Representationer av tal i bråkform

En studie om matematikundervisning
på mellanstadiet

Cecilia Sveider

Representationer av tal i bråkform

En studie om matematikundervisning
på mellanstadiet

Cecilia Sveider

Linköping Studies in Behavioural Science No. 230
Utbildningsvetenskap
Linköping 2021

Distribueras av:
Institutionen för beteendevetenskap och lärande
Linköpings universitet
58183 Linköping

Cecilia Sveider
Representationer av tal i bråkform
En studie om matematikundervisning på mellanstadiet

Upplaga 1:1
ISBN 978-91-7929-607-0
ISSN 1654-2029

©Cecilia Sveider
Institutionen för beteendevetenskap och lärande, 2021

Detta verk är licensierat under en Creative Commons Erkännande-IckeKommersiell 4.0 Internationell Licens.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.sv>

Tryckeri: LiU-Tryck, Linköping 2021

Förord

Denna avhandling handlar om lärares undervisning om tal i bråkform på mellanstadiet samt vad eleverna ges möjlighet att erfara om tal i bråkform.

Tack vare kompetensutvecklingsmedel från PEDI har jag fått möjlighet att fördjupa mig i detta, vilket har varit oerhört lärorikt, utmanande och intressant.

Jag känner stor tacksamhet till alla som med kloka synpunkter och förbättringsförslag hjälpt mig i arbetet med denna avhandling. Arbetet har skett i två perioder. De som har varit mest involverade i hela processen från idé till färdigt arbete är mina handledare Joakim Samuelsson, Jonas Hallström och Angelica Kullberg. Era skarpa analyser och goda förmågor att se helheter har hjälpt mig att se mitt manus från nya infallsvinklar och perspektiv. Tack för att ni orkat läsa och kommentera alla utkast. Era synpunkter har varit ovärderliga!

Tack också till Lisa Björklund Boistrup som läst mitt manus inför framläggningen av licentiatuppsatsen och Eva Norén som opponerade på licentiatuppsatsen. Ett stort tack riktas också till Magnus Hultén som gav mig värdefulla råd vid slutseminariet och till läsgruppen, Robert Thornberg och Anja Thorsten, som i slutskedet läst manuset och kommit med värdefulla synpunkter för att förfina slutprodukten.

Jag vill även rikta ett varmt tack till Ulla-Britt Persson som har gjort ett gediget arbete med både språkgranskning och den engelska översättningen.

De har varit en stor utmaning att både arbeta med min avhandling och att arbeta som universitetsadjunkt. Tack vare mina kollegor vid PEDI, speciellt mina rumssgrannar Christina Aminoff, Anja Thorsten och Anna Lundberg för stöttning i stort och smått genom hela processen, Cecilia Björkhammer, Margareta Engvall, Magnus Jansson och Kristin Westerholm, för korrekturläsning och min familj har detta ändå varit möjligt. Tack för att ni på olika sätt bidragit till mitt arbete.

Linköping, juli 2021

Cecilia Sveider

1. INLEDNING.....	1
1.1 ELEVERS KUNSKAPER OM TAL I BRÅKFORM	4
1.2 UNDERVISNING OM TAL I BRÅKFORM.....	5
1.2.1 Representationer och matematikundervisning	5
Laborativt material	8
1.3 SYFTE, FRÅGESTÄLLNINGAR OCH DISPOSITION	16
1.3.1 Avhandlingens disposition.....	16
2. TIDIGARE FORSKNING	18
2.1 FORSKNING OM ELEVERS KUNSKAPER OM TAL I BRÅKFORM	18
2.1.1 Fem subgrupper av tal i bråkform	19
2.2 FORSKNING OM UNDERVISNING OM TAL I BRÅKFORM	27
2.2.1 Undervisning om bråk som del av helhet	27
2.2.2 Undervisning om bråk som del av antal	30
2.2.3 Undervisning om bråk som tal.....	32
2.3 ATT REPRESENTERA ETT MATEMATISKT INNEHÅLL	40
2.3.1 Att använda representationer	41
2.3.2 Svårigheter med att använda representationer	42
2.3.3 Sammankopplingar mellan representationer.....	45
2.3.4 Att representera tal i bråkform.....	47
2.4 SAMMANFATTNING	51
3. VARIATIONSTEORI	53
3.1 LÄRANDEOBJEKT	54
3.2 KRITISKA ASPEKTER.....	55
3.3 DIMENSIONER AV VARIATION OCH MÖNSTER AV VARIATION	55
3.4 SAMTIDIGHET	58
3.5 SAMMANFATTNING	58
4. METOD.....	60
4.1 VAL AV METOD	60
4.1.1 Urval.....	62
4.2 BEARBETNING AV DATAMATERIAL.....	68
4.2.1 Transkribering av datamaterialet	68
4.2.2 Analys av datamaterialet	70
4.3 FORSKNINGSETISKA ÖVERVÄGANDEN	77
5. RESULTAT – DELSTUDIE I.....	79

5.1 BRÅK SOM DEL AV HELHET	79
5.1.1 Dela in en helhet i lika stora delar	80
5.1.2 Benämna bråkdelarna i en helhet.....	84
5.1.3 Sammanfattning - Att undervisa om bråk som del av helhet	87
5.2 BRÅK SOM DEL AV ANTAL	89
5.2.1 Bestämma delen av ett antal	89
5.2.2 Urskilja samband mellan del, andel och ett antal	91
5.2.3 Sammanfattning - Att undervisa om bråk som del av antal	94
5.3 BRÅK SOM TAL	95
5.3.1 Urskilja samband mellan tal i bråk-, decimal- och procentform.....	96
5.3.2 Urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck	98
5.3.3 Förklara innebörden av delarna i ett tal i bråkform	101
5.3.4 Jämföra och storleksordna bråkuttryck	108
5.3.5 Beräkna bråkuttryck	112
5.3.6 Sammanfattning - Att undervisa om bråk som tal	114
5.4 RESULTATSAMMANFATTNING DELSTUDIE I.....	116
6. RESULTAT - DELSTUDIE II.....	118
LÄRARES ISCENSATTA VARIATION AV TAL I BRÅKFORM	118
LÄRARNAS REPRESENTATIONER AV TAL I BRÅKFORM.....	120
6.1 BRÅK SOM DEL AV HELHET	124
6.1.1 Uttrycka en hel som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare	124
6.1.2 Skriva ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren i blandad form..	135
6.2 BRÅK SOM DEL AV ANTAL	143
6.2.1 Urskilja skillnad mellan bråk som del av helhet och bråk som del av antal	144
6.2.2 Urskilja samband mellan del, andel och antal	147
6.3 BRÅK SOM TAL	153
6.3.1 Urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck	154
6.3.2 Jämföra bråkuttryck med olika nämnare	164
6.3.3 Förklara innebörden av delarna i ett tal i bråkform	168
6.3.4 Urskilja samband mellan bråk- och procentform.....	178
6.3.5 Beräkna bråkuttryck	181
6.4 RESULTATSAMMANFATTNING DELSTUDIE II	192
7. DISKUSSION	195
7.1 RESULTATDISKUSSION	195
7.1.1 Variera innehållsliga aspekter av tal i bråkform	196

7.1.2 Användningen av representationer	198
7.1.3 Användningen av ett eller flera exempel	203
7.1.4 Slutsatser, implikationer och förslag till vidare forskning	204
7.2 METODDISKUSSION	208
7.2.1 Studiens tillförlitlighet och äkthet	208
SUMMARY	211
REFERENSER.....	222
BILAGA 1	
BILAGA 2	
BILAGA 3	

1. Inledning

Det här är en avhandling om lärares undervisning om tal i bråkform på mellanstadiet. Den består av två delstudier. I delstudie I studeras hur lärare och elever använder laborativt material för att representera tal i bråkform. Delstudie II fokuserar på hur lärare använder olika representationer för att representera tal i bråkform och hur dessa kopplas samman. I båda delstudierna studeras vad eleverna ges möjlighet att erfara om tal i bråkform.

Undervisning kan beskrivas som samspelet mellan lärare, elev och ett ämnesinnehåll. Ett viktigt inslag i undervisningen är de representationer som lärare och elever använder sig av för att eleverna ska tillägna sig ett ämnesinnehåll (Uljen, 1997).

Samspelet mellan lärare, elev, ämnesinnehåll och representationer är inramat av en rad yttre faktorer, som inte är i fokus i denna avhandling, såsom elevernas hemmiljö, mängden undervisningstid och kursplaner. Kursplanen i matematik är följaktligen en yttre faktor som inte explicit studeras i denna avhandling men som ändå är värd att belysa då den ramar in ämnesinnehållet som studeras.

Syftet med matematikundervisningen är, enligt kursplanen för matematik, att bland annat ge eleverna goda baskunskaper i ämnet för att ge förutsättningar att fatta välgrundade beslut och därmed öka möjligheterna att aktivt delta i olika samhälleliga beslutsprocesser (Skolverket, 2019). För att möta detta syfte krävs det att eleverna utvecklar vissa förmågor, som exempelvis att formulera, lösa och reflektera över matematiska problem. Därutöver ska eleverna utveckla kunskap om grundläggande matematiska begrepp och metoder samt förtrogenhet med matematikens uttrycksformer¹. Elever i svenska grundskolan ska med andra ord ges förutsättningar att utveckla specifika förmågor i matematik. Skolmatematikens innehåll delas in i sex olika delområden: (a) taluppfattning och tals användning, (b) algebra, (c) geometri, (d) sannolikhet och statistik, (e) samband och förändring och (f) problemlösning. Undervisning om tal i bråkform ska enligt

¹ I kursplanen för matematik i grundskolan används begreppet uttrycksformer. Enligt Jönsson och Lingefjärd (2012) kan begreppet betraktas som en synonym till begreppet representationer. Det sistnämnda begreppet är det som används i denna avhandling.

kursplanen behandla ”rationella tal och deras egenskaper och tal i bråk- och decimalform och deras användning i vardagliga situationer” (Skolverket, 2019, s. 56). Här ska eleverna ges möjlighet att möta aspekter av tal i bråkform som handlar om bråk som del av helhet, bråk som del av antal, hur delar i ett bråkuttryck kan benämnas och uttryckas samt hur tal i bråkform förhåller sig till naturliga tal (se Skolverket, 2019). I kommentarmaterialet (Skolverket, 2017) betonas bland annat vikten av att eleverna förstår sambandet mellan tal i procent-, decimal- och bråkform samt att eleverna ges möjlighet att tillämpa matematiken i vardagen. Grunden för elevers kunskaper om tal i bråkform sker med andra ord redan i de lägre årskurserna och innefattas av många olika aspekter.

Samspelet mellan lärare, elev, ämnesinnehåll och användandet av representationer utgör alltså grunden för undervisningen och är en förutsättning för vad eleverna ges möjlighet att lära. Trots att detta samspel bildar en bas för elevernas möjliga lärande är detta relativt outforskat (Björkqvist, 2003; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2015). En förklaring är att samspelet mellan undervisning och elevers lärande är mycket komplext eftersom det finns flera olika faktorer som påverkar (se Hiebert & Grouws, 2007; Nuthall, 2004). Dessutom ökar komplexiteten när flera av dessa faktorer interagerar med varandra (Ellmin, 2011). Även om det finns många svårigheter och utmaningar med att studera samspelet mellan undervisning och elevers lärande är denna typ av forskning relevant eftersom att den adresserar frågor som är av intresse för skolpraktiken och kan bidra till att utveckla kunskaper som lärare kan ha användning av i sitt yrkesutövande (se Carlgren, 2017; SOU, 2016:38).

Matematikdidaktik är sedan 1970-talet en etablerad akademisk disciplin. Den övergripande avsikten är att främja och utveckla elevers och studenter lärande i matematik samt att ge dem möjlighet att tillägna sig matematisk kompetens (Niss, 2001). Vidare menar Niss (2001) att matematikdidaktiken har en dubbel natur vilket leder till beskrivande och förklarande frågeställningar som genererar frågorna ”Vad är fallet?” (beskrivande) och ”Varför är det på detta vis?” (förklarande). Även om frågeställningarna ska vara så objektiva och neutrala som möjligt är frågor som rör matematikundervisningen, uttalade eller outtalade, både värderande och normativa. Därför menar Niss (2001) att frågeställningar

som rör matematikdidaktiken också inkluderar frågor som ”Vad bör vara fallet? och ”Varför då?”

Niss (2001) pekar ut två huvudområden som inryms i den matematikdidaktiska forskningen. Det handlar om (a) vad som sker i den faktiska matematikundervisningen och (b) elevers lärande i matematik. I denna avhandling studeras hur lärare och elever representerar det matematiska innehållet *tal i bråkform* samt vad eleverna ges möjlighet att lära om tal i bråkform. Det innebär att avhandlingen kan placeras in i det förstnämnda huvudområdet, forskning om matematikundervisning.

Forskning inom matematikdidaktik belyser följaktligen frågor om matematikundervisning och elevers lärande i matematik (se Clements m.fl., 2013; Helenius m.fl., 2018), två områden som av flera forskare (exempelvis Björkqvist, 2003; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2015; Kyriakides m.fl., 2013; Runesson, 1999; Sahlström, 1999; Strässer, 2005) pekats ut som relativt utforskade. Detta gäller särskilt studier som behandlar undervisning i matematik med ett (matematiskt) innehållsligt fokus som hämtar empiri ifrån autentiska miljöer. En genomgång av Häggström (2008) över 1200 artiklar² (skandinaviska eller engelskspråkiga) visar att endast 179, det vill säga cirka 15 %, av de granskade artiklarna beskrev autentiska klassrumsmiljöer. Bland dessa dominerar studier som gäller ett klassrum. Studier som inkluderar två eller flera klassrum är däremot mer sällsynta (Häggström, 2008) även om det under senare år har tillkommit en del autentiska klassrumsstudier (exempelvis Ekdahl, 2019; Mannula, 2018) som studerat undervisning från flera klassrum. Med autentiska klassrumsmiljöer avses här studier där data samlats in i ett klassrum, till skillnad från exempelvis enkäter och intervjuer där indirekta datainsamlingsmetoder används som underlag för att kunna beskriva vad som händer i ett klassrum (se Emanuelsson m.fl., 2011). Föreliggande avhandling handlar om hur lärare och elever i en autentisk klassrumsmiljö representerar det matematiska innehållet tal i bråkform och vilket lärande som möjliggörs.

² Tidskrifter som inkluderades i Häggström (2008) sökning var: Educational Studies on Mathematics, ESM, For the Learning of Mathematics, FLM, Journal for Research in Mathematics, JREME, Mathematical Thinking and Learning, MTL, Mathematics Education Research Journal, MERJ, Nordic Studies in Mathematics Education, Nomad, The Journal of Mathematical Behavior, JMB och Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, ZDM. Artiklarna var publicerade mellan år 1993–2006.

1.1 Elevers kunskaper om tal i bråkform

Tidigare studier har uppmärksammat att tal i bråkform ofta är komplicerat och utmanande att lära för elever (exempelvis Barbieri m.fl., 2020; Hecht m.fl., 2003; Vukovic m.fl., 2014). Komplexiteten beror bland annat på att tal i bråkform består av flera delar (Kieren, 1980; Schoenfeld, 2007), som till exempel bråk som del av helhet ($\frac{1}{4}$ av ett objekt), bråk som del av antal ($\frac{1}{4}$ av en mängd), bråk som tal ($\frac{1}{4}$ på en tallinje), som en division (1 dividerat med 4), ekvivalenta bråk ($\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$), storleksordna bråk (vilket av bråkuttrycken $\frac{1}{4}$ eller $\frac{1}{5}$ är störst) och sambandet mellan bråk,- procent- och decimalform ($\frac{1}{4} = 25 \% = 0,25$). En ytterligare utmaning är att eleverna behöver ha förståelse för sambandet mellan dessa delar (se Schoenfeld, 2007).

Elevers bristande förståelse för tal i bråkform avspeglas dessutom i olika kunskapsmätningar, såsom TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) och PISA (Programme for International Student Assessment). Beträffande svenska elevers procedurförmåga gällande bråk visar resultatet från TIMSS 2007 bland annat att knappt en tredjedel av eleverna i år 4 valde det korrekta svarsalternativet $\frac{3}{5}$ till uppgiften $\frac{4}{5} - \frac{1}{5}$. Nästan en fjärdedel av eleverna ansåg att det korrekta svaret på uppgiften var 3. En förklaring till den typen av missuppfattning är att eleverna även subtraherar nämnaren (Skolverket, 2008).

Svårigheter med att förstå och hantera tal i bråkform kvarstår ofta under hela skolgången upp till gymnasiet (Calhoon m.fl., 2007; Siegler m.fl., 2012; Wang & Siegler, 2013). Exempelvis har det visats att elevers förståelse av tal i bråkform och division vid 10 års ålder har samband med elevers prestation i matematik vid 16 års ålder (Siegler m.fl., 2012). Elevers kunskaper om tal i bråkform kan vara en avgörande faktor för kunskaper inom andra områden inom matematik, exempelvis algebra (Booth m.fl., 2014; Resnick m.fl., 2016; Siegler m.fl., 2012). Det är därför viktigt att i de tidigare skolorn ge eleverna goda förutsättningar att förstå tal i bråkform (Braithwaite m.fl., 2018).

Ett flertal studier har på så sätt bidragit med kunskap om elevers förståelse av tal i bråkform och framhåller att elevers bristande förståelse i detta avseende kvarstår under elevernas skolgång samt att elevernas kunskaper om tal i bråkform kan komma att påverka andra områden i matematik. Däremot är forskning som fokuserat på hur lärare

undervisar om tal i bråkform begränsad (Lee m.fl., 2011; Mills, 2016), vilket gör att studier vars frågor handlar om detta är motiverade, eftersom de ytterligare kan bidra med kunskap om undervisning om tal i bråkform.

1.2 Undervisning om tal i bråkform

Tidigare studier om undervisning om tal i bråkform har främst fokuserat på hur lärare beskriver att de använder representationer i sin undervisning om tal i bråkform (Izsák m.fl., 2008; Lee m.fl., 2011) eller hur lärare kopplar samman representationer med varandra (Kersting m.fl., 2012). Därtill finns det forskning som studerat elevers Lösningstrategier (Mills, 2016; Zhang m.fl., 2015). Endast ett fåtal studier uppmärksammar vilka undervisningsstrategier lärarna använder (McCloskey m.fl., 2017). Gemensamt för forskning som fokuserat på antingen elevernas Lösningstrategier eller lärarnas undervisningsstrategier handlar till stor del om vilken typ av strategier som används med avseende på om strategierna är informella eller formella.

De ovan nämnda studierna har utifrån olika forskningsfrågor och metoder studerat undervisning om tal i bråkform och bidrar således med kunskap om sådan undervisning. Den här avhandlingen kan ytterligare bidra med kunskap om undervisning om tal i bråkform då den till skillnad från de ovan nämnda studierna, med hjälp av variationsteoretiska principer, tar sin utgångspunkt i hur ett matematiskt innehåll behandlas och vad eleverna ges möjlighet att lära om tal i bråkform. Motivet till att använda variationsteorin för att analysera undervisning grundar sig i att fokus kan riktas mot hur ett matematiskt innehåll, det vill säga ett lärandeobjekt, behandlas i undervisningen samt vad som görs möjligt för elever att lära, vilket visats i tidigare studier (Guo m.fl., 2012; Kullberg & Runesson, 2013; Sun, 2015). Förutom att det blir möjligt att fokusera på hur ett specifikt ämnesinnehåll behandlas kan variationsteorin också vara ett användbart redskap i syfte att överbrygga det gap som finns mellan forskning och skolpraktik som efterfrågas av exempelvis Nuthall (2004).

1.2.1 Representationer och matematikundervisning

Flera forskare framhåller att lärares användande av representationer, så som vardagshändelser, laborativt material, bilder, muntligt och skriftligt

språk, är särskilt fördelaktigt vid undervisning om tal i bråkform (Cathcart m.fl., 2006; Fazio m.fl., 2016; Lamon, 2001; Rau & Matthews, 2017; Siegler m.fl., 2010). Det finns endast ett fåtal studier (exempelvis Polly, 2015) som har observerat lärares användande av representationer i matematikundervisningen.

Som tidigare nämnts består denna avhandling av två delstudier där fokus i delstudierna riktas mot lärares och elevers användning av representationer av tal i bråkform och vad eleverna ges möjlighet att erfara. I delstudie I handlar det om hur lärare och elever använder laborativt material för att representera tal i bråkform och vad eleverna därmed ges möjlighet att erfara. I delstudie II handlar det om hur lärare använder och kopplar samman olika representationer för att representera tal i bråkform och vad eleverna på detta sätt ges möjlighet att erfara om tal i bråkform.

Förutom att använda flera olika representationer är det av betydelse att eleverna ges möjlighet att förstå relationen mellan dessa representationer, det vill säga på vilket sätt representationerna kan kopplas samman (Lesh m.fl., 1987; Lesser & Tchoshanov, 2005). Forskarna menar att växlingen och sammankopplingen mellan representationer hjälper elever att lättare skapa förståelse och se samband mellan matematiska begrepp. Detta innebär att eleverna i matematikundervisningen behöver få många tillfällen att möta hur tal i bråkform representeras, exempelvis genom att rita olika bilder som representerar tal i bråkform, dela upp objekt i lika stora delar, namnge bråkuttryck och placera bråkuttryck på en tallinje (Way, 2011). Genom lärares användande av representationer ges eleverna möjlighet att få tillgång till de matematiska begreppen (Kilpatrick m.fl., 2001). Ordet representation kommer av det latinska ordet *repraesentatio* och betyder åskådliggörande framställning eller exempel av något, *repraesentatio*, att återge något. En viktig egenskap hos en representation är att den gör det representerade indirekt närvarande för användaren (Nationalencyklopedin, 2019). Ett matematiskt begrepp kan således indirekt vara närvarande via en representation. Exempelvis står symbolen 12, se Figur 1, för det matematiska begreppet 12, som blir indirekt närvarande och tillgängligt via olika representationer.

Figur 1

Sex olika representationer för det matematiska begreppet "12" (Ryan m.fl., 2015, s. 2)

En representation kan således ses som en återgivning eller framställning av ett begrepp, det vill säga att vi gör en *presentation* av begreppet i fråga. Men ordledet re- i ordet representation indikerar också att det kan vara en *återpresentation*, en alternativ presentation av något som redan presenterats (Ryan m.fl., 2015; Vergnaud, 1998).

Det finns flera beskrivningar och indelningar av vad som är en representation. Exempelvis skiljer Cai (2005) på yttre och inre representationer, där de inre representationerna relaterar till elevers mentala tankar och resonemang kring det matematiska begreppet eller innehållet. Yttre representationer är exempelvis bilder, ord, symboler eller konkreta föremål. Cais' (2005) beskrivning av de yttre representationerna kan likställas med hur Duval (2006), Goldin och Shteingold (2001), Kilpatrick m.fl. (2001) och Lesh (1981) beskriver representationer. Denna avhandling behandlar enbart de yttre representationerna och utgår ifrån Leshs (1981) definition. Han utgår från fem olika typer av representationer. Dessa är (a) vardagssituationer, det vill säga konkreta händelser, exempelvis $\frac{3}{4}$ dl mjöl i ett recept, (b) laborativt material, exempelvis bråkcirklar³ som visar $\frac{3}{4}$, (c) bilder som är statistiska, till exempel en bild av en rektangel där $\frac{3}{4}$ är markerat, (d) skrivna symboler, så som uttrycket $\frac{3}{4}$ samt (e) talat språk exempelvis någon säger tre fjärdedelar.

³ I föreliggande avhandling används begreppet bråkcirkel synonymt med begreppet cirkel

I delstudie II studeras hur lärare använder olika representationer när de undervisar om tal i bråkform. Dessutom studeras hur lärarna kopplar ihop representationerna med varandra. Använder de exempelvis gester, icke verbala handlingar, eller använder de verbala handlingar eller är det en kombination av båda? Därtill studeras hur lärarna visar representationerna för eleverna. Visas de samtidigt, det vill säga synkront, eller visas de en i taget, alltså diakront?

Laborativt material

I delstudie I fokuseras hur lärare och elever använder laborativt material för att representera tal i bråkform. En återkommande definition av laborativt material är att det ska vara något som representerar ett matematiskt begrepp. Materialet ska både vara visuellt och taktilt och ska kunna manipuleras, det vill säga materialet ska gå att vridas och vändas (Carbonneau m.fl., 2013; Moyer, 2001). Utifrån denna definition är laborativt material endast konkreta, fysiska föremål som går att ta på. Andra forskare, som Kelly (2006), Sowell (1989) och Van de Walle m.fl. (2018), vidgar definitionen och räknar också tryckta bilder på föremål (som ska gå att manipulera) till laborativt material. Utifrån dessa resonemang kan ett laborativt material utgöras av antingen fysiska föremål (bönor) eller tryckta bilder av olika föremål (bild på bönor). Den definition av laborativt material som används i denna avhandling bygger på Kellys (2006), Sowells (1989) och Van de Walles m.fl. (2018) utvidgade definition av laborativt material. Det innebär att ett laborativt material betraktas som antingen ett fysiskt eller bildligt objekt som går att manipulera. Om bilden inte går att manipulera, exempelvis om en bild ritas upp på tavlan, definieras detta i den här avhandlingen som en bildlig representation.

Det finns flera argument för att använda laborativt material i matematikundervisningen. Ett argument är att användningen bland annat visat sig gynnsamt för att utveckla elevers olika förmågor i matematik. Exempelvis visade Gabriel m.fl. (2012) att eleverna utvecklade sin begreppsliga förståelse för tal i bråkform med avseende på att uppskatta, jämföra och storleksordna bråk. Likaså visade Martin och Schwartz (2005) att när eleverna använde laborativt material utvecklades deras begreppsliga förståelse med avseende på bråk som del av antal, exempelvis ”Hur mycket är $\frac{1}{4}$ av 8?

Ett andra argument är att användningen av laborativt material kan hjälpa eleverna att bättre förstå sambanden mellan matematiken och hur matematiken kan användas i en vardaglig kontext (Pedrotti & Chamberlain, 1995). I studien visades att när eleverna använde laborativt material kunde matematikens värde tydligare synliggöras.

Ett tredje argument för att använda laborativt material är att det kan öka elevernas motivation för och engagemang i matematikämnet (Noreen & Rana, 2019; Swan & Marshall, 2010). Även om det finns argument för användandet av laborativt material finns det andra studier (exempelvis Beishuizens, 1993; McNeil m.fl., 2009; Nishida 2008) som visar att det laborativa materialet har en begränsad effekt på elevernas lärande. Ett exempel på en studie som visar att laborativt material har en begränsad effekt på elevernas lärande är Beishuizens (1993) studie. Materialet som i studien bestod av hundrarutor och multibasmaterial hjälpte inte eleverna att utveckla någon begreppslig förmåga gällande additions- och subtraktionsberäkningar. Likaså visar Nishida (2008) i sin studie om bråkundervisning att eleverna som undervisats om tal i bråkform utan laborativt material presterade på samma nivå som de elever som hade undervisats med hjälp av laborativt material.

En förklaring till de avvikande resultaten kan bero på vilket material som används för att representera det matematiska innehållet. Laborativt material kan delas upp i två olika huvudkategorier: (a) vardagliga material såsom föremål som går att finna i vardagen eller naturen och (b) pedagogiska material som är specialtillverkade i syfte att användas i matematikundervisningen (Szendrei, 1996). Förutom att dela in laborativt material i grupperna vardagligt respektive pedagogiskt material, kan en ytterligare gruppering göras. Denna uppdelning handlar om graden av hur perceptuellt rikt ett material är, från ett enkelt till ett rikt material (Carbonneau m.fl., 2013; Kaminski m.fl., 2008). Laborativa material såsom Cuisenairestavar⁴ och geobräden⁵ är exempel på material som hör till gruppen *enkla material* (bland manipulatives) (Goldstone & Sakamoto, 2003; Petersen & McNeil, 2013), medan låtsaspengar eller färgglada pärlor ingår i gruppen *perceptuellt rika material* (perceptually rich manipulatives) (McNeil m.fl., 2009).

⁴ Cuisenairestav= stavar, oftast i trä, av varierande längd och färg. Den längsta ca 10 cm lång.

⁵ Geobräde= en platta med ett regelbundet kvadratisk mönster av spikar. Mellan spikarna fästes gummisnoddar för att markera ett område.

Det finns flera teorier (se Kaminski m.fl., 2008; Petersen & Mc Neil, 2013; Uttal m.fl., 1997) om varför och hur ett laborativt material kan påverka elevers lärande. Den förstnämnda gruppen, enkla laborativa material, utmärks av att materialet har begränsade kännetecken med avseende på exempelvis avsaknad av färg och verklighetstroget utseende. Därmed blir materialet i sig självt inte särskilt intressant och eleverna ges möjligheter att fokusera på vad materialet är tänkt att representera. Den andra gruppen, perceptuellt rika laborativa material, karakteriseras av att ha många olika kännetecken, exempelvis färg och verklighetstroget material. Dessa kännetecken kan avleda elevernas uppmärksamhet genom att materialet i sig konkurrerar med den matematiska idén materialet är avsett att representera.

Resultaten från flera studier (exempelvis Carbonneau m.fl., 2013; Kaminski m.fl., 2008; McNeil m.fl., 2009), som jämfört elevers användande av enkla respektive rika laborativa material, indikerar att elevers lärande främjas när de använder enkla laborativa material. Resultaten är dock inte entydiga då Carbonneau m.fl. (2013) inte klart kunde visa att elevernas lärande hindrades när de använde rika laborativa material.

En annan tänkbar förklaring till de otydliga resultaten är att det inte är det laborativa materialet per se som avgör om elevernas kunskaper utvecklas utan det är användandet av materialet som är avgörande (Sarama & Clements, 2016).

Andra förklaringar pekar mot att det är lärares instruktioner till hur elever ska använda det laborativa materialet som kan komma att avgöra om elevers lärande utvecklas (Liggett, 2017). Exempelvis menar Liggett (2017) att en felaktig eller ofullständig instruktion kan resultera i att eleverna blir frustrerade. I det följande avsnittet beskrivs mer utförligt hur användandet av laborativa material kan ske.

Att undervisa med hjälp av representationer

För att analysera hur lärare och elever använder representationer i undervisningen om tal i bråkform samt hur representationerna kopplas samman med varandra har inspiration hämtats ifrån två modeller. För att analysera lärares och elevers användande av laborativt material (delstudie I) har analysen inspirerats av CRA-modellen (Flores m.fl., 2018; Leong m.fl., 2015). För att analysera lärares användande av

representationer samt hur dessa kopplas samman (delstudie II) har analysen inspirerats av Leshs (1981) modell.

CRA-modellen, se Figur 2, är en modell där lärare och eller elever arbetar i tre faser, från konkreta (C), till representativa, bildliga, (R) till abstrakta (A). CRA-modellen bygger på Bruners (1966) idé om att lärandet sker enligt tre distinkt skilda representationer: (a) handling, (b) visuella bilder och (c) ord och språk.

Figur 2

CRA-modellen

CRA-modellen är linjär och strukturerad. Undervisningen börjar i den konkreta fasen där läraren eller eleverna med hjälp av laborativt material demonstrerar ett matematiskt innehåll, ett begrepp eller en metod. Därefter införs den representativa fasen genom att bilder används för att representera det matematiska innehållet. Slutligen, i den abstrakta fasen representeras det matematiska innehållet enbart av skriftliga, numeriska, symboler utan laborativt eller representativt material (Flores m.fl., 2018; Leong m.fl., 2015). Tidigare studier (exempelvis Fyfe m.fl., 2014) har visat att matematikundervisning utifrån CRA-modellen är framgångsrik och gynnar elevernas möjligheter till lärande. Användandet av CRA-modellen ger eleverna möjlighet att “interpret ambiguous abstract representations in terms of well understood concrete objects” (Fyfe m.fl., 2014, s. 12). Detta gäller särskilt undervisning om tal i bråkform (Butler m.fl., 2003; Fuchs m.fl., 2007). En närmare granskning av forskningslitteraturen tyder på att frågan om sekvenseringen enligt CRA-modellen är en öppen fråga (Belenky & Schalk, 2014). Exempelvis hävdar Kaminski m.fl. (2013) och McNeil m.fl. (2009) motsatsen och förordar istället att undervisningen bör ta sin utgångspunkt i den abstrakta fasen istället för i den konkreta. De abstrakta representationerna liknar inte sina referenter som de menar kan distrahera eleverna. Att använda den abstrakta fasen först kan minska

den kognitiva belastningen och göra det möjligt för eleverna att fokusera på viktiga aspekter av innehållet, och därefter kan läraren introducera den konkreta fasen. Med avseende på hur lärare och elever använder laborativt material beskrivs i denna avhandling användandet av laborativt material med hjälp av begreppen *laborativt* eller *konkretiserande arbetssätt* (jfr. Trygg, 2014).

Det laborativa arbetssättet kännetecknas av ett undersökande och utforskande arbetssätt som tar sin utgångspunkt i de konkreta representationerna, via den representativa, bildliga fasen, i riktning mot den abstrakta fasen. Ibland används alla de olika faserna, ibland endast vissa. Det laborativa arbetssättet följer CRA-modellens linjära struktur. Exempelvis kan elever laborera med klossar för att undersöka vilka bråkuttryck som är likvärdiga med bråkuttrycket $\frac{1}{3}$. Eleverna får initialt pröva och undersöka olika alternativ. Därefter kan de likvärdiga bråkuttrycken ritas med hjälp av bilder på bråkuttrycken, det vill säga den representativa fasen används. Och slutligen visas detta med hjälp av skriftliga, matematiska symboler, den abstrakta fasen, se Figur 3.

Figur 3

Laborativt arbetssätt

1, den konkreta fasen

2, den representativa fasen

3, den abstrakta fasen

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$$

Ett konkretiserande arbetssätt innebär att göra någonting synbart eller att skapa en synbar förklaring, det vill säga att ett abstrakt matematiskt innehåll, ett begrepp eller en metod demonstreras, förtydligas och åskådliggörs med hjälp av ett laborativt material (Karlsson & Kilborn, 2015; Löwing, 2004). Därefter arrangeras undervisningen så att det matematiska innehållet konkretiseras med hjälp av bilder och laborativt material, det vill säga den representativa respektive den konkreta fasen i CRA-modellen. Riktningen av det konkretiserande arbetssättet går således ifrån den abstrakta fasen och rör sig i riktning mot den konkretiserande fasen, det vill säga i motsatt riktning jämfört med det laborerande arbetssättet.

Den andra modellen som används som inspiration för analysen av delstudie II är Leshs (1981) modell över transformationer⁶, det vill säga kopplingar eller växlingar mellan olika representationer, se Figur 4. Med hjälp av modellen blir det möjligt att analysera vilka representationer lärare använder i undervisningen om tal i bråkform samt hur lärare kopplar samman representationerna.

⁶ Sammankopplingar mellan representationer beskrivs närmare i kapitel 2.3 Att representera ett matematiskt innehåll.

Figur 4

Representationer och kopplingar mellan dem (med inspiration från Lesh, 1981, s. 246)

Forskningen om hur lärare i sin undervisning om tal i bråkform kopplar samman representationer är begränsad. Den forskning som förekommer består till största delen av kvantitativa studier och fokuserar på elevers sammankopplingar (exempelvis Behr m.fl., 1983; Martin & Schwartz, 2005). Denna forskning bidrar med kunskap om användandet av och sammankopplingar mellan representationer på en övergripande nivå, men ger begränsad kunskap på en detaljerad nivå om hur elevers användande av representationer i undervisningen om tal i bråkform sker. Att studera hur lärare använder representationer i sin undervisning är något som Thompson och Saldanha (2003) menar är en viktig del i att förstå elevers lärande av tal i bråkform. Tidigare forskning om användandet av representationer har fokuserat på hur eleverna använder dessa och hur det kan komma att påverka deras lärande. Den tidigare forskningen har således främst riktat fokus mot elevers användande. Det behövs därför forskning som också riktar fokus mot hur lärare använder representationer.

