. Matematikcoachens fråga kan förstås som en uppmaning till eleven att utföra beräkningen. Eleven tycks uppfatta det som en uppmaning att utföra en beräkning och räknar ut hur mycket som betalats (rad 6). Eleven inser att det är en multiplikation som ska utföras utan att matematikcoachen uttryckligen säger det. Matematikcoachen och eleven resonerar om de beräkningar som ska genomföras. Konversationen är ett exempel på stöttning där matematikcoachen förklarar för eleven hur beräkning av avbetalning går till (rad 4). Med hjälp av den förklaringen kan sedan eleven beräkna kostnaden själv utan att matematikcoachen sagt exakt hur det ska göras (rad 6). Matematikcoachens förklaring blir den kommunikativa stötta som hjälper eleven att komma vidare i problemlösningen.

I ovanstående exempel orienterar matematikcoachen mot vilka siffror som ska användas. Ett sätt att precisera uppmaningen ytterligare är att instruera eleven om vilka siffror som ska användas och hur de ska användas för att beräkna volymen.

I nedanstående excerpt vill eleven ha hjälp med att beräkna hur många kuber med sidan 5 cm som får plats i en kartong med måtten 30 cm, 18 cm och 21 cm. Det som föregått är att eleven har beräknat kubernas volym.

1. *Elev: kartongen vet ej*
2. *Coach: det är samma där. ta $30 \cdot 18 \cdot 21$*
3. *Elev: 11 340*
4. *Coach: precis*
5. *Elev: sen*
6. *Elev: dela ??*
7. *Coach: precis*

8. *Coach: 11 340/125 :)*

9. *Elev: 90,72*

10. *Coach: precis. men eftersom du ska ta hur många som max får plats får du avrunda neråt*

I ovanstående excerpt orienterar matematikcoachen specifikt vid två tillfällen, först genom att beskriva hur eleven ska beräkna volymen av kartongen (rad 2). Sedan genom att uppmana eleven att dividera lådans volym med kubernas volym (rad 8). På så sätt riktas uppmärksamhet mot procedurell förmåga. Eleven har beräknat kubernas volym men verkar inte se sambandet mellan hur volymen beräknas för kuben och lådan. Eleven säger sig inte veta hur volymen av kartongen ska beräknas (rad 1). När eleven får hjälp med hur beräkningen ska utföras och redovisar sitt svar så bekräftar matematikcoachen elevens uträkning (rad 4). I (rad 6) frågar eleven om volymerna ska divideras. Matematikcoachen bekräftar på ett positivt sätt elevens förslag och beskriver hur divisionen ska genomföras (rad 8). Matematikcoachen ger bekräftelse på att uträkningen är utförd på rätt sätt och beskriver hur eleven ska komma fram till ett rätt svar genom att avrunda nedåt eftersom det bara finns hela kuber (rad10). Svaret som de kommer fram till blir felaktigt därför att de jämför volymer istället för att jämföra längdmåtten. Då längdmåtten inte går jämnt upp i varandra i exemplet så ryms det inte så många kuber som de beräknat. Matematikcoachen använder kommunikativa stöttor i form av uppmuntrande bifall på elevens beräkningar och att ange vilka siffror som ska användas vid beräkningarna.

När matematikcoachen använder språket för att uppmärksamma eleven på nästa steg i problemlösningsprocessen uppmanar matematikcoachen eleven att utföra något. Matematikcoachen använder kommunikativa stöttor som är mer eller mindre specifika. Matematikcoachen uppmanar eleven att beräkna volymen utan att precisera mer än så. I det fallet behöver eleven vara bekant med begreppet volym och veta vilka siffror som ska användas samt veta hur beräkningen ska utföras. Mest specifik är matematikcoachen genom att ange vilka siffror som ska användas och visar hur beräkningen ska gå till.

De kommunikativa stöttor som matematikcoachen använder kan även vara emotionella där elevens kommentarer uppmuntras. Sådana stöttor hjälper eleven att kunna lösa uppgifter som annars inte skulle vara möjliga att lösa på egen hand.

Förklaringsorienterande kontext

Förklaringsorienterande kontext innebär att matematikcoachen förklarar något centralt som behöver förstås för att kunna lösa problemet. Denna kontext förekommer på åtminstone två olika sätt i det empiriska materialet a) *begreppsförklaring* och b) *hur problemlösningen ska genomföras*.

Begreppsorienterande förklaring

Ett exempel på när matematikcoachen förklarar något som är centralt för att kunna lösa ett matematiskt problem kan vara att förklara hur olika volymenheter är relaterade till varandra. Detta sker i nedanstående excerpt.

En elev vill ha hjälp med att föreslå form och mått på en juiceförpackning som ska rymma 4 dl. Eleven har ritat en figur som är måttsatt till $1 \times 2 \times 2$ cm.

1. Coach: Men $1 \times 2 \times 2$ cm blir ju 4 cm^3 . Det kommer inte rymmas 4dl där
2. Coach: Det vi ska göra är att räkna om $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ till $4 \text{ dl} = ? \text{ dm}^3$
3. Coach: okej du menar så. Ja det ser ju bra ut
4. Elev: så?
5. Elev: $= 4 \text{ dm}^3$
6. Elev: sedan gånger 10
7. Elev: blev det rätt
8. Coach: Ja, $0,4 \text{ dm}^3$ är 4dl
9. Coach: men det ska inte vara något $\times 10$ med
10. Elev: men
11. Elev: det blir svårt att rita
12. Elev: jo
13. Elev: annars är det i liter
14. Elev: för att omvandla till dl
15. Coach: Det blir som så att $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ På samma sätt är $4 \times 1 \text{ L} = 4 \times 1 \text{ dm}^3$ Och $\frac{4}{10} \text{ L} = \frac{4}{10} \text{ dm}^3$ det vill säga $0,4 \text{ L} = 0,4 \text{ dm}^3$
16. Elev: jag förstår ej

17. Elev: *men jag vill veta i DL*
18. Coach: *0.4 liter är samma som 4 deciliter*
19. Elev: *JO*
20. Elev: *MEN*
21. Elev: *det blir svårt och rita 2 dm på papper*
22. Coach: *ah, men det behöver inte vara 2dm långt. Det räcker med att du drar ett sträck och skriver att det är 2dm långt*
23. Elev: *ok*
24. Elev: *tack*

I ovanstående excerpt agerar matematikcoachen förklaringsorienterat vid åtminstone två tillfällen (rad 2 och 15). Förståelsen för relationen mellan volymbegreppen är avgörande för att kunna lösa det här problemet.

Matematikcoachen kommenterar elevens bild med att det inte ryms 4 dl i 4 cm³ (rad 1). För att inse det måste eleven förstå hur begreppen kubikcentimeter är relaterat till begreppet dl. Eleven korrigerar sin bild och matematikcoachen bekräftar att det blir rätt (rad 3). Elevens kommentar på (rad 6) att multiplicera med 10 kan förstås som att eleven tror att multiplikation med 10 är nödvändig för att visa att det går 10 dl på en liter. Matematikcoachen bekräftar elevens svar genom att tydliggöra vad som är rätt (rad 8). Sedan kommenteras att det inte ska utföras någon multiplikation med 10 (rad 9). Eleven uttrycker att det blir svårt att rita (rad 11) och därefter att det blir liter (rad 13). Matematikcoachen ger en förklaring till sambandet mellan begreppen liter och kubikdecimeter (rad 15). Eleven kommenterar förklaringen med tveksamhet (rad 16). Förklaringen till elevens tveksamhet kommer i (rad 21) där denne förklarar att det är svårt att rita 2 dm på papper. Eleven förefaller ha tänkt att bilden måste ritas i naturlig storlek och blir glad av matematikcoachens förklaring att det går bra att rita i skala (rad 22). Matematikcoachens stöttning i den här konversationen handlar om att korrigera eller förklara. Exempel på kommunikativa stöttor som används för att korrigera är exempelvis att matematikcoachen instruerar eleven att det inte ska multipliceras med 10 (rad 9). Exempel på kommunikativ stötta är när matematikcoachen förklarar hur volymbegrepp är relaterade till varandra (rad 15).

Problemlösningsorienterande förklaring

Matematikcoachen leder på olika sätt eleven igenom problemlösningsprocessen. Det som skiljer de olika varianterna åt är hur ingående matematikcoachen är i sin scaffolding i relation till problemlösningsprocessen. Stöttning sker på tre olika sätt a) *matematikcoachen korrigerar och instruerar om vilken beräkning som ska genomföras*, b) *matematikcoachen förklarar begrepp som är centrala för problemet samtidigt som de beräkningar som ska genomföras förklaras* och c) *matematikcoachen beskriver de beräkningar som ska göras och även hur beräkningarna ska genomföras*.