I denna avhandling (delstudie I) studeras, förutom hur eleverna använder laborativt material, även hur lärarna använder dessa. Användandet analyseras, med inspiration från CRA-modellen, utifrån ett laborerande eller konkretiserande arbetssätt. Dessutom studeras, i delstudie II, med utgångspunkt ifrån Leshs (1981) modell och definition av representationer, vilka representationer lärarna använder samt hur lärarna kopplar samman dem med varandra. Lärarnas sammankopplingar studeras genom att analysera om representationerna visas samtidigt, det vill säga synkront, eller om de visas en i taget, alltså diakront. På så sätt kan avhandlingen bidra med ytterligare kunskap om användandet av representationer och vad eleverna därigenom ges förutsättningar att lära om tal i bråkform.

1.3 Syfte, frågeställningar och disposition

Avhandlingens syfte är att skapa förståelse för lärares undervisning om tal i bråkform. De specifika forskningsfrågorna som undersökts i denna avhandling är följande:

1. Hur används olika typer av representationer i undervisning om tal i bråkform?
2. Vad görs möjligt för eleverna att erfara om tal i bråkform?

Frågeställningarna besvaras i delstudie I genom att studera vilka arbetssätt, laborerande eller konkretiserande, som används i undervisningen när lärare eller elever använder laborativt material för att representera tal i bråkform och vad eleverna ges möjlighet att erfara om tal i bråkform.

I delstudie II besvaras frågeställningarna genom att studera vilka olika typer av representationer, i form av vardagshändelser, laborativt material, bilder, muntligt och skriftligt språk, som lärare använder i undervisningen om tal i bråkform samt vilka exempel som lärarna använder. Dessutom studeras på vilka sätt lärare kopplar samman representationerna. Lärares sammankopplingar studeras genom att analysera om representationerna visas samtidigt, det vill säga synkront, eller om de visas en i taget, alltså diakront. I delstudie II studeras också vad eleverna ges möjlighet att erfara om tal i bråkform genom lärares användande och sammankopplingar av representationer.

1.3.1 Avhandlingens disposition

Avhandlingens övergripande struktur är enligt följande. I kapitel 1 gavs en inledande beskrivning och bakgrund till denna avhandling. I kapitlet presenterades även avhandlingens syfte och frågeställningar. I det följande kapitlet, kapitel 2, beskrivs tidigare forskning om elevers kunskaper om tal i bråkform och undervisning om tal i bråkform. I kapitlet ges dessutom en fördjupad bild över forskning om användning av representationer. I kapitel 3 presenteras avhandlingens teoretiska ramverk i form av en beskrivning av variationsteorin. Därpå följer, i kapitel 4, en beskrivning av de metodologiska överväganden som ligger till grund för avhandlingens empiriska delar. I kapitel 5 och 6

presenteras avhandlingens resultat. I kapitel 5 redovisas först resultat av delstudie I. Till grund för delstudie I ligger licentiatuppsatsen (Sveider, 2016). I kapitlet beskrivs lärares och elevers användande av laborativt material för att representera tal i bråkform. I kapitel 6 presenteras resultatet av delstudie II. Här presenteras lärares användande av olika representationer när de representerar tal i bråkform. Avslutningsvis diskuteras i kapitel 7 avhandlingens kunskapsbidrag följt av didaktiska implikationer.

2. Tidigare forskning

I kapitlet presenteras forskning, som är av intresse för avhandlingen. Inledningsvis presenteras forskning om elevers kunskaper om tal i bråkform. Därefter presenteras forskning om undervisning om tal i bråkform. Kapitlet avslutas med att beskriva forskning om användningen av representationer.

2.1 Forskning om elevers kunskaper om tal i bråkform

Av avhandlingens syfte framgår ett intresse för vad som blir möjligt för elever att lära om tal i bråkform när lärare och elever använder olika representationer. I det följande presenteras tidigare forskning om elevers kunskaper om tal i bråkform.

Det finns flera orsaker till att elever kan ha svårt att förstå tal i bråkform. En sådan orsak handlar om hur tal i bråkform ska tolkas. Tal i bråkform uttrycks av formen $\frac{a}{b}$, där a och b tillhör heltalen. Många elever har ofta flera års erfarenhet av heltal innan de får undervisning om tal i bråkform varför det finns en risk att dessa erfarenheter tar överhand när de tolkar tal i bråkform. Elevernas tidigare erfarenheter av heltal som självständiga tal kan komma att överskugga förståelsen att tal i bråkform ska förstås som ett förhållande mellan talen "a" och "b" (DeWolf & Vosniadou, 2015; Siegler & Lortie-Forgues, 2017). Detta benämns som the *whole number bias* (Ni & Zhou, 2005; Siegler m.fl., 2011) och kan till exempel innebära att elever uppfattar bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ som större än bråkuttrycket $\frac{1}{3}$ eftersom 4 är större än 3. För eleverna kan det på så sätt uppstå en konflikt mellan tidigare kunskaper om heltal och kunskaper om tal i bråkform. Att eleverna inte uppfattar tal i bråkform som ett förhållande mellan två heltal kan påverka deras uppfattning om att ett bråkuttryck kan uttryckas på olika sätt, exempelvis $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ och $\frac{4}{8}$, utan att värdet av talet förändras (Barbieri m.fl., 2020; Lortie-Forgues m.fl., 2015; Siegler & Lortie-Forgues, 2017).

Ytterligare orsaker till att elever kan ha svårt att förstå tal i bråkform, och som tidigare nämnts, är att tal i bråkform har en mångfacetterad betydelse, såsom likadelning, skala, förhållande, andel och proportion

(Cramer m.fl., 2002; Kilpatrick m.fl., 2001; McMullen m.fl., 2015; Resnick m.fl., 2016). Elevers kunskaper om tal i bråkform kan således delas in i olika aspekter, så kallade subgrupper (Kieren, 1980, 1993, se även Behr m.fl., 1983; Hackenberg, 2010; Kilpatrick m.fl., 2001). Enligt Kieren (1980) behöver elever ha kunskap om dels var och en av subgrupperna av tal i bråkform, dels hur subgrupperna är relaterade till varandra. I avhandlingen riktas särskilt intresset mot undervisning om bråk som del av helhet, bråk som del av antal och bråk som tal. I det följande stycket presenteras tidigare forskning om elevers kunskaper om tal i bråkform kopplat till respektive subgrupp och som är av relevans för denna avhandling.

2.1.1 Fem subgrupper av tal i bråkform

Kieren (1980) har, baserat på olika användningsområden för tal i bråkform, delat in tal i bråkform i fem subgrupper. De fem subgrupperna är: (a) del-helhet, (b) förhållande, (c) operator, (d) resultatet av en division och (e) mätning där subgruppen del-helhet har en överordnad roll (Kieren, 1980). Utifrån denna indelning kan bråkuttrycket $\frac{3}{4}$ tolkas som tre av fyra lika stora delar (bråk som del av helhet), tre av fyra delar (bråk som förhållande), tre fjärdedelar av en mängd (operator), tre dividerat med fyra (bråk som resultatet av en division) och slutligen som en punkt på en tallinje (mätning) (jfr. Pantziara & Philippou, 2012).

Del – helhet

Elever har överlag lättare att korrekt lösa uppgifter som handlar om bråk som del av helhet än övriga tal i bråkform tillhörande andra subgrupper (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Hannula, 2003; Ni, 2001). Charalambous och Pitta-Pantazi (2007) menar att en förklaring till detta är att subgruppen bråk som del av helhet är något som eleverna har fått mer undervisning om än övriga subgrupper. Liknande argument återfinns hos Pantziara och Philippou (2012) som menar att undervisningen om tal i bråkform domineras av bråk som del av helhet medan uppgifter som rör bråk som representation av mätning förekommer i mindre utsträckning. En annan förklaring är att eleverna har större svårigheter att förstå andra subgrupper av tal i bråkform.

Elevers kunskaper om tal i bråkform som tillhör subgruppen del-helhet handlar om att kunna (a) dela upp antingen en *kontinuerlig*

mängd, exempelvis längd-, area- och volymmodeller, i lika stora delar och (b) dela upp en *diskret mängd* av objekt i lika stora delmängder (Hecht m.fl., 2003). Exempel på uppgifter som prövar elevers kunskaper om kontinuerlig mängd är: Vilken av följande figurer visar bråkuttrycket $\frac{2}{3}$? (bearbetad efter Charlambous & Pitta- Pantazi, 2007, s. 312).

Exempel på uppgifter som prövar elevers kunskaper om diskret mängd är: Det här är $\frac{3}{5}$ av en mängd pärlor . Rita den totala mängden pärlor (Baturu, 2004). Det finns både likheter och skillnader i hur en modell av en kontinuerlig mängd och en diskret mängd uppfattas (Behr m.fl., 1983). Likheterna menar Behr m.fl. (1983) ligger i att kunskap om både en kontinuerlig mängd och en diskret mängd kräver att eleverna kan identifiera en helhet och att de kan dela in helheten i lika stora delar. Skillnaden som Behr m.fl. (1983) beskriver ligger i elevernas uppfattning av helheten. För att uppfatta en kontinuerlig mängd krävs det att kunna se en helhet som en sammanhängande mängd. För att uppfatta en diskret mängd krävs det att eleverna kan se en uppsättning med enskilda objekt som en helhet. De kontinuerliga, sammanhängande, mängderna är enklare för elever att uppfatta. En ytterligare skillnad ligger i hur de två modellerna representeras. För en kontinuerlig mängd är det viktigt att delarna ser likadana ut och har samma form och att delarna är lika stora, eftersom det är det centrala i lösningen av uppgifter med kontinuerliga mängder. För modeller av diskreta modeller saknar detta betydelse. Inom de diskreta mängderna är det i stället antalet objekt i varje grupp som är det väsentliga, delarna behöver inte alls ha samma storlek eller form. Det kan därför vara fördelaktigt att representera diskreta mängder med objekt av skild storlek och form, eftersom det kräver en annan tolkning av eleverna än vad som krävs om alla objekt ser likadana ut. Liknande argumentation som presenteras av Behr m.fl. (1983) finns hos Lamon (2005). Hon argumenterar för att en av anledningarna till elevers

svårigheter med tal i bråkform är att de har svårt att förstå att tal i bråkform kan ses som både en kontinuerlig mängd och som en diskret mängd. De flesta elever uppfattar enbart tal i bråkform som en kontinuerlig mängd.

Även om eleverna i högre grad lättare löser uppgifter som tillhör subgruppen del av helhet än uppgifter inom andra subgrupper, visar exempelvis Charalambous och Pitta-Pantazis (2007) studie att eleverna ändå hade en del uppfattningar inom bråk som del av helhet som inte var helt korrekta. En sådan uppfattning handlar om att eleverna inte i tillräckligt stor grad tar hänsyn till att delarna i en kontinuerlig mängd måste vara lika stora (se även Aliustaoğlu m.fl., 2018; Hodnik m.fl., 2018). Hodniks m.fl. (2018) studie visade exempelvis att när eleverna i skolår 5 skulle markera en fjärdedel i sju olika figurer markerade de endast en fjärdedel i de figurer där delarna såg likadana ut (se kvadrat a och cirkel g i Figur 5). Detta innebär att eleverna inte såg att även rektangel f var indelad i fjärdedelar.

Figur 5

Elevers uppfattningar om vad en fjärdedel är (bearbetad efter Hodnik m.fl., 2018, s. 343)

Att enbart förstå bråk som del av helhet är inte tillräckligt för att ha kunskaper om tal i bråkform, men ska ses som en nödvändig del för att förstå de övriga subgrupperna av tal i bråkform (Kilpatrick m.fl., 2001).

Bråk som beskriver förhållande

Elevers kunskaper om tal i bråkform inkluderar att kunna se ett bråkuttryck som ett förhållande mellan två olika enheter, exempelvis förhållandet mellan täljaren och nämnaren i ett bråkuttryck (Hecht m.fl., 2003; Van Steenbrugge m.fl., 2014). På så sätt kan alltså flera bråkuttryck ha samma värde även om täljaren och nämnaren i bråkuttrycken är olika. Exempelvis har bråkuttrycken $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ samma värde eftersom förhållandet mellan täljaren och nämnaren i respektive bråkuttryck är lika (Siegler m.fl., 2010).

En studie som undersökt elevers kunskaper om förhållande är Noelting (1980). Eleverna (6–16 år) skulle avgöra vilket av två recept som gav starkast/ sötast saftblandning (recept I, 2 skedar socker till 5 glas saft, recept II, 4 skedar socker till 8 glas saft). Resultatet visade bland annat att elever under 12 år hade svårare att lösa uppgiften än äldre elever eftersom de fokuserade på skillnaderna mellan sockersaftlösningarna i stället för förhållandet mellan lösningarna.

Andra studier som undersökt elevers kunskaper om bråk som förhållande är exempelvis Booth (1987) och Pearn m.fl. (2003). Båda studierna visade att en del elever hade svårt att se att två eller flera bråkuttryck kan ha samma värde även om de uttrycks på olika sätt. Booths (1987) studie visade att 95 % av de intervjuade eleverna i skolår 5 ansåg att bråkcirkel a i Figur 6 visade bråkuttrycket $\frac{1}{3}$. Av de intervjuade eleverna var det däremot bara 73 % som uppfattade att bråkcirkel b i Figur 6 också visade bråkuttrycket $\frac{1}{3}$. Eleverna i studien uppfattade att bråkcirkel b i Figur 6 visade bråkuttrycket $\frac{2}{6}$ vilket Booth (1987) menar är en indikation på att eleverna inte uppfattar att bråkuttrycket $\frac{2}{6}$ är ekvivalent med bråkuttrycket $\frac{1}{3}$.

Figur 6

Bråkcirklar som representerar bråkuttrycket $\frac{1}{3}$ och bråkuttrycket $\frac{2}{6}$ (bearbetad efter Booth, 1987, s.12)

En förklaring till att elever inte uppfattar att bråkuttryck kan vara ekvivalenta, det vill säga likvärdiga, ges av Smith m.fl. (2005). I deras studie tillfrågades 50 elever i skolår 3–5 bland annat om det fanns några tal mellan 0 och 1. Resultatet visade att ca 60 % av eleverna menade att det fanns tal mellan 0 och 1 medan resterande ca 40 % av eleverna uppgav att det inte fanns några tal mellan 0 och 1. Av de elever som uppgav att det fanns tal mellan 0 och 1 angavs endast stambråk⁷, exempelvis $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{2}$, det vill säga bråkuttryck där täljaren är 1. Endast ett fåtal av eleverna uppgav att det fanns en oändlig mängd tal i bråkform. Att inte se att det finns andra typer av bråkuttryck än stambråk kan således begränsa elevers koppling till att två eller flera bråkuttryck kan vara ekvivalenta med varandra.

Andra studier visar att ju mer ett bråkuttryck behöver förlängas, då det kräver flera steg för att vara likvärdigt med ett annat bråkuttryck, desto svårare är det för eleverna att förstå att bråkuttrycken är likvärdiga (Boyer & Cohen, 2011). Ett exempel på detta är en elevs svar i Huinkers (2002) studie som korrekt svarade att bråkuttrycket $\frac{3}{4}$ var likvärdigt med bråkuttrycket $\frac{6}{8}$ men att dessa båda bråkuttryck inte var likvärdiga med bråkuttrycket $\frac{12}{16}$. Eleven uppfattade att bråkuttrycket $\frac{12}{16}$ var mycket större än de två andra bråkuttrycken.

⁷ Stambråk= bråk som har täljaren 1 (Kiselman & Mouwitz, 2008)

En andra typ av uppfattning gällande likvärdiga tal i bråkform framkom av analysen av resultaten från TIMSS 2007 (TIMSS, 2007) där en av uppgifterna handlade om elevers kunskap om likvärdiga bråkuttryck. Elever i skolår 4 fick välja vilket av följande fyra bråkuttryck, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{6}$ och $\frac{3}{2}$ som var ekvivalent med bråkuttrycket $\frac{2}{3}$. Cirka 10 % av eleverna valde det korrekta alternativet $\frac{4}{6}$. Över 60 % av eleverna ansåg att bråkuttrycket $\frac{3}{2}$ var ekvivalent med bråkuttrycket $\frac{2}{3}$. Att täljaren och nämnaren bytt plats ansågs av eleverna inte ha någon betydelse. Denna typ av uppfattning uppmärksammades redan på 70- talet av Erlwanger (1973). En tredje förklaring till att elever inte ser att två bråkuttryck är ekvivalenta med varandra är att eleverna ser talet i nämnaren och täljaren som två separata tal och inte som en helhet, vilket kan leda till att eleverna inte förstår att $\frac{2}{3}$ är ekvivalent med $\frac{4}{6}$ (Jigyel & Afamasaga-Fuataí, 2007).

Av ovanstående visas att det är viktigt att elever utvecklar kunskap om ekvivalenta bråkuttryck. Denna kunskap är i sin tur en förutsättning för att utveckla förståelse för att kunna beräkna tal i bråkform, då det kan underlätta vid beräkningen av uppgifter av karaktären $\frac{2}{7} + \frac{5}{14}$ (Kamii & Clark, 1995; Siegler & Pyke, 2013; Torbeyns m.fl., 2015). För att kunna beräkna dessa uppgifter behöver eleverna kunna förlänga bråkuttrycket $\frac{2}{7}$ till $\frac{4}{14}$ samt inse att förlängningen inte påverkar värdet av bråkuttrycket.

Bråk som operator

Ytterligare kunskaper om tal i bråkform handlar om att ett bråk kan användas som och beteckna en räkneoperation inom något av de fyra räknesätten, till exempel $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} =$.

Siegler och Pyke (2013) genomförde en studie där elever i skolår 6 fick i uppgift att lösa uppgifter så som $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} =$ och $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} =$ samt motsvarande subtraktionsuppgifter, det vill säga additions- och subtraktionsuppgifter med lika och olika nämnare. Resultatet visade att eleverna lättare kunde utföra beräkningar när talen i bråkform var liknämninga än när beräkningarna utfördes med oliknämninga bråkuttryck. Vid beräkningar av additionsuttryck med olika nämnare sjönk lösningsfrekvensen från 80 % korrekta svar till 55 % korrekta svar.

På motsvarande sätt sjönk resultat för beräkningar av subtraktionsuttryck med lika nämnare från 86 % korrekta svar till 62 % korrekta svar vid beräkning av uttryck med olika nämnare. Även om eleverna lättare kunde beräkna två liknämninga bråkuttryck förekom vissa felaktiga svar, exempelvis att både nämnaren och täljaren adderades ($\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{10}$). Denna feltyp har också uppmärksamats i andra studier (Ni & Zhou, 2005; Siegler m.fl., 2012; Van Hoof m.fl., 2014) och kan bero på övergeneralisering av hur beräkningar av heltal hanteras samt bristande förståelse av att vid addition av positiva tal kan summan inte bli mindre än någon av termerna (Siegler & Braithwaite, 2017).

Bråk som resultatet av en division

Elevers kunskaper om tal i bråkform omfattar att kunna förstå bråk som resultatet (kvoten) av en division, exempelvis att bråkuttrycket $\frac{2}{5}$ kan tolkas som divisionen av 2 med 5, det vill säga resultatet av beräkningen av två dividerat med fem (0,4) (Kieren, 1993; Siegler m.fl., 2010). Att arbeta med uppgifter inom subgruppen bråk som resultatet av en division gynnar elevernas kunskaper om både hur tal i bråkform kan storleksordnas och ekvivalenta bråkuttryck (Siegler m.fl., 2010).

Uppgifter som kopplas till bråk som resultatet av en division handlar om att hitta lika delar i en kontinuerlig mängd, exempelvis tre pizzor ska delas lika mellan fyra personer. Till skillnad från subgruppen bråk som del-helhet ska bråk som resultatet av en division ses som kvoten mellan två olika enheter, exempelvis tre *pizzor* ska delas på fyra *personer*. I exemplet är enheterna således pizzor och personer (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Utifrån detta resonemang behöver eleverna ha kännedom om relationen mellan täljaren och nämnaren (Lamon, 2005), vilket i exemplet ovan innebär att eleverna behöver ha kunskap om att resultatet av att tre pizzor delas lika mellan fyra personer betyder att varje person får tre fjärdedelspizzor var. Här är det mängden pizzor som är av intresse. Särskilt fokus riktas därmed mot nämnarens innebörd som här ska förstås som antalet delar som delas lika.

Bråk som representation av en mätning

Avslutningsvis beskrivs elevers kunskaper om tal i bråkform som även omfattas av att förstå ett bråkuttryck som ett tal som kan representeras som en punkt på en tallinje, på ett bestämt avstånd från noll (Behr &

Post, 1992; Clarke m.fl., 2011). När ett bråkuttryck placeras ut på en tallinje associeras bråkuttrycket till magnituden, det vill säga hur stort bråkuttrycket är, exempelvis att $\frac{3}{4}$ ses som 0,75 (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Bråk som mätning kan också förstås som en mätning av ett intervall, exempelvis att bråkuttrycket $\frac{3}{4}$ representerar mätningen av intervallet mellan 3 stycken $\frac{1}{4}$ (Lamon, 2001). Genom att använda subgruppen bråk som mätning ges eleverna möjlighet att vidga sin förståelse av tal i bråkform till att uppfatta tal i bråkform som en kvantitet (Van de Walle m.fl., 2018) och inte enbart som delar av en helhet, vilket kan förhindra det Ni (2001) benämner som *double counts* strategin.

Bråkuttryck som representeras på en tallinje kräver att elever har kunskap om bråk som förhållande (Wong, 2013). Ett exempel på detta är att för att ange vilken av pilarna i Figur 7 som visar bråkuttrycket $\frac{3}{4}$ behöver eleverna kunna dela in segmenten mellan 0 och 1 i två lika stora delar, det vill säga kunna identifiera fjärdedelar för att därefter identifiera det korrekta antalet fjärdedelar (3).

Figur 7

Bråk som tal, identifiera bråkuttrycket $\frac{3}{4}$ på en tallinje (bearbetad efter Wong, 2013, s.14)

Elevers kunskaper om bråk som tal har studerats av flera forskare. I Hannulas (2003) studie prövades bland annat elevernas förmåga att korrekt placera ut bråkuttrycket $\frac{3}{4}$ på en tallinje. Resultatet visade att endast 20 % av drygt 1100 elever i skolår 5 och 50 % av drygt 1900 elever i år 7 lyckades med detta. En vanligt förekommande placering var att eleverna placerade bråkuttrycket mellan två heltal. Exempelvis att bråkuttrycket $\frac{3}{4}$ placerades mellan talen 3 och 4 på tallinjen. Detta kan bero på att eleverna uppfattar bråkuttrycket som ett heltal (Siegler m.fl., 2010). I Wongs (2013) studie prövades elevernas (skolår 3–6) kunskap

att placera bråkuttrycket $\frac{1}{2}$ på en tallinje som sträckte sig från 0–3 respektive 0–4. Resultatet visade att endast 14 % av ca 350 elever placerade bråkuttrycket korrekt. De vanligaste misstagen var att eleverna precis som i Hannulas (2003) studie placerade bråkuttrycket mellan talen. En annan vanligt förekommande placering var att eleverna placerade bråkuttrycket $\frac{1}{2}$ mitt på tallinjen. Genom intervjuer av några av eleverna upptäckte Wong (2013) att eleverna delade in tallinjen i två delar. Liknande resultat återfinns i Nis (2001) studie som undersökte elevers i skolår 5–6 förmåga att placera ut bråkuttryck på en tallinje med intervallerna 0–2. Av resultatet framkom att eleverna inte såg att tallinjens ändpunkter var 0 och 2 utan i stället tänkte att tallinjens ändpunkter var 0 och 1.

2.2 Forskning om undervisning om tal i bråkform

Detta avsnitt uppmärksammar tidigare forskning som har anknytning till frågor som behandlar undervisning om (a) bråk som del av helhet, (b) bråk som del av antal och (c) bråk som tal. Forskningen har till stor del riktat uppmärksamhet mot elevers *lösningsstrategier*. Endast ett fåtal studier uppmärksammar vilka *undervisningsstrategier* lärarna använder.

Gemensamt för flertalet av tidigare studier om undervisning om tal i bråkform, oavsett om det är elevers Lösningsstrategier eller lärares undervisningsstrategier som studerats, är att de till stor del fokuserar på vilken typ av strategi (informell eller formell) som används. Den tidigare forskningen har med andra ord till stor del fokuserat på om undervisningen sker med hjälp av strategier som tillhör den konkreta, den representativa, den bildliga och eller den abstrakta fasen enligt CRA-modellen.

2.2.1 Undervisning om bråk som del av helhet

Undervisning om bråk som del av helhet har studerats av Zhang m.fl. (2015) samt Mills (2016). I båda studierna studerades om elevernas Lösningsstrategier förändrades efter att de deltagit i en lektionsserie om bråk där undervisningen utgick från bråk som del av helhet men som också inkluderade annat ämnesinnehåll såsom bråk som tal, bråk som antal och bråk som operator. Avsikten med att inkludera andra ämnesinnehåll i undervisningen än enbart bråk som del av helhet var,

enligt forskarna, att undersöka om elevernas förståelse för bråk kunde utvecklas och breddas när flera olika ämnesinnehåll inkluderades i undervisningen.

Zhang m.fl. (2015) studerade hur Lösningsstrategierna hos 40 elever i skolår 5 förändrades efter fem 45-minuters lektioner. Innan eleverna deltog i undervisningen intervjuades de och fick göra ett skriftligt test i syfte att undersöka deras förkunskaper innan interventionen påbörjades. Resultatet av förtestet samt intervjuerna visade att många elever använde sig av informella strategier, vanligtvis bilder i form av cirkulära representationer för att lösa uppgifterna. En vanligt förekommande Lösningsstrategi för frågan "Hur mycket är $1 - \frac{1}{4}$?" var att eleverna ritade en cirkel som delades in i fyra lika stora delar varav en av delarna markerades och togs bort. En slutsats av förtestet och intervjuerna var att eleverna i studien enbart kunde lösa uppgifterna med hjälp av en Lösningsstrategi som innebar att eleverna uppfattade bråk som del av en helhet. Efter förtestet genomfördes en lektionsserie tillsammans med elevernas ordinarie lärare. Avsikten med aktiviteterna var, enligt forskarna, att berika elevernas bildliga representationer, det vill säga den representativa fasen, samt utveckla deras begreppsliga förståelse för tal i bråkform. Några av aktiviteterna handlade om att eleverna skulle vika pappersremсор och rep. Pappersremсорna som eleverna fick vika hade alla samma längd och veks i $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{4}$. Efter att pappersremсорna vikts placerades de ut på en tallinje som ritats upp på ett papper. Förutom att vika pappersremсор gavs eleverna möjlighet att vika ett rep som var 1 yard långt. Repet delades liksom pappersremсорna in i $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{4}$. En ytterligare aktivitet som genomfördes under lektionsserien var att eleverna fick gå runt en liksidig triangel eller kvadrat som ritats upp på klassrumsgolvet. Eleverna gick längs formernas sidor och skulle vid frågor från läraren besvara hur långt de gått, exempelvis om de gått runt två sidor av den liksidiga triangeln skulle eleverna ange att de gått $\frac{2}{3}$ av triangelns längd. Eleverna i studien fick dessutom i uppgift att i grupp hålla i vatten i olika glas. Mängden vatten skulle motsvara olika bråkuttryck. I samband med detta ombads eleverna att hitta på en berättelse som passade ihop med det bråkuttryck som motsvarade mängden vatten i glaset. Exempelvis att två barn delar lika på saft. Eleverna gavs också möjlighet att rita sina Lösningsstrategier. De

aktiviteter som användes i samband med undervisningen bestod således av laborativt material, vardagliga representationer och bildliga representationer. Resultatet av Zhang m.fl. (2015) studie visade att eleverna efter undervisningen fortfarande använde informella Lösningsstrategier men att dessa förändrats från att förut nästan uteslutande bestå av cirkulära representationer till att även bestå av Lösningsstrategier såsom att använda tallinjer för att lösa uppgifterna. Elevernas förändrade Lösningsstrategier indikerar, enligt Zhang m.fl. (2015), att eleverna utvecklat och fördjupat sin begreppsliga förståelse för tal i bråkform.

Även Mills (2016) undersökte om elevernas (skolår 4–5) Lösningsstrategier utvecklades efter en lektionsserie om bråk. I likhet med Zhang m.fl. (2015) undervisades eleverna (21 stycken) av deras ordinarie matematiklärare. Men till skillnad från Zhang m.fl. (2015), där undervisningen skedde med hjälp av olika representationer, undersökte Mills (2016) hur läraren kunde utveckla elevernas Lösningsstrategier och förståelse för tal i bråkform genom att endast använda olika typer av laborativt material. Precis som i Zhang m.fl. (2015) genomfördes ett skriftligt test innan och efter lektionsserien (tre lektioner utspridda över en sex veckors period). I likhet med resultatet på förtestet i Zhang m.fl. (2015) använde eleverna en informell strategi där de med hjälp av cirkulära representationer löste uppgifterna. Resultatet av förtestet visade exempelvis att för att lösa uppgiften ”Om $\frac{1}{4}$ av min cirkel innehåller 3 prickar, hur många prickar finns det i hela cirkeln?” ritade majoriteten av eleverna upp en cirkel som delades i fyra lika stora delar där de ritade in 3 prickar i varje fjärdedel. Under lektionerna undervisade läraren bland annat addition med stambråk, addition med bråk med samma nämnare, bråk som del av helhet och del av antal samt att storleksordna tal i bråkform, det vill säga undervisningen omfattade flera aspekter av tal i bråkform. För att undervisa om hur tal i bråkform storleksordnades användes laborativt material föreställande avlånga kex (wafer biscuits) som representerade bråk som del av helhet och tallinjer som representerade bråk som mätning. Resultatet av eftertestet visade att elevernas Lösningsstrategier förändrades något efter att de undervisats med hjälp av olika laborativa material. En ökning av korrekta lösningar visades i de uppgifter som handlade om att eleverna skulle storleksordna bråkuttryck. Efter undervisningen var det något fler elever som med hjälp av tallinjer kunde lösa dessa uppgifter. Eleverna

hade med andra ord efter undervisningen tillägnat sig en hållbar informell Lösningsstrategi (Mills, 2016). Resultatet visade även att eleverna ändrade sin Lösningsstrategi från en informell till en mer formell Lösningsstrategi i samband med uppgifter som handlade om den som beskrevs ovan. Däremot visade resultatet att eleverna, trots undervisning, inte kunde addera bråkuttryck med olika nämnare exempelvis $\frac{1}{10} + \frac{2}{5}$. I eftertestet framkom att en vanligt förekommande feltyp fortfarande var att eleverna adderade täljaren och nämnaren var för sig, vilket i exemplet ovan innebär att svaret blir $\frac{3}{15}$. Sammanfattningsvis visade Mills (2016) studie att när läraren tog hjälp av olika laborativa material när hon undervisade om bråk som del av helhet förändrades, och till viss del även utvecklades, elevernas Lösningsstrategier. Men resultatet visade också att många elever trots undervisning fortfarande hade svårt att använda en korrekt Lösningsstrategi.

2.2.2 Undervisning om bråk som del av antal

Nedan presenteras och diskuteras studier som fokuserat på undervisning om bråk som del av antal. I tidigare studier (exempelvis Hodges m.fl., 2008; Ross & Anand, 1987) såväl som senare studier (exempelvis McCloskey m.fl., 2017) är det elevernas Lösningsstrategier som studerats. I Ross och Anand (1987) undersöktes vilken Lösningsstrategi, en informell eller en formell, som var mest fördelaktig för eleverna att använda i samband med undervisning om bråk som del av antal. I McCloskey m.fl. (2017) studerades istället vilken strategi, informell eller formell, som lärarna i studien rekommenderade att eleverna skulle använda när de arbetade med uppgifter om bråk som del av antal.

Mer precist undersökte Ross och Anand (1987) om elever i skolår 5 och 6 kunde lösa uppgifter som var anpassade till deras vardag, det vill säga att eleverna använde en informell strategi, bättre än uppgifter med samma matematiska innehåll som inte anpassats till elevernas vardag och som krävde att eleverna använde sig av en formell strategi. Totalt ingick 54 elever i studien. Den ena elevgruppen fick arbeta med uppgifter där uppgifterna anpassades så att de skulle passa vardagliga situationer som eleverna kunde tänkas möta. Bland annat inkluderades information om vänner, intressen eller fritidssysselsättningar i uppgifterna. Eleverna i kontrollgruppen fick arbeta med uppgifter med

samma matematiska innehåll men där uppgifterna inte anpassades till elevernas vardag. Resultatet av studien visade att de elever som fått uppgifter anpassade efter dem själva presterade bättre än eleverna som inte fått den möjligheten. Det innebar att eleverna bättre löste uppgifter om bråk som del av antal när de gavs möjlighet att arbeta med uppgifterna med hjälp av informella strategier.

Till skillnad från Ross och Anand (1987) studerade McCloskey m.fl. (2017) istället vilken strategi som lärarna i studien framhöll som den strategi som de ville att eleverna i skolår 5 skulle använda när de arbetade med uppgifter som handlade om bråk som del av antal, exempelvis "Hur mycket är $\frac{2}{3}$ av 15?" Inledningsvis observerades vilka lösningsstrategier som eleverna själva använde sig av när de arbetade med dessa typer av uppgifter. Analysen visade att eleverna främst använde sig av fyra strategier, varav tre var av mer formell karaktär, medan den fjärde strategin var mer informell. Exempel på de strategier som användes framgår i Figur 8.

Figur 8

Elevers strategier för att lösa uppgiften $\frac{2}{3}$ av 15 (bearbetad efter McCloskey m.fl., 2017, s. 200)

$$\begin{array}{ll}
 1. & \frac{2}{3} \times 15 = \frac{2}{3} \times \frac{15}{1} = \frac{30}{3} = 10 \\
 2. & \frac{2}{3} \times \frac{15}{1} = \frac{30}{3} = 10 \\
 3. & \begin{array}{l} 15 \div 3 = 5 \\ 5 \times 2 = 10 \end{array} \\
 4. & \img alt="Handwritten student work showing a number line from 0 to 15. Above the line, there are 10 tick marks, each labeled with '1/3'. Below the line, the numbers 1 through 15 are written. The first two numbers, 1 and 2, are under the first two '1/3' marks, and the remaining numbers 3 through 15 are under the subsequent marks." data-bbox="235 708 803 781"/>$$

När läraren tillsammans med eleverna diskuterade de fyra lösningsstrategierna förordade lärarna att eleverna skulle använda den informella strategin (se 4:e strategin i Figur 8) när de skulle beräkna

uppgifter liknande den som beskrevs ovan. Det gällde oavsett om eleverna redan korrekt kunde lösa uppgifterna med hjälp av en mer formell strategi. Detta framkom även i andra sammanhang när läraren bad de elever som korrekt, med hjälp av en formell strategi, beräknat uppgifter att även beräkna uppgifterna med hjälp av en informell strategi, exempelvis att rita upp uppgiften på en tallinje. När eleverna gjorde detta visade resultatet av studien att en del elever slarvade och inte ritade upp uppgiften helt korrekt, vilket medförde att de fick ett avvikande svar jämfört med det svar som de fått genom att använda någon av de formella strategierna. En förklaring till att lärarna i studien ville att eleverna skulle använda en informell strategi menar McCloskey m.fl. (2017) var att lärarna var präglade av att eleverna måste visa hur de tänker (som de menar är den rådande undervisningsnormen i USA), vilket kan innebära att läraren förbiser att eleverna redan besitter kunskap om formella strategier för att beräkna tal i bråkform och inte är i behov av informella strategier.

En slutsats av de två studierna är att om lärare i sin undervisning om bråk som del av antal riktar uppmärksamheten mot informella lösningsstrategier kan detta leda till att eleverna bättre löser uppgifter som handlar om bråk som del av antal. Å andra sidan, om eleverna redan har kunskap om hur uppgifterna ska beräknas med hjälp av formella strategier är det inte säkert att de informella strategierna bidrar till att ytterligare utveckla elevernas kunskaper om hur uppgifter om bråk som del av antal ska beräknas.

2.2.3 Undervisning om bråk som tal

I det följande beskrivs och diskuteras studier om det sista området, undervisning om bråk som tal. Det handlar om studier där undervisningen riktas mot följande ämnesinnehåll: (a) jämföra och storleksordna tal i bråkform, (b) samband mellan bråkuttryck, decimal- och procentform och (c) likvärdiga bråkuttryck.

Jämföra och storleksordna tal i bråkform

Tidigare studier som behandlar undervisning om hur tal i bråkform kan jämföras och storleksordnas kan delas upp i två olika perspektiv. Det ena perspektivet handlar om vilken eller vilka lösningsstrategier som eleverna använder och vilka av dessa som är effektiva respektive ineffektiva att använda (exempelvis Clarke & Roche, 2009; Mack, 1990;

Mitchell & Horne, 2010; Pearn & Stephens, 2004). Det andra perspektivet handlar i stället om hur lärare använder olika undervisningsstrategier i syfte att ge eleverna möjlighet att jämföra och storleksordna tal i bråkform (exempelvis Yang & Lai, 2013).

Resultatet av en intervjustudie av Pearn och Stephens (2004) som undersökte vilka Lösningsstrategier elever i skolår 8 använde när de jämförde två bråkuttryck visade att många elever använde en informell Lösningsstrategi som inte var hållbar. Denna strategi benämns enligt Pearn och Stephens (2004) som *mellanrumsstrategin* (gap thinking strategy) (se även Post & Cramer, 1987). Med hjälp av strategin jämfördes exempelvis bråkuttrycken $\frac{3}{5}$ och $\frac{5}{8}$. Eleverna i studien menade att bråkuttrycket $\frac{3}{5}$ var störst eftersom ”det är mindre gap”, det vill säga skillnad mellan trean och femman i bråkuttrycket $\frac{3}{5}$ än mellan femman och åttan i bråkuttrycket $\frac{5}{8}$ (Pearn & Stephens, 2004). En följd av denna Lösningsstrategi var att eleverna trodde att bråkuttrycken $\frac{3}{4}$ och $\frac{2}{3}$ hade samma värde därför att det var samma ”gap” mellan täljaren och nämnaren i båda bråkuttrycken.

En liknande studie genomfördes några år senare av Mitchell och Horne (2010) som även de intervjuade elever om vilken Lösningsstrategi de använde för att jämföra och storleksordna bråkuttryck. Skillnaden mellan Mitchell och Hornes (2010) studie och Pearn och Stephens (2004) var att eleverna som intervjuades var yngre och gick i skolår 6. Resultatet i Mitchell och Hornes (2010) studie bekräftade resultatet i Pearn och Stephens (2004) studie eftersom eleverna även i denna studie exempelvis menade att bråkuttrycken $\frac{5}{6}$ och $\frac{7}{8}$ var lika stora eftersom skillnaden, det vill säga gapet, mellan täljaren och nämnaren i båda bråkuttrycken var lika stort. Detta svar indikerar att eleverna använde samma Lösningsstrategi som tidigare presenterats av Pearn och Stephens (2004). I Mitchell och Hornes (2010) framkom dessutom två ytterligare varianter av mellanrumsstrategin. Den ena varianten av mellanrumsstrategin var att eleverna argumenterade för att de ovan nämnda bråkuttrycken var lika stora därför att täljarna i de båda bråkuttrycken var ”ett mindre” än nämnaren. Den andra varianten innebar i stället att eleverna menade att båda bråkuttrycken var ”one more to become a whole” (s. 415). Studierna visar således att oberoende av vilken variant av den informella mellanrumsstrategin som eleverna

använde var denna Lösningsstrategi inte hållbar att använda för att jämföra och storleksordna tal i bråkform.

I likhet med studierna ovan studerade även Clarke och Roche (2009) vilka Lösningsstrategier eleverna använde i samband med att de skulle avgöra vilket av två bråkuttryck som var störst. I studien ingick över 300 elever i skolår 6. Resultatet i studien visade, till skillnad från Pearn och Stephens (2004) samt Mitchell och Horne (2010), att eleverna använde två informella Lösningsstrategier för att jämföra bråkuttryck som var hållbara. Dessa två Lösningsstrategier benämns enligt Clarke och Roche (2009) *reststrategin* (residual thinking) respektive *referensstrategin* (benchmarking). Lösningsstrategin med resttänk refererar till den mängd som behövs för att bråkuttrycket ska bli en hel. Exempelvis om bråkuttrycken $\frac{5}{6}$ och $\frac{7}{8}$ ska jämföras ses att för att bråkuttrycket $\frac{5}{6}$ ska bli en hel så fattas det $\frac{1}{6}$ medan det fattas $\frac{1}{8}$ för att bråkuttrycket $\frac{7}{8}$ ska bli en hel. Eftersom $\frac{1}{8}$ är mindre än $\frac{1}{6}$ är bråkuttrycket $\frac{7}{8}$ störst. Referenspunktsstrategin innebär att för att jämföra två bråkuttryck används en referenspunkt, ett riktmärke (Clarke & Roche, 2009), vanligtvis $\frac{1}{2}$ men även ett. För att avgöra vilket av bråkuttrycken $\frac{5}{8}$ och $\frac{3}{7}$ som är störst används referenspunkten $\frac{1}{2}$. Här ses att $\frac{5}{8}$ är större än $\frac{1}{2}$ medan $\frac{3}{7}$ är mindre, således är $\frac{5}{8}$ större än $\frac{3}{7}$.

En ytterligare studie som studerat elevers Lösningsstrategier för att jämföra bråkuttryck är Mack (1990). Till skillnad från de tre ovan nämnda studierna undersökte Mack (1990) om elever i skolår 6 kunde använda en formell Lösningsstrategi efter att de fått instruktioner av en lärare om hur uppgifterna kunde lösas med hjälp av en informell Lösningsstrategi. Läraren gav eleverna enskilda instruktioner 11 till 13 gånger under en sex veckors period. Instruktionerna utgick ifrån elevernas förförståelse av bråkuttryck. Resultatet visade bland annat att eleverna korrekt kunde jämföra två bråkuttryck med varandra genom att använda en informell Lösningsstrategi, exempelvis genom att rita upp lika stora cirklar som delats in i olika delar beroende på nämnarens storlek. I förklaringen om vilket bråkuttryck som var störst refererade eleverna till hur bilderna av cirkelarna såg ut. Vidare visade resultatet att eleverna tog hjälp av sin förförståelse för att jämföra bråkuttrycken. Detta visades genom att eleverna i en undervisningssituation korrekt kunde avgöra vilken pizzadel (som representerades som bråkcirklar) (en

åttondel eller en sjättedel) som var störst. Eleverna motiverade sina svar som att det var färre delar i pizzan som var indelade i sjättedelar och därför så var det mer pizza på varje del. Men när eleverna i nästa undervisningssituation (som följde direkt efter den första) skulle jämföra bråkuttrycken $\frac{1}{8}$ och $\frac{1}{6}$, det vill säga samma bråkuttryck som jämförts innan, var det en del av eleverna som tidigare löst uppgiften korrekt som nu menade att $\frac{1}{8}$ var större än $\frac{1}{6}$. Eleverna förklarade detta med att 8 är större än 6. Detta menar Mack (1990) är en indikation på att eleverna i studien inte utnyttjade sina tidigare kunskaper om att jämföra bråkuttrycken trots att samma bråkuppgifter användes. En tolkning av resultatet är att steget mellan den informella Lösningstrategin och den formella Lösningstrategin var för stort för eleverna i studien.

Att steget från att använda en informell strategi till att använda en formell strategi kan vara stort har uppmärksammats av Yang och Lai (2013). De undersökte om detta steg kunde minskas om läraren använde en undervisningsstrategi som innebar att referensstrategin (se Clarke & Roche, 2009) användes som ett slags mellanled, en länk mellan den informella och formella strategin. I linje med Mack (1990) visade resultatet i Yang och Lais (2013) studie att eleverna hade svårt att korrekt jämföra bråkuttryck med varandra genom att använda en formell Lösningstrategi. Resultatet visade också att eleverna var medvetna om att de behövde göra om bråkuttrycken till en gemensam nämnare för att kunna avgöra vilket av bråkuttrycken som var störst, men de hade inte kunskap om hur detta skulle göras. I likhet med Mack (1990) visade Yang och Lai (2013) att när läraren i studien representerade bråkuttrycken med hjälp av olika informella undervisningsstrategier i form av bråkcirklar, rektanglar och tallinjer, kunde eleverna avgöra vilket av bråkuttrycken som var störst. När läraren introducerade referensstrategin kunde eleverna även med en mer formell strategi avgöra vilket av bråkuttrycken som var störst och efter att eleverna fått undervisning om referensstrategin var det många elever som efteråt övergav de informella strategierna till förmån för de mer formella. Utifrån studiens resultat menar Yang och Lai (2013) att undervisning om referensstrategin kan utgöra en länk mellan de informella strategierna till de mer formella strategierna. De påpekar att det är viktigt att läraren kommunicerar och diskuterar strategin med eleverna.

Samband mellan bråkuttryck, decimal- och procentform

I avsnittet presenteras två studier som handlar om undervisning om sambandet mellan bråkuttryck, decimal- och procentform. I den första studien undersökte Muzheve och Capraro (2012) elevernas möjlighet att utveckla kunskap om sambandet mellan bråkuttryck, decimal- och procentform när lärarna använde olika typer av informella undervisningsstrategier. Även i den andra studien av Flores m.fl. (2019) fokuserades på lärarnas undervisningsstrategier, men här riktades uppmärksamheten istället mot att jämföra elevernas möjlighet att utveckla kunskap om sambandet mellan bråkuttryck, decimal- och procentform när lärarna använde antingen en informell eller en formell undervisningsstrategi.

I studien av Muzheve och Capraro (2012) ingick totalt 16 lärare och över 580 elever (i skolor 6–8). För att förklara hur ett bråkuttryck kan omvandlas till decimalform visade studien att lärarna använde sig av olika informella undervisningsstrategier. En av dessa undervisningsstrategier benämndes av lärarna som "the cowboy rule" (s. 7) och bestod av ett slags ramsa där syftet var att eleverna skulle komma ihåg en särskild procedur om hur bråkuttrycket kunde skrivas som ett divisionsuttryck, samt att därefter kunna omvandla det till ett decimaltal. För att förklara sina undervisningsstrategier använde sig lärarna i studien av ett informellt språk. Nämnaren i ett bråkuttryck kunde exempelvis definieras som "nanny" eller "neighbor" (s. 6) medan täljaren definierades som "top" (s. 8). Av resultatet framgick att många elever innan undervisningen använde sig av både informella strategier och ett informellt språk. I och med att även läraren använde informella undervisningsstrategier och ett informellt språk i undervisningen visade eftertestet att elevernas användande av informella lösningsstrategierna ökade. Genom att använda informella undervisningsstrategier som förstärks av ett informellt språkbruk menar Muzheve och Capraro (2012) att det finns en risk att undervisningsstrategierna och språket knyts till en specifik uppgift, som visserligen kan vara korrekt givet den specifika kontexten, men att det kan vara svårt för eleverna att generalisera och tillämpa lösningsstrategierna och definitionerna när de arbetar med andra liknande uppgifter. Studien lyfter således upp begränsningar med att lärare använder informella undervisningsstrategier i matematikundervisning om hur bråkuttryck omvandlas till decimal- respektive procentform.

I likhet med Muzheve och Capraro (2012) undersökte också Flores m.fl. (2019) lärares undervisningsstrategier när de undervisade om sambandet mellan bråkuttryck, decimal- och procentform genom olika undervisningsstrategier. Till skillnad mot Muzheve och Capraro (2012) jämförde Flores m.fl. (2019) effekten av två olika undervisningsstrategier, (a) traditionell undervisning, det vill säga undervisning med hjälp av enbart formella, matematiska, strategier och (b) undervisning med hjälp av flera informella strategier. Eleverna (90 elever i skolår 6–7) delades in i två grupper. Båda undervisningsstrategierna pågick i 12 dagar och genomfördes med båda grupperna. Uppgifter som eleverna arbetade med var exempelvis: Visa att 20 % av en hel är samma sak som $\frac{1}{5}$ av en hel. Elevernas kunskaper om sambandet mellan bråkuttryck, decimal- och procentform mättes före och efter undervisningen. Resultatet av studien visade att den traditionella undervisningen gav eleverna bättre möjligheter att utveckla sina kunskaper om sambandet mellan bråkuttryck, decimal- och procentform. Flores m.fl. (2019) menar att en förklaring till resultatet är att eleverna i studien inte förstod sambandet mellan de olika informella strategierna som användes, vilket kan ha påverkat resultatet. Detta innebär att även om resultatet av Flores m.fl. (2019) indikerar att eleverna gynnas av den traditionella undervisningen rekommenderar de ändå lärare att använda olika informella strategier i undervisningen om samband mellan bråkuttryck, decimal- och procentform.

Likvärdiga bråkuttryck

I det avslutande avsnittet presenteras två studier där undervisning om likvärdiga bråkuttryck studerats. I den ena studien av Levenson (2010) studerades vilken undervisningsstrategi, en formell eller en informell, som eleverna i skolår 5 föredrog att lärarna använde under matematiklektionerna. I den andra studien av Inagaki m.fl. (1999) undersöktes istället vilken undervisningsstrategi lärarna använde i form av vilka frågor och vilken feedback de gav till eleverna (skolår 5) under matematiklektionerna. Båda studierna riktar således uppmärksamheten mot lärares undervisningsstrategier.

I Levensons (2010) studie undersöktes vilken typ av undervisningsstrategi, (a) en formell förklaring eller (b) en informell förklaring kopplad till elevernas vardagliga situationer, elever föredrog

i samband med undervisning om likvärdiga bråkuttryck. Totalt ingick ca 100 elever i studien. Enligt elevernas lärare var ca 55 % av eleverna som deltog i studien högpresterande, ca 25 % medelpresterande och ca 15 % lågpresterande. Totalt fick eleverna ta del av åtta olika typer av förklaringar, fyra formella och fyra informella undervisningsstrategier. Exempel på uppgifter som användes i studien var att lärarna skulle undervisa om och visa att bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ var likvärdigt med bråkuttrycket $\frac{3}{12}$. I Figur 9 nedan presenteras två av dessa undervisningsstrategier.

Figur 9

Exempel på formell respektive informell undervisningsstrategi (efter Levenson, 2010, s 131f)

Formell undervisningsstrategi

En fjärdedel ($\frac{1}{4}$) är samma som $\frac{3}{12}$. Alltså är två fjärdedelar ($\frac{2}{4}$) två gånger så stort som $\frac{3}{12}$, vilket blir $\frac{6}{12}$. Därför är $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$.

Informell undervisningsstrategi

Mamma ger David och Miri två lika stora chokladkakor. Davids kaka är delad i 4 lika stora delar. David äter 2 bitar.

Miris chokladkaka är delad i 12 lika stora delar. Miri äter 6 delar. Varje barn får samma mängd choklad. Därför är $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$.

Efteråt fick eleverna frågor som handlade om (1) Vilken förklaring tyckte du var mest övertygande? (2) Vilken förklaring skulle du själv använda om du skulle förklara likvärdiga bråkuttryck för en kamrat? och (3) Vilken förklaring föredrar du att din lärare använder? Resultatet visade att de högpresterande eleverna föredrog de formella förklaringarna medan 75 % av de medelpresterande och 60 % av de lågpresterande eleverna föredrog de mer informella förklaringarna.

Resultatet indikerar, enligt Levenson (2010), att för att göra undervisningen tillgänglig för alla elever, oavsett kunskapsnivå, bör lärare använda undervisningsstrategier som innefattar både formella och informella förklaringar i samband med undervisning om likvärdiga bråkuttryck. Levenson (2010) betonar vikten av att lärarna successivt överger de informella undervisningsstrategierna till förmån för de mer formella.

Även Inagaki m.fl. (1999) undersökte lärares undervisningsstrategier i samband med undervisning om likvärdiga bråkuttryck. Till skillnad från Levenson (2010) jämfördes amerikanska och japanska lärares undervisningsstrategier med avseende på vilka frågor och vilken feedback lärarna gav till eleverna. Undervisningsstrategierna handlar således inte i denna studie om informella eller formella strategier utan fokus riktades mot lärarnas interaktion och kommunikation med eleverna. Totalt observerades och analyserades sju amerikanska och sex japanska matematiklektioner. Resultatet visade inga skillnader mellan de amerikanska och japanska matematiklektionerna i fråga om hur mycket tid av lektionerna som upptogs av lärarnas och elevernas interaktioner. Däremot visade resultatet att de amerikanska matematiklektionerna bestod av mer än tre gånger så många interaktioner jämfört med de japanska matematiklektionerna. Vidare visar resultatet att de amerikanska lärarna, till skillnad från de japanska, bad eleverna berätta vilken procedur de använt i den enskilda uppgifter vilket illustreras av dialogen i följande exempeldialog (se Figur 10). Exempeldialogen illustrerar en dialog mellan lärare och elever i ett amerikanskt klassrum där fokus riktas mot elevernas metoder för att visa hur de löser uppgifter med likvärdiga bråkuttryck. Däremot fokuseras inte varför proceduren fungerar.

Figur 10

Exempeldialog (Inagaki m.fl., 1999, s. 107)

Teacher	All right look at the next one. Here they've done it for you. They're telling you $\frac{3}{4}$ is equal to $\frac{15}{18}$. You have to decipher it, be the detective. What did they do in the process, Peter?
Peter	They multiplied by it by 3
Teacher	Right, times 3. What did they do for Number 7?

	$\frac{3}{7}$ is equal to $\frac{9}{21}$? Adam?
Adam	Multiplied by 3.
Teacher	By 3 again. Don, what did they do in Number 8?
	$\frac{12}{30}$ is equal to $\frac{2}{5}$?
Don	Divide by 6.
Teacher	Good. I'm glad you didn't say multiply. We're going from left to right, so, we, to get from 12 to 2, we had to divide.

Resultatet i Inagaki m.fl. (1999) visade att när de japanska lärarna ställde frågor, uppmanades eleverna att berätta vilken procedur de använt, förklara och motivera varför de använt sig av just den proceduren. Forskarna tolkar detta som att de japanska elevernas svar var mer komplexa än de amerikanska elevernas. Resultatet visade, vilket framgår av excerpten ovan, att frågorna från de amerikanska lärarna var direkt riktade till en specifik elev och en specifik uppgift. De japanska lärarna bjöd i stället ofta in andra elever att delta i interaktionen genom att exempelvis fråga andra elever i klassen hur de tänkte eller resonerade samt att de ofta vidareutvecklade elevernas svar så att de kunde generaliseras och appliceras på andra uppgifter än enbart den uppgift som behandlades under matematiklektionen. Resultatet visade således att trots att både interaktionstiden och det matematiska innehållet var detsamma erbjöds eleverna olika möjligheter till lärande där de amerikanska eleverna i stor utsträckning erbjöds ett lärande riktat mot vilka metoder de skulle använda för att förklara att två bråkuttryck är likvärdiga. De japanska eleverna erbjöds även de ett lärande riktat mot vilka metoder de skulle använda för att förklara att två bråkuttryck är likvärdiga men de gavs även möjlighet att utveckla sin förmåga att resonera och argumentera om varför deras metoder var korrekta. Slutligen visade studien att de japanska lärarna gav eleverna möjlighet att ta del av förklaringar som var mer generella och som på så sätt kunde användas i andra sammanhang än enbart på de uppgifter som förekom i den aktuella matematikundervisningen.

2.3 Att representera ett matematiskt innehåll

Av avhandlingens syfte framgår ett intresse för lärares och elevers användning av representationer av tal i bråkform. I följande avsnitt beskrivs tidigare forskning som belyser hur ett matematiskt innehåll kan

representeras. Företrädelsevis presenteras forskning om hur tal i bråkform kan representeras.

2.3.1 Att använda representationer

En representation kan ensam representera ett matematiskt begrepp eller innehåll (Goldin & Shteingold, 2001). Detta studeras i delstudie I där fokus riktas mot hur ett laborativt material används för att representera tal i bråkform. En representation kan också ingå i ett system av flera andra representationer, ett representationssystem (Goldin & Shteingold, 2001). I avsnitt 1.2.1, Figur 4, framställdes en modell över ett sådant representationssystem. I delstudie II uppmärksammas hur olika representationer används i undervisning om tal i bråkform. En anledning till att använda flera olika representationer är att det är inte säkert att en enda representation räcker för att utveckla elevers kunskaper (Brown & Presmeg, 1993; Stylianou & Pitta-Pantazi, 2002). Ett exempel på där användningen av en representation är otillräcklig beskrivs i Clement (2004) som redogör för hur en elev löser uppgiften $4 - \frac{1}{8} =$. Uppgiften representeras till en början av skrivna symboler. Denna representation hjälper inte eleven att komma fram till rätt svar då eleven skriver att svaret blir $\frac{3}{8}$ och motiverar det med att $4 - 1 = 3$. När läraren hör och ser elevens svar byter läraren representation till en vardaglig händelse genom att säga "Tänk om du har fyra kakor och äter en åttondel. Hur många kakor har du kvar?" Med hjälp av kopplingen till den vardagliga händelsen kan eleven sedan rita upp en bild av uppgiften och på så sätt komma fram till rätt svar, $3 \frac{7}{8}$. Exemplet illustrerar att det, i denna situation, inte var tillräckligt med en enskild representation för att lösa uppgiften. Här var det nödvändigt att använda ett system av representationer (skrivna symboler, vardagliga situationer och bilder).

Även om studier visar att det är fördelaktigt att använda flera olika representationer i matematikundervisningen så finns det studier (exempelvis Ainsworth, 2006; Ainsworth m.fl., 2002; Rau m.fl., 2015; Rau & Matthews, 2017) som visar på nackdelar med att använda flera olika representationer eftersom eleverna kan ha svårt att integrera information från mer än en representation. Rau m.fl. (2015) poängterar vikten av att eleverna tolkar och förstår vad varje enskild representation representerar samt att eleverna förstår kopplingarna eller sambanden mellan representationerna. Exempelvis måste eleverna i uppgiften

”Skriv med siffror (i bråkform), två tredjedelar” (uppgift 2a ur RB2, Diamant, Skolverket, 2013) först kunna tolka vad två tredjedelar innebär för att i nästa steg kunna uttrycka detta med hjälp av skriftliga symboler. För att lösa uppgifter liknande denna krävs att eleverna förstår hur dessa två representationer samverkar. Om inte detta sker finns det en risk att representationerna, i stället för att hjälpa elevernas fortsatta utveckling hindrar elevernas utveckling av tal i bråkform.

Syftet med att synliggöra användandet av en eller flera representationer i matematikundervisningen är att belysa båda dessa perspektiv, vilket kan användas vid tolkning och analys av avhandlingens resultat. Lärares användande av representationer och vad det kan innebära för elevers möjlighet att erfara tal i bråkform uppmärksammas särskilt i delstudie II.

2.3.2 Svårigheter med att använda representationer

Elever behöver å ena sidan lära sig ett matematiskt begrepp med hjälp av en eller flera representationer, å andra sidan behöver de också lära sig att förstå och tolka en representation. Detta är enligt Rau och Matthews (2017) en stor utmaning i matematikundervisningen i och med att elever ofta förväntas att använda obekanta representationer för att lära sig obekanta matematiska begrepp. För att förstå och tolka en representation, exempelvis en bråkcirkel, behöver eleverna undervisas om hur bråkcirkeln ska tolkas, det vill säga vad bråkcirkeln representerar innan den kan användas som en representation av ett matematiskt begrepp (Rau & Matthews, 2017).

En ytterligare svårighet är att det kan vara svårt att tolka och förstå en representation, exempelvis ett laborativt material som har många olika kännetecken så som olika färger eller verklighetstroga material (perceptuellt rikt material). Dessa kännetecken kan avleda elevernas uppmärksamhet därför att materialet i sig konkurrerar med det matematiska begreppet materialet är avsett att representera (Uttal m.fl., 1997). Inbyggt i dessa typer av laborativt material finns det som DeLoache (2000) och Belenky och Schalk (2014) kallar en *dubbel representation*. Resonemanget bygger på att ju mer framträdande det laborativa materialet är i sig självt, desto sämre är dess förmåga att representera ett matematiskt begrepp. Langer (1942) uttrycker detta genom att konstatera: ”a peach would be a poor symbol because we are too much interested in peaches themselves” (s. 75). Detta innebär att

samtidigt som materialet representerar sig självt så representerar det ett matematiskt begrepp. För att materialet ska användas effektivt måste eleverna fokusera på det matematiska begreppet i stället för materialet i sig självt. För att underlätta för eleverna att fokusera på det matematiska begreppet i stället för på materialet i sig rekommenderas därför användandet av enkla laborativa material med begränsade kännetecken. Vilka elever som påverkas av materialets egenskaper beror på flera faktorer. Förmågan att hantera perceptuellt rika material ökar i takt med elevernas ålder och ökad arbetsminneskapacitet (Son m.fl., 2008).

En tredje svårighet med att använda representationer i undervisningen är att elever ibland förlitar sig på en vardaglig tolkning när de ska representera ett matematiskt begrepp (Clarke m.fl., 2011). Ett exempel på detta presenteras i Wernberg (2009). Eleverna i studien uppmanades att rita ett diagram som visade en cyklists hastighet när cyklisten cyklar upp och ned för en kulle. Många elever valde att rita ett diagram som liknade en kulle istället för den korrekta u-formen, se Figur 11. En anledning till detta kan, enligt Elby (2000), vara att eleverna förlitar sig på sin intuitiva förmåga, det vill säga "what you see is what you get" (s. 486). Att lära sig att tolka en representation kan alltså handla om att ignorera denna förmåga.

Figur 11

Icke korrekt diagram samt korrekt diagram över hastighet som funktion av tid för en cyklist som cyklar över en kulle (efter Wernberg, 2009, s. 24)

Ett fjärde exempel gällande en svårighet med att använda representationerna beskrivs av Olive och Vomvoridi (2006). I en av intervjuerna med eleverna i studien framkom det att en elev kunde göra korrekta kopplingar mellan bråkuttryck som illustrerats med hjälp av bråkcirklar och skriftliga symboler ($\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{4}$) när han korrekt kunde identifiera de bråkcirklar som representerade respektive bråkuttryck. När han sedan adderade bråkuttrycken $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ fick han svaret $\frac{1}{5}$. När eleven uppmanades att vidareutveckla sitt svar visade det sig att han tänkte att en halv är ”en av två delar” och en fjärdedel är ”fyra delar”. Eleven menade att helheten nu omfattade fem delar, en femtedel, och förbisåg alltså att delarna i bråkcirklarna var av olika storlek. Resultatet indikerar att en svårighet med representationer kan vara att trots att eleven kunde göra korrekta kopplingar mellan två representationer i ett sammanhang kan eleverna ändå missuppfatta aspekter av tal i bråkform i andra sammanhang.

Ovan har en rad svårigheter med elevers tolkning av representationer redovisats. En ytterligare svårighet med representationer handlar om lärares användande av representationer. Forskning (exempelvis Izsák m.fl., 2008; Lee m.fl., 2011) visar att det vare sig är representationerna i sig själva eller elevernas tolkning av representationer som kan vålla problem i undervisningen utan det handlar istället om att lärare ibland, på grund av bristande ämneskunskaper om tal i bråkform, felaktigt använder representationer som i sin tur kan påverka elevers lärande om tal i bråkform negativt. Utifrån ovanstående presentation är det följaktligen viktigt att lärare i sin undervisning med hjälp av representationer tydliggör för eleverna vad som representeras. Det är även av betydelse att lärarens val av representationer representerar det matematiska begrepp eller innehåll som läraren avser. Därtill är det av vikt att läraren uppmärksammar att eleverna inte enbart använder en representation utan också förstår kopplingarna mellan flera representationer samt att läraren själv har goda ämneskunskaper om det innehåll som ska undervisas om.

I avhandlingen kommer svårigheter med att använda representationer uppmärksammas på olika sätt. I delstudie I uppmärksammas svårigheter med att använda, tolka och förstå *en* representation, ett laborativt material, med avseende på materialets kännetecken, det vill säga om materialen är perceptuellt rika eller inte. Som framkommit ovan har tidigare forskning (se Clarke m.fl., 2011; Wernberg, 2009) beskrivit att

elever förlitar sig på en vardaglig tolkning när ett matematiskt begrepp ska representeras, det vill säga om representationen överensstämmer med det matematiska begreppet. I delstudie II uppmärksammas i stället hur lärare använder representationer och om representationerna överensstämmer med det matematiska begrepp som avses.

2.3.3 Sammankopplingar mellan representationer

Enligt National Council of Teachers of Mathematics, (NCTM, 2002) och Ainsworth (2006) är det inte enbart användandet av många olika representationer som är av betydelse utan också sammankopplingarna mellan de olika representationerna är av betydelse. I delstudie II studeras därför förutom vilka representationer som lärare använder i undervisning om tal i bråkform dessutom hur lärare kopplar samman representationerna med varandra.

En studie som bland annat studerat lärares sammankopplingar mellan representationer är Kersting m.fl. (2012). I studien videofilmades undervisningssekvenser som handlade om bråk som del av helhet, relationer mellan bråkuttryck, likvärdiga bråkuttryck, och att jämföra bråkuttryck och operationer med bråk. Videofilmerna bedömdes sedan av yrkesverksamma lärare där de bland annat fick värdera vad som kännetecknade en god undervisning om tal i bråkform. Resultatet visade att en god undervisning kännetecknades av att lärare (i filmerna) gjorde många sammankopplingar mellan representationer.

Resonemanget om att det är sammankopplingarna mellan representationerna som är centrala för elevers lärande stöds av flera forskare (exempelvis Clements 1999; Duval 2006; Lesh m.fl., 1987; Lamon 2001; Rau m.fl., 2015). I Lesh m.fl. (1987) presenteras hur en lärare visade hur en uppgift kunde lösas med hjälp av att olika representationer kopplades samman. Uppgiften handlade om att visa vad en tredjedel av en hel var. En bild av en pizza, i form av en cirkel, ritades upp och läraren förklarade att en tredjedel av pizzan skulle ätas upp. Bråkuttrycket $\frac{1}{3}$ skrevs upp på tavlan. Cirkeln delades in i tre lika stora delar och läraren visade genom att peka på en av tredjedelarna i cirkeln hur mycket en tredjedel var. Exemplet visar hur läraren påvisar sambandet och kopplingarna mellan representationerna bild och skriftliga symboler.

Dündar (2015) betonar att överdrivet användande av och sammankopplingar mellan representationer kan vålla problem för eleverna eftersom de tenderar att blanda ihop representationerna med varandra. En överdriven användning av representationer sker enligt Dündar (2015) när lärare använder en eller flera representationer som inte fyller någon mer funktion än de som redan används.

Sammankoppla representationer med hjälp av verbala och icke verbala handlingar

Lesh m.fl. (1987) menar att lärares språk tenderar att bli allt för avancerat och kan på så sätt försvåra elevernas förståelse för sambanden mellan de olika representationerna. Sambanden mellan representationerna kan då visas med hjälp av icke verbala handlingar, det vill säga gester. Flera studier som undersökt hur lärare visar på sambanden mellan representationerna när de undervisar i matematik (exempelvis Alibali & Nathan, 2012; Alibali m.fl., 2014; Yeo m.fl., 2017) visar att lärare använder både gester (icke verbala handlingar, vanligtvis med händer eller armar) (jfr. McNeill, 1992) och tal (verbal handling) i samband med att de gör en koppling mellan två och flera representationer. I delstudie II uppmärksammas på vilka olika sätt lärare sammankopplar representationer.

En vanligt förekommande icke verbal handling som lärarna i Richlands m.fl. (2007) studie använde var att peka fram och tillbaka mellan två olika representationer, exempelvis en ekvation och en graf, i syfte att visa på sambandet mellan dessa. En annan funktion med icke verbala handlingar kan vara att lärare pekar på något som de vill att eleverna ska uppmärksamma. Till exempel kan en lärare peka på en bråkcirkel där en tredjedel är skuggad och sedan peka på motsvarande bråkuttryck uttryckt med hjälp av skriftliga symboler ($\frac{1}{3}$). Med hjälp av ord kan gesterna förstärkas (Edwards, 2009), till exempel att läraren i exemplet ovan samtidigt muntligt säger att ”den här bilden och det här uttrycket båda visar bråkuttrycket en tredjedel”.

Flera studier (exempelvis; Cook m.fl., 2013; Koumoutsakis m.fl., 2016; Surahmi m.fl., 2018) indikerar att elevernas lärande ökar genom att läraren använder sig av både verbala och icke verbala handlingar. Andra studier (exempelvis Goldin-Meadow & Singer, 1999; Yeo m.fl., 2017) visar emellertid på motsatsen. Dessa studier tyder på att eleverna

inte gynnades av att lärarna använde både tal och gester samtidigt när de gjorde kopplingar mellan representationer. Exempelvis visade resultatet av Yeos m.fl. (2017) studie bland annat att när lärarna använde både verbala och icke verbala handlingar för att göra kopplingar mellan grafer och ekvationer, försämrades elevernas kunskaper om ekvationer jämfört med om lärarna enbart använde tal (verbala handlingar) för att göra kopplingarna mellan graferna och ekvationerna. Yeo m.fl. (2017) hänvisar till Hostetters (2011) metaanalys för att ge en förklaring till resultatet. Enligt Hostetter (2011) kan effekten av gesterna minska när likartad information ges genom både gester och tal. I dessa fall verkar gesterna spela mindre roll för förståelsen. Detta fenomen kan förklaras med hjälp av Mayers ”redundansprincip” (min översättning) (se Mayer m.fl., 2001). Enligt denna princip kan vi inte fokusera på information från flera olika källor samtidigt utan att arbetsminnet blir överbelastat. I studierna ovan skulle således icke verbala handlingar vara överflödiga.

2.3.4 Att representera tal i bråkform

Vilka representationer lärare använder för att representera ett tal i bråkform varierar. Exempelvis kan ett pärlband med pärlor i två olika färger användas för att representera bråk som ett förhållande medan en bråkcirkel kan representera bråk som del av helhet (Dreher m.fl., 2016). Forskning (exempelvis Stylianou, 2010) visar att lärare tenderar att använda sig av samma representation i matematikundervisningen oavsett innehåll. Den vanligaste representationen som lärare använder är den verbala, muntliga representationen. Denna representation används när lärare exempelvis förklarar nya begrepp (Coe m.fl., 2014). En verbal, muntlig representation kan också kompletteras med icke verbala representationer så som bilder, laborativt material och skriftliga symboler (Cai, 2005; Flevares & Perry, 2001). Eftersom ingen enskild representation kan användas för att representera alla matematiska begrepp behöver lärare välja ut den eller de representationer som är mest lämpliga att representera det aktuella begreppet som ska behandlas i matematikundervisningen (Ball, 1993; Cramer & Wyberg, 2009; Gersten m.fl., 2017). I det följande beskrivs hur några olika representationer kan användas för att representera olika delar av tal i bråkform som är av relevans för avhandlingens syfte och frågeställningar.

Jämföra och storleksordna tal i bråkform

Bråkcirklar har visat sig vara en gynnsam representation vid undervisning om att jämföra och storleksordna tal i bråkform (Cramer & Henry, 2002; Cramer m.fl., 2008). En förklaring till att bråkcirklar är fördelaktigt att använda i dessa sammanhang är att de stödjer elevers uppfattning om relationen mellan storleken av nämnaren och täljaren eftersom eleverna lättare kan avläsa att ju fler delar en bråkcirkel är indelad i desto mindre blir delarna. Ett exempel på att elever utnyttjar bråkcirklarna illustreras av Cramer m.fl. (2008) i en studie där en elev ombads avgöra vilket av bråkuttrycken $\frac{5}{6}$ och $\frac{4}{5}$ som var störst. Eleven menade att bråkuttrycket $\frac{5}{6}$ var störst eftersom båda bråkuttrycken var "en del" ifrån en hel men att femtedelar var större än sjättedelar. Eleven använde sig av bråkcirklarna som representation för att visualisera att storleken mellan sjättedelar och femtedelar skiljde sig åt. Eleven kom fram till att en sjättedel var mindre än en femtedel och därmed var bråkuttrycket $\frac{5}{6}$ närmare en hel än bråkuttrycket $\frac{4}{5}$ och alltså störst.