Ett exempel på problemlösande förklaring där matematikcoachen korrigerar och instruerar eleven illustreras i nedanstående excerpt. Matematikcoachen förklarar vilken beräkning som står på tur och sedan utför eleven beräkningen. I de fall där eleven föreslår en beräkning som är felaktig korrigerar matematikcoachen genom att instruera vilken beräkning som ska utföras.

En elev vill ha hjälp med en uppgift där hen förväntas beräkna längden på sidorna i en triangel med den längsta sidan 9 cm. Triangeln är likformig med en triangel vars kortaste sidor är 7 cm och 11 cm.

1. Elev: kanske så
2. Coach: sådär
3. Elev: vrf så
4. Elev: joo
5. Elev: juste
6. Coach: Därför 9 var den långa sidan och 7 och 11 de korta
7. Coach: Nu borde du kunna räkna ut x
8. Elev: hur
9. Elev: $x/9=11/y$
10. Coach: Via pythagoras sats
11. Elev: ok
12. Elev: men
13. Elev: jooooooooo
14. Elev: justeee
15. Elev: x är ungefär 13

16. Elev: *men hur gör jag på de andra*
17. Coach: *Då ska vi utnyttja att triangelarna är likformiga*
18. Coach: *Det vill säga att sidorna förhåller sig proportionellt mot varandra*
19. Elev: *ja'*
20. Elev: *men det jag inte förstår är hur jag ska räkna ut n*
21. Elev: *det*
22. Elev: *ska vi börja med z*
23. Elev: $z/7=9/x$
24. Coach: *ja precis så*
25. Coach: *och sedan vill du ha z ensamt*
26. Elev: *men*
27. Elev: *på x*
28. Elev: *när jag gjorde pythagoras*
29. Elev: *fick jag inte 13 exakt*
30. Coach: *Nej det stämmer*
31. Elev: *kan jag avrunda till 13*
32. Coach: *Ja det tycker jag du kan göra*
33. Elev: *z är 21*

I excerpten ovan handlar matematikcoachen problemlösningsorienterande vid fyra tillfällen. a) när matematikcoachen uttrycker att eleven borde kunna räkna ut x (rad 7), b) när matematikcoachen uppmanar eleven att använda Pythagoras sats, c) när matematikcoachen instruerar eleven om att utnyttja likformighet och förklarar vad det kan innebära (rad 17-18) samt d) när matematikcoachen förklarar att z ska vara ensamt (rad 25). Det som är gemensamt för dessa är att matematikcoachen instruerar eleven om vilken beräkning som ska göras. Dessa är exempel på hur matematikcoachen sätter fokus på procedur.

Kommunikationen från (rad 9-15) kan ses som ett exempel på hur matematikcoachen stöttar eleven i problemlösningen. Eleven ger förslag på vad som ska göras (rad 9). Matematikcoachen korregerar i (rad 10) och eleven inser efter kort tvekan vad matematikcoachen avser och utför beräkningen (rad 11-15).

De kommunikativa stöttor som matematikcoachen använder är exempelvis då det förklaras vad proportionalitet kan vara i den här uppgiften. Ett annat exempel på kommunikativ stötta är då matematikcoachen berättar vilken beräkning som ska utföras (rad 10).

Förra exemplet på problemlösningsorienterande förklaring innebar att matematikcoachen berättade vilken beräkning som stod på tur och eleven utförde beräkningen. I nedanstående exempel går matematikcoachen ytterligare ett steg i stöttningen och visar vilka beräkningar som ska göras samt hur de ska genomföras.

I excerpten nedan vill eleven ha hjälp med en att beräkna storleken på hålet i en kaviartub. Man vet att tuben rymmer 180 ml och att det klämts ut en 21 cm lång sträng varje dag under 24 dagar och då var tuben tom.

1. *Coach: vi stänger om 4 min men jag ska försöka säga hur du ska göra så får vi se*
2. *Elev: säg svaret bara?*
3. *Coach: först räknar du ut hur lång sträng som totalt kläms ut ur tuben, alltså $24 \cdot 21$*
4. *Coach: sen får man göra upp en ekvation för volymen på det som kläms ut: $24 \cdot 21 \cdot x = 180$*
5. *Coach: när du sen får ut värdet på x är det bottenarean på en cylinder*
6. *Elev: ?*
7. *Coach: dividera svaret på x med π och sen drar du roten ur*
8. *Coach: tyvärr kan jag inte hjälpa dig mer än så ikväll. Vi stänger du. Men kom jättegärna tillbaka imorgon om du inte läser den!*
9. *Coach: 17-20 är vi här då också och hjälper dig gärna!*
10. *Coach: lycka till!*

Matematikcoachen inleder med att beskriva hur uppgiften ska lösas. Matematikcoachen hamnar i tidsnöd på grund av att chatten stänger (rad 1). Oavsett det försöker matematikcoachen hjälpa eleven att lösa uppgiften. För att hinna med agerar matematikcoachen orienterande. Först beskrivs hur längden på den urklämda strängen beräknas (rad 3). Därefter beskrivs hur bottenarean ska beräknas (rad 4). Till sist

förklarar matematikcoachen hur diametern på strängen kan beräknas (rad 7). Eleven får instruktioner i vilken ordning beräkningarna ska göras och vilka uppgifter som ska användas. Eleven svarar frågande när matematikcoachen beskriver att x motsvarar bottenarean på en cylinder (rad 6). Eleven måste inse att ekvationen innehåller en beräkning på hur lång strängen kaviar som kläms ut under 24 dagar för att förstå den ekvation som sätts upp. Eleven måste även förstå sambandet mellan längden på en cylinder och volymen på en cylinder. Matematikcoachen förklarar situationen för eleven och bjuder in eleven att ta kontakt nästkommande dag (rad 10). Matematikcoachen beskriver vilka beräkningar som ska göras och sätter då fokus på procedur. De kommunikativa stöttor som matematikcoachen använder är att förklara hur längden på kaviarsträngen ska beräknas (rad 3). Då matematikcoachen förklarar hur beräkningarna ska genomföras så kan det betraktas som orienterande.

I de två tidigare exemplen har matematikcoachen stöttat med fokus på beräkningar. I nästa exempel på problemlösningssoriterande förklaring går matematikcoachen ett steg längre och leder eleven genom problemlösningen samtidigt som matematikcoachen förklarar både begrepp som är centrala för att kunna lösa problemet och varje steg som ska tas.

I nedanstående excerpt vill eleven ha hjälp med att räkna ut hur mycket pengar som finns på ett bankkonto efter tre år om 20 000 kr sätts med en ränta på 3,75%.

1. *Elev: Hur ska jag räkna ut detta?*
2. *Coach: okej! Får du använda miniräknare?*
3. *Elev: ja det tror jag*
4. *Elev: på svåra tal får jag*
5. *Coach: det tror jag med, annars blir det lite svårt :)*
6. *Coach: Vet du hur man räknar med ränta?*
7. *Elev: nä inte så mycket*
8. *Coach: Ränta är de pengar som man måste betala banken för att man fått låna pengar av dem.*
9. *Coach: om du exempelvis lånar 100 kr av banken med 10% ränta så måste du betala tillbaka 110 kr till banken*
10. *Coach: det kostar alltså att låna pengar av banken, och det är det vi kallar för ränta*

11. *Elev: aa*
12. *Coach: ränta räknar man alltid årsvis*
13. *Coach: i vårt exempel sätter vi in pengar på ett konto*
14. *Coach: vi lånar alltså ut våra pengar till banken*
15. *Elev: ja okej*
16. *Coach: och för att vi är så snälla och lånar ut våra pengar till banken så får vi lite extra pengar*
17. *Coach: så när vi tar ut våra 20 000 kr om 3 år så är det mer än 20 000 kr*
18. *Coach: detta kallas också för ränta*
19. *Coach: när man räknar med ränta så räknar man på exakt samma sätt som när man räknar med procent*
20. *Elev: okej :)*
21. *Coach: hängde du med?*
22. *Coach: eller ser du whiteboarden till höger?*
23. *Elev: ja jag ser det! Tror jag förstår det mesta :))*
24. *Coach: är det något som är oklart? Då förtydligar jag gärna :)*
25. *Elev: jag förstår :D*
26. *Coach: för att räkna hur mycket 3,75% av 20 000 kr är tar vi först och delar 3,75 med 100*
27. *Coach: så vi får 0,0375*
28. *Coach: det är ju så man räknar procent, och också ränta*
29. *Coach: men detta var efter ett år*
30. *Coach: nu ska vi se hur mycket han har efter 2 år*
31. *Coach: för när man räknar med ränta så måste man alltid göra det årsvis, ett år i taget*