Om bråkcirklar används för att jämföra två bråkuttryck, exempelvis $\frac{1}{4}$ med $\frac{1}{2}$ är det viktigt att tänka på att bråkcirklarna är kongruenta. Om den bråkcirkel som representerar bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ är större än bråkcirkeln som representerar $\frac{1}{2}$ kan detta uppfattas som att $\frac{1}{4}$ är större än $\frac{1}{2}$. Användandet av bråkcirklar som en representation av bråkuttryck är begränsande, då det är svårt att dela in bråkcirklar i exakt lika stora delar utan att använda exempelvis passare. En annan begränsning med användandet av bråkcirklar är att elever tenderar att enbart fokusera på täljarens storlek, exempelvis hur många bitar av en pizza har ätits, och bortse från nämnarens storlek (Siegler m.fl., 2010).

I stället för att använda bråkcirklar i samband med att tal i bråkform med olika nämnare ska jämföras eller storleksordnas föreslår Lamon (2005) att det kan underlätta att använda två tallinjer. Om exempelvis bråkuttrycken $\frac{1}{3}$ och $\frac{3}{8}$ ska jämföras kan lärare först rita upp en tallinje som delas in i tredjedelar och därefter rita upp en (lika lång) tallinje, under den först ritade. Denna tallinje delas in i åttondelar.

Beräkning av tal i bråkform

Att använda bråkcirklar i samband med undervisning om addition och subtraktion av tal i bråkform har också visat sig vara fördelaktigt (Cramer m.fl., 2008). För att hjälpa elever att förstå att bråkuttryck måste ha samma nämnare när två eller fler bråkuttryck med olika nämnare ska beräknas kan bråkcirklar som visar motsvarande bråkuttryck användas exempelvis genom att addera en bråkcirkel delad i halvor med en bråkcirkel delad i tredjedelar vid addition av $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. För att visa hur bråkuttrycken kan förlängas så att de får en gemensam nämnare kan läraren använda följande bilder, se Figur 12.

Figur 12

Hur bråkcirklar kan användas för att visa hur bråkuttryck kan förlängas så att de får en gemensam nämnare (bearbetad efter Siegler m.fl., 2010, s. 28)

Användandet av areamodeller, det vill säga en tvådimensionell representation så som bråkcirklar och rektanglar (jfr. Siegler, 2003), kan dock leda till att eleverna gör felaktiga beräkningar. Detta uppmärksammades i en studie av Ball (1993) där eleverna skulle lösa additions- och subtraktionsuppgifter med hjälp av dels rektanglar och dels tallinjer. När beräkningarna representerades av rektanglar adderade eleverna både nämnaren och täljaren i uppgiften, exempelvis $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, men detta skedde inte när beräkningarna representerades av en tallinje. Ball (1993) påpekar att det i sig inte är fel att använda areamodeller för att representera beräkningar av tal i bråkform men läraren behöver påtala för eleverna hur de ska användas.

Namnge tal i bråkform

I en studie av Tunç-Pekkan (2015) undersöktes elevernas (skolår 4 och 5) förmåga att namnge tal, exempelvis ange andelen som är skuggade i olika figurer i bråkform, när detta representerades med hjälp av bråkcirklar, rektanglar (areamodeller) eller tallinjer (tallinjemodeller) och hur de är relaterade till elevers kunskaper om tal i bråkform. Resultatet visade att nästan alla (ca 99%) av de 565 elever som deltog i studien kunde namnge ett tal i bråkform när det representerades av bråkcirklar eller rektanglar. Däremot var det bara 48 % av eleverna som korrekt kunde namnge ett tal i bråkform när det representerades på en tallinje. När uppgifterna i stället handlade om att eleverna skulle namnge tal i bråkform där täljaren var större än nämnaren (exempelvis $\frac{6}{5}$) visade resultatet en tydlig skillnad mellan hur bråkuttrycken var representerade. Lättast att avläsa denna typ av bråkuttryck var när dessa representerades av bråkcirklar (80 %) medan det endast var drygt 30 % av eleverna som kunde avläsa bråkuttrycken när de representerades av rektanglar eller tallinjer. Detta betyder att när ett tal i bråkform ska namnges spelar det ingen roll om bråkuttrycket representeras av bråkcirklar eller rektanglar under förutsättning att täljaren är mindre än nämnaren i bråkuttrycket jämfört med om bråkuttrycket representeras som ett tal på en tallinje. Är det däremot bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren som ska namnges är detta enklare när dessa bråkuttryck representeras av bråkcirklar jämfört med rektanglar och tallinjer.

Innebörden av bråk som tal

För att representera bråk som tal, exempelvis rita en bild som visar bråkuttrycket $\frac{3}{4}$, visar forskning att detta är lättare för eleverna att göra med hjälp av rektanglar eller cirklar än med hjälp av tallinjer (Keijzer & Terwel, 2003; Tunç-Pekkan, 2015). Resultatet i Tunç-Pekkan (2015) visade att eleverna hade lättast att representera bråkuttryck med hjälp av en rektangel (ca 70 % korrekt) jämfört med att representera bråkuttrycket i en bråkcirkel (ca 30 % korrekt). De menar att resultatet tyder på att delarna av en rektangel lättare kan itereras än cirkelsektorerna.

Däremot visar flera studier (exempelvis Clarke m.fl., 2011; Cramer & Wyberg 2009) att när täljaren i ett bråkuttryck var större än nämnaren,

exempelvis $\frac{4}{3}$, var detta lättare att representera på en tallinje följt av att rita bråkuttrycken med hjälp av rektanglar. Svårast var det för eleverna att representera ett tal i bråkform där täljaren är större än nämnaren med hjälp av bråkcirklar. Forskarna menar att förmågan att kunna representera ett tal i bråkform där täljaren är större än nämnaren med hjälp av tallinjer har många fördelar. Det kan exempelvis öka elevernas förståelse att bråkuttrycket $\frac{5}{3}$ är det samma som $1\frac{2}{3}$, vilket i sin tur underlättar förståelsen av att mellan två tal finns det oändligt många tal i bråkform, det vill säga "tätheten" av de rationella talen. Förutom att tallinjen underlättar förståelsen mellan tal i bråkform finns det en annan fördel med tallinjen, då den erbjuder möjlighet att se hur naturliga tal och rationella tal i bråk- och decimalform kan relateras till varandra, exempelvis att $\frac{6}{3}$ är detsamma som 2 (Kilpatrick m.fl., 2001).

2.4 Sammanfattning

I detta kapitel redogörs för forskning om elevers kunskaper om tal i bråkform som är av relevans för avhandlingens två delstudier. Bland annat lyfts komplexiteten med att förstå tal i bråkform då dessa avviker från de naturliga talen. Exempel på en sådan avvikelse är att tal i bråkform uttrycks av formen $\frac{a}{b}$ men många elever ser "a" och "b" som självständiga heltal snarare än som ett förhållande mellan "a" och "b".

I kapitlet har dessutom forskning med relevans för att undervisa om tal i bråkform redovisats. I forskningsgenomgången framkommer vikten av att undervisa om att tal i bråkform kan ses som ett tal. Exempelvis framhålls att tallinjer samt resttänk- och referensstrategin kan användas för att underlätta för elever att jämföra och storleksordna tal i bråkform.

Tidigare forskning om hur undervisning om tal i bråkform kan bedrivas handlar till stor del om huruvida de strategier som lärare eller elever använder är informella eller formella. Användandet av informella strategier sker genom att lärare eller elever använder olika representationer, såsom bilder och olika laborativa material, det vill säga representationer som kan kopplas till den konkreta, respektive den representativa fasen i CRA-modellen. Användandet av formella strategier sker i stället genom att lärare och elever använder matematiska symboler, det vill säga skriftliga representationer som kan kopplas till den abstrakta fasen i CRA-modellen. Den tidigare forskningen om

undervisning om tal i bråkform har genererat en stor kunskapsbas om informella och formella strategier. Det finns emellertid fortfarande kunskapsluckor beträffande undervisning om tal i bråkform som behöver undersökas ytterligare. En sådan kunskapslucka handlar om hur lärare hanterar övergången mellan informella och formella strategier, det vill säga hur undervisningen sker mellan den konkreta, den representativa, och den abstrakta fasen i CRA-modellen. I denna avhandling uppmärksammas detta genom att undersöka konkretiserande och laborerande arbetssätt, vilket beskrivits i tidigare avsnitt. Det handlar också om hur undervisning av tal i bråkform sker när lärare använder flera olika representationer, oberoende av om de är informella eller formella, och framför allt hur lärare väljer att koppla samman dessa representationer. Genom att studera detta kan föreliggande avhandling bidra med ökad förståelse för undervisning om tal i bråkform och vad som görs möjligt för eleverna att lära om tal i bråkform.

Slutligen har också forskning med relevans för lärares användning av representationer redovisats. I forskningsgenomgången framkommer både för- och nackdelar med användandet av en eller flera representationer. I kapitlet beskrivs olika svårigheter med att använda representationer. Bland annat framhålls vikten av att eleverna tolkar och förstår vad varje enskild representation representerar samt att eleverna förstår sambanden mellan representationerna. Därtill är det viktigt att lärare väljer ut den eller de representationer som är mest lämpliga i relation till det som ska behandlas i matematikundervisningen.

3. Variationsteori

I den här avhandlingen har variationsteorin valts som teoretiskt ramverk. Valet grundar sig på att det är en teori som är empiriskt förankrad och som i tidigare studier (exempelvis Guo m.fl., 2012; Häggström, 2008; Kullberg & Runesson, 2013; Runesson, 1999; Sun, 2015) visat sig vara ett användbart verktyg för att analysera undervisning i relation till ett ämnesinnehåll samt att analysera vad som görs möjligt för elever att lära. Forskning har visat att elever erbjuds olika möjligheter att lära trots att ämnesinnehållet i undervisningen är det samma (Ekdahl, 2019; Häggström, 2008; Mannula, 2018; Runesson, 1999). Variationsteorin har en tydlig koppling till lärande och undervisning och ger ett ramverk som gör det möjligt att beskriva och analysera skillnader i hur ett innehåll behandlas och vad som görs möjligt för elever att lära (Runesson, 2005). I den här avhandlingen analyseras undervisning av tal i bråkform och vad som görs möjligt för elever att lära om detta när lärare och elever använder representationer av tal i bråkform. I detta kapitel beskrivs några av variationsteorins centrala begrepp som är relevanta för denna avhandling.

Variationsteorin har sitt ursprung i fenomenografi (Marton, 1981). Enligt fenomenografin uppfattar vi ett fenomen *som någonting*. Detta någonting kan erfaras på olika sätt av olika människor. Olika fenomen består av olika aspekter. Dessa aspekter definierar och särskiljer ett fenomen från andra fenomen (Pang, 2003). Det är svårt att uppmärksamma många aspekter samtidigt eftersom vår förmåga att fokusera på flera aspekter är begränsad (Miller, 1956). Vissa aspekter är mer framträdande och bildar *förgrund*, medan andra aspekter bildar *bakgrund* i medvetandet (Marton & Booth, 1997). Vad som är i förgrunden respektive bakgrunden i vårt medvetande varierar. Beroende på vilka aspekter som framträder i förgrunden kommer samma fenomen därför att uppfattas på olika sätt.

I denna avhandling observeras och analyseras vilka aspekter av tal i bråkform lärare eller elever synliggör, det vill säga vad som bildar förgrund i undervisningen och vilka aspekter av tal i bråkform som får träda tillbaka och bilda bakgrund.

Fenomenografin fokuserar på hur människor erfar samma fenomen, det vill säga hur fenomenet uppfattas. Uppfattningar ska inom fenomenografin förstås som sätt att erfar något, sätt att se på något eller

sätt att förstå något (Marton & Pong, 2005). Fenomenografins mål är att beskriva de kvalitativa skillnaderna avseende hur människor erfar samma fenomen (Marton, 1981; Marton & Booth, 1997). På grundval av fenomenografen har en teori om lärande och undervisning, *variationsteorin*, vuxit fram (Marton, 2015). Fenomenografen är ett forskningsområde där fokus riktas mot att undersöka på vilka kvalitativt skilda sätt ett fenomen kan uppfattas. Variationsteorin kan däremot förstås som en lärandeteori om vad som krävs för att lära (Pang, 2003; Runesson & Kullberg, 2010).

Lärandet är inom variationsteorin centralt och lärandet är alltid ett lärande av något. Lärandet har med andra ord ett objekt, vilket inom teorin benämns som *lärandeobjekt* (Lo, 2012; Marton, 2015; Runesson, 2017). Med hjälp av variationsteorin blir det möjligt att förstå hur skilda sätt att behandla ett specifikt ämnesinnehåll relaterar till elevernas möjlighet att lära detta innehåll. Ett grundantagande inom variationsteorin är att vi lär nytt genom att erfara i första hand skillnader, det vill säga vad som skiljer något från något annat, inte likheter (Marton, 2015; se även Gibson & Gibson, 1955).

3.1 Lärandeobjekt

Med ett lärandeobjekt avses den förmågan eleverna, genom undervisning, ska få möjlighet att utveckla. Lärandeobjektet är kopplat till en avgränsad förmåga i relation till ett avgränsat innehåll (Marton, 2015; Marton m.fl., 2004; Runesson, 2017). Det kan exempelvis handla om att elever ska ges möjlighet att utveckla förmågan att storleksordna bråk med olika nämnare. Ett lärandeobjekt kan på så sätt sägas bestå av två delar, det *direkta lärandeobjektet* och det *indirekta lärandeobjektet* (Marton & Booth, 1997). Det direkta lärandeobjektet kan definieras i termer av innehållsliga aspekter. Det indirekta lärandeobjektet fokuserar på den förmåga som eleven förväntas utveckla i relation till det direkta lärandeobjektet. I exemplet ovan med att storleksordna bråk med olika nämnare är det direkta lärandeobjektet innehållet bråk med olika nämnare och det indirekta lärandeobjektet är förmågan att kunna storleksordna dessa bråkuttryck. De två delarna kan analytiskt separeras, men kan i realiteten inte existera utan varandra (Marton & Booth, 1997).

3.2 Kritiska aspekter

Ett fenomen, eller ett lärandeobjekt, består av en varierande mängd aspekter. Den som ska lära något om något har vanligtvis urskilt en del aspekter av dessa fenomen, till exempel kan en elev ha urskilt skillnaden mellan ett heltal och ett bråkuttryck. Lärandet kan beskrivas som processen när den lärande urskiljer fler aspekter av innehållet, till exempel att det finns olika typer av bråkuttryck såsom stambråk och icke-stambråk. De aspekter som behöver urskiljas för att få fördjupad kunskap om ett fenomen kallas *nödvändiga aspekter* (Marton, 2015). När nya aspekter, alternativt den inbördes relationen mellan tidigare erfarna aspekter uppfattas på ett annat sätt kan ett lärande ske (se Pang & Lo, 2012). De nödvändiga aspekter av ett lärandeobjekt som ännu inte urskilts benämns som *kritiska aspekter* (Marton, 2015). I en undervisningssituation innebär det att aspekter som betraktas som nödvändiga att erfara, för att förstå ett fenomen på ett visst sätt, enbart är kritiska för dem som ännu inte lyckats urskilja dessa. De kritiska aspekterna är på det sättet relaterade till den aktuella elevgruppen. I denna avhandling är det exempelvis nödvändigt för eleverna att förstå nämnarens betydelse i ett bråkuttryck för att kunna storleksordna bråkuttryck. Runesson (2017) betonar att de kritiska aspekterna ska ses som något dynamiskt och framväxande och inte som en statisk lista över olika ämnesinnehåll som eleverna ska lära sig. Kritiska aspekter ska i stället ses som relationella, då det alltid finns en relation mellan den lärande och det som ska läras. Det betyder att de kritiska aspekterna kan komma att förändras under det att undervisningen pågår (Lo, 2012).

3.3 Dimensioner av variation och mönster av variation

Marton och Booth (1997) menar att ett fenomen definieras av den variation av de olika aspekterna som finns i fenomenet. Hur ett fenomen uppfattas eller erfars beror på vilka aspekter av fenomenet som vi fokuserar på. För att de ska bli urskilda förutsätts att de urskiljs som en *dimension av variation* (Runesson, 2017). Begreppet aspekt och dimension av variation kan med andra ord ses som synonymter (Marton & Booth, 1997; Runesson, 2017). Marton (2015) exemplifierar dimension av variation med exemplet färg. Inom dimensionen färg finns det många olika färger, till exempel blå, grön och röd. Det ges

alltså olika möjligheter till variation av färger. Dessa variationer benämns enligt Marton (2015) som *värden* i en dimension. Färgerna blå, grön och röd utgör således exempel på värden inom dimension av variation färg. Marton (2015) hävdar att det endast är möjligt att lära sig något nytt genom att urskilja aspekter som varierar. En medveten variation av lärandeobjekt där elevernas uppmärksamhet riktas mot de kritiska aspekterna kan således, enligt variationsteorin, öka elevernas möjlighet till lärande. För att en aspekt ska göras urskiljningsbar behöver den *varieras* samtidigt som andra aspekter hålls *invarianta*, det vill säga konstanta. Utifrån exemplet ovan med ”färg” innebär det att om det är ett nytt fenomen som ska erfaras räcker det inte om endast en färg presenteras som exempelvis en grön boll, en grön stol o.s.v. eftersom färgen grön är invariant (jfr. Marton, 2015). Om färgerna varierar, som exempelvis grön och blå, som bildar två värden i en dimension av variation, ges möjlighet att erfara fenomenet färg. Utifrån detta resonemang skulle det medföra att för att en elev ska urskilja nämnarens betydelse av ett tal i bråkform, ska nämnarna variera medan täljarna är invarianta. Exempelvis skulle två bråkuttryck liknande $\frac{3}{4}$ respektive $\frac{3}{6}$ kunna presenteras för eleven eftersom bråkuttrycken har samma täljare (3), medan aspekten nämnaren (4 respektive 6) varierar i bråkuttrycken.

I undervisningen behöver lärare synliggöra aspekter av lärandeobjekten genom systematisk variation (Runesson & Mok, 2004). Tidigare studier (exempelvis Gu m.fl., 2004; Häggström, 2008; Rowland, 2008; Watson & Mason, 2006) har visat att en avgörande faktor för elevers möjlighet att lära kan vara att läraren öppnar upp en dimension av variation som synliggör just den aspekt och de värden som är i fokus genom en systematisk variation. Häggströms (2008) studie visade bland annat att svenska lärare inte behandlade lärandeobjekten på ett lika strukturerat sätt som de kinesiska lärarna. Detta anser Häggström (2008) kan vara en förklaring till att kinesiska elever får goda resultat i olika internationella kunskapsmätningar. Det innebär att om läraren medvetet använder en variation av innehållet ökas elevernas möjlighet till lärande (Lo, 2012; Marton, 2015). Systematisk variation sker genom att olika *variationsmönster*, exempelvis kontrast och generalisering, används i undervisningen (se Marton, 2015). I denna avhandling studeras elevers möjligheter till lärande, med avseende på tal i bråkform, genom erbjudna mönster av variation.

Variationsmönstret *kontrast* används för att urskilja en aspekt som ännu inte har urskilts, det vill säga en kritisk aspekt. Detta kan ske när minst två olika värden jämförs med varandra. När två värden kontrasteras öppnas en dimension av variation. I och med denna jämförelse, kontrastering, kan aspekten urskiljas (Marton, 2015). Ett exempel på när variationsmönstret kontrast kan användas är i samband med att elever ska ges möjlighet att erfara vad en halv är. En vanlig uppfattning av begreppet ”en halv” är att det räcker med att helheten delas i två delar. Att delarna måste vara lika stora är något som inte alltid uppmärksammas (Cramer m.fl., 2002). För att förstå betydelsen av begreppet en halv måste en halv separeras ut. Detta kan göras genom att minst två värden kontrasteras mot varandra, vilket kan ske med hjälp av två bilder, se Figur 13, där begreppet en halv kontrasteras mot något som inte är en halv. Den aspekten varierar, medan andra aspekter, som rektanglarnas storlek och position, är konstanta och bildar en invariant bakgrund. Att använda kontrastering är effektivt för att få någon att uppmärksamma en aspekt av ett fenomen, exempelvis ett specifikt begrepp inom matematiken, som denne tidigare inte urskilt (se Marton & Booth, 1997).

Figur 13

Exempel på kontrast. En rektangel delad i två lika stora delar kontrasteras med en rektangel delad i två olika stora delar

När en aspekt av ett lärandeobjekt är urskild måste den *generaliseras* (Marton, 2015). Detta innebär att variationsmönstret generalisering bör följa efter att en aspekt kontrasterats (Marton & Booth, 1997). Avsikten med variationsmönstret generalisering är att undersöka gränserna för aspekten (Marton, 2015). Om exempelvis begreppet en halv undersöks måste aspekter som inte påverkar innebörden av begreppet en halv separeras ut. Detta kan ske genom att exempelvis visa olika sätt att uttrycka begreppet en halv på, såsom $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ eller $\frac{4}{8}$. Fokus är att identifiera

likheter, det vill säga att bråkuttrycken har samma värden trots att de uttrycks på olika sätt. Begreppet ”en halv”, hålls här invariant medan uttrycken för begreppet varierar. På så sätt framträder att det är en halv, oavsett om det uttrycks på olika sätt. Här ges därmed fler exempel på samma sak.

3.4 Samtidighet

Det finns olika slag av samtidighet: *synkron* och *diakron* (Marton, 2015; Marton m.fl., 2004; Pang, 2003). Skillnaderna mellan synkron och diakron samtidighet handlar om tidsaspekten i samtidigheten,” [T]he different things or qualities may be present at the same time (synchronic simultaneity) or may have appeared at different points in time but are experienced simultaneously (diachronic simultaneity)” (Marton, 2015, s. 109). Citatet visar att en synkron samtidighet syftar på en variation vid ett och samma tillfälle. Diakron samtidighet innebär i stället en variation i relation till tidigare erfarenheter eller tillfällen. Marton och Booth (1997) liksom Bergentoft (2014, 2020) menar att möjligheterna till lärande ökar vid en synkron samtidighet, eftersom fler än ett värde av ett avsett lärandeobjekt erfars samtidigt.

I delstudie II används begreppen synkron och diakron samtidighet för att särskilja hur lärarna öppnar upp en dimension av variation av ett lärandeobjekt. Om två bråkuttryck, exempelvis bråkuttrycken $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{5}$, visas samtidigt för eleverna och läraren uppmärksammar skillnaden mellan bråkuttrycken (nämnarnas storlek i de två bråkuttrycken), kan dimensionen av variation öppnas upp synkront. Diakron variation innebär att värdena varieras var för sig vid olika tillfällen under undervisningssekvensen. I exemplet ovan innebär det att läraren först synliggör och uppmärksammar eleverna på det ena bråkuttrycket, $\frac{1}{4}$ och därefter, längre fram i undervisningssekvensen, uppmärksammar det andra bråkuttrycket $\frac{1}{5}$. Bråkuttrycken fokuseras på så sätt vid olika tidpunkter av undervisningssekvensen och dimension av variation kan öppnas upp diakront.

3.5 Sammanfattning

I kapitlet redogörs för det variationsteoretiska perspektivets syn på lärande. Ett grundantagande är att vi lär nytt genom att erfara skillnader,

det vill säga vad som skiljer något från något annat, inte likheter. Ett lärande är alltid ett lärande av någonting. Det innebär att lärandet har ett objekt. Lärandeobjektet är kopplat till en avgränsad förmåga i relation till ett avgränsat innehåll, exempelvis förmågan att storleksordna bråkuttryck. Förmågan utvecklas genom att möta ett visst mönster av variation och invarians (konstans). Genom att variera olika aspekter av ett lärandeobjekt kan lärare skapa olika variationsmönster. Aspekter av lärandeobjektet kan urskiljas genom kontrast. Därefter undersöks gränserna för aspekten via generalisering. Dessa variationsmönster kan synliggöras antingen synkront eller diakront.

4. Metod

I kapitlet beskrivs den metod som använts för att uppnå avhandlingens syfte och besvara frågeställningarna. Därefter beskrivs hur datainsamlingen genomförts, följt av en beskrivning av hur datamaterialet bearbetats och analyserats. Kapitlet avslutas med att de forskningsetiska överväganden som gjorts i relation till avhandlingen diskuteras.

4.1 Val av metod

Avhandlingens syfte har varit att skapa förståelse för lärares undervisning om tal i bråkform i skolår 4–6 och vad eleverna ges möjlighet att erfara om tal i bråkform. I delstudie I, som resulterade i licentiatuppsatsen (Sveider, 2016) var syftet att, med hjälp av variationsteorin, beskriva och analysera lärares och elevers användning av laborativt material i samband med undervisning om tal i bråkform. I delstudie I beskrivs och analyseras även vilka aspekter av tal i bråkform eleverna gavs möjlighet att erfara när lärare och elever använde laborativt material i undervisningen. I delstudie II var syftet att, med variationsteorin som teoretiskt ramverk, beskriva och analysera hur lärare använder och kopplar samma representationer när de undervisar om tal i bråkform, samt vad som görs möjligt för eleverna att erfara om tal i bråkform genom lärares användande och sammankopplingar av representationer.

För att kunna beskriva och analysera hur lärare och elever använder laborativt material, hur lärare använder och kopplar samman olika representationer och vad eleverna ges möjlighet att erfara när de undervisas om tal i bråkform, har ett antal matematiklektioner observerats med hjälp av videoinspelningar. En matematiklektion definieras här som ett rum där en specifik grupp elever (i skolår 4–6) har en matematiklektion om ca 40–90 min med en undervisande matematiklärare (jfr. Kilhamn m.fl., 2019). Avsikten med observationerna har varit att i så liten utsträckning som möjligt påverka och styra lärares eller elevers agerande under matematiklektionerna. Det innebär att den matematikundervisning som studerats har skett under naturliga förhållanden och de observationer som genomförts kan liknas vid naturalistiska observationer (jfr. Cohen m.fl., 2018).

Metoden att samla in data med hjälp av ljud- och bildinspelningsteknik ger ett mycket detaljrikt empiriskt material, vilket möjliggör rika beskrivningar av matematikundervisningen (jfr. Bjørndal, 2005, Clarke m.fl., 2006; Derry m.fl., 2010; Jordan & Henderson, 1995). Genom att använda videoinspelningar kan matematiklektionerna granskas ett flertal gånger, vilket underlättat sökandet av mönster av likheter och skillnader. Ytterligare fördelar med videoinspelningar är att de möjliggör att frågeställningar, likt de i denna avhandling som är nära kopplade till praktiken, kan bli forskningsfrågor (jfr. Kilhamn m.fl., 2019). Videoinspelningar gör det även möjligt att observera lärares och elevers verbala interaktioner (Mercer & Sams, 2006), vilket studeras i både delstudie I och II. Videoinspelningarna kan också underlätta analysen av icke verbala handlingar, till exempel hur lärare och elever använder laborativt material, vilket studeras i delstudie I, samt hur lärare använder icke verbala handlingar, exempelvis pekar på olika representationer, vilket studeras i delstudie II (jfr. Heath m.fl., 2010; Sparrman, 2005).

Även om det finns fördelar med videoinspelningar som datainsamlingsmetod finns det en del begränsningar. En sådan begränsning som lyfts fram av Clarke m.fl. (2006) är att kameran och forskaren kan komma att påverka både elevers och lärares agerande, vilket har beaktats i urvalet av elever och lärare till denna avhandling (se avsnitt 4.1.1 *Urval*). Det kan därför inte uteslutas att min och videokamerans närvaro medfört så kallade *observationseffekter* (Hammersley & Atkinson, 1995; se även Granström, 2004) och därmed påverkat undervisningen.

Vidare menar Jordan och Henderson (1995) att det finns begränsningar gällande både tekniken i sig själv och handhavandet av tekniken. En teknisk begränsning har varit placeringen av videokameran i klassrummen. Videokameran har haft en fast placering med intentionen att på bästa sätt fånga upp lärarnas handlingar i klassrummet utan att störa undervisningen. Placeringen grundar sig i Heaths m.fl. (2010) argument om att videokamerans placering ska vara så diskret som möjligt så att den inte påverkar individerna som deltar i studien. Utöver videokamera har, vid behov, en Ipad använts för att fånga upp detaljer som visats på tavlan eller när eleverna suttit i grupper eller i par.

En ytterligare begränsning gäller användandet av tekniken. Mondada (2006) framhåller att videoinspelningar av interaktioner kräver hög grad

av reflexivitet. Den som spelar in måste kunna avgöra när en interaktion börjar eller slutar, eftersom dessa ställningstaganden i sin tur påverkar vilket datamaterial som är möjligt att analysera.

I delstudie I avgränsades videoinspelningarna till att fokusera på när lärare eller elever använde någon typ av laborativt material i undervisningen. Till delstudie II bestämdes innan datainsamlingen började att fokus skulle riktas mot enbart lärares användning av representationer när de undervisar om tal i bråkform. Avsikten med att redan innan datainsamlingen påbörjades avgränsa vad som skulle studeras var att undvika alltför stora datamängder, vilket Erickson (2011) menar kan ske när datainsamlingen sker med hjälp av videoinspelningar.

4.1.1 Urval

För att kunna besvara avhandlingens frågeställningar har ett *målstyrt urval* använts (jfr. Patton, 1990). Detta innebär att en förfrågan om att delta i studien ställts till lärare som undervisar i matematik i skolor 4–6. Utan att göra anspråk på att få ett fullständigt representativt urval baserades urvalet utifrån argumentet om maximal variation (jfr. Payls, 2008). För att tillgodose en stor variation har urvalet utgått från att observera matematiklektioner från olika: kommuner, skolor, årskurs och lärare, se Tabell 1, delstudie I och Tabell 2, delstudie II.

Tabell 1

Presentation av lärare, delstudie I

Lärare	Utbildning	Antal år i yrket	Års-kurs	Skola	Kommun
a	Klasslärare, mellanstadiet	31	4	Stadsskola	Mindre kommun ⁸
b	År 4-gymnasiet Ma NO	30	6	Stadsskola	Större kommun ⁶

⁸ Mindre kommun=befolkningsmängd mindre än 30 000 invånare, större kommun=befolkningsmängd mer än 150 000 invånare. Uppgifter hämtade från: <http://www.statistikdatabasen.scb.se/pxweb/sv/ssd/> 20200126

c	Ma NO år 1–7	14	4	Stadsskola	Större kommun
d	Ma NO år 4–9	5	5	Landsbygdsskola	Mindre kommun
e	Lärare mot de tidigare åren	6	5	Landsbygdsskola	Större kommun
f	Ma NO år 4–9	10	5	Stadsskola	Mindre kommun
g	Klasslärare, mellanstadiet	38	4	Landsbygdsskola	Mindre kommun
h	Lärare mot de tidigare åren med Ma inriktning	6	6	Stadsskola	Större kommun
i	Klasslärare, mellanstadiet	25	5	Stadsskola	Mindre kommun
j	Klasslärare, mellanstadiet	25	4	Landsbygdsskola	Mindre kommun
k	Ma NO år 1–7	6	5	Landsbygdsskola	Mindre kommun
l	Grundlärare i år 4–6	4	5	Stadsskola	Större kommun
m	Grundlärare i år 4–6	3	6	Stadsskola	Mindre kommun
n	Ma NO år 1–7	8	5	Stadsskola	Större kommun
o	Klasslärare med inriktning mot Ma och engelska	16	4	Stadsskola	Mindre kommun
p	Ma NO år 4–9	14	4	Landsbygdsskola	Större kommun
q	Lärare mot de tidigare åren med SO inriktning	4	5	Stadsskola	Mindre kommun
r	Ma NO år 4–9	4	6	Stadsskola	Större kommun
s	Ma NO år 1–7	5	5	Stadsskola	Större kommun
t	Ma NO år 1–7	7	4	Landsbygdsskola	Mindre kommun

Tabell 2

Presentation av lärare, delstudie II

Lärare	Utbildning	Antal år i yrket	Års- kurs	Skola	Kommun
A	Ma NO år 4–9	19	4	Landsbygdsskola	Mindre kommun
B	Ma NO år 1–7	13	4	Stadsskola	Större kommun
C	Grundlärare i år 4–6	4	5	Stadsskola	Större kommun
D	Grundlärare i år 4–6	5	5	Stadsskola	Mindre kommun
E	Grundlärare i år 1–3	6	4	Landsbygdsskola	Större kommun
F	Ma NO år 4–9	18	6	Stadsskola	Mindre kommun
G	Klasslärare, mellanstadiet	25	6	Landsbygdsskola	Mindre kommun
H	Ma NO år 1–7	16	5	Stadsskola	Större kommun
I	Ma NO år 1–7	15	6	Landsbygdsskola	Mindre kommun
J	Klasslärare, mellanstadiet	22	6	Stadsskola	Mindre kommun
K	Ma NO år 1–7	6	5	Stadsskola	Mindre kommun
L	Grundlärare i år 4–6	9	6	Stadsskola	Större kommun
M	Lärare mot de tidigare åren med inriktning matematik	3	4	Landsbygdsskola	Mindre kommun

Tidigare studier (exempelvis Raphael & Wahlstrom, 1989; Sowell, 1989) har visat att elevers lärande i matematik är förknippat med lärarnas erfarenhet av att använda laborativt material. I samband med urvalet till delstudie I var därför ett kriterium att de deltagande lärarna skulle ha erfarenhet av användning av laborativt material. De lärare som

observerats i föreliggande avhandling hade, enligt egna uppgifter, erfarenhet av att undervisa med hjälp av laborativt material. De medverkande lärarna och eleverna hade enligt, lärarnas utsagor, tidigare erfarenhet av att bli videofilmade i samband med lektioner (ej nödvändigtvis matematiklektioner).

Empirin i delstudie I består av observationer från 20 olika matematiklektioner fördelat på nio skolor i fyra kommuner. Empirin i delstudie II består av observationer från 13 olika matematiklektioner fördelade på sju skolor i tre kommuner.

Samtliga skolor är kommunala grundskolor i östra Mellansverige. Totalt har observationer från 33 olika matematiklektioner genomförts, vilket bidrog till att en teoretisk mättnad uppstod (jfr. Bryman, 2018). Det vill säga, insamlandet av antalet observerade matematiklektioner fortsatte tills ingen ny information i fråga om undervisning om tal i bråkform, som var av intresse i relation till syftet med avhandlingen, framkom.

Tabell 3 och 4 visar en sammanställning av antalet observationer i de två delstudierna. Av tabellerna framgår hur många observationer som genomförts i respektive årskurs och antalet timmar per observation (avrundat till närmsta heltimme).

Tabell 3

Antal observationer och antal observationstimmar i delstudie I

Årskurs	Antal observationer delstudie I	Antal timmar/ observation delstudie I
4	7	6
5	9	7
6	4	4
Totalt	20	17

Tabell 4

Antal observationer och antal observationstimmar i delstudie II

Årskurs	Antal observationer delstudie II	Antal timmar/ observation delstudie II
4	4	4
5	4	5
6	5	6
Totalt	13	15

Av Tabell 3 och 4 framgår att totalt genomfördes 33 observationer, 20 observationer i delstudie I och 13 observationer i delstudie II. Vidare framgår att det totala antalet observationstimmar var 32, varav 17 h från delstudie I och 15 h från delstudie II.

4.1.2 Datainsamling

Datainsamlingen för delstudie I och delstudie II har skett på liknande sätt. Gemensamt för de båda delstudierna är att lärarna kontaktades antingen muntligt eller via mejl. De lärare som kontaktades var lärare som jag sedan tidigare, exempelvis via olika projekt, hade kännedom om.

Datainsamling delstudie I

Datainsamlingen genomfördes från hösten 2011 till och med våren 2014. Till delstudie I kontaktades 23 lärare varav 20 av de tillfrågade lärarna svarade ja till att delta i studien. Eftersom syftet med delstudie I var specifikt gällande innehåll (tal i bråkform) och arbetssätt (laborativt material) informerades lärarna om förutsättningarna. De lärare som samtyckte till att delta i studien skickade i sin tur ut information (se bilaga 1) om studiens syfte och hur datainsamlingen skulle genomföras till elever och vårdnadshavare. När elever och vårdnadshavare i respektive klass lämnat skriftligt samtycke bestämdes tid för observation med de aktuella lärarna.

Datainsamling delstudie II

Datainsamlingen för delstudie II genomfördes från våren 2016 till och med våren 2017. 15 lärare kontaktades, varav 13 ställde sig positiva till att medverka i studien. I samband med att lärarna kontaktades informerades de om att mitt intresse var att observera undervisning av tal i bråkform. Vid kontakten bifogades och presenterades Diamant diagnoserna⁹ RB1 (En del av en hel), RB2 (Flera delar av en hel), RB3 (Del av ett antal) och RB4 (Bråk som tal) (se bilaga 3) (Skolverket, 2013). Avsikten med dessa diagnoser var att rama in vilket matematiskt innehåll som var av intresse för delstudie II. De lärare som samtyckte till att medverka i studien skickade i sin tur ut information (se bilaga 2) om studiens syfte och hur datainsamlingen skulle genomföras till elever och vårdnadshavare. När elever och vårdnadshavare i respektive klass lämnat skriftligt samtycke bestämdes tid för observation med de aktuella lärarna.

4.1.3 Genomförande

Insamlandet av data har som tidigare nämnts skett genom klassrumsobservationer i form av videoinspelningar. Observationer är lämpliga när forskarens fokus är att studera vad någon gör (Fangen, 2005), vilket på så sätt kan vara en lämplig metod med avseende på avhandlingens syfte och frågeställningar.

Min roll som observatör kan beskrivas som delvis deltagande observatör, där forskaren deltar i det sociala samspelet, men ej i själva aktiviteterna (jfr. Fangen, 2005). Det innebar bland annat att jag presenterade mig för lärarna och eleverna och berättade vem jag var och att jag var intresserad av att vara med under deras matematiklektion. Under exempelvis lärarnas genomgångar eller vid elevernas redovisningar intog jag en passiv roll. När eleverna arbetade självständigt eller i grupp gick jag ibland runt och lyssnade och iakttog deras arbete. Vid några tillfällen hjälpte jag till med att plocka upp något laborativt material som ramlat ner från ett bord eller med att svara på någon fråga från eleverna. Bedömning av dessa avsteg är att de inte har påverkat avhandlingens resultat. Efter de observerade matematiklektionerna erbjöds lärarna att ta del av vad jag uppfattat av

⁹ Diamant är ett diagnosmaterial i matematik som består av 127 diagnoser, avsedda för grundskolan (Skolverket, 2013).

lektionen. Det kunde exempelvis handla om hur jag uppfattat lektionens mål, till exempel om målet ändrades under pågående lektion, val av uppgifter, val av representationer, lärarnas förklaringar av uppgifter och hur de sammanfattat lektionerna. Dessa samtal genomfördes med alla lärare utom tre av lärarna som tackade nej på grund av tidsbrist.

Utöver videoinspelningarna togs en del stillbilder och vissa anteckningar fördes. De stillbilder som togs skedde framför allt i delstudie I, när eleverna självständigt eller i grupp arbetade med något laborativt material. Dessa bilder har sedan legat till grund för en del av de figurer som återges i resultatkapitlet. De anteckningar som fördes skedde öppet i form av minnesanteckningar till mig själv i syfte att användas i kommande analyser. En risk med att göra öppna anteckningar är att både lärare och elever blir påmind om att de är föremål för en observation, men Hammersley och Atkinson (1995) menar ändå att det är lämpligt att anteckna öppet i samband med klassrumsobservationer. Ingen av de observerade lärarna visade intresse för anteckningarna, däremot var en del elever nyfikna och undrade vad jag skrev. Jag svarade eleverna att anteckningarna var till för att jag skulle komma ihåg vad som hänt under lektionen.

4.2 Bearbetning av datamaterial

Nedan presenteras tillvägagångssätt gällande transkribering och analys av datamaterialet.

4.2.1 Transkribering av datamaterialet

För att få en överblick över datamaterialet studerades hela datamaterialet på en översiktlig nivå. Detta skedde vid upprepade tillfällen. Transkribering genomfördes selektivt av delar av materialet som visat sig motsvara avhandlingens syfte (jfr. Forsblom- Nyberg, 1995; Kvale & Brinkman, 2014), det vill säga att skapa förståelse för undervisning om tal i bråkform. Transkribering har gjorts med avsikt att fånga det som skett under de observerade matematiklektionerna (jfr. Linell, 1994). Den transkriptionsnivå som använts har varit inspirerad av Linells (1994) transkriptionsnivå III, vilket innebär att den transkriberade texten kan likställas med en utförlig dokumentation av vad som sagts och vad som skett under matematiklektionerna. Den uppställningsmodell som har använts vid transkriberingen är inspirerad av en *linjär dramadialogisk*

modell som beskrivs av Linell (1994), vilket innebär att samtalen återges replik för replik. Enligt Forsblom- Nyberg (1995) kan det vara svårt att samordna icke verbala handlingar i denna typ av modell. För att visualisera icke verbala handlingar och integrera dessa handlingar har den uppställningsmodell som använts vid transkriberingen även varit inspirerad av *kolumnmodellen* (jfr. Forsblom-Nyberg, 1995). I Tabell 5 återfinns de symboler som använts vid transkriberingen. Efter tabellen visas ett exempel på excerptutdrag där symbolerna används.

Tabell 5

Transkriptionsnyckel

Symboler	Innebörd
L	lärare
E	elev
E ₁	siffror används för att skilja mellan olika elevers repliker som förekommer inom samma excerpt
E _{alla}	beteckningen "alla" används när det är flera elever som uttrycker något och då det inte går att urskilja någon specifik individ
[]	beskrivning av icke verbala handlingar

Excerpt US¹⁰ x

1	L	Kan någon säga vad jag har skrivit på tavlan?
2	E ₁	En halv
3	L	Just det, en halv står det. Sen har jag satt upp lite figurer
4		här va. Spelar det någon roll tror ni vad det är för
5		form på de. olika figurerna när vi ska vika bråktal?
6		Tror ni jag kan vika bråket en halv av en rektangel?
7		Vad tror du NN?
8	E ₂	Ja
9	L	Ja, det tror jag att ni ser allihop va, ska vi testa? Då
10		lägger jag sidorna mot varandra och då får vi en halv

¹⁰För att tydliggöra att datamaterialet enbart speglar delar av en lektion används begreppet undervisningssekvens, vilket förkortas US, i stället för lektion.

- 11 [detta visas genom att läraren håller upp rektangeln
12 som viks på mitten].

4.2.2 Analys av datamaterialet

Analysen av datamaterialet i de två delstudierna har inspirerats av Braun och Clarkes (2006) tematiska analysprocess. Analysprocessen består av sex steg, (1) bekanta sig med materialet, (2) kodning, (3) söka efter teman, (4) granska teman, (5) beskriva och namnge teman och (6) sammanställning. Analysen av datamaterialet kan beskrivas som en växelverkan mellan empirin, variationsteorin och begrepp från tidigare forskning.

I det följande avsnittet presenteras analysprocessen och vilka frågeställningar som varit av intresse för respektive delstudie var för sig. Avsnittet avslutas med en sammanfattning av vad som analyserats i respektive delstudie.

Analysprocessen av datamaterialet delstudie I

I samband med det *första steget* av analysprocessen transkriberades datamaterialet, och genom transkriberingen bekantade jag mig med datamaterialet. Transkriberingen skapade förståelse för materialet i och med att det vid transkriberingen framkom idéer och nyanser som inte noterats vid enbart granskningen av filmerna. Exempelvis blev det i samband med transkriberingen av en lektion tydligt hur en lärare under en lektion fångade upp ett elevsvar som under lektionen användes som en kontrast till lärarens förklaring (se excerpt US f del 1). Vid genomläsning av det transkriberade materialet gjordes anteckningar om olika undervisningssekvenser som var intressanta i relation till syftet i delstudie I. I detta steg sågs filmerna om i sin helhet eller bara vissa sekvenser av filmerna.

I samband med genomläsning av det transkriberade datamaterialet skapades under *steg två* initiala koder. Koderna skrevs i marginalen av det transkriberade datamaterialet. Exempel på koder var "bråk som del av helhet", "eleverna visar med hjälp av multilinkkuber olika strategier hur de gör" och "lärare använder bråkcirklar för att jämföra bråkuttryck". De framskrivna koderna sparades i ett separat dokument som efter flera genomläsningar och färgkodningar ordnades i grupper och utgjorde en grund för sökandet efter teman.

I analysens *tredje steg* söktes efter teman. Inledningsvis ordnades datamaterialet efter vilket *matematiskt innehåll*, det vill säga vilka delar av tal i bråkform, som undervisades om under de observerade lektionerna. Totalt identifierades tre delar av tal i bråkform (1) bråk som del av helhet, (2) bråk som del av antal och (3) bråk som tal. Därefter användes variationsteorin för att identifiera vilka *lärandeobjekt* som stod i fokus inom de tre matematiska innehållen. I samband med sökandet av lärandeobjekten uppmärksammades att under vissa lektioner behandlades flera olika lärandeobjekt. Exempelvis handlade en matematiklektion om dels "samband mellan bråk-, decimal- och procentform", dels "skillnaden mellan bråkstreck och decimalform" (se excerpt US c₁ och US c₂). Eftersom lärandeobjekten skilde sig åt separerades och analyserades dessa var för sig. För att uppmärksamma och skilja de olika lärandeobjekten gjordes en markering i form av en beteckning av undervisningssekvenserna, exempelvis US c₁ och US c₂. Dessa beteckningar illustrerar att båda sekvenserna är hämtade från samma matematiklektion (US c) men att lärandeobjekten i US c₁ och US c₂ skiljer sig åt. Efter ytterligare genomläsningar av datamaterialet identifierades olika nyanser inom ett och samma lärandeobjekt. Det innebar att det inom ett lärandeobjekt fanns fler *specificerade lärandeobjekt* (jfr. Björkholm, 2015). Exempel på det är att lärandeobjektet "Förklara delarnas innebörd av ett tal i bråkform" består av två specificerade lärandeobjekt: "Förklara nämnarens- och täljarens funktion" samt "Förklara bråk- och decimaltecknets funktion". De identifierade lärandeobjekten presenteras i Tabell 6.

När lärandeobjekten identifierats, analyserades materialet återigen med utgångspunkt i variationsteorin (jfr. Lo, 2012; Marton, 2015). Här analyserades vad som varierade och vad som var invariant i relation till lärandeobjekten samt vilket erfارande som gjordes möjligt för eleverna. Här noterades även om någon eventuell kritisk aspekt i relation till lärandeobjekten framträdde.

När det matematiska innehållet och lärandeobjekten med eventuella specificerade lärandeobjekt tematiserats ställdes nya frågor till datamaterialet. Bland annat ställdes frågor om hur det laborativa materialet användes, i *laborerande arbetssätt* eller *konkretiserande arbetssätt*. Därmed kunde svar på frågeställningen: Hur används olika typer av representationer i undervisning om tal i bråkform, ges.

I det tredje steget uppmärksammades även vilken typ av laborativt material som användes. Här användes de befintliga definitioner som tidigare beskrivits i litteraturen (se kapitel 1.2.1 *Representationer och matematikundervisning*). Det innebär att det laborativa materialet analyserades enligt Figur 14.

Figur 14

Uppdelning av olika typer av laborativt material

I det tredje steget utvecklades också de frågor som ställts angående på vilka sätt laborativt material i undervisning om tal i bråkform använts samt om och i så fall på vilka sätt det laborativa materialet påverkade undervisningen. Exempelvis identifierades här om materialet i sig självt påverkade undervisningen eller om det var elevernas eller lärarnas användning av materialet som påverkade undervisningen (se exempelvis excerpt US 9b). Genom att identifiera eventuell påverkan av antingen det laborativa materialet i sig eller användandet av det laborativa materialet kunde detta bidra till ytterligare svar till frågeställningen: Vad görs möjligt för eleverna att erfara om tal i bråkform?

Under analysens *fjärde steg* gjordes en kritisk granskning av de identifierade temana. Exempelvis uppmärksammades om det fanns tydliga distinktioner mellan temana och samstämmighet inom temana. I samband med detta steg diskuterades temana tillsammans med kollegor. Diskussionerna med kollegorna medförde att temana kunde preciseras och slutligen bestämmas. Intentionen med analysen har varit att låta datamaterialet visa vägen för skapandet av teman samt att analysera

datamaterialet med hjälp av begrepp från tidigare forskning (se vidare kapitel 2) och utifrån variationsteorin (se vidare kapitel 3).

I det *femte steget* gjordes ytterligare en kritisk granskning gällande huruvida temana hjälpte till att besvara frågeställningarna. Till sist, under det *sjätte steget*, gjordes ett urval av excerpter i syfte att belysa de olika temana.

Analysprocessen av datamaterialet delstudie II

I denna delstudie har tillvägagångssättet av analysen också inspirerats av Braun och Clarkes (2006) tematiska analysprocess. Det *första steget* genomfördes på liknande sätt som i delstudie I. Anteckningarna utgjorde sedan grunden för *steg två* i analysprocessen där initiala koder med särskilt intressanta drag skapades. På samma sätt som i delstudie I skrevs koderna i marginalen av det transkriberade datamaterialet. Exempel på koder som skrevs var ”bråk som del av helhet” ”läraen pekar på bråkcirkeln”, ”först bråkcirkel därefter rektangel” och ” visar med hjälp av ett exempel”.

I *steg tre* organiserades de initiala koderna till olika teman. Precis som i analysen av delstudie I tematiserades datamaterialet inledningsvis med hänsyn till vilket *matematiskt innehåll* som behandlades under matematiklektionerna. Liksom i delstudie I identifierades att undervisningen handlade om tre delar av tal i bråkform: (1) bråk som del av helhet, (2) bråk som del av antal och (3) bråk som tal. Därefter användes, precis som i delstudie I, variationsteorin för att identifiera vilka *lärandeobjekt* som stod i fokus inom de tre matematiska innehållen. Exempel på lärandeobjekt som urskildes var: ”Beräkna bråk”, ”Urskilja samband mellan bråkuttryck och procentform” och ”Förklara innebörden av delarna i ett tal i bråkform”. Efter en första organisering av lärandeobjekten diskuterades tematiseringen av lärandeobjekten med kollegor. Diskussionerna ledde till en omstrukturering av vissa lärandeobjekt. Ett exempel på en omstrukturering skedde i samband med analysen av de initiala temana ”Jämföra bråkuttryck med olika nämnare” och ”Förklara innebörden av nämnarna i ett bråkuttryck”. Till en början sågs dessa två teman som ett och samma. I samråd med kollegor utkristalliserades skillnader såsom att matematikundervisning som fokuserade på att ”Jämföra bråkuttryck med olika nämnare” handlade om att erbjuda elever möjlighet att erfara vilket bråkuttryck som var störst. Matematikundervisning som

fokuserade på "Förklara innebörden av nämnarna i ett bråkuttryck" fokuserade visserligen även den på nämnaren i olika bråkuttryck men här riktades elevernas uppmärksamhet främst mot hur nämnarens innebörd i ett bråkuttryck kunde förklaras.

Liksom i delstudie I identifierades också här olika nyanser inom vissa lärandeobjekt. Exempelvis identifierades tre variationer av lärandeobjektet "Förklara innebörden av delarna i ett tal i bråkform": (a) "Förklara innebörden av nämnaren i ett bråkuttryck", (b) "Förklara skillnaden mellan nämnarna och täljarna i ett bråkuttryck" och (c) "Förklara skillnaden mellan heltalsdelen och bråkdelen i blandad form". Dessa variationer benämns, liksom i delstudie I, som *specificerade lärandeobjekt* (se Björkholm, 2015) och tillhör det övergripande lärandeobjektet "Innebörden av delarna i ett tal i bråkform". Samtliga lärandeobjekt presenteras i Tabell 6.

När det matematiska innehållet och lärandeobjekten med eventuella specificerade lärandeobjekt tematiserats ställdes nya frågor till datamaterialet. Detta skedde med hjälp av de variationsteoretiska begreppen *synkron* och *diakron samtidighet*. Det vill säga om två eller flera värden i en dimension av ett lärandeobjekt behandlades samtidigt i tid eller om värdena varierades var för sig vid olika tillfällen under undervisningssekvensen. Med hjälp av variationsteorin kunde fokus i analysen därmed riktas från att identifiera det matematiska innehållet till att identifiera *hur* lärarna behandlade det matematiska innehållet och vad som gjordes möjligt för eleverna att erfara om tal i bråkform.

I analysprocessen uppmärksammades även huruvida eleverna gavs möjlighet att erfara lärandeobjektet med hjälp av *ett* eller *flera* exempel i undervisningssekvensen. Detta eftersom tidigare forskning (exempelvis Watson & Mason, 2006) visat att fler exempel visade i genomtänka sekvenser är mer fördelaktigt för elevernas lärande än om enbart ett exempel¹¹ visas. Dessutom analyserades hur lärarna använde representationerna med avseende på *begränsat* eller *utvidgat erbjudande*. Begränsat erbjudande ska här förstås som att elevernas erfarenhet är knutet till specifika exempel eller uppgifter som behandlades i undervisningssekvenserna. Exempelvis att eleverna, under en undervisningssekvens, gavs möjlighet att erfara strategier för att jämföra bråkuttrycken $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{5}$. Ett utvidgat erbjudande innebär i

¹¹ Med ett exempel menas här ett specifikt fall av något mer generellt (se Mason, 2006)

stället att elevernas erfaran­de vidgas från de specifika exem­plen eller uppgifterna till att även omfatta mer generella principer gällande läran­deobjektet, exempelvis genom att jämföra bråkuttryck med andra nämnare än enbart ett specifikt exempel. På så sätt kunde frågeställningarna: ”Hur används olika typer av representationer i undervisning om tal i bråkform” och ”Vad görs möjligt för eleverna att erfara om tal i bråkform” besvaras.

Därutöver analyserades i det tredje steget lärarnas *kopplingar mellan representationerna*. Bland annat noterades om kopplingarna skedde synkront, exempelvis om lärarna pekade och visade på kopplingarna mellan representationerna samtidigt eller om kopplingarna skedde diakront, exempelvis att kopplingen mellan representationerna skedde efter varandra. På det sättet kunde frågeställningen ”Vad görs möjligt för eleverna att erfara om tal i bråkform genom lärares användande och samman­kopplingar av representationer” besvaras.

I analysprocessens tredje steg analyserades dessutom *vilka representationer* lärarna använde sig av samt om de *överensstämde* med andra representationer, exempelvis att en kvadrat indelad i fyra lika stora delar representerar bråkuttrycket $\frac{1}{4}$. Detta kunde bidra till ytterligare svar till frågeställningen ”Hur används olika typer av representationer i undervisning om tal i bråkform?”

Under analysens *fjärde steg* gjordes en kritisk granskning av de identifierade temana. Exempelvis uppmärksammades att det fanns tydliga distinktioner mellan temana och samstämmighet inom temana.

I det *femte steget* gjordes ytterligare en kritisk granskning för att se om temana och de frågeställningar som ställts till datamaterialet hjälpte till att uppnå syftet med delstudie II. Transkriberingarna och anteckningarna av datamaterialet lästes om igen. Här gjordes jämförelser mellan koder, teman och datamaterial. Temanas arbetsnamn preciserades och fastställdes. Utgångspunkten har varit att låta datamaterialet visa vägen för skapandet av teman samt att analysera datamaterialet med hjälp av begrepp från tidigare forskning (se vidare kapitel 2) och utifrån variationsteorin (se vidare kapitel 3).

Slutligen, under det *sjätte steget*, gjordes ett urval av excerpter som belyser de olika temana.

Sammanfattning av analysprocesserna

I Tabell 6 presenteras vilket matematiskt innehåll och vilka lärandeobjekt som analyserats i de båda delstudierna. Analysen av matematiklektionerna visade att totalt 13 olika lärandeobjekt skapades i interaktionen mellan eleverna och lärarna. Vissa av dessa lärandeobjekt är gemensamma i de två delstudierna medan andra är specifika för respektive delstudie. Av Tabell 6 framgår hur lärandeobjekten benämns samt vilka som är gemensamma respektive specifika för respektive delstudie.

Tabell 6

Matematiskt innehåll och lärandeobjekt som analyserats i respektive delstudie

Matematiskt innehåll	Lärandeobjekt	Delstudie I/Delstudie II
Bråk som del av helhet	Dela in en helhet i lika stora delar	I
	Benämna bråkdelar i en helhet	I
	Uttrycka en hel som ett bråkuttryck med samma nämnare och täljare	II
	Skriva ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren i blandad form	II
Bråk som del av antal	Bestämma hur stor delen av ett antal är	I
	Urskilja skillnad mellan bråk som del av helhet och bråk som del av antal	II
	Urskilja samband mellan delen, andelen och ett antal	I + II
Bråk som tal	Urskilja samband mellan tal i bråk-, decimal- och procentform ¹²	I + II
	Urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck	I + II
	Förklara innebörden av delarna i ett tal i bråkform	I + II

¹² I delstudie II ingår endast sambanden mellan bråk- och procentform.

4.3 Forskningsetiska överväganden

En viktig del av god forskningsetik som är av vikt i föreliggande avhandling, gäller frågor om hur individer som ingår i en forskningsstudie behandlas (se Vetenskapsrådet, 2017). I detta avsnitt redovisas hur de fyra forskningsetiska principerna: (a) kravet om informerat samtycke, (b) kravet om anonymisering, (c) kravet om tystnadsplikt och (d) konfidentialitetskravet, har beaktats i de två delstudierna.

Som tidigare nämnts presenterades delstudiernas syfte för ett antal verksamma matematiklärare i skolår 4–6. Via de lärare som var villiga att delta i studien skickades ett informationsbrev (se bilaga 1 och 2) innehållande syfte med studien och samtyckesblankett till berörda elever och vårdnadshavare. Vetenskapsrådet (2017) påpekar att datainsamling med hjälp av videoinspelning kan inkräkta på individernas privatliv och integritet. Detta gäller för de videofilmade lärarna och eleverna i båda delstudierna, även om kamerans lins i delstudie II främst riktats mot lärarnas agerande under matematiklektionerna. Vid observationstillfällena presenterades återigen studiens syfte för lärarna och eleverna. På så sätt anses informationskravet vara uppfyllt.

För att inte elever, lärare eller klassrum ska kunna identifieras har de bilder som förekommer i resultatkapitlen ritats om från autentiska bilder till enbart bilder med hjälp av ett ritprogram. För att behålla autenticitet i bilderna har färgerna på de ritade bilderna efterliknats de färger som använts i klassrummen.

I excerpterna används inga namn utan för att markera när en elev säger något markeras detta med ett E och när en lärare säger något har detta markerats med ett L.

Tystnadspliktskravet handlar om att forskaren, i så stor utsträckning som möjligt, inte ska delge var datainsamlingen skett, vilket också är intentionen med denna avhandling.

¹³ I delstudie II ingår endast jämföra bråkuttryck.

Det sista kravet är konfidentialitetskravet som innebär att insamlat datamaterial ska förvaras oåtkomligt för andra, vilket skett genom att videoinspelningar och skrivet material förvarats på en portabel hårddisk där enbart jag haft tillgång till inloggning.

5. Resultat – delstudie I

I resultatkapitlet för delstudie I beskrivs hur lärare och elever använder laborativt material i undervisningen om tal i bråkform. Dessutom beskrivs vad som görs möjligt för eleverna att erfara om tal i bråkform. Resultatet presenteras i tre huvudteman: (a) bråk som del av helhet, (b) bråk som del av antal och (c) bråk som tal. I Tabell 7 presenteras en översikt över resultatkapitlets struktur med tillhörande lärandeobjekt.

Tabell 7

Översikt över resultatkapitlen i delstudie I

Kapitel	Lärandeobjekt
Bråk som del av helhet	Dela in en helhet i lika stora delar Benämna bråkdelar i en helhet
Bråk som del av antal	Bestämma delen av ett antal Urskilja samband mellan del, andel och ett antal
Bråk som tal	Urskilja samband mellan tal i bråk-, decimal- och procentform Urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck Förklara delarnas innebörd i ett tal i bråkform Jämföra och storleksordna bråkuttryck Beräkna bråkuttryck

5.1 Bråk som del av helhet

I kapitlet beskrivs undervisning om bråk som del av helhet, som delas in i två olika lärandeobjekt. Det första lärandeobjektet beskriver *hur en helhet delas in i lika stora delar*. Det andra lärandeobjektet beskriver *hur bråkdelarna i en helhet benämns*.

5.1.1 Dela in en helhet i lika stora delar

I det följande presenteras undervisning som handlar om lärandeobjektet på vilket sätt *en helhet delas in i lika stora delar*. Undervisning om detta lärandeobjekt preciseras i två specificerade lärandeobjekt: (a) delarna i en helhet har samma storlek och (b) delarna i en helhet kan delas in på olika sätt utan att benämningarna på delarna ändras.

Delarna i en helhet har samma storlek

Undervisningen som handlar om det specificerade lärandeobjektet delarna i en helhet har samma storlek kan ske på två olika sätt. Det ena sättet innebär att läraren använder sig av kvadrater för att åskådliggöra detta. Kvadraterna används parvis, där den ena kvadraten är indelad i lika stora delar, medan den andra kvadraten är delad i samma antal delar som den föregående men delarna är olika stora. Det andra sättet innebär att läraren i stället använder frukt för att visa detta. De två olika sätten exemplifieras med hjälp av följande undervisningssekvenser.

Läraren laborerar med hjälp av två kvadrater för att visa att delarna i en helhet har samma storlek

Läraren använder två kvadrater som är av samma storlek och färg där den ena kvadraten är indelad i tredjedelar (se kvadrat "A" i Figur 15) och den andra kvadraten är delad i tre delar (se kvadrat "B" i Figur 15). Kvadraterna sätts upp bredvid varandra på Whiteboardtavlan. Excerpt US k illustrerar hur läraren uppmärksammar eleverna på att delarna i ett objekt måste vara av samma storlek.

Figur 15

Kvadrater som visas på tavlan (US k, lärare k)

Excerpt US k

- 1 L Det här är en hel [pekar på kvadrat A] Om jag nu gör
2 så här i stället [vänder på mittendelen så att en annan
3 färg framträder]. Hur stor är den delen då?
4 E₁ En tredjedel
5 L En tredjedel säger du. Ok, vi ska se om det stämmer.
6 Vi tittar på den här figuren i stället. Är den delad i
7 i tredjedelar? [pekar på kvadrat B] Vi jämför den här
8 gula delen med den här gula delen [pekar på den gula
9 delen i kvadrat A och sedan på den gula delen i
10 kvadrat B].
11 E₁ Nej.
12 L Jo men se, här är det tre delar, en, två och tre [pekar
13 samtidigt på varje del i kvadrat B] då måste den här
14 delen [pekar på den gula delen i kvadrat B] också vara
15 en tredjedel.
16 E₂ De är inte lika stora.
17 L Nej, det har du rätt i, de är inte lika stora. Att det är
18 tre delar det ser man ju, men de är inte lika stora. Men
19 det är bara den här kvadraten [pekar på kvadrat A] som
20 är indelad i tredjedelar, här är alla delar lika stora. Här
21 kan vi skriva en tredjedel [skrivs under kvadrat A] och
22 här kan vi skriva tre delar [skrivs under kvadrat B].

Av excerpt US k framkommer att lärare k först använder kvadraterna för att visa på dels en tredjedel (rad 1–3, 18–20), dels på tre delar (rad 6–7). Undervisningssekvensen avslutas med att detta även visas med hjälp av skriftliga symboler (rad 21–22). Lärarens arbetssätt kan med andra ord beskrivas som ett laborerande arbetssätt, i och med att användandet av det laborativa materialet föregår användandet av de skriftliga symbolerna.

Läraren exemplifierar, med hjälp av kvadraterna, olikheter mellan kvadrat "A" som är indelad i tredjedelar och kvadrat "B" som är delad i tre delar (Figur 15). Läraren avslutar med att uppmärksamma eleverna på att det endast är delarna i kvadrat "A" som kan benämnas som tredjedelar eftersom de är lika stora (rad 18–20). Läraren kontrasterar tredjedelar mot tre delar, medan andra aspekter som form och färg och antal delar är invariants. Kontrasterna mellan tredjedelar och tre delar öppnar upp en dimension av variation av att bråkdelarna i en helhet måste vara lika stora. Eleverna ges möjlighet att erfara att alla bråkdelar som ingår i samma helhet måste vara lika stora.

Läraren laborerar med hjälp av frukt att delarna i en helhet har samma storlek

Ett annat sätt att undervisa om att bråkdelarna i en helhet måste vara lika stora beskrivs i det följande exemplet. I stället för att använda kvadrater används här ett äpple. I exemplet ses att läraren använder ett äpple för att visa hur mycket $\frac{1}{4}$ är. För att symbolisera olika delar av en helhet (ett äpple) delar läraren äpplet i fyra delar med hjälp av en kniv. Därefter visar läraren också hur delen uttrycks med hjälp av ett bråkuttryck. Läraren tar således sin utgångspunkt i det laborativa materialet (äpplet) för att visa hur mycket $\frac{1}{4}$ är. Därefter visas detta även med hjälp av ett bråkuttryck. Lärarens arbetssätt kan således beskrivas som ett laborerande arbetssätt.

När läraren skär äpplet med kniven visar det sig att det är svårt att skära så att de fyra delarna blir exakt lika stora. Läraren påpekar detta för eleverna genom att säga ”Ja, nu blev det inte så bra det här. Den här kniven var lite slö. Men ni får tänka er att delarna är lika stora” (US b₁, lärare b).

Eftersom läraren har svårt att dela frukten i exakta delar, blir det problematiskt att illustrera att bråkdelar som ingår i en och samma helhet måste vara lika stora, även om läraren är medveten om och förklarar för eleverna att delarna i själva verket ska vara lika stora. Under matematiklektionen visas bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ med hjälp av ett äpple, men inga jämförelser mellan att dela in en helhet (äpplet) i lika stora delar och olika stora delar görs. En fjärdedel ställs mot ett outtalat alternativ vilket gör att aspekten att bråkdelar som ingår i en och samma helhet måste vara lika stora inte synliggörs.

Av resultatet framkommer dessutom att när eleverna ser att det finns frukter uppdukade på katedern är de angelägna om att fråga lärare b om de får äta av frukten efteråt. En av eleverna frågar läraren ”Visst får vi äta upp frukten sedan?” (US b₁, lärare b), vilket bekräftas av läraren. Eleverna intresserar sig dessutom för hur många bitar av frukten de får ta och om frukten är god eller inte. Att använda frukter som ett laborativt material i dessa sammanhang kan leda till att elevernas uppmärksamhet i första hand riktas på frukten och inte på den matematiska idé frukten är tänkt att representera.

Delarna i en helhet kan delas in på olika sätt utan att bråkdelarnas namn ändras

Undervisning som handlar om det specificerade lärandeobjektet att delarna i en helhet kan delas in på olika sätt utan att benämningarna på delarna ändras exemplifieras med hjälp av en undervisningssekvens där läraren använder lika stora rektanglar som delats in i tredjedelar på olika sätt.

Läraren laborerar med hjälp av två rektanglar för att visa att en helhet kan delas in på flera sätt

Under matematiklektionen har läraren noterat att två elevgrupper har delat in två lika stora rektanglar på två olika sätt. Det som skiljer gruppernas indelning är att den ena gruppen har delat in rektangeln med hjälp av lodräta streck och den andra gruppen har delat in rektangeln med hjälp av vågräta streck (Figur 16).

Figur 16

Variationer av elevernas vikningar och markeringar i rektanglar (US b₂, lärare b)

Läraren frågar eleverna om det är någon skillnad på sätten att dela in rektangeln, vilket eleverna inte tycker att det är. Lärare b undrar hur de skulle kunna göra för att bevisa att bråkdelarna är lika stora. En av eleverna föreslår att de ska riva bort en tredjedel från rektangel "a" och en tredjedel från rektangel "b". De bortrivna delarna hålls upp och lärare säger "Ser de här lika stora ut?" (US b₂, lärare b). Några elever ser tveksamma ut, men den elev som föreslagit att de skulle riva bort en tredjedel från vardera rektangeln föreslår att den bortrivna delen från rektangel a ska delas i tre lika stora delar och dessa delar ska sedan läggas på rektangel b, vilket läraren gör. Undervisningssekvensen avslutas med att läraren säger att "oavsett hur rektanglarna är indelade är båda indelade i tre stycken tredjedelar. Tänk på att delarna måste vara lika stora". Undervisningssekvensen startar med att lärare b visar med hjälp av två rektanglar att en helhet kan delas in på olika sätt utan att det

påverkar bråkdelarnas namn. Detta poängteras även muntligt. Lärarens arbetssätt kan i och med det beskrivas som ett laborerande arbetssätt.

De olika sätten att dela in en rektangel ställs mot varandra, skillnader mellan de två sätten att dela in rektangeln varierar mot en invariant bakgrund (två lika stora rektanglar, i samma färg). En dimension av variation, att delarna i en helhet kan delas in på olika sätt utan att det påverkar bråkdelarnas namn, öppnas upp. Eleverna ges möjlighet att erfara att det inte har någon betydelse hur helheten delas in förutsatt att delarna inom helheten är lika stora.

5.1.2 Benämna bråkdelarna i en helhet

Avsnittet beskriver undervisning om lärandeobjektet, *att benämna bråkdelar i en helhet*. Detta beskrivs med hjälp av två undervisningssekvenser. Det ena sättet innebär att läraren använder sig av två olika stora bråkcirklar som båda delas in i fyra lika stora delar, där en fjärdedel i respektive bråkcirkel markeras. Det andra sättet innebär att eleverna använder olika geometriska former med olika storlek som delas in i tredjedelar.

Läraren konkretiserar att bråkdelens namn inte påverkas av bråkdelens storlek med hjälp av bråkcirklar

På tavlan har läraren satt upp två bråkcirklar (Figur 17). Lärare a börjar med att fråga eleverna vad den röda delen i bråkcirkelarna heter (pekar på den vänstra bråkcirkeln i Figur 17). En av eleverna säger att det är en fjärdedel, vilket bekräftas av läraren. Läraren pekar sedan på den högra bråkcirkeln i Figur 17 och frågar eleverna vad den delen heter. Efter en viss tvekan säger en elev att han tror att det också är en fjärdedel. Undervisningssekvensen inleds alltså med att identifiera vad en fjärdedel är.

I excerpt US a₁ illustreras hur läraren riktar elevernas uppmärksamhet mot att benämning på bråkdelarna inte påverkas av delens storlek.

Figur 17

Två bråkcirklar av olika storlek, där en fjärdedel är markerad i respektive cirkel (US a₁, lärare a)

Excerpt US a₁

1	L	Ni säger att båda de här delarna har samma namn.
2		Då undrar jag om det är någon skillnad på hur stor del
3		som är skuggad i de här två cirkelarna? Kan ni hjälpa
4		mig att förklara att delarna har samma namn.
5	E ₁	Det är ingen skillnad.
6	L	Fast den där är mycket större [pekar på den större
7		cirkeln].
8	E ₂	Ja fast det är ju delarna man tittar på.
9	E ₃	Antalet delar är lika många, båda cirkelarna är delade i
10		fyra delar, det är bara det att den ena är större.
11	L	Så ni menar att delarnas storlek inte har någon
12		betydelse.
10	E _{alla}	Nej.