Matematikcoachen riktar uppmärksamheten mot förståelse av begreppet ränta genom att förklara att ränta är de pengar som måste betalas när pengar lånas av banken (rad 8-9). Matematikcoachen använder ett exempel där eleven lånar pengar av banken medan uppgiften handlar om insättningsränta på ett bankkonto. En tolkning är att matematikcoachen tänker att eleven är mer bekant med att låna

pengar. Matematikcoachen förklarar ingående vad ränta är (rad 10-18). Eleven ger respons och visar att hen är med på det matematikcoachen förklarar (rad 11 och 15). Sedan gör matematikcoachen kopplingen mellan ränta och procent och förklarar att de räknas på samma sätt (rad 19). Matematikcoachen undersöker om eleven har förstått (rad 21) och eleven bekräftar att hen har förstått (rad 23). Matematikcoachen uttrycker att om något är oklart så förtydligar hen gärna (rad 24). Därmed görs det tydligt att matematikcoachen tycker att det är viktigt att eleven förstår. Matematikcoachen fortsätter med att förklara att man först ska dividera 3,75 med 100 (rad 26) och redovisar svaret 0,0375 (rad 27). Genom att begreppet ränta förklaras är begreppslogik förmåga i fokus. Den här konversationen är ett exempel på stöttning där matematikcoachen leder eleven genom problemlösningen genom att berätta vilken beräkning som ska göras och förklarar begrepp som är avgörande att förstå för att kunna lösa problemet. Ett exempel på kommunikativ stötta som matematikcoachen använder är att det förklaras vad ränta kan vara i den här uppgiften (rad 8-10). Ett annat exempel på kommunikativ stötta är att matematikcoachen beskriver vilken beräkning som ska utföras (rad 26).

Sammanfattning

I kommunikationen mellan matematikcoach och elev bildas inventerande och orienterande kontexter. Det som är gemensamt är att i båda fallen bildas kontexter som riktar uppmärksamhet mot procedurer och begrepp. Skillnaden mellan den orienterande och den inventerande kontexten är att i den inventerande kontexten ställer matematikcoachen frågor för att förstå vad eleven behöver hjälp med. De frågor som matematikcoachen ställer kan även hjälpa eleven att rikta uppmärksamheten mot procedurer och begrepp. I den orienterande kontexten däremot undervisar matematikcoachen med fokus på matematiska begrepp och procedurer.

Ett sätt att sammanfatta dessa kontexter är nedanstående tabeller och figurer. I sammanställningen finns inte den ämnesövergripande kontexten med då matematikcoachens ämnesövergripande frågor mer kan betraktas som ett sätt för matematikcoachen att få information mer än att stötta eleven.

Inventerande kontext

Procedurinriktad

- Hur har du räknat? (1)
- Vilken formel har du använt? (2)
- Vilken formel vill du använda? (3)
- Kan du beräkna detta? (4)

Begreppslig kontext

Specifika begreppsfrågor

- Begreppsfrågor i olika faser av problemlösning (5)
- Förstå problemet (6)
- Modellering (7)
- Söka en lösning (8)

Lötsande kontext

- Förstå problemet (9)
- Beslut (10)
- Nästa steg (11)

Figur 4. Sammanfattning av matematikcoachens stöttning i den inventerande kontexten.

Orienterande kontext
Handlingsorienterande kontext
Sambandsorienterande uppmaning
 Söka samband (1)

Procedurorienterande uppmaning
 Beräkningsorienterande.
 Vad ska räknas (2)
 Beräkningsorienterande.
 Vilka siffror (3)
 Beräkningsorienterande.
 Vilka siffror och hur. (4)

Förklaringsorienterande kontext
Begreppsförklarande
 Förklaringsfokus samband (5)

Problemlösningsförklarande
 Lösningsfokus förklara val av procedur (6)
 Lösningsfokus förklara begrepp och procedur (7)
 Lösningsfokus förklara procedur och hur (8)

Figur 5. Sammanfattning av matematikcoachens stöttning i den orienterande kontexten.

Diskussion

Syftet med denna studie är att beskriva och analysera webb-baserade kommunikationschattar mellan elever och mattecoacher när de arbetar kring problemlösning inom matematik. I det här avsnittet kommer jag att diskutera vad som görs möjligt för eleverna att lära sig och inleder med problemlösning. Vidare diskuteras de kontexter som uppstår i chattarna mellan matematikcoach och elev. Till sist kommer en sammanfattning av studien och några forskningsidéer som studien skulle kunna följas upp med.

Matematikcoachning och problemlösning

När matematikcoachen stöttar eleven så riktas uppmärksamheten mot olika beräkningar och matematiska begrepp som är avgörande för att lösa de matematiska problem som eleven önskar få hjälp att lösa. Matematikcoachen och eleven kommunicerar om hur enskilda matematiska problem kan lösas. Resonemanget om lösningen av enskilda problem skulle eleven kunna utnyttja som stöttning för att lära sig ett generellt sätt att lösa matematiska problem. Problemlösning är en komplex process och ett krav för att det ska betraktas som en problemlösningssuppgift är att det inte ska finnas någon direkt uppenbar beräkning som löser uppgiften (Hagland, Hedrén & Taflin 2005). I resultatet finns exempel på att eleverna angriper ett problem genom att använda de tal som ingår i uppgiften utan att ta hänsyn till den situation som beskrivs i problemet. Det kan handla om att eleven ska lösa en uppgift där ett antal kuber med en given storlek ska placeras i en låda med givna mått. Då har eleven endast utgått från de mått som angivits i uppgiften och vill utföra en beräkning utan att ta hänsyn till den situation som beskrivs i uppgiften. Då stöttar matematikcoachen genom att göra eleven uppmärksam på sammanhanget som beskrivs i uppgiften. Den stöttningen ger eleven möjlighet att se helheten i problemet och med den insikten kan eleven lösa problemet. Hung (1997) studerade elever som löste matematiska problem. Resultatet visade att elevernas förståelse för matematiska problem skapas utifrån tre kontextuella nivåer (1) siffernivå som även kan betraktas som de tal som ingår i uppgiften, (2) förståelse för problemet som helhet, och (3) situationsnivå som innebär den situation som uppgiften handlar om. I resultatet framkommer också att matematikcoachen stöttar eleverna i olika steg i problemlösningsprocessen. I den inventerande kontexten

ställer matematikcoachen frågor som kan ge insikt om hur eleven förstått problemet. Matematikcoachen ställer även frågor för att få syn på vilken plan eleven har för att lösa uppgiften. Det finns även exempel på att matematikcoachen ställer frågor som rör lösningen av problemet. I den orienterande kontexten finns exempel på dessa tre steg men det som skiljer är att matematikcoachen förklarar och beskriver vad och hur eleven ska göra. Polya (1962) beskriver processen att lösa ett matematiskt problem med fyra steg. De stegen benämns: a) att förstå problemet, b) att göra upp en plan, c) att utföra planen och d) att utvärdera sin lösning av problemet. Resultatet i föreliggande studie visar att de första tre stegen som Polya (1962) beskriver förekommer. Matematikcoachens stöttning har fokus på att göra upp en plan och att utföra planen. Det som inte syns i materialet är exempelvis utvärdering av lösningen. Att utvärdera lösningen ser Polya (1962) som ett sätt att bekräfta och utveckla elevernas kunskaper. Detta skulle kunna vara en hjälp för matematikcoachen att se hur väl stöttningen fungerat. Ett sätt för matematikcoachen att få insikt i hur eleven kan stöttas i problemlösningen skulle kunna vara att inventera elevens förståelse för problemet. På det sättet skulle matematikcoachen ha bättre kunskap om vad eleven behöver ha förklarat.