Av excerpt US a₁ framkommer det att läraren använder bråkcirklarna för att konkretisera att en fjärdedel alltid är en av fyra lika stora delar oavsett hur stora delarna i cirkelarna är (rad 1–4, 11–12). En av eleverna förklarar att det är antalet delar som är avgörande för bråkdelens namn (rad 8) och inte hur stora delarna av helheten är. När läraren börjar med att prata om att båda bråkcirklarna är indelade i fjärdedelar och därefter visar detta med hjälp av bråkcirklar, kan lärarens arbetssätt beskrivas som ett konkretiserande arbetssätt.

Delen, som i exemplet ovan är $\frac{1}{4}$ ändrar inte namn även om storleken på delen förändras. Med hjälp av det laborativa materialet konkretiseras och varieras bråkdelarnas storlek mot en invariant bakgrund (bråkdelens färg och placering i bråkcirklarna är invarianta). En liten ($\frac{1}{4}$) bråkdel kontrasteras mot en större ($\frac{1}{4}$) bråkdel. En dimension av variation att

benämningen på bråkdelen påverkas av antalet delar, det vill säga nämnaren, i en helhet öppnas upp. Eleverna ges möjlighet att erfara att andelen i ett bråkuttryck inte ändrar namn även om storleken på helheten och bråkdelen förändras.

Eleverna konkretiserar att bråkdelen namn inte påverkas av delarnas storlek med olika geometriska former

Ett annat sätt att undervisa om att benämningen på bråkdelen inte påverkas av helhetens storlek beskrivs i det följande.

Eleverna arbetar parvis och har fått i uppgift att dela in geometriska former i tredjedelar. Undervisningen organiseras så att eleverna parvis först får välja vilken typ av geometrisk form de vill använda sig av. De geometriska formerna som eleverna kan välja mellan är cirklar, rektanglar, kvadrater och trianglar i olika storlekar. Det fria valet leder till att en del elevpar väljer små rektanglar och andra elevpar väljer lite större bråkcirklar. Efter elevernas val av geometrisk form ombes eleverna att markera en tredjedel i den valda geometriska formen. Eleverna utgår från ett förutbestämt bråkuttryck (en tredjedel) som de ska åskådliggöra med hjälp av olika geometriska former. Elevernas arbetssätt kan ses som ett konkretiserande arbetssätt.

Ett av elevparen väljer en stor cirkel och efter lite diskussioner mellan eleverna kommer de överens om hur cirkeln ska delas in i tredjedelar. Ett annat elevpar väljer i stället att använda sig av en lite mindre rektangel som de delar in i tredjedelar. När eleverna är klara med uppgiften får elevparen diskutera med andra elevpar. Läraren uppmanar eleverna att ”diskutera skillnader och likheter mellan figurerna” (US a₂, lärare a). Elevparen är överens om att en skillnad mellan formerna är att den ena är en cirkel och den andra är en rektangel. Dessutom är de eniga om att formerna är av olika storlek samt att i båda formerna är en del markerad.

I undervisningssekvens a₂ framgår att flera olika aspekter varieras, såsom form och storlek. Men eftersom de geometriska formerna är av olika storlek och form upptäcker inte elevparen att båda formerna är indelade i tredjedelar. Aspekten att benämning på bråkdelen inte påverkas av helhetens storlek skymms på grund av att även aspekten form varieras. Dimension av variation öppnas inte upp utan begränsas när flera aspekter förutom de nödvändiga varieras. Elevernas möjlighet att erfara att bråkdelen namn inte påverkas av objektens form begränsas.

5.1.3 Sammanfattning - Att undervisa om bråk som del av helhet

I kapitlet som beskriver bråk som tal ingår lärandeobjekten (a) att dela in helhet i lika stora delar och (b) benämna bråkdelar i en helhet. En sammanfattande bild av hur lärarna och eleverna använder laborativt material när de arbetar med bråk som del av helhet visar att lärarnas användande kan beskrivas utifrån ett konkretiserande arbetssätt och ett laborerande arbetssätt, medan elevernas användande kan beskrivas utifrån ett konkretiserande arbetssätt. Exempel på när lärarna använder ett laborerande arbetssätt är när läraren med hjälp av ett äpple ska visa att delarna som ingår i en helhet måste vara lika stora. Eftersom läraren enbart visar *ett* värde för hur mycket en fjärdedel av frukten är och inte ställer det emot något annat värde för dimensionen sker inga kontraster. Detta innebär att elevernas möjlighet att erfara att delarna som ingår i en helhet måste vara lika stora begränsas. Ett exempel på ett konkretiserande arbetssätt är när eleverna, utifrån lärarens frågor, själva ska försöka komma fram till en slutsats i relation till lärandeobjektet. Eftersom eleverna själva har fått välja både vilken storlek och vilken geometrisk form helheten ska ha, samt att läraren inte uppmärksammar att elevparen riktar uppmärksamhet mot aspekter som i den här undervisningssekvensen inte är nödvändiga för att erfara lärandeobjektet, öppnas dimensionen inte upp. Elevernas erfande begränsas. Detta betyder att både i det laborerande och i det konkretiserande arbetssättet kan elevernas erfande av lärandeobjekten begränsas oberoende av om det är en lärare eller elever som använder det laborativa materialet.

De material som används är både pedagogiska material, det vill säga specialtillverkat material och vardagliga material. Av resultatet framkommer att elevernas uppmärksamhet i vissa undervisningssekvenser riktas bort från den matematiska idén. Detta gäller oavsett om det är ett pedagogiskt material eller ett vardagligt material som används. Det är inte heller avgörande om materialet är ett perceptuellt rikt material eller om det är ett enkelt material. Detta innebär att det är hur materialen används som avgör om elevernas fokus riktas bort från den matematiska idén.

I Tabell 8 ges en sammanfattande översikt över undervisning om bråk som del av helhet. I tabellen framkommer vilka lärandeobjekt som ingår, vilket material som används i undervisningssekvenserna, vilket

arbetssätt som förekommer, dimensioner av variation i relation till respektive lärandeobjekt samt vad eleverna gavs möjlighet att erfara.

Tabell 8

Sammanfattande översikt av undervisning om bråk som del av helhet

Lärandeobjekt/ US/lärare	Laborativt material	Arbetssätt Konkretiserande Laborerande Vem Lärare/ Elev	Dimensioner av variation	Elevernas erbjudande
Delarna i en helhet har samma storlek/ US k/ lärare k	Två kvadrater, indelade i tredelar respektive tredjedelar	Laborerande Lärare	Skilnaden mellan att dela in en helhet i tredjedelar respektive tre delar	Delar som ingår i en helhet måste vara lika stora
Delarna i en helhet har samma storlek/ US b ₁ / lärare b	Ett äpple	Laborerande Lärare	— ¹⁴	Begränsat erfارande av att alla delar som ingår i en helhet måste vara lika stora
Delarna i en helhet kan delas in på olika sätt utan att bråkdelarnas namn ändras/ US b ₂ / lärare b	Två rektanglar, indelade i tredjedelar på olika sätt	Laborerande Lärare	Två olika sätt att dela in helheten i tre lika stora delar (vågräta och lodräta delar)	En helhet kan delas in på olika sätt, förutsatt att delarna inom helheten är lika stora
Benämna bråkdelar i en helhet/ US a ₁ / lärare a	Två bråkcirklar i olika storlek indelade i fjärdedelar	Konkretiserande Lärare	Olika storlek av fjärdedelar	Hur bråkdelarna i en helhet benämns
Benämna bråkdelar i en helhet/ US a ₂ / lärare a	Bråkcirkel och rektangel olika storlek och form indelade i tredjedelar	Konkretiserande Elev	Olika storlek och form av tredjedelar	Begränsat erfارande av hur bråkdelarna benämns

¹⁴ – inga dimensioner av variation öppnas upp

5.2 Bråk som del av antal

I kapitlet beskrivs undervisning om bråk som del av antal. Undervisningen delas in i lärandeobjekten *bestämma hur stor delen av ett antal är* och *urskilja samband mellan del, andel och ett antal*.

5.2.1 Bestämma delen av ett antal

I det följande avsnittet presenteras undervisning om lärandeobjektet, *att bestämma hur stor delen av ett antal är*. Detta beskrivs med hjälp av en undervisningssekvens där eleverna använder multilinkkuber för att visa strategierna.

Eleverna konkretiserar strategier för att bestämma hur stor delen av ett antal är med hjälp av multilinkkuber

I undervisningssekvensen (US m, lärare m, Figur 18) illustreras hur två elever använder och diskuterar strategier för att bestämma hur stor delen av ett antal är med hjälp av multilinkkuber. Uppgiften handlar om att räkna ut hur mycket en viss del av ett antal är. För att arbeta med uppgiften har eleverna fått 24 multilinkkuber som ligger framför dem på bänkarna. Inledningsvis arbetar eleverna självständigt med uppgiften ”Hur stor del är $\frac{1}{4}$ av 24?” och därefter parvis. Eleverna uppmanas att med hjälp av multilinkkuberna visa och diskutera sina strategier samt komma fram till vilken strategi som de tycker är mest effektiv och användbar.

Elev 1 visar att han lagt upp multilinkkuberna i två rader med tolv kuber i varje rad. Han berättar att han tänker att ”hälften av 24 är 12”. Eleven säger sedan att han tänker ”hälften en gång till” varpå eleven drar isär multilinkkuberna så att de bildar två lika stora högar med sex multilinkkuber i varje hög. Slutligen pekar eleven på en av högarna (se inringad hög i Figur 18) och säger till kompisen att ” $\frac{1}{4}$ av 24 är sex, jag tänker att en fjärdedel är samma sak som hälften hälften” (US m, lärare m).

Figur 18

Elev 1:s strategi (US m, lärare m)

Elev 2 visar att han lägger multilinkkuberna i rader med sex kuberna i varje rad. Totalt läggs fyra rader under varandra, se Figur 19. Eleven säger att han tänker att "det är som en rektangel med $4 \cdot 6 = 24$," eftersom $4 \cdot 6 = 24$." Därefter visar eleven att han tar en rad som han menar motsvarar $\frac{1}{4}$ av 24. Elevernas olika strategier diskuteras och eleverna kommer fram till att elev 2:s strategi "är smartare" eftersom den "går fortare och tar mindre plats" (US m, lärare m).

Figur 19

Elev 2:s strategi (US m, lärare m)

Exemplet visar hur eleverna använder multilinkkuberna som stöd för att visualisera respektive strategi för varandra, det arbetssätt som används är således ett konkretiserande arbetssätt.

Eleverna kontrasterar de två olika strategierna, aspekten, strategier att bestämma delen i ett antal, varierar, medan uppgiften och det laborativa materialet, så när som på färgen, är invariant. Kontrasten mellan strategierna öppnar upp en dimension av variation av strategier att ta reda på delen i ett antal. Genom att eleverna får redogöra för sina olika strategier ges de möjlighet att erfara dessa strategier.

I samband med att eleverna jämför sina strategier tycker de att strategi nummer två är mest effektiv eftersom den "tar minst plats". Detta uttalande indikerar att eleverna riktar uppmärksamhet mot det laborativa materialet i sig, där de uppmärksammar materialets utbredning på bänken i stället för vilken strategi som de tycker är mest lämplig att använda.

5.2.2 Urskilja samband mellan del, andel och ett antal

I det följande presenteras undervisning som handlar om lärandeobjektet *att urskilja samband mellan del, andel och antal*. Undervisning om detta lärandeobjekt preciseras i två specificerade lärandeobjekt: (a) ett bråkuttryck kan representera olika antal i en del, (ex. att $\frac{1}{3}$ kan vara lika med 3 eller 9 beroende på hur många det totala antalet är), och (b) ett givet antal kan delas in i olika bråkdelar, (ex. på vilka sätt kan 12 delas in?).

Ett bråkuttryck kan representera olika värden av ett antal

I avsnittet beskrivs undervisning om lärandeobjektet ett bråkuttryck kan representera olika värden av ett antal. För att konkretisera sambandet använder läraren snäckor.

Läraren konkretiserar att ett bråkuttryck kan representera olika värden av ett antal med hjälp av snäckor

I excerpt US g (lärare g) beskrivs en undervisningssekvens där eleverna ges möjlighet att erfara att $\frac{1}{4}$ kan representera dels antalet 2, dels antalet 3, om det totala antalet snäckor varierar. Läraren har tagit fram en ask som hon visar för eleverna. Hon skakar lite på asken så att eleverna hör att det ligger något i den. Därefter öppnar läraren asken och tar fram två snäckor. Nedan återges dialogen mellan läraren och eleverna.

Excerpt US g

1	L	Nu har jag tagit ut en fjärdedel av snäckorna. Hur
2		många fanns det i asken från början? [visar två
3		snäckor]
3	E ₁	Åtta.
4	L	Hur tänker du när du får det till åtta?
5	E ₁	Jag tänker så här att två gånger fyra är åtta.

6	L	Du ser två snäckor där [pekar på snäckorna] och en
7		fjärdedel blir fyra gånger två som blir åtta. [skriver
8		$4 \cdot 2 = 8$ på tavlan]. Tänker ni allihop på det sättet?
9	E _{alla}	Ja.
10	L	Och det visade sig att det stämmer.
11		[läraren visar upp tre snäckor i stället för två]
12		Fortfarande så har jag tagit ut en fjärdedel, hur många
13		fanns det från början?
14	E ₂	Tolv.
15	L	Stämmer det?
16	E _{alla}	Ja.
17	L	Så en fjärdedel kan vara både två och tre snäckor.

Av excerpten framgår att lärare g visar att bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ kan representera olika värden av ett antal, två snäckor (rad 6–8) eller tre snäckor (rad 17) när det totala antalet varierar. Lärare g utgår således från ett bråkuttryck som med hjälp av snäckor synliggörs, lärarens arbetssätt kan beskrivas som ett konkretiserande arbetssätt.

Lärare g kontrasterar aspekten, ett bråkuttryck kan representera två olika värden av ett antal, genom att bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ varieras med antalet 2 och antalet 3. En kontrast mellan olika värden skapas och en dimension av variation där ett bråkuttryck kan representera två olika värden av ett antal öppnas upp. Eleverna ges i den här undervisningssekvensen möjlighet att erfara att samma bråkuttryck kan representera olika värden av ett antal.

Ett givet antal kan delas in i olika bråkdelar

I avsnittet beskrivs undervisning där fokus riktas mot att ett bestämt antal objekt kan delas in i olika bråkdelar. Detta exemplifieras med hjälp av excerpt från en undervisningssekvens där eleverna använder tändstickor för att dela in ett givet antal i olika bråkdelar.

Eleverna laborerar med hjälp av tändstickor hur ett givet antal kan delas in i olika bråkdelar

Eleverna sitter en och en vid sina bänkar. På varje bänk finns 18 tändstickor. Elevernas uppgift är att dela upp tändstickorna i olika högar så att det blir lika många tändstickor i varje hög. Eleverna uppmanas av läraren att pröva olika alternativ. När eleverna har arbetat med uppgiften själva en stund avbryter läraren aktiviteten och lägger upp 18 tändstickor på en overheadapparat. Tändstickorna projiceras på Whiteboardtavlan. Läraren frågar eleverna om de kan komma fram och visa hur de har tänkt kring uppgiften. Några av eleverna räcker upp handen och får i tur och ordning komma fram till overheadapparaten och visa för resten av klasskamraterna hur de har gjort.

Excerpt US e

1	E ₁	Man kan dela dem i tre delar för då blir det sex i varje
2		del [eleven lägger 18 tändstickor i tre högar så att det
3		blir sex tändstickor i varje hög].
4	L	Då blir det sex stycken i varje. Och då skriver man
5		att man kan dela i tre delar [skriver ett bråkstreck
6		och en trea under strecket] då har vi visat att det är
7		tredjedelar. Kan jag dela dem på något annat sätt än tre
8		delar om jag har 18 stycken?
9	E ₂	Om man gör hälften så blir det nio i varje.
10		[tändstickorna grupperas om och delas in i två lika
11		stora högar]
12	L	Om jag delar dem i två högar så blir det nio i varje hög.
13		[skriver ett bråkstreck och två under strecket]. Ja, då
14		har du gjort halvor. Kan jag dela det ännu fler sätt?
15	E ₃	I sex högar.
16		[tändstickorna grupperas om och delas in i sex lika
17		stora högar, läraren skriver ett bråkstreck och en sexa
18		under]
19	L	Ja och då får jag sjättedelar.

Av excerpten framkommer att eleverna visar vilka olika sätt som de 18 tändstickorna kan delas in på (se exempelvis rad 1, 9 och 16). När läraren efterfrågar fler sätt att dela in tändstickorna på (se rad 7–8; 14) ges eleverna möjlighet att erfara att det går att dela det givna antalet på flera sätt. Eleverna ges i undervisningen tillfällen till att själva undersöka och laborera med tändstickorna för att komma fram till olika

sätt att dela in de 18 tändstickorna. Elevernas arbetssätt kan följaktligen beskrivas som ett laborerande arbetssätt.

Aspekten att dela in tändstickorna i olika antal bråkdelar, varierar i undervisningssekvensen. Eftersom antalet tändstickor är invariant och antalet sätt att dela in tändstickorna på varierar kan eleverna erfara att det går att dela in ett givet antal på flera sätt. En dimension av variation öppnas upp, som visar att det går att dela in ett givet antal i olika bråkdelar.

5.2.3 Sammanfattning - Att undervisa om bråk som del av antal

Analysen av undervisning som berör bråk som del av antal har ovan beskrivits utifrån lärandeobjekten (a) bestämma hur stor delen av ett antal är och (b) urskilja samband mellan delen, andelen och ett antal. Lärarnas och elevernas användande av laborativt material karaktäriseras i de observerade undervisningssekvenserna om bråk som del av antal av ett konkretiserande arbetssätt. Det innebär att de utgår ifrån en matematisk idé som de med hjälp av ett laborativt material synliggör och demonstrerar. Med hjälp av det laborativa materialet skapas olika kontraster vilket innebär att eleverna ges möjlighet att erfara lärandeobjekten.

Materialet som används i undervisningen är både vardagligt material, exempelvis snäckor, och pedagogiskt material, såsom multilinkkuber, och ingår i kategorin enkla material eftersom de har begränsade kännetecken som kan rikta elevernas uppmärksamhet mot materialet i sig självt i stället för mot den matematiska idé materialet är tänkt att representera.

Av analysen framkommer att elevernas uppmärksamhet, trots att materialet ingår i kategorin enkla material, kan riktas bort från den matematiska idén. Detta framkommer i undervisningen om lärandeobjektet *strategier för att bestämma hur stor delen av ett antal är*. En av eleverna uttrycker att den ena strategin "tar upp mer plats" än den andra strategin. Detta kan innebära att dimensionen av variation, strategier för att ta reda på delen av ett antal, begränsas i och med att elevernas uppmärksamhet riktas mot dels den matematiska idén, dels materialet i sig. Elevernas värderingar om vilken strategi som är mest effektiv baseras således på aspekter som egentligen inte är relevanta i förhållande till lärandeobjektet. Detta innebär att även om det laborativa

materialet kan karakteriseras som ett enkelt material utan några särskilda kännetecken, visar resultatet ändå att eleverna kan rikta uppmärksamheten mot materialet i sig självt.

I Tabell 9 nedan ges en sammanfattande översikt över undervisning om bråk som del av antal.

Tabell 9

Sammanfattande översikt över undervisning om bråk som del av antal

Lärandeobjekt/ US/ lärare	Laborativt material	Arbetsätt Konkretiserande Laborerande	Dimensioner av variation	Elevernas erbjudande
Vem Lärare/Elev				
Bestämma hur stor delen av ett antal är/ US m/ lärare m	Multilinkkuber	Konkretiserande Elev	Två strategier att undersöka hur mycket en fjärdedel av 24 är	Jämföra och värdera strategier för bråk som del av antal
Ett bråkuttryck kan representera olika värden av ett antal/ US g/ lärare g	Snäckor	Konkretiserande Lärare	Bråkuttrycket en tredjedel kan representera antalet 2 och antalet 3	Ett bråkuttryck kan representera olika värden
Ett givet antal kan delas in i olika bråkdelar/ US e/ lärare e	Tändstickor	Konkretiserande Elev	I vilka bråkdelar det går att dela in talet 18	Ett givet antal kan delas in i olika bråkdelar

5.3 Bråk som tal

I kapitlet beskrivs de lärandeobjekt som ingår i bråk som tal. Undervisning om bråk som tal delas in i fem lärandeobjekt. Det första lärandeobjektet handlar om att *urskilja samband mellan tal i bråk-, decimal- och procentform*. Det andra lärandeobjektet handlar om att *urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck*. Det tredje lärandeobjektet, *förklara delarnas olika innebörd i ett tal i bråkform* delas in i två specificerade lärandeobjekt: (a) förklara täljarens och nämnarens funktion i ett bråkuttryck och (b) förklara bråkstrecks och decimaltecknets funktion. Det fjärde lärandeobjektet handlar om att

jämföra och storleksordna bråkuttryck. Det femte och avslutande lärandeobjektet handlar om beräkningar av bråkuttryck.

5.3.1 Urskilja samband mellan tal i bråk-, decimal- och procentform

I det följande beskrivs undervisning om lärandeobjektet, *att urskilja samband mellan tal i bråk-, decimal- och procentform*. Detta beskrivs med hjälp av en undervisningssekvens där en lärare uppmärksammar eleverna på sambandet mellan tal i bråk-, decimal- och procentform genom att använda ett antal egentillverkade kort i olika färger.

Läraren konkretiserar sambandet mellan tal i bråk-, decimal- och procentform med hjälp av kort

Under en undervisningssekvens (US c₁, lärare c) uppmärksammas eleverna på sambandet mellan tal i bråk-, decimal- och procentform genom att ett antal egentillverkade kort i olika färger sätts upp på tavlan. På korten är tal skrivna i bråk-, decimal- eller procentform (Figur 20). På några av korten har följande tal i procentform skrivits upp: 10 %, 20 %, 75 % och 150 %. På andra kort finns tal i bråkform: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$ och $\frac{2}{3}$ [sic]¹⁵ och som en tredje kategori finns kort med tal i decimalform: 0,1, 0,2, 0,75 och 1,5. Bredvid korten har läraren ritat en tom tabell med tre kolumner. Matematiklektionen inleds med att eleverna uppmanas identifiera de tal som står i procentform. När en av eleverna säger 75 % flyttar läraren det kortet till en av kolumnerna. Proceduren upprepas så att de tre kolumnerna i tabellen på tavlan till slut innehåller olika former av kort. Därefter namnges de tre kolumnerna som bråkform, procentform respektive decimalform.

15 Läraren upptäcker att det står $\frac{2}{3}$ på kortet. Lärarens intention var att det skulle stå $\frac{3}{2}$. Läraren löser problemet genom att vända kortet upp och ned. Siffrorna blir spegelvända men det är inget som påverkar elevernas förståelse av vad bråkuttrycket betyder eftersom de ser att kortet hör ihop med 150 % och 1,5.

Figur 20

Kort med tal i bråk-, decimal- och procentform som läraren satt upp på tavlan (US c₁, lärare c)

Excerpt US c₁ beskriver en dialog mellan läraren och ett antal elever om sambandet mellan tal i bråk-, decimal- och procentform.

Excerpt US c₁

1	L	Här på tavlan har jag satt upp några färgglada lappar
2		och nu undrar jag först så här, vilka av de här är det
3		som är procenttal?
4	E ₁	75 procent.
5	L	75% och procenttecknet skrivs så här [pekar på pro-
6		centtecknet, flyttar kortet till kolumnen procentform].
7		Har vi fler förslag?
8	E _{2,3,4}	Ja, 10 procent, 150 procent, 20 procent.
9		[läraren flyttar korten till kolumnen procentform].
10	L	Om vi tar bråkformen nu då.
11		[eleverna identifierar samtliga tal skrivna i bråkform
12		och läraren flyttar korten till kolumnen bråkform].
13	L	Hör ni, nu sitter det fyra stycken lappar kvar. Har
14		ni någon rubrik på de här [pekar på de resterande
15		lapparna]. Vad skulle man kunna kalla dem?
16	E ₅	Decimaltal.
17		[kortet flyttas till decimalformskolumnen]
18	L	Titta här nu, ser ni att om vi tittar på det här kortet
19		i decimalform [0,1] och så tittar vi på det här kortet
20		[pekar på kortet $\frac{1}{10}$] och så det här [pekar på kortet
21		10%] så ser ni att det är samma sak. Vi kan skriva dem
22		i olika former utan att deras värde ändras.

På liknande sätt som beskrivs i rad 19–22 visar lärare c sambandet mellan de övriga korten.

I undervisningssekvensen synliggörs bråk-, decimal- eller procentform med hjälp av olika kort. Det arbetssätt som används är ett konkretiserande arbetssätt.

Med hjälp av korten varieras bråk-, decimal- och procentform mot en invariant bakgrund (talens värde, exempelvis $\frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$) (rad 18–22). Genom att de tre formerna kontrasteras kan dimensionen av variation, sambandet mellan bråk-, decimal- eller procentform, öppnas upp. Eleverna ges möjlighet att erfara hur ett och samma bråkuttryck kan skrivas i bråk-, decimal- och procentform.

Vidare ses att lärare använt olika färg på korten för att skriva upp de olika talen. På de gröna korten är procentformen 20 %, decimaltalet 1,5 och bråkuttrycket $\frac{1}{5}$ uppskrivna. På de blåa korten återfinns procentformerna 150 %, 10 % och decimaltalet 0,75. De gula korten representerar bråkuttrycken $\frac{2}{3}$ och $\frac{3}{4}$ samt decimaltalet 0,2. De rosa korten representerar decimaltalet 0,1, bråkuttrycket $\frac{1}{10}$ och procentformen 75 %. Detta innebär att förutom att aspekten bråk-, decimal- eller procentform varierar, varierar även aspekten färg. Men att korten har olika färger är något som de elever som för en dialog med läraren bortser från därför att de enbart sorterar in korten i kategorierna bråk-, decimal- och procentform.

5.3.2 Urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck

I det följande presenteras undervisning som handlar om lärandeobjektet, att *urkilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck*. Undervisning om detta lärandeobjekt beskrivs på två olika sätt. Det ena sättet innebär att läraren använder träfärgade rätblock. Det andra sättet innebär att eleverna använder bråkcirklar som liknar pizzor.

Läraren laborerar med hjälp av träfärgade rätblock att bråkuttryck kan vara likvärdiga

I undervisningssekvens n (lärare n, Figur 21) illustreras hur läraren använder träfärgade rätblock för att visa hur många sjättedelar som är lika mycket som en tredjedel. Läraren håller först fram ett träfärgat

rätblock som representerar bråkuttrycket $\frac{1}{3}$, därefter plockar hon fram andra träfärgade rätblock som representerar bråkuttrycken $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ och $\frac{1}{8}$. Läraren poängterar att ”klossarna måste vara lika långa som tredjedelsklossen, för att det ska ha samma värde” (US n, lärare n). Läraren jämför först åttondelsklossen med tredjedelsklossen och konstaterar att två åttondelsklossar blir för kort och tre blir för långt. Därefter jämförs på samma sätt fjärdedelsklossarna med tredjedelsklossen. Läraren visar eleverna att en fjärdedelskloss blir för kort medan två blir för långt. Slutligen tar läraren fram sjättedelsklossen och visar att två sjättedelsklossar motsvarar lika mycket som tredjedelsklossen (Figur 21). Därefter säger läraren att: ”Vi kan alltså säga att en tredjedel är samma sak som två sjättedelar” (US n, lärare n).

Figur 21

Olika bråkuttryck representerar samma tal (US n, lärare n)

I exemplet beskrivs hur läraren, genom att undersöka, pröva och jämföra olika bråkuttryck med tredjedelsklossen, till slut kommer fram till att bråkuttrycket $\frac{1}{3}$ är likvärdigt med bråkuttrycket $\frac{2}{6}$. Lärarens arbetssätt kan därmed beskrivas som ett laborerande arbetssätt.

Med hjälp av träklossarna varierar olika bråkuttryck mot en invariant bakgrund (bråkuttryckens värde). Genom att bråkuttrycken kontrasteras kan dimensionen av variation, att bråkuttrycket $\frac{1}{3}$ är likvärdigt med bråkuttrycket $\frac{2}{6}$, öppnas upp. Eleverna ges möjlighet att, med hjälp av träklossarna, erfara att bråkuttrycket $\frac{1}{3}$ är likvärdigt med bråkuttrycket $\frac{2}{6}$.

Eleven laborerar med hjälp av bråkpizzor att bråkuttrycken kan vara likvärdiga

I den här undervisningssekvensen (US 1, lärare 1, Figur 22) använder eleverna bråkcirklar som liknar pizzor¹⁶ för att erfara att olika bråkuttryck kan representera samma värde, det vill säga att bråkuttrycken är likvärdiga. Det material som eleverna använder är prefabricerade bråkcirklar föreställande pizzor. Bråkpizzorna är uppdelade i följande bråkuttryck: en hel, halvor, tredjedelar, fjärdedelar, sjättedelar och åttondelar. Eftersom det finns olika pizzor med olika ”fyllningar” finns det många olika slag av de ovan beskrivna bråkuttrycken. Elevernas uppgift är att lägga ut pizzabitar så att ”tallrikarna” fylls med lika stor andel av en pizza. Eleverna får själva bestämma vilka pizzadelar de ska använda. En av eleverna har på den första tallriken lagt ut fyra åttondelsbitar, på den andra tallriken har han använt två fjärdedelsbitar. När han sedan ska ”fylla” den sista tallriken tvekar han en stund och tittar på de bråkdelar som är kvar på bordet. Till slut tar han upp den pizzadel som visar en halv och lägger den på den tredje och sista tallriken (Figur 22). Bråkpizzorna ritas av i elevens räknehäfte där eleven också visar att bråkuttrycken ($\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$) är lika stora genom att sätta ut ett likhetstecken mellan dem.

Figur 22

Bråkpizzor som representerar likvärdiga bråkuttryck (US 1, lärare 1)

I exemplet beskrivs hur eleven laborerar med hjälp av bråkpizzorna och synliggör att de tre bråkuttrycken $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$ och $\frac{1}{2}$ är ekvivalenta. Bråkuttrycken representeras därefter med hjälp av bilder och skriftliga

¹⁶ Eftersom bråkcirklarna liknar pizzor benämns bråkcirklarna här som bråkpizzor.

symboler. Elevens arbetssätt kan således beskrivas som ett laborerande arbetssätt.

Med hjälp av bråkpizzor varieras olika bråkuttryck mot en invariant bakgrund (bråkuttryckens värde). Genom att bråkuttrycken kontrasteras kan dimensionen av variation, att de tre bråkuttrycken $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$ och $\frac{1}{2}$ är likvärdiga, öppnas upp.

Att eleven stannar upp en stund innan han tar den sista pizzadelen kan bero på att det ligger många pizzadelar med varierande ”fyllning” på bordet framför honom och att han inte omedelbart hittar den ”rätta” pizzadelen som stämmer med de övriga fyllningarna. Av Figur 22 framgår att eleven valt pizzadelar med samma ”fyllning”, vilket kan förklara hans agerande. Det laborativa materialet som används kan här leda till att elevens uppmärksamhet fokuseras på andra aspekter än de som är nödvändiga, exempelvis att pizzadelarna även måste ha samma utseende, för att de ska vara likvärdiga. Detta kan innebära att elevens möjlighet att erfara att bråkuttrycken $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$ och $\frac{1}{2}$ är likvärdiga med varandra begränsas.

5.3.3 Förklara innebörden av delarna i ett tal i bråkform

Undervisning om lärandeobjektet, *att förklara innebörden av delarna i ett tal i bråkform* delas in i de specificerade lärandeobjekten (a) förklara täljarens och nämnarens funktion i ett bråkuttryck och (b) förklara bråkstrecks- och decimaltecknets funktion. Undervisning om täljarens och nämnarens funktion i ett bråkuttryck illustreras med hjälp av två undervisningssekvenser. Undervisning om bråkstrecks- och decimaltecknets funktion beskrivs med hjälp av en undervisningssekvens.

Förklara täljarens och nämnarens funktion i ett bråkuttryck

Täljarens och nämnarens funktion i ett bråkuttryck behandlas på två olika sätt i den observerade matematikundervisningen. I den första undervisningssekvensen fokuserar läraren på hur en siffras placering i ett bråkuttryck påverkar bråkuttryckets värde. För att åskådliggöra detta använder sig läraren av ett egentillverkat material. I den andra undervisningssekvensen fokuserar läraren på siffrornas innebörd genom att läraren använder två olika typer av laborativt material. Först används

magnetremsor som sätts upp på tavlan så att de bildar en rektangel. Därefter används en bråkcirkel.

Läraren konkretiserar hur en siffras placering i ett bråkuttryck påverkar bråkuttryckets värde med hjälp av egentillverkade kort

I exemplet nedan beskrivs en undervisningssekvens där läraren med hjälp av bråkuttrycket $\frac{1}{2}$ visar hur en siffras placering i ett bråkuttryck påverkar bråkuttryckets värde (Figur 23).

I dialog med eleverna diskuterar läraren begreppet en halv. Läraren uppmärksammar eleverna på ett uttryck som tidigare nämnts under matematiklektionen där en av eleverna benämnt begreppet en halv som ”två av en”. Läraren och eleverna diskuterar skillnaderna mellan bråkuttrycken $\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{1}$.

Figur 23

Lärarens illustration av bråkuttrycket $\frac{1}{2}$ (US f, lärare f)

Excerpt US f del 1

1	L	Någon sa två av en förut, är det en halv? [skriver $\frac{1}{2}$
2		på tavlan]
3	E ₁	Nej.
4	L	Kommer ni ihåg när vi delade äpplen och ritade bilder?
5		Vi ska titta lite på bilderna igen för att illustrera
6		vad en halv är och vad det här kan vara för något
7		[skriver $\frac{2}{1}$ på tavlan]. Hur många delar delade vi äpplet
8		i för att få en halv?
9	E ₂	Två.
10	L	Ett äpple [sätter upp en bild av ett äpple] och så är det

11	två som ska dela på äpplet [sätter upp en bild före-
12	ställandes två personer under äpplet, under äpplet
13	ritas ett bråkstreck]. Så ska det se ut va, ett äpple och
14	två gubbar. De får dela på ett äpple, de får en halva.

Läraren sätter upp en bild av ett äpple på tavlan (rad 10). Under bilden sätts bilder föreställandes två personer upp (rad 11–12), därefter separeras täljaren (äpplet) och nämnaren (personerna) med ett bråkstreck (rad 13).

Läraren fortsätter därefter genomgången genom att rikta elevernas uppmärksamhet mot det andra bråkuttrycket $\frac{2}{1}$ (rad 1–2) som tidigare skrivits upp på tavlan (Figur 24).

Figur 24

Lärarens illustration av bråkuttrycket $\frac{2}{1}$ (US f, lärare f)

Excerpt US f del 2

1	L	Men det här då? [pekar på $\frac{2}{1}$] Hur många äpplen ska jag
2		sätta ovanför strecket nu då?
3	E ₁	Två.
4	L	Två delat med ett, en person [sätter upp en bild före-
5		ställandes en person]. Hur många äpplen får den här
6		gubben?
7	E ₂	Han får båda.
8	L	En person får två äpplen. Ser ni skillnaden nu mellan
9		de båda uttrycken? Vad som händer när ettan och
10		tvåan byter plats.
11	E _{alla}	Ja

Av excerpten framgår att läraren först utgår från de två bråkuttrycken, $\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{1}$ som visualiseras med hjälp av bilder. Läraren fokuserar på bråkuttrycket $\frac{2}{1}$ och frågar eleverna hur bråkuttrycket kan konkretiseras med hjälp av det laborativa materialet (rad 1–3). Eleverna får komma med förslag på hur bråkuttrycket $\frac{2}{1}$ kan konkretiseras utifrån samma tanke som läraren använde för att åskådliggöra bråkuttrycket $\frac{1}{2}$. Med hjälp av det laborativa materialet påvisas skillnaderna mellan bråkuttrycken och vad det innebär att placera nämnaren respektive täljaren på olika platser om bråkstreckets genom att peka först på det ena bråkuttrycket $\frac{1}{2}$ och därefter på det andra bråkuttrycket $\frac{2}{1}$ (rad 8–11). Lärarens arbetssätt kan alltså tolkas som ett konkretiserande arbetssätt. Läraren öppnar tillsammans med eleverna upp en dimension av variation av nämnarens och täljarens placering när bråkuttrycket $\frac{1}{2}$ kontrasteras mot bråkuttrycket $\frac{2}{1}$. Placeringarna av siffrorna i bråkuttrycken varierar medan siffrorna i bråkuttrycken är invarianta. Eleverna ges i den här undervisningssekvensen möjlighet att erfara innebörden av nämnarens och täljarens funktion i ett bråkuttryck.