Matematikcoachens stöttning i olika kontexter

Resultatet i denna studie visar att det som karaktäriserar kommunikationen mellan matematikcoachen och eleven är att matematikcoachning skapar olika kontexter. Säljö (2000) menar att kommunikationen alltid är knuten till en kontext och att kontexten påverkar förståelsen av exempelvis ett matematiskt innehåll. Kommunikation med andra gör det möjligt för elever att ta till sig nya sätt att tänka och resonera om matematik (Säljö 2000). Beroende på vilken kontext som kommunikationen är knuten till så leder det till olika sätt att tänka och resonera. När matematikcoachen stöttar elever i deras problemlösning sker det i vissa fall inventerande genom att frågor ställs om eleven har gjort något försök att börja lösa uppgiften. I andra fall är stöttningen orienterande och då stöttar matematikcoachen eleven genom att förklara viktiga begrepp och vilka beräkningar som ska göras. När kontexten är inventerande ges det möjlighet för matematikcoachen att få insikt om elevens förståelse för problemet och om eleven har någon plan för att lösa problemet. I den inventerande kontexten kan matematikcoachen även få insikt om på vilket sätt stöttning ska ges. Den inventerande kontexten framkommer som en hjälp för matematikcoachen att få reda på vad eleven klarar på egen

hand. Den orienterande kontexten kan ses som ett sätt att stötta eleven i sådant som inte kan utföras på egen hand men som blir möjligt med stöttning från matematikcoachen. Det kan jämföras med det Vygotskij (1978) beskriver som ett avstånd mellan det eleven klarar av just nu på egen hand och det eleven skulle kunna klara av med vägledning av en skicklig person. Det avståndet kallar han för den proximala utvecklingszonen (ZPD). På det sättet kan eleven med matematikcoachens stöttning ges möjlighet att bli tillräckligt erfaren för att självständigt kunna förstå vad som efterfrågas i uppgiften och kunna välja en lämplig lösningsmetod (Hartman, 2002).

Matematikcoachens stöttning sker i kontexter som kan vara fokuserade på att lösa problemet eller fokuserade på elevens förståelse av något matematiskt fenomen. I dessa kontexter görs det möjligt för eleven att appropriera matematiska begrepp och procedurer.

En grov bild av hur dessa kontexter kan variera kan beskrivas som nedan.

Figur 6 En beskrivning av de kontexter som uppstår i chattarna och det som görs möjligt att appropriera.

En lösningsfokuserad kontext där begrepp blir möjliga att appropriera (1) kännetecknas av att matematikcoachens stöttning fokuserar på begrepp som är avgörande för att kunna lösa problemet. Vid stöttning av elever i problemlösning behöver matematikcoachen ha

kunskap om både det matematiska problemet och elevens kunskaper om det matematiska innehållet (Wood et al., 1976). Ett sätt för matematikcoachen att få den kunskapen är att ställa frågor. I resultatet framkommer att olika typer av frågor används i den lösningsfokuserade inventerande kontexten. Ett exempel på det ses i begreppsinventerande processinriktad kontext. Där leder matematikcoachen resonemanget med hjälp av frågor om elevens kunskaper om matematiska begrepp. Eleven svarar kort och visar att hen följer matematikcoachens resonemang. Denna typ av frågor beskriver Pimm (1987) som slutna frågor där eleven kan ge ett kort svar med oftast är ett ord. Denna variant av frågor kan användas för att styra samtalet och uppmärksamma eleven på det som är viktigt för eleven att ha förståelse för. Dessutom menar Pimm (1987) att den här typen av frågor kan användas för att få insikt om eleven följer med i resonemanget. En annan variant av frågor som matematikcoachen använder är frågor som kan betraktas som ett sätt för matematikcoachen att kontrollera elevens kunskaper om matematiska begrepp. Denna variant av frågor betecknar Pimm (1987) som kontrollfrågor. Dessa frågor används för att kontrollera om eleven har faktakunskap. Med hjälp av dessa typer av frågor leder matematikcoachen eleven genom lösningsprocessen och pekar på sådant som är viktigt för eleven att ha kunskap om. Frågorna som ställs kan ge en lärare insikt om vad eleven förstår och vad eleven behöver hjälp att förstå (Pimm 1987). I den orienterande kontexten förklarar matematikcoachen matematiska begrepp för eleven och gör på så sätt eleven uppmärksam på det som är viktigt att ha kunskap om för att kunna lösa problemet. Van Der Stuyf (2002) menar att eleverna kan stöttas i deras problemlösning genom att peka ut saker som är viktiga att förstå för att kunna lösa uppgiften. I resultatet förekommer detta således både i den inventerande och den orienterande kontexten.

En lösningsfokuserad kontext där procedurer blir möjliga att appropriera (2) kännetecknas av att matematikcoachens stöttning fokuserar på procedurer som leder till lösning på det matematiska problemet. Det här kan ses som ett sätt att dela upp problemet i mindre delar för att göra det begripligt för eleven (Van Der Stuyf, 2002). I resultatet finns exempel på att matematikcoachen delar upp problemlösningsprocessen för eleven genom att bearbeta de beräkningar som ska göras en i taget. I den inventerande kontexten ställer matematikcoachen frågor om beräkningar som exempelvis om eleven vet hur man utför en viss beräkning. Frågorna kan användas för att dels dela upp problemet i hanterbara delar dels rikta uppmärksamhet på det som är viktigt för tillfället i problemlösningsprocessen. Matematikcoachen använder språket för att rikta uppmärksamheten

mot sådant som eleven behöver bli uppmärksam på. Ett exempel på det är då matematikcoachen frågar om eleven vet vilken beräkning som ska genomföras. Även i den orienterande kontexten används språket för att rikta uppmärksamheten mot sådant som är viktigt för eleven att ha kunskap om. Då riktar matematikcoachen uppmärksamheten mot de beräkningar som ska göras genom att förklara vilka det är och hur de ska genomföras. Det som skiljer dessa kontexter åt är att i den inventerande kontexten ställer matematikcoachen frågor för att uppmärksamma eleven på de beräkningar som är avgörande för att lyckas lösa det matematiska problemet. I den orienterande kontexten däremot förklarar matematikcoachen för eleven vilken beräkning som ska göras och även hur den ska utföras. Detta kan sägas vara det Säljö (2000) beskriver att språket har en utpekande funktion när det användas för att uppmärksamma sådant som är viktigt att vara medveten om. Det här sättet att stötta eleven beskriver Van Der Stuyf (2002) som en viktig beståndsdel i stöttning som gör det möjligt för eleven att klara av att lösa uppgiften.

En förståelsefokuserad kontext där begrepp blir möjliga att appropriera (3) kännetecknas av att matematikcoachens stöttning fokuserar på elevens förståelse av begrepp som är centrala för att kunna ta nästa steg i problemlösningsproceduren. Enligt Van Der Stuyf (2002) är det ett sätt att stötta elever att bli självständiga problemlösare. I den inventerande kontexten kan det handla om att matematikcoachen ställer frågor om matematiska begrepp som eleven behöver uppmärksammas på. Då matematikcoachen med sina frågor uppmärksammar eleven på matematiska begrepp kan sägas att språket har en utpekande funktion. Exempel på det är när matematikcoachen ställer frågor om elevens förståelse av matematiska begrepp. På så sätt riktas uppmärksamheten mot de begrepp som eleven behöver ha kunskap om för att kunna avancera i problemlösningsprocessen. I den orienterande kontexten använder matematikcoachen språket för att förklara viktiga begrepp som eleven behöver bli uppmärksam på. Dessa begrepp behöver eleven förstå för att kunna avancera i problemlösningsprocessen. Matematikcoachens beskrivning och förklaring av begreppen gör det möjligt för eleven att appropriera begreppen. Matematikcoachens sätt att använda språket betecknar Säljö (2000) som språkets semiotiska funktion. Språket beskrivs som ett hjälpmedel för att ge en beskrivning av fenomen och sätta det i ett sammanhang som gör det begripligt för andra (Säljö 2000). Ett exempel på det är när matematikcoachen förklarar för en elev hur begreppet ränta används vid avbetalning så rör sig matematikcoachen mellan ett språk som kan betraktas som

matematiskt och ett språk där vardagliga uttryck används. På det sättet görs det möjligt för eleven att följa matematikcoachens resonemang. Pimm (1987) menar att lärare behöver vara medvetna om att vissa begrepp som används i matematiken också används i vardagligt tal och hjälpa eleverna att förstå vad dessa betyder i matematiskt sammanhang. Wyndhamn, Riesbeck och Schoultz (2000) beskriver detta som vardagligt och matematiskt språk och menar att lärare behöver ha förmågan att röra sig mellan dessa för att kunna stötta eleverna att utveckla matematiskt kunnande.

En förståelsefokuserad kontext där procedur blir möjlig att appropriera (4) kännetecknas av att matematikcoachens stöttning fokuserar på förståelsen av procedurer som är viktiga för att ta nästa steg i problemlösningsproceduren. I resultatet framkommer att matematikcoachen i den inventerande kontexten använder språket för att inventera elevens förståelse för de beräkningar som ska göras. Med hjälp av frågor leder matematikcoachen eleven genom lösningen av problemet. När matematikcoachen frågar vad eleven förstår av de beräkningar som ska utföras kan det även vara en hjälp för matematikcoachen att få insikt om vilken hjälp eleven behöver. I den orienterande kontexten använder matematikcoachen språket för att förklara vilka beräkningar som ska göras och uppmanar eleven att göra beräkningarna. Matematikcoachen visar även i vissa fall hur beräkningarna genomförs. När matematikcoachen stöttar eleven med att rikta uppmärksamheten mot beräkningar på de sätt som beskrivits ovan menar Van Der Stuyf (2002) är ett sätt att stötta eleverna på ett framgångsrikt sätt i problemlösning. Det kan även ses som ett sätt att dela upp det matematiska problemet i mindre och hanterbara delar. Att stötta eleven med att rikta uppmärksamheten mot beräkningar blir även ett sätt att göra upp en plan för hur problemet ska lösas. Att göra upp en plan för hur ett matematiskt problem ska lösas är ett steg i problemlösningsprocessen (Polya, 1962). Det sätt som matematikcoachen använder för att stötta eleven i problemlösningsprocessen beskriver Bergman Ärleback (2013) som modellering och det handlar om att utgå från det sammanhang som beskrivs i det matematiska problemet och söka lämplig matematisk tillämpning. Det som skiljer sig åt i de två kontexterna är således att i den inventerande kontexten använder matematikcoachen frågor för att rikta uppmärksamheten mot beräkningar. I den orienterande kontexten däremot berättar matematikcoachen vilken beräkning som ska utföras och i.

Med hjälp av inventering och orientering kan matematikcoachen skapa insikt om vad eleven klarar på egen hand och vad eleven behöver hjälp med så att matematikcoachens scaffolding ska hamna i elevens ZPD. Målet är att eleven ska få en helhetsförståelse för det matematiska problemet och att kunna förstå de matematiska begreppens koppling till den situation som finns i den matematiska uppgiften och det gör det möjligt för eleven att bli en självständig problemlösare (Hung 1997).

Inventeringens betydelse

När matematikcoachen ska hjälpa eleven i problemlösningsprocessen är en förutsättning för att det ska bli en framgångsrik coachning att det uppstår ett tillstånd av intersubjektivitet (Hung, 1997). Ett hinder för det är att eleven kan ha erfarenheter av begrepp som används i matematiken men har en annan betydelse i elevens vardag. Det kan skapa svårigheter i kommunikationen mellan matematikcoachen och elev (Zevenberg 2000). För att intersubjektivitet ska uppstå behöver matematikcoachen ha insikt i elevens kunskaper om det matematiska problemet och elevens förståelse för det matematiska innehållet (Wood et al., 1976). Denna insikt är viktig för att kunna förklara det som för tillfället är avgörande för att eleven ska kunna komma vidare i problemlösningsprocessen (Hrastinski, & Stenbom, 2013; Hung, 1997). När matematikcoachen inventerat vilka kunskaper eleven har kan stöttningen gå vidare till den orienterande kontexten och matematikcoachen kan förklara sådant som eleven behöver förstå för att kunna lösa det matematiska problemet (Van Der Stuyf 2002). När matematikcoachen inventerar elevens kunskaper används frågor som på ett övergripande plan kan sägas vara inriktade mot matematiska begrepp och procedurer. Ett sätt att beskriva detta kan vara nedanstående figur.

Figur 6. Inventeringens betydelse för intersubjektivitet

Vid punkt A och B har intersubjektivitet infunnit sig. Eleven förstår det som matematikcoachen gör eleven uppmärksam på och kan följa i de förklaringarna om ges. Vid A går matematikcoachen längre i sin förklaring. Det kan behövas att matematikcoachen förklarar flera begrepp och beräkningar för att eleven ska kunna lösa problemet. I punkt B behövs inte lika mycket stöttning för att eleven ska kunna lösa problemet. I punkt C däremot har eleven en annan uppfattning om problemets art eller det matematiska innehållet än matematikcoachen. Då finns risk att den förklaring som matematikcoachen ger går förbi elevens förståelse. När en sådan situation uppstår finns behov av inventerande frågor. Med hjälp av inventerande frågor kan matematikcoachen få insikt i elevens uppfattning och därmed kan matematikcoachen stötta eleven med förklaringar om exempelvis matematiska begrepp som eleven behöver ha förståelse för.

Ett sätt att sammanfatta hur matematikcoachen stöttar för att eleven ska bli en självständig problemlösare åskådliggörs i nedanstående bild.

Figur 7. Scaffolding i problemlösningsprocessen.

När matematikcoachen stöttar eleven i problemlösning är insikt om elevens kunskaper och kunskap om det matematiska innehållet (Wood et al., 1976). För att få insikt om elevens kunskap inventerar matematikcoachen dessa genom att ställa frågor till eleven. Eleven behöver a) ha insikter om siffror eller de tal som ingår i uppgiften, b)

förstå uppgiften som helhet och c) kunna koppla ihop det matematiska innehållet med den situation som beskrivs i uppgiften (Hung, 1997). När matematikcoachen inventerat elevens kunskaper utifrån dessa tre aspekter kan stöttningen ske i elevens ZPD och det kan göras med orientering mot dessa aspekter. Inventeringen skapar förutsättningar för att matematikcoachens förklaringar och beskrivningar ska hjälpa eleven att utföra saker som inte var möjliga på egen hand. När matematikcoachen har förklarat något begrepp eller hur en beräkning ska genomföras kan inventering göras på nytt för att undersöka om eleven förstått. Om eleven inte riktigt förstått kan matematikcoachen förklara ytterligare. På så sätt blir processen som ett kretslopp där inventering och orientering kan ge eleven förutsättningar att bli en självständig problemlösare.

Avslutning och fortsatt forskning

Det finns ett önskemål från politikerna att använda IT i undervisningen. Matematikcoacherna i denna studie stöttar eleverna via en chatt-tjänst på dator där eleverna kan sitta hemma och få hjälp. Ett sätt att öka måluppfyllelsen i skolan var att göra en ny it- och digitaliseringsstrategi. Den nya it- och digitaliseringsstrategin innebar att göra förändringar i läroplaner och kursplaner för att öka användandet av IT i (Regeringsbeslut U2015/04666/S). Enligt Hattie och Yates (2013) är ett effektivt sätt att använda IT i undervisningen när datorn blir ett komplement till en ordinarie undervisningen. Inom matematik kan det handla om att eleverna ägnar mer tid åt att träna specifika färdigheter i matematik. Lissaman, De Pomerai, och Tripconey, (2009) fann att coaching via dator var framgångsrikt då eleverna fick hjälp utanför skoltid och kunde sitta hemma och få hjälp med matematikuppgifter. Matematikcoachen i denna studie stöttar eleverna efter skoltid och blir på så sätt ett komplement till den ordinarie undervisningen.

I en tidigare studie fann Stenbom, Jansson och Hulkko, (2016) att konversationer mellan elev och matematikcoach kunde delas upp i a) kognitivt, b) undervisnings-, c) socialt och d) emotionellt innehåll. De fann att konversationerna till stor del hade kognitivt och undervisande innehåll. Utifrån det drog de slutsatsen att matematikcoachning är ett bra komplement till ordinarie matematikundervisning.

I denna studie kan sägas att det kognitiva innehållet och undervisningsinnehållet studeras. De två delarna av innehåll sätts i relation till problemlösning i matematik. Dessutom studeras hur

matematikcoacherna stöttar eleverna i deras problemlösningsprocess. Det innebär att den här studien preciserar hur eleverna får stöttning och vad som görs möjligt för eleverna att appropriera. När matematikcoachen stöttar eleverna i problemlösning förekommer fyra olika sätt a) dela upp problemet, b) peka ut saker som är viktiga för att kunna lösa uppgiften, c) avdramatisera uppgifter och d) förklara vilka beräkningar som ska göras och förklara matematiska begrepp som eleven behöver förstå för att kunna lösa uppgiften. Van der Stuyf (2012) beskriver bland annat dessa saker som att god stöttning av elever.

Resultatet i den här studien visar att det som karaktäriserar de sätt matematikcoacherna stöttar elever som deltar i webb-baserade chatforum är att det sker i två huvudkontexter a) inventerande kontext och b) orienterande kontext. I den inventerande kontexten ställer matematikcoachen frågor om matematiska begrepp och procedurer och på sått kan de få insikt om hur eleven uppfattar de uppgifter de jobbar med gemensamt. Med hjälp av den inventerande kontexten kan matematikcoachen peka på sådant som eleven behöver ha kunskap om för att kunna lösa uppgiften. Det kan exempelvis handla om vilka beräkningar som ska göras eller viktiga matematiska begrepp som är avgörande att ha kunskap om. Genom att rikta uppmärksamheten mot sådant som är viktigt delar även matematikcoachen uppgiften i hanterbara delar för eleven. Den orienterande kontexten karaktäriseras av att matematikcoachen förklarar viktiga begrepp och procedurer som eleven behöver ha hjälp med för att kunna lösa problemet.