Läraren konkretiserar täljarens och nämnarens funktion med hjälp av två olika typer av laborativt material

I den här undervisningssekvensen är det också täljarens och nämnarens funktion som läraren riktar elevernas uppmärksamhet mot. I stället för att använda ett och samma laborativa material används här två olika typer av material.

På tavlan skrivs bråkuttrycket $\frac{3}{5}$, därefter berättar läraren för eleverna att de idag ska prata om täljaren och nämnaren i ett bråkuttryck. Läraren säger att ”täljaren är det som står i taket, det vill säga det översta talet” (US j, lärare j) samtidigt som hon pekar på trean i bråkuttrycket. Bredvid bråkuttrycket skrivs ordet täljare. Läraren berättar att det tal som står under bråkstreckets kallas nämnare, vilket skrivs bredvid femman. Matematiklektionen fortsätter med att elevernas uppmärksamhet riktas mot nämnarens respektive täljarens funktion. Läraren poängterar för eleverna att: ”alltid börja med att titta på nämnaren eftersom den visar vilken sort vi har och det kan vi visa så här” (US j, lärare j). Nämnaren i bråkuttrycket konkretiseras med hjälp av fem magnetiska remsor som

sätts upp bredvid varandra på tavlan (Figur 25). Läraren uttrycker att: ”Nu får de här magnetremsorna illustrera en rektangel som är indelad i fem exakt lika stora delar och det är precis det som den här femman betyder. Rektangeln är indelad i femtedelar. [pekar på femman i bråkuttrycket och ritar en röd ring runt magnetremsorna]” (US j, lärare j).

Läraren fortsätter med att beskriva vad täljaren representerar genom att säga till eleverna att de ska tänka ”hur många av femtedelar ska jag ta, jo tre femtedelar”. Läraren markerar tre femtedelar genom att rita en svart ring runt tre av magnetremsorna. Läraren repeterar nämnarens betydelse när hon upprepar att ”nämnaren talar om vilken sort som helheten ska delas in i” och ”täljaren talar om hur många femtedelar som ska användas” US j, lärare j).

Figur 25

Magnetremsor används för att representera täljarens och nämnarens funktion (US j, lärare j)

Därefter plockar läraren fram en bråkcirkel som hon sätter upp på tavlan, bredvid rektangeln. Bråkcirkeln som sätts upp på tavlan är också indelad i femtedelar (Figur 26). Läraren säger till eleverna att ”ni ska titta på hur det kan se ut när man använder bråkcirklar i stället för rektanglar”. Läraren pekar på hela bråkcirkeln samtidigt som hon högt räknar delarna och konstaterar att också bråkcirkeln är indelad i femtedelar. ”Då vet vi vilken sort vi har, eller hur? Det är ju det som nämnaren talar om. Om vi sedan tar tre av de här bitarna [ritar runt tre av delarna] då ser vi hur många delar vi ska ta. Det är ju det som täljaren talar om” (US j, lärare j).

Figur 26

Bråkcirklar används för att representera täljarens funktion (US j, lärare j)

Magnetremsorna och bråkcirkeln används i samband med att läraren konkretiserar betydelsen av nämnarens respektive täljarens funktion. Lärarens arbetssätt kan i och med det tolkas som ett konkretiserade arbetssätt. När magnetremsorna används påpekar läraren vikten av att delarna är exakt lika stora.

Vid båda tillfällena definierar läraren nämnarens och täljarens funktion när hon påpekar att nämnaren talar om hur stort bråkuttrycket är och att täljaren beskriver hur många delarna är. På så sätt kontrasteras nämnarens och täljarens funktion, vilket leder till att eleverna kan ges möjlighet att erfara nämnarens respektive täljarens funktion. Efter att dimensionen av variation öppnats upp, kan eleverna också ges möjlighet att generalisera nämnarens och täljarens funktion när detta illustreras med hjälp av bråkcirkeln.

Förklara bråkstrecks och decimaltecknets funktion

I undervisning om delarnas innebörd i ett tal i bråkform riktas elevernas fokus mot skillnaden mellan bråkstrecks och decimaltecknets funktion. Detta observerades i samband med undervisning om lärandeobjektet sambanden mellan tal i bråk-, decimal- och procentform som beskrevs ovan i undervisningssekvens c₁. Under lektionen uppmärksammade läraren att en elev svarat "ett streck fem" på frågan vilket av korten 1,5 eller $\frac{1}{5}$ som illustrerade talet uttryckt i bråkform. Matematiklektionens fokus skiftas från att se sambanden mellan tal i

bråk-, decimal- och procentform till att uppmärksamma skillnaden mellan de två symboluttrycken bråkstreck och decimaltecken.

Läraren konkretiserar skillnaden mellan bråkstreckets och decimaltecknets funktion med hjälp av olika kort

I excerpt US c₂ illustreras hur läraren med hjälp av två kort, på det ena kortet står bråkuttrycket $\frac{1}{5}$ skrivet och på det andra kortet står decimaltalet 1,5 skrivet, riktar elevernas fokus mot skillnaden mellan bråkstrecket respektive decimaltecknet.

Excerpt US c₂

1	L	Ett streck fem säger du, hur kan man säga det på något
2		annat sätt?
3	E ₁	Komma fem.
4	L	Komma fem säger du, håller ni med?
5	E ₂	En femtedel.
6	L	Var det den du menade? [pekar på kortet med $\frac{1}{5}$]
7		Eller var det den här du menade? [pekar på kortet med
8		1,5]
9	E ₁	Nej det var den första, ett streck fem.
10	L	Och då pratar du om bråkstrecket.
11	E ₁	Ja.
12	L	Vad är det för skillnad mellan dessa olika streck?
13		[pekar på decimaltecknet och på bråkstrecket]
14	E ₃	Decimaltecknet används för att skilja heltal från
15		decimaltal.
16	L	Ja det stämmer. Hur många hela har vi i det här
17		uttrycket [pekar på 1,5]
18	E ₃	En hel och en halv.
19	L	Just det, en och en halv kan man säga. Hur är det med
20		det här tecknet då? [pekar på bråkstrecket]
21	E ₄	Det används när man jobbar med bråktal, för att skilja
22		täljaren och nämnaren.
23	L	Precis, och vad står det egentligen på det här kortet då?
24	E ₅	En femtedel och det är lika mycket som 0,2.
25	L	Just det, det är ett helt annat tal. Förstår ni nu varför
26		jag hela tiden tjarar på er att uttrycka er på korrekt sätt?

I excerpten ses att en kritisk aspekt för en elev verkar vara hur bråkuttrycket $\frac{1}{5}$ muntligt ska uttryckas eftersom eleven tvekar på vilket av korten, kortet $\frac{1}{5}$ eller kortet 1,5, som representerar uttrycket en

femtedel (rad 1–8). Läraren fångar upp den kritiska aspekten genom att fråga eleverna vad det är för skillnad mellan de båda ”strecken” (rad 12–13). Decimaltecknets funktion förklaras av en elev som säger att kommatecknet (decimaltecknet) används för att skilja heltal från decimaltal. Bråkstreckets funktion förklaras av en annan elev som något som används vid arbetet med bråktal för att separera täljaren från nämnaren. Förutom att förklara decimaltecknets och bråkstreckets funktioner tydliggörs också symbolernas betydelse (rad 14–24).

Excerpten visar att läraren med hjälp av de egentillverkade korten visar på och konkretiserar skillnader mellan decimaltecknet och bråkstrecket. Lärarens arbetssätt kan beskrivas som ett konkretiserande arbetssätt. Genom att läraren och några elever muntligen förklarar och hänvisar till de kort som sitter uppsatta på tavlan förtydligas skillnaderna mellan bråkstreckets och decimaltecknets funktioner och deras innebörd. Läraren skapar en kontrast mellan vad som är ett bråkstreck och vad som är ett decimaltecken genom att variera bråkstrecket och decimaltecknet, medan siffrorna 1 och 5 hålls invarianta. En dimension av variation gällande skillnaden mellan de två symboluttrycken bråkstreck och decimaltecken öppnas upp. I undervisningssekvensen ges eleverna möjlighet att erfara skillnaden mellan bråkstreckets och decimaltecknets funktioner.

5.3.4 Jämföra och storleksordna bråkuttryck

I avsnittet beskrivs undervisning av lärandeobjektet, *strategier för att jämföra bråkuttryck med olika täljare och nämnare*. Undervisning om detta lärandeobjekt delas in i två specificerade lärandeobjekt (a) strategier för att jämföra bråkuttryck med olika täljare och nämnare samt (b) hur bråkuttryck, skrivna som stambråk kan storleksordnas.

Strategier för att jämföra bråkuttryck med olika täljare och nämnare

Här beskrivs undervisning av lärandeobjektet strategier för att jämföra bråkuttryck med olika täljare och nämnare. För att visa strategin använder sig läraren av två bråkcirklar som sätts upp bredvid varandra på tavlan. Detta exemplifieras i den följande undervisningssekvensen.

Läraren konkretiserar en strategi för att jämföra två bråkuttryck med olika täljare och nämnare med hjälp av bråkcirklar

Läraren har satt upp två vita bråkcirklar på tavlan. På bråkcirklarna finns inga markeringar utsatta. Därefter berättar läraren att hon ska visa hur eleverna kan tänka när de ska jämföra två bråkuttryck med varandra och identifiera vilket av bråkuttrycken som är störst, eftersom hon sedan tidigare vet att detta kan vara svårt för eleverna. I undervisningssekvens h_1 (lärare h) jämförs bråkuttrycken $\frac{1}{2}$ och $\frac{5}{8}$ med varandra. Bråkuttrycken skrivs upp på tavlan. Därefter plockar läraren fram en blå bricka föreställande en halv bråccirkel. Brickan sätts upp på en av de uppsatta bråccirklarna. Därefter täcks den andra bråccirkeln med fem röda åttondelsbrickor. Slutligen tar läraren fram en meterlinjal och drar ett vågrätt streck i mitten av de båda bråccirklarna (Figur 27).

Figur 27

Bråkuttrycken $\frac{1}{2}$ och $\frac{5}{8}$ jämförs och representeras med hjälp av bråccirklar (US h_1 , lärare h)

Läraren konstaterar att $\frac{5}{8}$ måste vara större än $\frac{1}{2}$ eftersom ”det är mindre ofärgad yta kvar under strecket” (US h_1 , lärare h) i den bråccirkel som symboliserar $\frac{5}{8}$.” Läraren pekar på båda bråccirklarna samtidigt som hon muntligt förklarar för eleverna att en strategi för att jämföra bråkuttryck är att konkretisera bråkuttrycken med hjälp av bråccirklar. Genom att titta på de två bråccirklarna som representerar bråkuttrycken $\frac{5}{8}$ och $\frac{1}{2}$ ges eleverna en visuell möjlighet att jämföra bråkuttrycken och kan på så sätt se att bråkuttrycket $\frac{5}{8}$ är störst. Läraren tar sin utgångspunkt i de skriftliga symbolerna som därefter representeras med hjälp av

bråkcirklar. Lärarens arbetssätt kan således beskrivas som ett konkretiserande arbetssätt.

I exemplet är bråkcirklarnas storlek densamma, det vill säga den är invariant. En annan aspekt som hålls invariant är bråkbrickornas placering i respektive bråccirkel. Det som varierar är bråkuttryckens storlek och färg. Att bråccirklarna har olika färg är inget som vare sig läraren eller eleverna fäster något hänseende vid. För att avgöra vilket bråkuttryck som är störst dras ett vågrätt streck igenom bråccirklarna, vilket innebär att eleverna kan jämföra oliknämninga bråk och erfara vilket bråkuttryck som är störst. En dimension av variation öppnas upp när bråkuttrycken med olika nämnare och täljare jämförs genom att bråccirklarna kontrasteras mot varandra. Med hjälp av bråccirklarna konkretiseras bråkuttrycken visuellt. Eleverna ges här möjlighet att erfara en strategi för hur två bråkuttryck med olika nämnare och täljare kan jämföras med varandra.

Strategier för hur stambråk kan storleksordnas

Förutom att jämföra bråkuttryck med hjälp av bråccirklar visar studiens resultat att undervisningen organiseras så att eleverna i grupp ges möjlighet att storleksordna bråkuttryck.

Eleverna laborerar med hjälp av kort och ett snöre hur stambråk kan storleksordnas

I excerpten som följer beskrivs en undervisningssekvens där läraren har delat in klassen i grupper om fyra. Varje grupp har fått ett antal klädnypor, ett ca 2 m långt snöre och kort där olika stambråk är uppskrivna. De olika stambråken är: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ och $\frac{1}{9}$. Elevernas uppgift är att placera in stambråken på snöret i storleksordning där det minsta stambråket ska placeras längst till vänster. I det följande presenteras den dialog som förs mellan några elever i en av grupperna.

Excerpt US h₂

1	E ₁	Jag tycker att vi börjar med den här [pekar på kortet
2		där $\frac{1}{2}$ står skrivet] för då vet vi var mitten på snöret är.
3		[snöret viks på mitten och de sätter upp kortet i mitten]
4	E ₃	Ok, vilket kort ska vi köra på nu då?
5	E ₄	Fjärdedelskortet kanske?
6	E ₁	Ja, vik snöret fyra gånger, då vet vi vart vi ska sätta

7		kortet. [snöret viks fyra gånger och kortet sätts upp
8		ungefär vid den vikning som markerar en fjärdedel]
9	E ₁	Sen kan vi ta en åttondel, då får vi vika snöret åtta
10		gånger. [snöret viks åtta gånger, men det är svårare nu
11		eftersom de tidigare upphängda korten är i vägen och
12		ramlar av]
13	E ₃	Hur ska vi göra nu, det är så himla krångligt det här?
14	E ₄	Ja, jag håller med. Kan vi inte bara sätt upp resten av
15		korten?
16		[elevgruppen beslutar sig för att sätta upp de
17		resterande korten på snöret utan hänsyn till avståndet
18		mellan korten, se Figur 28]

Figur 28

Stambråk skrivna på kort storleksordnas på snöre (US h₂, lärare h)

Excerpten illustrerar hur eleverna undersöker och prövar olika sätt hur de ska placera korten på rätt ställe. En av eleverna föreslår exempelvis att de ska börja med det kort som visar bråkuttrycket $\frac{1}{2}$ eftersom de då får reda på var mitten av snöret är (rad 1–3). Eleverna fortsätter sedan med kortet $\frac{1}{4}$. För att veta var kortet ska placeras viks snöret fyra gånger (rad 6–7). Samma strategi används för att placera kortet $\frac{1}{8}$ (rad 9–10). Elevernas arbetssätt kan beskrivas som ett laborerande arbetssätt.

Av excerpten framkommer att den strategi som eleverna använder försvåras på grund av att det redan sitter kort på snöret som vid några tillfällen lossnar när snöret viks (rad 9–12). Strategin med att vika snöret överges efter denna situation och eleverna väljer att sätta upp de återstående korten på snöret godtyckligt (rad 14). Kortet blir korrekt placerade på snöret i förhållande till bråkuttryckens värde, men avståndet mellan korten är inte helt riktigt. Detta är inget som eleverna reflekterar över.

I exemplet är bråkuttrycken som finns på korten skrivna som stambråk vilket innebär att täljaren i bråkuttrycket hålls invariant. Det som varierar är nämnarnas storlek. En dimension av variation öppnas upp när eleverna skapar kontraster mellan bråkkorten när dessa jämförs med varandra. På så sätt kan eleverna erfara stambråkens relativa storlek av tal i bråkform vilket här innebär att ju större nämnaren är desto mindre är talet när täljaren är 1. Däremot försvåras strategin att storleksordna stambråken med varandra på grund av det material som de tilldelats.

5.3.5 Beräkna bråkuttryck

Nedan beskrivs undervisningssekvenser för hur elevernas uppmärksamhet riktas mot ett bråkinnehåll som rör lärandeobjektet *att beräkna bråkuttryck*.

Det laborativa materialet används här för att visualisera olika termer vid beräkningarna av tal i bråkform. De beräkningar som förekommer i den observerade matematikundervisningen är additionsberäkningar av tal i bråkform, där termerna har samma nämnare. I undervisningssekvensen uppmärksammar läraren eleverna särskilt på vad som händer med nämnarna när två bråkuttryck adderas.

Läraren konkretiserar beräkningen med hjälp av magnetremsor

I den här undervisningssekvensen har läraren satt upp fem magnetiska plastremsor på tavlan. Plastremsorna bildar tillsammans formen av en rektangel. Två av plastremsorna är blåa och de andra tre är vita (Figur 29). Läraren talar om för eleverna att de idag ska arbeta med addition av bråk. Vidare påpekar hon, efter att hon satt upp remsorna på tavlan, att de blåa remsorna symboliserar bråkuttrycket $\frac{2}{5}$ och de vita remsorna symboliserar bråkuttrycket $\frac{3}{5}$. Bråkuttrycken skrivs under plastremsorna.

Figur 29

Rektangel bestående av magnetiska plastremsor (US d, lärare d)

Excerpt US d

- 1 L Om man lägger ihop de delar som är blå och de som är
2 vita, vad blir det då? [pekar på rektangeln i Figur 29]
3 E₁ Fem
4 L Om man skriver så här [skriver ett plustecken mellan
5 bråkuttrycken och ett likhetstecken efter] då skulle
6 man nästan kunna göra ett mattetal av det här. [skriver
7 5 i täljaren men dröjer med att skriva vad det ska stå
8 i nämnaren frågan riktas mot eleverna]
9 E₂ Tio
10 E₃ Nej, fem
11 L Ja, vad är rätt svar egentligen? Om vi tittar på
12 rektangeln igen. [pekar mot tavlan] Vad heter delarna
13 som vi delade in den i?
14 E₄ Femtedelar
15 L Ja just det, det är ju fortfarande femtedelar och då
16 händer ingenting med det här va? [pekar på femman i
17 nämnaren och skriver $\frac{5}{5}$ efter likhetstecknet]

Av excerpten framgår att beräkningen av bråkuttrycket konkretiseras med hjälp av de magnetiska plastremsorna. När bråkuttrycken ska adderas refererar läraren till det laborativa materialet innan eleverna får svara på frågan (rad 1–2). Läraren väntar med att skriva svaret på nämnaren och frågar i stället eleverna om de vet svaret (rad 7–8). En av eleverna svarar tio men blir motsagd av en annan elev som säger att det ska stå fem (rad 9–10). Excerpten visar en kritisk aspekt gällande att aspekten, när två bråkuttryck adderas är det enbart täljarna som adderas medan nämnarna förblir oförändrade. Med utgångspunkt i elevernas olika svar skapar läraren kontraster mellan svaret 5 och svaret 10, vilket öppnar upp för en dimension av variation. Kontrasten lyfts fram av läraren när hon relaterar till delarna i Figur 29. Det blir möjligt för

eleverna att erfara att när två bråktal adderas så är det enbart täljarna som adderas medan nämnarna förblir oförändrade.

5.3.6 Sammanfattning - Att undervisa om bråk som tal

I kapitlet som beskriver bråk som tal ingår lärandeobjekten: (a) urskilja samband mellan tal i bråk-, decimal- och procentform, (b) urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck, (c) förklara delarnas innebörd i tal i bråkform, (d) jämföra och storleksordna bråkuttryck och (e) beräkna bråkuttryck.

Lärarnas användande av laborativt material kan ses utifrån ett konkretiserande arbetssätt och ett laborerande arbetssätt. Elevernas arbetssätt kan beskrivas utifrån ett laborerande arbetssätt.

Med hjälp av det laborativa materialet skapas olika kontraster vilket innebär att eleverna ges möjlighet att erfara lärandeobjekten. En av undervisningssekvenserna som beskriver lärandeobjektet *förklara delarnas innebörd i ett tal i bråkform* visar att läraren använder två olika typer av laborativt material. Först används magnetremsor där täljarens och nämnarens funktion kontrasteras, vilket leder till att eleverna ges möjlighet att erfara täljarens respektive nämnarens funktion. Därefter använder läraren bråkcirklar för att återigen uppmärksamma eleverna på täljarens respektive nämnarens funktion. Detta leder till att eleverna också ges möjlighet att generalisera täljarens och nämnarens funktion.

Det material som används i undervisningssekvenserna är av både vardaglig och pedagogisk karaktär samt både perceptuellt rikt material och enkelt material. I några av de observerade undervisningssekvenserna, exempelvis när eleverna ska storleksordna stambråk, påverkas eleverna av det laborativa materialet (kort som storleksordnas på ett snöre), och elevernas uppmärksamhet flyttas från att storleksordna bråkuttrycken till att få korten att sitta kvar på snöret utan att de ska trilla ned. Elevernas fokus riktas i och med det från den matematiska idén till hanteringen av materialet, trots att det material som används är ett så kallat enkelt material. Detta sker också till viss del i undervisningen om likvärdiga bråkuttryck där eleven laborerar med ett så kallat perceptuellt rikt material (bråkpizzor). Förutom att eleven uppmärksammar vilka bråkuttryck som är likvärdiga med varandra intresserar han sig dessutom för att "pizzabitar" ska ha samma "fyllning", vilket inte är en nödvändig aspekt att urskilja i samband med likvärdiga bråkuttryck. I

Tabell 10 ges en sammanfattande översikt över undervisning om bråk som tal.

Tabell 10

Sammanfattande översikt över undervisning om bråk som tal

Lärandeobjekt/ US/lärare	Laborativt material	Arbetsätt Konkretiserande Laborerande Vem Lärare/ Elev	Dimensioner av variation	Elevernas erbjudande
Urskilja samband mellan tal i bråk-, decimal- och procentform/ US c ₁ / lärare c	Färgade kort	Konkretiserande Lärare	Bråk-, decimal och- procent-form	Sambandet mellan tal uttryckta i bråk-, decimal- och procentform
Urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck/ US n/ lärare n	Ofärgade tråklossar	Laborerande Lärare	Olika värden mellan bråkuttrycken en tredjedel och två sjättedelar	Olika bråkuttryck kan representera samma tal
Urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck/ US l/ lärare l	Bråkpizzor	Laborerande Elev	Olika värden mellan bråkuttrycken fyra åttondelar, två fjärdedelar och en halv	Vilka bråkuttryck som är likvärdiga med bråkuttrycket $\frac{4}{8}$
Förklara delarnas innebörd i ett tal i bråkform/ US f/ lärare f	Egen-tillverkade bilder av äpplen och "bilder av personer"	Konkretiserande Lärare	Siffrornas placering i bråkuttrycken $\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{1}$	Täljarens och nämnarens funktion
Förklara delarnas innebörd i ett tal i bråkform/ US j/ lärare j	Magnet-remsor och bråkcirklar	Konkretiserande Lärare	Täljarens och nämnarens funktion i bråkuttrycket tre femtedelar	Täljarens och nämnarens funktion
Förklara delarnas innebörd i ett tal i bråkform/ US c ₂ / lärare c	Egen-tillverkade kort med bråk- och decimaltal	Konkretiserande Lärare	Bråkstrecket i bråkuttrycket en femtedel och decimaltecken i talet en hel och en halv	Skillnader mellan bråkstreck och decimaltecken samt deras funktioner

Jämföra och storleksordna bråkuttryck/ US h ₁ / lärare h	Bråkcirklar	Konkretiserande Lärare	Bråkuttrycken en halv och fem åttondelar	Jämföra bråkuttryck med olika nämnare och olika täljare
Jämföra och storleksordna bråkuttryck/ US h ₂ / lärare h	Egen- tillverkade kort med bråktal	Laborerande Elev	Flera stambråk jämförs	Storleksordna stambråk
Beräkna bråkuttryck/ US d/ lärare d	Magnetiska plastremsor	Konkretiserande Lärare	Addition av nämnarna i bråkuttryck	Beräkningar av tal i bråkform med fokus på hur

5.4 Resultatsammanfattning delstudie I

I resultatet av delstudie I beskrivs hur lärare och elever använder laborativt material när bråkundervisningen fokuseras på (a) bråk som del av helhet, (b) bråk som del av antal och (c) bråk som tal.

Av analysen framgår att lärares och elevers användande av laborativt material kan beskrivas utifrån antingen ett *konkretiserande arbetssätt* eller ett *laborerande arbetssätt*. Vem som använder materialet och vilket arbetssätt som används presenteras i sammanfattningarna av respektive undertema. I Figur 30 sammanfattas de lärandeobjekt som förekommer i resultatet i delstudie I. I figuren framkommer på vilket sätt det laborativa materialet används, konkretiserande eller laborerande. Vidare framkommer även vem som använder materialet, lärare (L) eller elever (E). Materialet som används är både vardagligt och pedagogiskt material. En ytterligare uppdelning av materialet visar att både perceptuellt rika och enkla laborativa material förekommer i undervisningssekvenserna. När lärare och elever använder det laborativa materialet i matematikundervisningen öppnas det upp för olika dimensioner av variation i relation till undervisningssekvensens lärandeobjekt. De variationsmönster som förekommer i studien är kontrast och generalisering. När en dimension av variation öppnas upp ges eleverna möjlighet att erfara lärandeobjektet.

Figur 30

Sammanfattning av de lärandeobjekt som förekommer i resultatet i delstudie I

		Lärare			
Laborerande arbetsätt	Dela in en helhet i lika stora delar (US b _{1,2} , k)	Urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck (US n)	Urskilja samband mellan del, andel och antal (US g)	Förklara delarnas innebörd i tal i bråkform (US f, j)	Benämna bråkdelar i en helhet (US a ₁)
			Urskilja samband mellan tal i bråk- ,decimal- och procentform (US c ₁)	Förklara bråk- streck och decimaltecknets funktion (US c ₂)	Jämföra och storleks- ordna bråkuttryck (US h ₁)
					Konkretiserande arbetsätt
		Elev			
	Urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck (US l)	Urskilja samband mellan del, andel och antal (US e)	Bestämma delen av ett antal (US m)	Benämna bråkdelar i en helhet (US a ₂)	
	Jämföra och storleksordna bråkuttryck (US h ₂)				

6. Resultat - delstudie II

Resultatkapitlet för delstudie II inleds med en sammanfattande beskrivning av lärarnas undervisning om tal i bråkform, vad de riktar elevernas uppmärksamhet mot och vad eleverna ges möjlighet att erfara. I inledningen presenteras dessutom vilka representationer som används samt hur kopplingarna mellan dessa sker.

Efter den sammanfattande beskrivningen redovisas och analyseras hur lärarna undervisar om tal i bråkform med hjälp av olika representationer. Resultatet presenteras i tre huvudteman: (a) bråk som del av helhet, (b) bråk som del av antal och (c) bråk som tal. I Tabell 11 presenteras en översikt över resultatkapitlets struktur.

Lärares iscensatta variation av tal i bråkform

Lärares iscensatta variation av tal i bråkform kan sammanfattningsvis ske på två skilda sätt. Dessa sätt att variera ett lärandeobjekt kan med hjälp av variationsteorin beskrivas som *synkron variation* och *diakron variation*.

Lärare som använder synkron variation när de undervisar om tal i bråkform använder minst två värden i relation till en aspekt. Dessa värden är synliga på samma gång för eleverna och varieras samtidigt i tid. Ett exempel på synkron variation är när lärare undervisar om lärandeobjektet skillnaden mellan två stambråk, exempelvis bråkuttrycken $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{5}$. De två bråkuttrycken, det vill säga de två värdena, visas samtidigt för eleverna och läraren uppmärksammar skillnaden mellan bråkuttrycken genom att jämföra aspekten, i det här fallet, nämnarnas storlek i de två bråkuttrycken. Eleverna ges möjlighet att, på en och samma gång, erfara skillnaden mellan bråkuttrycken genom att de två värdena presenteras och fokuseras samtidigt.

Diakron variation innebär att värdena varieras var för sig vid olika tillfällen under undervisningssekvensen. I exemplet ovan gällande lärandeobjektet skillnaden mellan stambråken $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{5}$ innebär det att läraren först synliggör och diskuterar det ena värdet, $\frac{1}{4}$, och därefter, längre fram i undervisningssekvensen, synliggör och diskuterar det andra värdet, $\frac{1}{5}$. Värdena fokuseras därmed vid olika tidpunkter under undervisningssekvensen. Eleverna ges också här möjlighet att erfara

skillnaden mellan stambråken $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{5}$. Eftersom värdena, det vill säga bråkuttrycken, visas var och en för sig och de två värdena av aspekten nämnarnas storlek därmed inte är synliga för eleverna samtidigt, behöver eleverna själva komma ihåg hur det först visade värdet, bråkuttrycket, såg ut för att kunna relatera det till det andra värdet, bråkuttrycket. Hur lärare synliggör och diskuterar skillnaden mellan två värden inom den diakrona variationen kan ta sig uttryck på två olika sätt. Det ena sättet handlar om att värdena av aspekten är tillgängliga för eleverna under en begränsad tid under undervisningssekvensen. Efter det att läraren riktat uppmärksamhet mot det ena värdet, exempelvis bråkuttrycket $\frac{1}{4}$, tas bråkuttrycket bort innan elevernas uppmärksamhet riktas mot det andra bråkuttrycket. Det andra sättet handlar om att värdena är synliga hela tiden, men värdena uppmärksammas vid olika tillfällen under undervisningssekvensen.

Vidare visar analysen att lärandeobjektet, oavsett om det öppnas upp med hjälp av synkron eller diakron variation, urskiljs med hjälp av antingen *ett exempel* under samma undervisningssekvens eller *med flera exempel* under en och samma undervisningssekvens. Lärandeobjektet urskiljs vid flera olika tillfällen genom att läraren, vid upprepade tillfällen, antingen ger samma slags förklaring till hur lärandeobjektet kan erfaras, eller så ges förklaringen på olika sätt. När lärandeobjektet urskiljs med hjälp av flera exempel ges eleverna många möjliga tillfällen till erfarande jämfört med om lärandeobjektet enbart ges möjlighet att urskiljas med hjälp av ett exempel.

Analysen visar dessutom att lärares iscensättning av lärandeobjekten, oberoende av synkron eller diakron variation, kan beskrivas i termer av ett *begränsat* eller ett *utvidgat erbjudande*. Ett begränsat erbjudande innebär att lärarens förklaring är riktad mot ett specifikt lärandeobjekt. Läraren riktar till exempel uppmärksamhet mot att ge eleverna möjlighet att erfaras ett specifikt lärandeobjekt, exempelvis att jämföra bråkuttrycken $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{5}$. I det begränsade erbjudandet är lärarnas handlande riktat mot att endast uppmärksamma en strategi för att jämföra dessa två bråkuttryck, det specifika lärandeobjektet. Detta leder till att elevernas erfarande begränsas till att enbart omfatta det specifika lärandeobjektet.

Ett utvidgat erbjudande innebär att lärandeobjektet utvidgas från ett enskilt till ett mer generellt lärandeobjekt. I exemplet ovan innebär det

att eleverna, förutom att de får möjlighet att erfara strategier för att jämföra bråkuttrycken $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{5}$, också ges möjlighet att erfara strategier för hur andra oliknämnda bråkuttryck ska jämföras. På så sätt ges eleverna möjlighet att utvidga sitt erfande av lärandeobjektet, att jämföra två oliknämnda bråkuttryck.

Lärarnas representationer av tal i bråkform

Representationer som lärarna använder i undervisningen för att representera tal i bråkform är skriftliga symboler i form av bråkuttryck, olika bilder såsom bråkcirklar, kvadrater, rektanglar och tallinjer. De använder också laborativt material, såsom multilinkkuber och frukter. Därutöver representeras tal i bråkform i vardagliga situationer. Antingen används endast en av representationerna eller så används flera olika representationer.

Lärarnas kopplingar mellan representationerna sker på flera olika sätt. Ett sätt är att läraren muntligt kopplar ihop representationerna. Ett annat sätt är att kopplingarna sker med hjälp av icke verbala handlingar, exempelvis genom att läraren pekar på någon av representationerna. Kopplingarna sker dessutom genom att läraren ritar en pil riktad mot någon specifik del av en representation eller att någon specifik del av representationen ringas in. Kopplingarna mellan representationerna kan även ske visuellt, till exempel genom att hela eller delar av representationerna markeras med färg. Ibland används ett av de ovan nämnda alternativen, ibland används flera av dessa.

Lärarnas kopplingar mellan representationerna sker antingen i direkt anslutning till varandra, vilka här benämns som *synkrona kopplingar*, eller så sker det en fördröjning mellan kopplingarna. Dessa kopplingar benämns som *diakrona kopplingar*. När flera representationer används i en och samma undervisningssekvens kan en del kopplingar mellan vissa representationer ske synkront, medan andra kopplingar mellan andra representationer sker diakront. Analysen visar slutligen att det finns undervisningssekvenser där flera olika representationer används men där läraren inte gör några sammankopplingar mellan representationerna.

I samband med analysen av vilka representationer som används uppmärksammas också huruvida representationerna *överensstämmer* med det matematiska begreppet eller med en annan representation.

Exempel på överensstämmelse mellan representationerna illustreras i Figur 31. I figuren ses att bråkcirklarna, som är indelade i lika stora delar och där delarna är markerade med en avvikande färg, stämmer överens med bråkuttrycken eftersom båda representationerna representerar additionen av två liknämnda bråkuttryck.

Figur 31

Överensstämmelse mellan bråkcirklarna och bråkuttrycken

I Figur 32 illustreras när representationerna inte överensstämmer med varandra eftersom rektangeln inte är indelade i lika stora delar.

Figur 32

Överensstämmelse mellan rektangeln och bråkuttrycket saknas

Hur lärare väljer att iscensätta och representera tal i bråkform kan resultera i att eleverna ges olika möjligheter att erfara tal i bråkform. En analys av hur lärarna i delstudie II varierar och representerar tal i bråkform beskrivs i de tre följande kapitlen (a) bråk som del av en helhet, (b) bråk som del av antal och (c) bråk som tal. Tabell 11 visar en översikt över de tre resultatkapitlen med tillhörande lärandeobjekt.

Tabell 11

Översikt över resultatkapitlen i delstudie II

Kapitel	Lärandeobjekt
Bråk som del av helhet	En hel kan uttryckas som ett bråkuttryck med samma nämnare och täljare Ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren kan skrivas i blandad form
Bråk som del av antal	Urskilja skillnad mellan bråk som del av helhet och bråk som del av antal Urskilja samband mellan del, andel och antal
Bråk som tal	Urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck Jämföra bråkuttryck med olika nämnare Förklara innebörden av delarna i ett tal i bråkform Urskilja samband mellan bråk- och procentform Beräkna bråkuttryck

Analysen av de undervisningssekvenser som tillhör respektive lärandeobjekt sammanfattas bland annat med hjälp av en tabell (se exempel Tabell 12 nedan). I Tabell 12 presenteras vilket lärandeobjekt som analyserats i undervisningssekvenserna, om dimensionen av variation öppnats upp synkront eller diakront och om variationen är begränsad till ett specifikt exempel eller om variationen utvidgas med hjälp av flera exempel. I Tabell 12 framgår också vilka representationer som använts, om kopplingarna mellan representationerna skett synkront eller diakront.