Resultatet visar även det som görs möjligt för eleven att appropriera i en webb-baserad chat med matematikcoacher. Det som görs möjligt att appropriera är de begrepp och procedurer som eleven behöver ha kunskap om. Dessa kunskaper är avgörande för att eleverna ska kunna lösa de matematiska problemuppgifter som de söker hjälp med när de chattar med matematikcoachen.

I denna studie beskrivs vad som görs möjligt för eleven att lära med matematikcoachens stöttning. En komplettering till denna studie skulle kunna vara att göra en kvantitativ studie och studera i vilken utsträckning eleverna approprierar de matematiska begrepp som matematikcoachen förklarar för eleven. Ett annat sätt att utvidga och fördjupa denna studie skulle kunna vara att studera om den stöttning eleven får av matematikcoachen leder till en erfarenhet som eleven kan använda vid lösning av liknande matematiska problem.

Referenser

- Adegoke, B. A. (2010). Integrating animation, narratives and textual information for improving physics learning. *Electronic Journal of Research on Educational Psychology*, 8(2), 725-748.
- Alexanderson, K., & Davidsson, P. (2016). *Eleverna och internet 2016*. Stockholm: .SE (Stiftelsen för internetinfrastruktur)
- Alvesson, M., & Sköldbberg, K. (1994). *Tolkning och reflektion. Vetenskapsfilosofi och kvalitativ metod*. Lund: Studentlitteratur.
- Balanskat, A., Blamire, R., & Kefala, S. (2006). The ICT Impact Report - A review of studies of ICT impact on schools in Europe. In *Learning*. Hämtad från http://colccti.colfinder.org/sites/default/files/ict_impact_report_0.pdf
- Berg, B.L. (2001) *Qualitative Research, Message for the Social Sciences*. 4th Edition, Allin and Bacon, Boston, 15-35.
- Bergman Årleback, J. (2013). Matematiska modeller och modellering - vad är det? *Nämnamnaren* (3), 21-26. Hämtad 5 november 2019 från: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/2126_13_3.pdf
- Blomhøj, M. (2001). Villkor för lärande i datorbaserad matematikundervisning. I B. Grevholm(red.), *Matematikdidaktik Ett nordiskt perspektiv* (ss. 185-218). Lund. Studentlitteratur
- Björklund, C. & Grevholm, B. (2012). *Lära och undervisa matematik: från förskoleklass till år 6*. (1. uppl.) Stockholm: Norstedt.
- Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3, 77-101
- Carlgen, I. & Marton, F. (2002). *Lärare av i morgon*. ([Ny utg.]). Stockholm: Lärarförbundet.
- Carpenter, T. P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge. Implications from research on initial learning of arithmetic. I Hiebert, J. (red.) (1986). *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (ss. 113-132). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- Cheung, A. C. K., & Slavin, R. E. (2013). The effectiveness of educational technology applications for enhancing mathematics achievement in K-12 classrooms: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 9, 88-113. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.01.001>
- Crawford, V. & Vahey, P. (2002) Palm Education Pioneers Program: March, 2002 Evaluation Report. SRI International, Menlo Park, CA.

- Daniels, H. (2001). *Vygotsky and pedagogy*. London: Routledge/Falmer
- Dutta, S., Geiger, T. & Lanvin, B. *The Global Information Technology Report 2015—ICTs for Inclusive Growth*; World Economic Forum and INSEAD: Geneva, Switzerland, 2015.
- Edwards, A. D., Westgate, D. P. (1994) *Investigating Classroom Talk* (2nd edn). London: The Falmer Press.
- Engström, A. (1993). *Om de rationella talen i den grundläggande matematikundervisningen*. Pedagogisk- psykologiska problem. Nr 579. Malmö: Lärarhögskolan.
- Engvall, M. (2013). *Handlingar i matematikklassrummet. En studie av undervisningsverksamheter på lågstadiet då räknetoder för addition och subtraktion är i fokus*. (Doktorsavhandling). Linköpings universitet: Institutionen för beteendevetenskap och lärande.
- EuropeanSchoolnet: http://ec.europa.eu/education/pdf/doc254_en.pdf
- Europeiska Unionen. (2006). Europaparlamentets och rådets rekommendation (2006/962/EG) av den 18 december 2006 om nyckelkompetenser för livslångt lärande. *Europeiska unionens officiella tidning*, L394, 10, 18.
- E-learning Nordic. (2006). E-learning Nordic 2006. I *Effekterna av IT i undervisningen*.
- Farkell-Bååthe, S. (2000). Datorn som pedagogiskt hjälpmedel. Effekter och erfarenheter av datorstöd i matematik. Stockholm: Lärarhögskolan i Stockholm.
- Gambari, I. A., Ezenwa, V. I., & Anyanwu, R. C. (2014). Comparative Effects of Two Modes of Computer-Assisted Instructional Package on Solid Geometry Achievement. *Contemporary Educational Technology*, 5(2), 110–120. Retrieved from <http://www.proxy.its.virginia.edu/login?url=http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=ehh&AN=95746830&site=ehost-live>
- Grönlund, Å. (2014). *Att förändra skolan med teknik: bortom "en dator per elev"*. Örebro: Örebro univ.
- Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem: inspiration till variation*. (1. uppl.) Stockholm: Liber.
- Hartman, H. (2002). Scaffolding & Cooperative Learning. *Human Learning and Instruction* (pp. 23-69). New York: City College of City University of New York.
- Hattie, J. & Yates, G. (2013). *Visible learning and the science of how we learn*. Milton Park, Abingdon, Oxon: Routledge.

- Haynes, K. 2012. Reflexivity in qualitative research. I G. Symon, & C. Cassell (Red), *Qualitative organizational research: Core methods and current challenges*, 72–89. London: Sage Publications.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I J. Hiebert (red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Hrastinski, S., & Stenbom, S. (2013). Student-student online coaching: Conceptualizing an emerging learning activity. *Internet and Higher Education*, 16(1), 66–69.
<https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2012.02.003>
- Hrastinski, S., Edman, A., Andersson, F., Kawnine, T., & Soames, C-A. (2012). Informal math coaching by instant messaging: Two case studies of how university students coach K-12 students. *Interactive Learning Environments*. 2012.
 10.1080/10494820.2011.641682.
- Hung, D. W. L. (1997). Meanings, contexts, and mathematical thinking: The meaning-context model. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 311–324. [https://doi.org/10.1016/s0732-3123\(97\)90010-9](https://doi.org/10.1016/s0732-3123(97)90010-9)
- Hylén, J. (2013). *Digitalisering i skolan – en kunskapsöversikt*. 36. Retrieved from http://www.janhysten.se/wp-content/uploads/2013/04/Ifous-Digitalisering-i-skolan-2013_11.pdf
- Johansson, B. mfl. (2001). *Hög tid för matematik* Göteborg: Nationellt centrum för matematik, Göteborg univ. Hämtad 1 mars 2015 från <http://ncm.gu.se/node/462>
- Kazemi, E. and Stipek, D. 2001. Promoting conceptual thinking in four upper-elementary mathematics classrooms. *Elementary School Journal*, 102(1): 59–80.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.), (2001). Adding it up: helping children learn mathematics. Washington, D.C.: *National Academy Press*
- Kulik, J. A., & Fletcher, J. D. (2016). Effectiveness of Intelligent Tutoring Systems: A Meta-Analytic Review. *Review of Educational Research*, 86(1), 42–78. DOI: 10.31020034654315581420
- Larsson, S. (2005). *Om kvalitet i kvalitativa studier*. Nordisk Pedagogik, 25(1), 16-35

- Lee, C.-Y. & Chen, M. -P. (2009) A computer game as a context for non-routine mathematical problem solving: the effects of type of question prompt and level of prior knowledge. *Computers & Education*, 52 , pp. 530-542
- Lgr 11 (2019). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet: reviderad 2019*. Stockholm: Skolverket.
<https://www.skolverket.se/publikationsserier/styrdokument/2019/laroplan-for-grundskolan-forskoleklassen-och-fritidshemmet-reviderad-2019>
- Li, Q., & Ma, X. (2010). A Meta-analysis of the Effects of Computer Technology on School Students' Mathematics Learning. *Educ Psychol Rev*, 22, 215–243. Hämtad 1 mars 2015 från
<https://doi.org/10.1007/s10648-010-9125-8>
- Linell, Per (1998). *Approaching dialogue: Talk, interaction and contexts in dialogical perspectives*. Amsterdam & Philadelphia: John Benjamins.
- Lissaman, R., De Pomerai, S., & Tripconey, S. (2009). Using live, online tutoring to inspire post 16 students to engage with higher level mathematics. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 28(4), 216–221. DOI: 10.1093/teamat/hrp028
- Littleton, K., & Mercer, N. (2013). *Interthinking: putting talk to work*. Routledge
- Lund, A. (2012). *Satsningarna på IT används inte i skolornas undervisning* [E-bok]. Skolinspektionen. [Hämtad 2019-05-25]
 Från:
<https://www.skolinspektionen.se/globalassets/publikationssok/granskningsrapporter/kvalitetssranskningar/2012/it/pm-it-iundervisningen.pdf>
- Magne, O. (1998). Matematikinläring – en resa i det inre. I B. Gran (Red.). *Matematik på elevens villkor*. Lund: Studentlitteratur, 99-124.
- Marton, F. (2000). Om konsten att lära alla allt. *Pedagogisk forskning i Sverige*, 5, 151-154.
- McCrone, S.S. (2005) The Development of Mathematical Discussions: An Investigation in a Fifth-Grade Classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, 7:2, 111-133, DOI: 10.1207/s15327833mtl0702_2
- Mercer, N. (2004). Sociocultural discourse analysis: analysing classroom talk as a social mode of thinking. *Journal of Applied Linguistics*, 1(2), 137–168. <https://doi.org/10.1558/jal.v1i2.137>
- Mercer, N., Littleton, K. and Wegerif, R. (2004) Methods for studying the processes of interaction and collaborative activity in

- computer-based educational activities. *Technology, Pedagogy and Education* 13(2): 193–209.
- Myndigheten för skolutveckling (2007). *Effektivt användande av IT i skolan. Analys av internationell forskning*. Stockholm: Liber Distribution.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to actions : ensuring mathematical success for all*. Principles and standards for school mathematics. United States: Key Curriculum Press.
- Neuman, D. (1987). *The origins of arithmetics skills*. Göteborg Studies in Educational Science, 62. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Niss, M., & Højgaard-Jensen, T. (red.). (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr.18. Köpenhamn: Undervisningsministeriet. Hämtad 8 juni 2014 från <http://pub.uvm.dk/2002/kom/04.htm>
- Normalplan för undervisningen i folkskolor och småskolor. Af Kongl. Maj:t i nåder godkänd den 7 december 1900. Stockholm, 1900. 98 s. Även tr. 1904.
- Nystrand, M., Wu, L. Lawrence, L., Gamoran, A., Zeiser, S., Daniel, A., and .Zeiser, S. (2010). *Questions in Time : Investigating the Structure and Dynamics of Unfolding Classroom Discourse* *Questions in Time : Investigating the Structure and Dynamics of Unfolding Classroom Discourse*. 6950. <https://doi.org/10.1207/S15326950DP3502>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. Programme for International Student Assessment (2000). *Measuring student knowledge and skills: the PISA 2000 assessment of reading, mathematical and scientific literacy*. Paris: Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD).
- Organisation for Economic Co-operation and Development. Programme for International Student Assessment (2003). *The PISA 2003 assessment framework: mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. Paris: Organisation for Economic Co-operation and Development.
- Organisation for Economic Co-operation and Development. Programme for International Student Assessment (2012). *The PISA 2012 assessment framework: mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. Paris: Organisation for Economic Co-operation and Development.

- Organisation for Economic Co-operation and Development.
Programme for International Student Assessment (2018). *The PISA 2018 assessment framework: mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. Paris: Organisation for Economic Co-operation and Development.
- Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: communication in mathematics classrooms*. London: Routledge & Kegan Paul Ltd.
- Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Polya, G. (1962-1965). *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: Wiley.
- Reynolds, D., & Muijs, D. (1999). The Effective Teaching of Mathematics: A review of research. *School Leadership & Management*, 19(3), 273–288. doi:10.1080/13632439969032
- Regeringsbeslut U2015/04666/S *Uppdrag att föreslå nationella it-strategier för skolväsendet*. [Elektronisk resurs]. Hämtad 3 april 2015 från <https://www.regeringen.se/>
- Resic, S., & Cukle, N. (2013). Influence of interactive boards in improving teaching of mathematics in high school. I Pavlekovic, Margita, E., Kolar-Begovic, Zdenka, E., & Kolar-Super, Ruzica, E. (2013). *Mathematics Teaching for the Future* s. 127-142). [Elektronisk resurs] Hämtad från. <http://eric.ed.gov/?id=ED542544>
- Resnick, L. B., C. S. C. Asterhan, & S. N. Clarke. (2015). *Socializing Intelligence through Academic Talk and Dialogue*. Washington, DC: AERA. Export
- Rogoff, B. 1990: *Apprenticeship in Thinking: Cognitive Development in Social Context*. New York: Oxford University Press.
- Samuelsson, J. (2003). *Nytt, på nytt sätt!; En studie över datorn som förändringsagent av matematikundervisningens villkor, metoder och resultat i skolor 7-9 (Doktorsavhandling)*. Uppsala Universitet.
- Samuelsson, J. (2007a). Skolmatematik. I K. Granström (red.) *Forskning om lärares arbete i klassrummet*. (s. 247-264). Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.
- Samuelsson, J. (2007b). Matematik i grundskolan. I Engström, A., Engvall, M. & Samuelsson, J. Att leda den tidiga matematikundervisningen (s.17-44). Linköping: Skapande vetande, Linköpings universitet.
- Samuelsson, J. (2008). The impact of different teaching methods on students' arithmetic and self-regulated learning skill. *Educational Psychology in Practice*, 24(3), 237–250. DOI:10.108002667360802256790.

- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334–370). New York: Macmillan.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding', *The Arithmetic Teacher* 26 (3), 9-15.
- Skolforskningsinstitutet (2017). *Klassrumdialog i matematikundervisningen: matematiska samtal i helklass i grundskolan*. Solna: Skolforskningsinstitutet.
- Skolinspektionen. (2009). Undervisningen i matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet (2009:5). Hämtad från <https://www.skolinspektionen.se/globalassets/publikationssok/granskningsrapporter/kvalitetsgranskningar/2009/matematik/granskningssrapport-matematik.pdf>
- Skolverket (2004). *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003. Huvudrapport – svenska/svenska som andra språk, engelska, matematik och undersökningen i årskurs 5*. (Rapport 251 2004)
- Skolverket (2006) GY-2007 *Kursplan för ämnet företagsekonomi* www.skolverket.se
- Skolverket (2008a). *TIMSS 2007: svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2008b). Redovisning av uppdraget att bedöma verksamheters och huvudmäns utvecklingsbehov avseende IT-användningen inom förskola, skola och vuxenutbildning samt ge förslag på insatser U2008/8180/S
- Skolverket (2009). Redovisning av uppdraget att bedöma verksamheters och huvudmäns utvecklingsbehov avseende IT-användningen inom förskola, skola och vuxenutbildning samt ge förslag på insatser. Dnr 84-2008:3780, Skolverket, Stockholm, 2009. Hämtat 12 augusti 2016 från: <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2244>
- Skolverket (2012). *TIMSS 2011: svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2016). *TIMSS 2015: svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket.

- Skolverket (2019). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011: reviderad 2019*. [Stockholm]: Skolverket. Hämtad 12 juli 2019 från <https://www.skolverket.se/publikationsserier/styrdokument/2019/laroplan-for-grundskolan-forskoleklassen-och-fritidshemmet-reviderad-2019>
- Skolöverstyrelsen (1962). *Läroplan för grundskolan*. Stockholm: Kungl. Skolöverstyrelsen.
- Skolöverstyrelsen. (1969). *Läroplan för grundskolan 1 Allmän del*. Stockholm: Utbildningsförlaget. Hämtad från: https://gupea.ub.gu.se/bitstream/2077/30902/1/gupea_2077_30902_1.pdf
- Steenbergen-Hu, S., & Cooper, H. (2013). A meta-analysis of the effectiveness of intelligent tutoring systems on K–12 students' mathematical learning. *Journal of Educational Psychology*, 105(4), 970–987. DOI:10.1037/a0032447
- Stenbom, S. (2010, oktober) *Mattecoach på nätet*. Konferensbidrag presenterat på NU2010, Stockholm, Sverige
- Stenbom, S., Hrastinski, S., & Cleveland-Innes, M. (2012). Student-student online coaching as a relationship of inquiry: An exploratory study from the coach perspective. *Journal of Asynchronous Learning Network*, 16(5), 37–48.
- Stenbom, S., Jansson, M., & Hulkko, A. (2016). Revising the Community of Inquiry Framework for the Analysis of One-To-One Online Learning Relationships Revising the Community of Inquiry Framework for the Analysis of One-To-One Online Learning Relationships Stenbom, Jansson, and Hulkko. *International Review of Research in Open and Distributed Learning*, 17(3). Hämtad 14 sep 2017 från <http://files.eric.ed.gov/e.bibl.liu.se/fulltext/EJ1102678.pdf>
- Sveider, C. (2016). *Lärares och elevers användande av laborativt material i bråkundervisningen i skolår 4-6: Vad görs möjligt för eleverna att erfara?* (Licentiate dissertation). Linköping. <https://doi.org/10.3384/lic.diva-125924>
- Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken: ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma.
- Säljö, R. 2005: *Lärande och kulturella verktyg: Om lärprocesser och det kollektiva minnet*. Stockholm: Nordstedts.
- Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1992). Solving everyday problems in the school setting. I Chaklin, S., & Lave, J. (red). *People in Action*. Cambridge, MA.: Cambridge University Press.
- Taber, H. K, Martens, R. L., & Van Merrieboer, J. J. G. (2004). Multimedia instructions and cognitive load theory: effects of

- modality and cueing. *British Journal of Educational Psychology*, 74, 71-81.
- Undervisningsplan för rikets folkskolor den 31 oktober 1919. Stockholm, 1920. 262 s. Även tr. 1924, 1945, 1947, 1949 och 1950.
- Utbildningsdepartementet (1998). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet: Lpo 94, anpassad till att också omfatta förskoleklassen och fritidshemmet*. Stockholm: Utbildningsdep., Regeringskansliet.
- Utbildningsdepartementet (2015). *Uppdrag att föreslå nationella it-strategier för skolväsendet*. Regeringsbeslut 1:2.
- Hämtat från
<https://www.regeringen.se/4a80e6/contentassets/a22b7decc51047a790f68d63c64920cb/uppdrag-till-skolverket-att-foresla-nationella-it-strategier-for-skolasendet.pdf>.
- Van Der Stuyf, R. R. (2002) Scaffolding as a teaching strategy, *Adolescent Learning and Development*. Section 0500A – Fall 2002.
- VanLehn, K. (2006). The behavior of tutoring systems. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 16, 227–265.
- Vetenskapsrådet (2002). forskningsetiska principer – inom humanistisksamhällsvetenskapliga och forskning: Stockholm: Hämtat ifrån: <http://www.vr.se>
- Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem-solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17 (September 1974), 89–100. DOI: 10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x
- Wyndhamn, J. (1993). *Problem-solving revisited. On school mathematics as a situated practice*. Linköpings Studies in Arts and Science 98, Linköping University
- Wyndhamn, J. (2002). Att lära av och med ett datorprogram. En explorativ studie. I Säljö, R., & Linderöth, J. (red). *Utm@ningar och e-frestelser. It och skolans lärkulturer*. Stockholm: Prisma, 97-118.
- Wyndhamn, J., Riesbeck, E. & Schoultz, J. (2000) *Problemlösning som metafor och praktik*. Linköping Universitet
- Vygotskij, L.S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Cambridge, Mass.: Harvard U.P.
- Zevenbergen, R. (2000) "Cracking the Code" of Mathematics Classroom. School success as a Function of Linguistics, Social and Cultural Background. I J. Boaler (Red), *Multiple Perspectives of Mathematics teaching and learning*. (ss 201–223). Westport CT: Ablex Publishing.

TIDIGARE UTGIVNA RAPPORTER

- 242 COLNERUD, GUNNEL & HÄGGLUND, SOLVEIG (red). Etiska lärare –moraliska barn. Forskning kring värdefrågor i skolans praktik. Värdepedagogiska texter II. November 2004.
- 243 MATWEJEFF, SUSANNA. Svenskfödda adopterades sökprocess. Januari 2005. (Licentiatavhandling)
- 244 SAMUELSSON, JOAKIM. Lärarstudenters erfarenheter av matematikunder-visning. Vad händer med elever när de inte förstår? Maj 2005.
- 245 ÖFVERSTRÖM CHRISTEL. Upplevelse, inlevelse och reflektion - drama som en aktiv metod i lärandet. September 2006. (Licentiatavhandling) ISBN: 91-85643-71-8
- 246 ERIKSSON-GUSTAVSSON, ANNA-LENA, SAMUELSSON, JOAKIM. Didaktiska samtal i specialpedagogiska kontexter. En studie av undervisning i grundläggande svenska och matematik. Februari 2007. ISBN: 978-91-85715-68-8
- 247 ÖSTERSTRÖM, STEFAN. Om konsten att överbrygga gränser. En fallstudie om kommunal äldreomsorg och samspelet med andra organisationer. Maj 2007. ISBN: 978-91-85895-04-5.
- 248 ENGSTRÖM, ARNE, MAGNE, OLOF. Medelsta-matematik IV. En empirisk analys av Skolverkets förslag till mål att uppnå i matematik för årskurs 3. Mars 2008. ISBN: 978-91-7393-918-8.
- 249 THORNBERG, ROBERT. Vilka värden elever enligt lärare ska få med sig från skolan. April 2008. ISBN: 978-91-7393-909-6.
- 250 COLNERUD, GUNNEL, KARLSSON, INGRID, SZKLARSKI, ANDRZEJ. Alltid redo. Lärarstudenters handlingsberedskap för varierande uppgifter i klassrummet. 2008. ISBN: 978-91-7393-784-9.
- 251 SZCZPANSKI, ANDERS. Handlingsburen kunskap Lärares uppfattningar om landskapet som lärandemiljö. 2008. (Licentiatavhandling) ISBN: 978-91-7393-889-1.
- 252 THORNBERG, ROBERT. Ett resursteams samverkan med skola, elever och föräldrar: förtjänster, hinder och utmaningar. 2009. ISBN 978-91-7393-599-9 (Finns bara i elektronisk version).

- 253 HAMMAR CHIRIAC, EVA. Släpp tankarna loss – det är nytt. Kvalitets-granskning av ett reformarbete. Ny speciallärarutbildning. 2009. ISBN: 978-91-7393-541-8
- 254 ERIKSSON-GUSTAVSSON, ANNA-LENA, HOLME, LOTTA. Att göra olika lika: Universitetslärares uppfattningar om och erfarenheter av undervisning av funktionshindrade studenter. 2009. ISBN: 978-91-7393-529-6
- 255 LÖNEBRINK, THOMAS. Processer i växelverkan: En grundad teoretisk modell om landstingskommunal samverkan för personer med psykiska funktionshinder. 2010 (Licentiatavhandling). ISBN: 978-91-7393-242-4
- 256 HARLIN, EVA-MARIE. Överraskning och Reflektion. Lärarstudenters lärande från egen videoinspelad undervisning. 2010 (Licentiatavhandling). ISBN: 978-91-7393-228-8
- 257 ERIKSSON-GUSTAVSSON, ANNA-LENA. ”Det är tufft att plugga... men jag tror att jag klarar det”: En studie om akademiska studier och skriftspråkliga svårigheter. 2011. ISBN: 978-91-7393-183-0
- 258 SAMUELSSON, JOAKIM. Den skicklige matematikläraren. 2013. ISBN: 978-91-7519-609-1
- 259 FREDRIKSSON MÅRTENSSON, ÅSA.Handledare och handledning: gymnasial yrkesutbildning på förskola. 2014 (Licentiatavhandling). ISBN: 978-91-7519-269-7
- 260 WALLIN, JESSICA. Entreprenörskap i skolan: Formulering och transformering av GY11 inom gymnasieskolans hantverksprogram. 2014 (Licentiatavhandling). ISBN: 978-91-7519-263-5
- 261 ALM, F, JUNGERT, T, THORNBERG, R: Nyantagna lärarstudenters motiv, motivation, självtillit och akademiska engagemang. 2014. ISBN: 978-91-7519-384-7 (finns bara i elektronisk version).
- 262 KEREKES, KLARA. Undervisning om växande geometriska mönster: En variationsteoretisk studie om hur lärare behandlar ett matematiskt innehåll på mellanstadiet. 2014. (Licentiatavhandling) ISBN: 978-91-7519-135-5
- 263 BERGSETH, BRITA. Vägledande eller vilseledande?: Kvalitetsmätning och ranking av universitet och

högskolor. 2015 (Licentiatavhandling). ISBN: 978-91-7685-937-7.

- 264 SVEIDER, CECILIA. Lärares och elevers användande av laborativt material i bråkundervisningen i skolår 4-6: Vad görs möjligt för eleverna att erfara. 2015 (Licentiatavhandling)
ISBN: 978-91-7685-827-1
- 265 AMINOFF, CHRISTINA. Samtals- och skriftspråksorienterade lärarledda aktiviteter i förskoleklass. (Licentiatavhandling)
ISBN: 978-91-7685-556-0

UTBILDNINGSVETENSKAP

Institutionen för beteendevetenskap
Linköpings Universitet
581 83 Linköping

www.liu.se