Tabell 12

Exempel på tabell som sammanfattar undervisningssekvenser inom ett lärandeobjekt

Lärande-objekt	Dimension av variation öppnas upp		Kopplingarna mellan representationerna	Eleverna erbjuds att erfara		
En hel kan uttryckas som ett bråkuttryck med samma nämnare och täljare	Synkront (S)	Diakront (D)	synkront = diakront =	Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande		
				Utvidgat erfarande		
US A ₁	S			En hel kan uttryckas som bråkuttrycket $\frac{2}{2}$ Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande	x	
				Utvidgat erfarande		

Tabell 12 visar hur lärandeobjektet, ”en hel” kan uttryckas som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare i undervisningssekvens A₁ och att dimensionen öppnas upp genom synkrona variationer. Sammankopplingarna mellan bråkcirklarna sker synkront liksom kopplingarna mellan bråkuttrycken. Däremot sker inga kopplingar mellan bråkuttrycken och bråkcirklarna. Slutligen ses att eleverna, med hjälp av ett exempel under undervisningssekvensen, ges en begränsad möjlighet att erfara lärandeobjektet.

6.1 Bråk som del av helhet

I avsnittet beskrivs lärares undervisning om bråk som del av helhet. Undervisningen om bråk som del av helhet omfattas av lärandeobjekten, *att uttrycka en hel som ett bråkuttryck med samma nämnare och täljare* och *att skriva ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren i blandad form*.

Undervisningssekvenser som beskriver hur lärarna i delstudie II undervisar om att en hel kan uttryckas som olika bråkuttryck med samma täljare och nämnare, visar att lärarna utgår ifrån helhet (1), och med hjälp av olika representationer visar de att helheten (1) kan uttryckas som olika bråkuttryck, exempelvis att $1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{8}{8}$.

När lärare i delstudie II undervisar om att ett bråktal där täljaren är större än nämnaren kan skrivas i blandad form kan det exempelvis handla om att med hjälp av representationer visa att bråkuttrycket två hela och en tredjedel kan skrivas i antingen blandad form som $2\frac{1}{3}$ eller som bråkuttrycket $\frac{7}{3}$.

6.1.1 Uttrycka en hel som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare

I avsnittet presenteras lärares undervisning om lärandeobjektet, *att uttrycka en hel som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare*. Analysen visar att dimensionen av lärandeobjektet öppnas upp genom antingen synkrona variationer eller diakrona variationer.

Med hjälp av excerpter från tre undervisningssekvenser, US A₁, US A₂ och US B, beskrivs hur dimensionen av en hel uttrycks som ett eller flera bråkuttryck med samma nämnare och täljare och öppnas upp genom synkrona variationer. Därefter beskrivs, med utdrag från en undervisningssekvens, US C₁, hur lärandeobjektet öppnas upp genom diakron variation.

Uttrycka en hel som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare

I undervisningssekvens A₁ beskrivs det första exemplet på hur dimensionen av lärandeobjektet, att en hel kan uttryckas som

bråkuttrycket $\frac{2}{2}$, öppnas upp synkront. Till sin hjälp använder lärare A cirklar och bråkuttryck.

Lektionen inleds med att lärare A berättar för eleverna att de idag ska arbeta med "Hur en hel kan visas på olika sätt". Med hjälp av den interaktiva skrivtavlan klickar läraren fram en bild på en cirkel och frågar eleverna hur en cirkel kan delas. En av eleverna föreslår att de kan dela den i två delar. Läraren fångar upp elevens förslag, klickar fram en ny cirkel på tavlan och delar den nya cirkeln i två delar. På den interaktiva tavlan ses nu två cirklar, en hel cirkel och en cirkel som är delad i två halvor (Figur 33).

Figur 33

En hel uttrycks som två halvor med hjälp av bråkcirklar och uttrycken 1 och $\frac{2}{2}$ (US A₁, lärare A)

Lärare A säger, samtidigt som han pekar på de båda cirkelarna, att "En hel är lika mycket som två halvor", vilket innebär att en hel kontrasteras med bråkuttrycket $\frac{2}{2}$. Dimensionen av variation öppnas upp synkront i och med att båda värdena (en hel, 1, och bråkuttrycket $\frac{2}{2}$) visas samtidigt, och eleverna ges möjlighet att erfara att en hel kan uttryckas som två halvor.

Eftersom lärare A enbart exemplifierar lärandeobjektet med hjälp av ett exempel, vid ett tillfälle under undervisningssekvensen, begränsas elevernas möjlighet att erfara hur en hel kan uttryckas till det specifika bråkuttrycket $\frac{2}{2}$.

I undervisningssekvens A₁ representeras en hel och bråkuttrycket $\frac{2}{2}$ med hjälp av cirklar och skriftliga symboler. Genom att peka på den hela cirkeln och den cirkel som är indelad i två lika stora delar samtidigt

och säga att ”båda bråkcirkelarna visar lika mycket” gör lärare A synkrona kopplingar mellan cirkelarna. Ett ytterligare sätt att koppla ihop bråkcirkelarna med varandra sker när lärare A frågar: ”Om de här cirkelarna visar lika mycket så kan vi på mattespråk också visa det. Är det någon som vet hur vi brukar skriva då?” En elev svarar att de kan använda ett likhetstecken. På motsvarande sätt kopplar läraren ihop bråkuttrycken med varandra. Två likhetstecken, ett mellan cirkelarna och ett mellan bråkuttrycken sätts ut. I samband med detta påpekar lärare A ”nu ser vi att det är lika mycket”. Lärare A gör i och med det både visuella och muntliga kopplingar mellan bråkcirkelarna och mellan bråkuttrycken 1 och $\frac{2}{2}$. Däremot gör läraren inga explicita kopplingar mellan cirkelarna och respektive bråkuttryck förutom att de skrivs upp på tavlan. Det är alltså inte säkert att eleverna urskiljer att bråkcirkelarna och de skriftliga symbolerna representerar samma matematiska uttryck.

I presentationen som lärare A har gjort på den interaktiva skrivtavlan överensstämmer alltså de skriftliga symbolerna med cirkelarna, men lärare A kopplar inte ihop representationerna explicit med varandra. Läraren påpekar inte heller att den cirkel som representerar bråkuttrycket $\frac{2}{2}$ är indelad i två lika stora delar. Därmed är det inte säkert att eleverna urskiljer att delarna i cirkeln måste vara lika stora för att representera bråkuttrycket $\frac{2}{2}$.

Uttrycka en hel som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare

Ett annat exempel på hur lärare kan öppna upp dimensionen av lärandeobjektet, att en hel kan uttryckas som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare, synkront, illustreras i US A₂. I likhet med US A₁ används även här cirklar och bråkuttryck, men i US A₂ gör lärare A dessutom en koppling till en vardaglig representation i och med att läraren uppmärksammar eleverna på att indelningen av en av cirkelarna påminner om ett Mercedesmärke. En ytterligare skillnad mellan undervisningssekvenserna består av att lärare A vid upprepade tillfällen framhåller att en hel kan uttryckas som ett bråkuttryck.

Två cirklar är projicerade på en interaktiv skrivtavla. I excerpt US A₂ illustreras hur en hel kan uttryckas som bråkuttrycket $\frac{3}{3}$.

Excerpt US A₂

- 1 L Vi kan dela den i tre lika stora delar. [cirkeln delas
2 in i tre lika stora delar]. Titta, det ser ut som Mercedes-
3 märket. Så det här är tre lika stora delar [pekar på
4 den indelade cirkeln] så nu har vi tre tredjedelar
5 som är lika med en hel [uttrycket $\frac{3}{3}$ skrivs på tavlan
6 under cirkeln som delats in i tredjedelar]. Det här är
7 lika med en hel [pekar på den hela cirkeln och
8 skriver en 1: a nedanför den hela cirkeln]. De här
9 representerar exakt samma värde, de representerar en
10 hel [pekar på cirkelarna och på de skriftliga
11 symbolerna].

Av excerpten framgår att lärare A påvisar att en hel kan uttryckas som tre tredjedelar. Lärare A skapar en kontrast mellan att en hel kan uttryckas både som tre tredjedelar och som talet 1 genom att vid upprepade tillfällen säga att de representerar samma värde (rad 3–4, 6–7 och 8–11). Dimensionen av variation, att en hel kan uttryckas som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare, öppnas upp. Dimensionen av variation öppnas upp synkront genom att båda värdena (en hel och bråkuttrycket $\frac{3}{3}$) visas samtidigt med hjälp av ett exempel, vilket innebär att, även om elevernas möjlighet att erfara begränsas till att en hel kan uttryckas som ett specifikt bråkuttryck ($\frac{3}{3}$), så ges eleverna vid flera olika tillfällen under undervisningssekvensen möjlighet att erfara lärandeobjektet.

Mellan den cirkel som delats in i tre delar och den cirkel som representerar en hel gör lärare A synkrona kopplingar när han säger att ”tre tredjedelar som är lika med en hel” (rad 4–5) och samtidigt pekar på den indelade cirkeln (rad 3–4) samt visar hur tre tredjedelar representeras med hjälp av skriftliga symboler (rad 5–6). Lärare A gör också synkrona kopplingar mellan den hela cirkeln och helheten (1) genom att han pekar på den hela cirkeln och säger att ”den är lika med en hel” (rad 6–7) samt skriver talet 1 nedanför cirkeln (rad 8). Genom att peka på alla representationer (rad 10–11) och säga att de representerar samma värde (rad 9) kopplar läraren ihop representationerna till ett system som på olika sätt representerar en hel.

Förutom synkrona kopplingar sker dessutom en diakron muntlig sammankoppling mellan cirkeln och Mercedesmärket då lärare A hänvisar till Mercedesmärket (rad 2–3) i samband med att cirkeln delas

in i tre delar. Dessa kopplingar är diakrona eftersom Mercedesmärket inte är synligt för eleverna.

Mellan cirkelarna och de skriftliga symbolerna råder överensstämmelse. Lärare A påpekar, vid ett flertal tillfällen, att delarna i cirkeln ska vara lika stora (rad 1–3). Det finns också, under förutsättning att eleverna sedan tidigare har kännedom om hur Mercedesmärket ser ut, överensstämmelse mellan bråkuttrycket $\frac{3}{3}$ och Mercedesmärket. Om eleverna däremot inte är bekanta med hur märket ser ut kan det bli svårare för dem att urskilja kopplingen.

Uttrycka en hel som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare

Nedan beskrivs i det tredje exemplet (US B) hur lärandeobjektet, att en hel kan uttryckas som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare, öppnas upp synkront. I likhet med US A₂ ges eleverna, med hjälp av flera exempel, tillfällen att erfara lärandeobjektet. Till skillnad från US A₂ visas här att en hel kan uttryckas som tre olika bråkuttryck och inte bara som ett bråkuttryck. En ytterligare skillnad framträder i lärare B:s val av representationer. I likhet med US A₁ och US A₂ används också cirklar, men lärare B använder dessutom en tallinje för att representera lärandeobjektet.

På den interaktiva skrivtavlan har lärare B ritat upp tre cirklar som är delade i halvor, tredjedelar respektive en hel cirkel. Nedanför cirkelarna har en tallinje ritats (Figur 34). Tallinjens båda ändar är markerade med 0 respektive 1.

Figur 34

Bråkcirklar och bågar på en tallinje representerar en hel och bråkuttrycken $\frac{2}{2}$ och $\frac{3}{3}$ (US B, lärare B)

Lärare B pekar först på den gröna cirkeln och säger att den visar en hel. Därefter ritar läraren med samma färg (grön) som cirkelns kontur en båge mellan 0 och 1 på tallinjen. Läraren ritar på tallinjen säger samtidigt: "Här ritar jag nu bråket en av en hel på tallinjen, avståndet mellan 0 och 1 ska delas på ett, ja det är ju det här avståndet här [pekar på avståndet mellan 0 och 1 på tallinjen]".

Läraren fortsätter med att uppmärksamma eleverna på att en hel kan uttryckas som bråkuttrycket $\frac{2}{2}$. Detta sker genom att läraren först pekar på den cirkel som representerar två halvor och ritar sedan två blåfärgade bågar på tallinjen. I samband med att lärare B ritar de två bågarna säger han: "Om jag vill dela in tallinjen i två lika stora delar då kan jag göra två hopp så hamnar jag ändå på ettan, precis som här [pekar på den gröna bågen]. Två av två är samma sak som en av en".

Slutligen påvisas att en hel kan uttryckas som bråkuttrycket $\frac{3}{3}$ i och med att läraren påpekar att "tre av tre är samma sak som en". För att visa de tre tredjedelarna som den röda cirkeln är indelad i ritar lärare B tre röda bågar på tallinjen. När tallinjen delats in säger han: "Om jag delar tallinjen i tre lika stora delar och så gör jag tre lika stora hopp så hamnar vi igen på ettan".

I excerpt US B illustreras hur lärare B sammanfattar och än en gång påpekar att en hel kan uttryckas som en av en, två halvor och tre tredjedelar och att dessa uttryck har samma värde.

Excerpt US B

- 1 L Så en av en, två halvor eller tre tredjedelar är olika
2 sätt att uttrycka talet 1 de är ju värda lika mycket
3 [pekar på den gröna cirkeln och den gröna bågen] vi
4 ser att den här gröna cirkeln är samma som den
5 här gröna bågen och de här två blåa halvorna
6 motsvarar de två blåa bågarna här [pekar på den blåa
7 cirkeln och på de blåa bågarna] och tredjedelarna
8 här är samma som de tre röda bågarna [pekar på den
9 röda cirkeln och de röda bågarna].

Undervisningssekvensen beskriver hur en hel kan uttryckas som en av en, två halvor respektive tre tredjedelar, det vill säga hur en hel kan anges som tre bråkuttryck med samma nämnare och täljare. Dimensionen av variation att en hel kan uttryckas som ett bråkuttryck öppnas upp synkront genom att en hel kontrasteras mot de tre bråkuttrycken $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$ och $\frac{3}{3}$. Eleven ges vid flera tillfällen möjlighet att erfara att en hel kan uttryckas med hjälp av tre bråkuttryck. Även om elevernas möjlighet att erfara begränsas till de tre bråkuttrycken ges de en viss möjlighet att erfara att en hel kan uttryckas på fler sätt än bara ett, vilket i förlängningen kan leda till ett utvidgat erfande av att en hel kan uttryckas som olika bråkuttryck med samma nämnare och täljare.

Lärare B gör muntliga synkrona kopplingar mellan cirkelarna och bågarna på tallinjen, när han pekar på respektive cirkel och på den båg som ritas på tallinjen. Kopplingarna mellan cirkelarna och bågarna på tallinjen upprepas vid flera tillfällen under undervisningssekvensen. Samtidigt som lärare B ritar bågarna på tallinjen påpekas att bågarna på tallinjen representerar cirkelarna och att dessa i sin tur representerar ett specifikt bråkuttryck. Detta kan underlätta för eleverna att erfara kopplingen mellan respektive cirkel och båg.

Lärare B:s val av att representera bråkuttrycken med hjälp av en tallinje kan ge eleverna möjlighet att erfara att bråk inte bara kan ses som en del av en helhet utan också som ett tal, vilket kan ligga till grund för att erfara den relativa storleken på tal i bråkform. Det vill säga att ju större nämnaren är desto mindre är delen, om täljaren är densamma i olika bråktal.

Cirkelarna och bågarna på tallinjen överensstämmer med varandra. Överensstämmelsen förstärks genom att samma färg används för att markera respektive cirkel som bågarna på tallinjen. Däremot kan det

vara svårt för eleverna att erfara relativ storlek av tal i bråkform eftersom lärare B explicit inte uppmärksammar detta.

Uttrycka en hel som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare

Nedan beskrivs den sista undervisningssekvensen som handlar om lärandeobjektet, att en hel kan uttryckas som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare. Till skillnad från de tre ovan nämnda undervisningssekvenserna öppnas dimensionen upp genom *diakron* variation.

I likhet med US B visas att en hel kan uttryckas som flera olika bråkuttryck, det vill säga flera exempel, och inte bara som ett annat bråkuttryck. Men till skillnad från US B används i detta exempel enbart en representation (en melon).

Undervisningssekvensen inleds med att lärare C börjar med att ta fram en melon som hon visar upp så att alla elever i klassen kan se. Lärare C fortsätter med att säga "Nu är det inte formen jag är intresserad av, jag säger så här, om man köper en melon och är några stycken som vill ha en bit var, hur gör man då?" En elev säger att det går att dela melonen.

Med hjälp av melonen visas att en hel kan uttryckas i två halvor, fyra fjärdedelar och sist i åtta åttondelar. Detta sker genom att lärare C först delar in melonen i två delar, dessa delar benämns som två halvor. Lärare C visar, genom att vid upprepade tillfällen föra ihop de båda halvorna, att de tillsammans bildar en hel. Eleverna ges således ett flertal möjligheter att erfara att en hel kan uttryckas som två halvor.

En av de två halvorna delas i sin tur in i två delar och lärare C frågar hur stor del av en hel hon håller upp nu. Eleverna tänker en stund själva innan en elev får ordet och svarar att "det är en fjärdedel." Därefter delas den andra halvan in i två delar. Gemensamt kommer klassen fram till att när melonen är delad i fyra delar så är melonen delad i fjärdedelar och att det behövs fyra fjärdedelar för att det ska vara lika mycket som en hel. Eleverna ges möjlighet att erfara att förutom att en hel kan uttryckas som två halvor ges de även möjlighet att erfara att en hel kan uttryckas som fyra fjärdedelar.

Slutligen ställer lärare C frågan "Om jag nu skulle dela varje fjärdedel en gång till, vad skulle jag få för delar då?" En elev säger att det blir åttondelar. Efter att melonen delats i åttondelar upprepar lärare C att det

behövs åtta åttondelar för att få en hel melon. Eleverna ges på så sätt möjlighet att erfara att en hel också kan uttryckas som åtta åttondelar.

Lärare C repeterar slutligen att en hel kan uttryckas som två halvor, fyra fjärdedelar eller åtta åttondelar.

Undervisningssekvensen illustrerar hur lärare C först kontrasterar en hel mot två halvor, därefter mot fyra fjärdedelar och slutligen mot åtta åttondelar. Dimensionen av variation att en hel kan uttryckas som halvor, fyra fjärdedelar respektive åtta åttondelar öppnas upp diakront eftersom melondelarna som representerar respektive bråkuttryck hålls upp en i taget. Eftersom de olika delarna inte är synliga för eleverna samtidigt kan detta försvåra elevernas möjlighet att erfara lärandeobjektet då eleverna själva behöver komma ihåg hur respektive melondel ser ut.

Genom att lärare C ger flera exempel på att en hel kan uttryckas som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare ges eleverna en viss möjlighet till ett utvidgat erfande av lärandeobjektet.

I undervisningssekvens C_1 framträder två problem med att använda frukter för att representera bråkuttryck. För det första riktas elevernas uppmärksamhet mot melonens form och inte att melonen representerar en hel. I denna undervisningssekvens uppmärksammas detta av lärare C som påtalar för eleverna att de, vid det här tillfället, inte är formen de är intresserade av. Det andra problemet med att använda frukter för att representera bråkuttryck är det blir svårt för läraren att dela in frukterna i exakt lika stora delar, vilket innebär att eleverna inte ges möjlighet att erfara att alla delar måste vara lika stora.

Sammanfattning - Att undervisa om att en hel kan uttryckas som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare

Av resultatet framkommer att undervisning, som handlar om att en hel kan uttryckas som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare, öppnas upp genom antingen synkron eller diakron variation. När dimensionen öppnas upp synkront kontrasteras en hel samtidigt med ett bråkuttryck och när dimensionen öppnas upp diakront kontrasteras de olika bråkuttrycken med en hel, ett i taget. Vid dessa tillfällen behöver eleverna på egen hand urskilja att en hel kan uttryckas som olika bråkuttryck, vilket de inte behöver när dimensionen öppnas upp synkront.

Vidare visar resultatet att när lärarna riktar uppmärksamheten mot lärandeobjektet vid ett tillfälle i undervisningssekvensen ges eleverna liten möjlighet att erfara lärandeobjektet. Undervisningen om lärandeobjektet, att en hel kan uttryckas som ett bråkuttryck, kan i dessa sammanhang beskrivas som kontextbunden, knuten till just lärarnas val av bråkuttryck, vilket kan försvåra elevernas förmåga att utvidga sitt erfarande att en hel kan uttryckas som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare.

De representationer som lärarna väljer att använda är relativt likartade. Företrädesvis används bråkcirklar och skriftliga symboler. Därutöver används en melon, en referens till ett Mercedesmärke samt en tallinje. Att hänvisa till ett Mercedesmärke kan vara ett sätt att relatera till en vardaglig representation. Detta kräver att eleverna sedan tidigare har erfarenhet av hur denna symbol ser ut. Genom att använda tallinjer ges eleverna dessutom möjlighet att erfara bråk som ett tal och inte enbart bråk som del av helhet, vilket innebär att deras erfarande om tal i bråkform kan vidgas. Användandet av frukter medför svårigheter att visa att delarna är lika stora. Om frukter ska användas behöver eleverna sedan tidigare ha urskilt att alla delar i en helhet måste vara lika stora.

Kopplingarna mellan representationerna sker antingen diakront eller synkront. När kopplingarna sker diakront innebär det att representationerna visas var för sig. I dessa sammanhang kan lärarna inte utnyttja möjligheten att koppla samman representationerna med hjälp av icke verbala handlingar. Detta innebär att eleverna själva behöver komma ihåg hur den först visade representationen såg ut, vilket de inte behöver göra när kopplingarna sker synkront. De synkrona kopplingarna mellan representationerna sker både med hjälp av verbala och icke verbala handlingar, exempelvis genom att sätta ut likhetstecken mellan representationerna. När kopplingarna mellan representationerna sker synkront innebär det att representationerna visas samtidigt vilket kan underlätta för eleverna. Resultatet visar också att även om lärarna gör synkrona kopplingar görs kopplingarna enbart mellan vissa representationer, inte mellan samtliga som används. Detta kan innebära att eleverna inte ges möjlighet att erfara att de representationer som används ingår i ett och samma representationssystem.

I Tabell 13 nedan ges en översikt över undervisning som handlar om att en hel kan uttryckas som ett bråkuttryck med samma täljare och

nämnare. I Tabell 13 presenteras undervisningssekvenserna var för sig. Tabellen illustrerar om dimensionen av variation öppnas upp synkront eller diakront. Dessutom ses vilka representationer som används samt hur kopplingarna mellan dessa skett.

Tabell 13

Översikt över undervisning om att en hel kan uttryckas som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare

Lärande-objekt/ US	Dimension av variation öppnas upp		Kopplingarna mellan representationerna	Eleverna erbjuds att erfara		
Uttrycka en hel som ett bråkuttryck med samma täljare och nämnare	Synkron (S)	Diakron (D)	synkront = diakront =	Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfارande		
				Utvidgat erfارande		
US A ₁	S			En hel kan uttryckas som bråkuttrycket $\frac{2}{2}$ Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfارande	x	
				Utvidgat erfارande		
US A ₂	S			En hel kan uttryckas som bråkuttrycket $\frac{3}{3}$ Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfارande	x	

				Utvidgat erfarande		
US B	S			En hel kan uttryckas som bråkuttrycken $\frac{2}{2}$ och $\frac{3}{3}$	Ett exempel	Flera exempel
				Begränsat erfarande		
				Utvidgat erfarande		x
US C ₁		D		En hel kan uttryckas som bråkuttrycken $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$ och $\frac{8}{8}$	Ett exempel	Flera exempel
				Begränsat erfarande		
				Utvidgat erfarande		x

6.1.2 Skriva ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren i blandad form

Detta avsnitt beskriver undervisning där lärare riktar elevernas uppmärksamhet mot lärandeobjektet, *att skriva ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren i blandad form*, exempelvis att $1\frac{3}{2}$ kan skrivas som $1\frac{1}{2}$.

Analysen visar att dimensionen av variation öppnas upp genom synkron eller diakron variation. Först beskrivs hur lärandeobjektet öppnas upp genom synkron variation. Detta exemplifieras med hjälp av US D₁. Därefter beskrivs, med hjälp av US E₁, hur lärandeobjektet öppnas upp med diakron variation.

Skriva ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren i blandad form

Undervisningssekvens D₁ beskriver hur dimensionen av variation av lärandeobjektet, att ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren kan skrivas i blandad form, öppnas upp genom synkron variation.

På tavlan har ett arbetsblad projicerats (Figur 35). Lärare D berättar att de idag ska arbeta med skillnaden mellan att skriva ett tal i bråkform och att skriva ett tal i blandad form.

Figur 35

Arbetsblad som visas på tavlan. Tal i bråkform och blandad form (US D₁, lärare D)

Vad visar bilderna? Svara i bråkform och blandad form

	Bråkform	Blandad form
$\frac{4}{3}$	$1\frac{1}{3}$
$\frac{5}{3}$	$1\frac{2}{3}$
$\frac{5}{4}$	$1\frac{1}{4}$
$\frac{11}{4}$	$2\frac{3}{4}$

I excerpt US D₁ illustreras hur lärare D riktar elevernas uppmärksamhet mot de översta cirkelarna på arbetsbladet som representerar bråkuttrycken $1\frac{1}{3}$ och $\frac{4}{3}$. Lärare D börjar med att fokusera på den blandade formen och därefter hur detta kan uttryckas som ett tal i bråkform.

Excerpt US D₁

1 L Här tittar vi först på hur många hela vi har och så
2 skriver jag det [pekar på den cirkel där tre tredjedelar
3 är skuggade]. Sen tittar vi på den cirkel där en tredje-
4 del är skuggad. Jag har en hel och en tredjedel [ritar en
5 ring runt de två cirkelarna]. Detta kan jag skriva som en
6 hel och en tredjedel [$1\frac{1}{3}$ skrivs upp på tavlan. Figur
7 35]. För att skriva talet i bråkform kollar jag alltså på
8 hur många delar jag har och här var det tredjedelar.
9 Sen kollar jag hur många de är, och här är det fyra
10 [pekar på de fyra skuggade tredjedelarna i de två
11 cirkelarna]. Då kan jag skriva fyra tredjedelar [$\frac{4}{3}$ skrivs
12 upp på tavlan. Figur 35]. Ser ni, jag kan alltså
13 skriva detta [pekar på olika cirkelarna] på två sätt,
14 antingen så här eller så här, båda uttrycken visar
15 samma sak [pekar på båda bråkuttrycken].

Proceduren upprepas på samma sätt med de andra uppgifterna på arbetsbladet. Lärare D använder samma procedur för att åskådliggöra att ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren kan skrivas i blandad form. Avslutningsvis sammanfattas undervisningssekvensen med att lärare D säger att ”Ett tal som skrivs i blandad form har ett heltal [pekar på samtliga heltal som finns uppskrivna på tavlan] och ett bråktal [pekar på samtliga bråkuttryck som finns uppskrivna efter heltalen på tavlan]”. Därefter uppmärksammas hur ett tal i bråkform skrivs genom att läraren påpekar att ett tal i bråkform inte har någon heltalsdel utan bara skrivs som ett bråkuttryck med en täljare och en nämnare. Lärare D pekar på samtliga tal i bråkform som finns uppskrivna på tavlan.

Av excerpt US D₁ framgår att dimensionen av variation av lärandeobjektet, ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren kan skrivas i blandad form, öppnas upp genom att lärare D kontrasterar tal skrivna i bråkform mot tal skrivna som blandad form. Eftersom båda formerna visas samtidigt öppnas dimensionen upp synkront. Eleverna ges möjlighet med hjälp av flera exempel att erfara hur ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren kan skrivas i blandad form. När lärare D pekar på och beskriver vad som kännetecknar ett tal i blandad form respektive ett tal i bråkform där täljaren är större än nämnaren utvidgas erbjudandet till att gälla för vilka bråktal som helst (där täljaren är större än nämnaren), och inte enbart för de bråkuttryck som behandlas i

undervisningssekvensen. Det betyder att elevernas möjlighet att erfara lärandeobjektet utvidgas.

Genom att peka på bråkcirklarna (rad 2–4 och 10–11) och skriva talen i blandad form och i bråkform och samtidigt säga vad bråkcirklarna och de två bråkformerna representerar, gör lärare D flera synkrona kopplingar mellan representationerna. Sammankopplingarna sker således både muntligt och visuellt. Dessutom gör lärare D synkrona kopplingar mellan bråkuttrycken (rad 13–15) när hon pekar på respektive bråkuttryck och samtidigt påtalar att dessa uttryck har samma värde. Förutom den muntliga kopplingen mellan bråkcirklarna och de skriftliga symbolerna ritar läraren en ring runt bråkcirklarna (Figur 35). En tolkning är att ringen som ritas runt bråkcirklarna visuellt förstärker kopplingen, att de två bråkcirklarna representerar ett och samma tal, och kan syfta till att hjälpa eleverna att erfara att de två bråkcirklarna och de två bråkformerna representerar samma tal. Detta är dock något som eleverna själva behöver urskilja eftersom det inte är något som påtalas av lärare D. Även om det inte finns motsvarande visuella kopplingar mellan bråkcirklarna och de skriftliga symbolerna stämmer representationerna överens med varandra via det arbetsblad som visas för eleverna.

Skriva ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren i blandad form

I nedanstående undervisningssekvens (US E₁) beskrivs det andra exemplet på hur undervisning av lärandeobjektet, att skriva ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren i blandad form, sker. I likhet med US D₁ används också här bråkcirklar och bråkuttryck men till skillnad från det föregående exemplet öppnas dimensionen av variation upp diakront. En ytterligare skillnad är att dimensionen av variation endast öppnas upp vid ett tillfälle i stället för vid flera tillfällen.

Undervisningssekvens E₁ inleds med att bråkuttrycket $\frac{5}{4}$ skrivs upp på tavlan. Lärare E säger att ”bråk som är större än en hel kan skrivas i både bråkform och i blandad form”. Lärare E pekar på bråkuttrycket $\frac{5}{4}$ och frågar eleverna om de tidigare ”sett bråk där täljaren är större än nämnaren”. Två bråkcirklar som är indelade i fjärdedelar ritas upp till vänster om bråkuttrycket $\frac{5}{4}$ (Figur 36).

Figur 36

$\frac{5}{4}$ representeras av bråkcirklar och ett bråkuttryck (US E₁, lärare E)

I undervisningssekvensen uppmärksammas innebörden av bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren. Detta sker genom att lärare E först riktar elevernas uppmärksamhet mot täljaren och sedan mot nämnaren i bråkuttrycket genom att peka på bråkuttrycket $\frac{5}{4}$ och samtidigt säga att ”här ser ni att täljaren är större än en hel, det betyder att bråkuttrycket är mer än en hel”. Lärare E betonar att nämnaren i bråkuttrycken visar hur många delar som bråkuttrycken är indelade i och att täljaren ”förtäljer hur många delarna är”.

Elevernas uppmärksamhet riktas därefter från bråkformen till hur bråkuttrycket $\frac{5}{4}$ kan skrivas i blandad form. Det tidigare uppskrivna bråkuttrycket suddas ut medan bråkcirkelarna är kvar på tavlan. Lärare E pekar på den vänstra bråkcirkeln i Figur 37 som är helt fylld och påpekar att en hel cirkel motsvarar $\frac{4}{4}$ och att detta kan representeras med en ”1:a”. 1:an skrivs till höger om bråkcirkelarna. Därefter riktas elevernas uppmärksamhet mot den cirkel där en fjärdedel är ifylld. Bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ skrivs bakom 1:an.

Figur 37

$1\frac{1}{4}$ representeras av bråkcirklar och ett bråktal skrivet i blandad form (US E₁, lärare E)

Uttrycket $1\frac{1}{4}$ kopplas ihop med de två bråkcirkklarna genom att lärare E upprepar, samtidigt som han pekar på uttrycket följt av bråkcirkklarna, att 1:an i bråkuttrycket motsvarar den hela bråkcirkeln och att $\frac{1}{4}$ motsvarar den cirkel där en fjärdedel är skuggad.

I US E₁ öppnas dimensionen av variation upp diakront eftersom de två olika sätten att skriva bråkuttrycket, det vill säga värdena, visas och kontrasteras vid två separata tillfällen. Lärare E uppmärksammar först tal skrivna i bråkform och sedan hur bråkuttrycket skrivs i blandad form. Lärare E utgår ifrån de specifika bråkuttrycken men i sin förklaring använder läraren uttryck som ”här ser ni att täljaren är större än en hel, det betyder att bråkuttrycket är mer än en hel” och ”den blandade formen består av ett helt tal och ett bråktal bildar tillsammans ett tal och att det talet kallas för blandad form”. Detta kan innebära att under förutsättning att eleverna själva urskiljer att värdet av bråkuttrycken är det samma, ges de en viss utvidgad möjlighet att erfara lärandeobjektet, eftersom lärare E:s förklaring inte specifikt är riktad mot de bråkuttryck som används i undervisningssekvensen.

Kopplingarna mellan talen skrivna i bråkform och i blandad form uppmärksammas inte explicit av lärare E, utan detta är något som eleverna själva behöver urskilja. Om detta urskiljs kan kopplingarna i så fall beskrivas som diakrona.

Att använda två bråkcirklar för att representera bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren kräver att eleverna urskiljer att båda bråkcirkklarna tillsammans representerar talet i bråkform. En tolkning är att eleverna kan uppfatta att respektive bråkcirkel representerar två skilda bråkuttryck ($\frac{4}{4}$ och $\frac{1}{4}$). Lärare E säger att fyra fjärdedelar är samma sak som en hel men detta är inget som representeras visuellt. För att den bråkcirkel som är indelad i fyra delar där samtliga delar är ifyllda ska stämma överens med heltalsdelen (1) i bråkuttrycket $1\frac{1}{4}$ krävs det att eleverna i ett tidigare skede har erfarit att $1 = \frac{4}{4}$.

Sammanfattning - Att undervisa om att ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren kan skrivas i blandad form

Av analysen framgår att undervisning som handlar om lärandeobjektet, *att skriva ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren i blandad*

form öppnas antingen upp genom synkrona eller diakrona variationer. Dimensionen av variation öppnas upp synkront genom att läraren visar båda formerna samtidigt för eleverna. Lärarna tydliggör kopplingen mellan de båda formerna. Dimensionen av variation öppnas upp diakront genom att läraren först fokuserar på innebörden av ett bråkuttryck för att därefter fokusera på innebörden av bråkuttrycket skrivet i blandad form. När läraren visar på innebörden av bråkuttrycket skrivet i blandad form hänvisar denne inte tillbaka till det tidigare skrivna bråkuttrycket, vilket innebär att kopplingen mellan de två formerna inte lika tydligt framträder som när dimensionen öppnas upp synkront. Detta kan innebära att elevernas möjlighet att erfara att båda uttrycken representerar samma tal försvåras.

Av analysen framkommer att lärarna riktar uppmärksamhet mot lärandeobjektet med hjälp av flera exempel, vilket medför att eleverna under en och samma undervisningssekvens ges flera tillfällen att erfara lärandeobjektet. Vidare framkommer att lärarnas förklaringar av lärandeobjektet är av en mer generell karaktär och därmed kan appliceras på vilka bråkuttryck som helst och inte enbart på de bråkuttryck som presenteras i undervisningssekvenserna, vilket innebär att eleverna ges möjlighet till ett utvidgat erfande. Analysen visar också att lärarnas förklaringar kan vara riktade specifikt mot ett exempel, ett bråkuttryck, som används i undervisningssekvensen. Detta kan innebära att elevernas möjlighet att erfara dessa bråkuttryck begränsas.

Representationerna som lärarna använder är skriftliga symboler och bråkcirklar. Kopplingarna mellan representationerna sker antingen synkront eller diakront. Kopplingarna sker synkront både verbalt och genom icke verbala handlingar. Representationerna synliggörs samtidigt, vilket medför att eleverna ges möjlighet att erfara att representationerna hör ihop och bildar en helhet, ett system, som tillsammans representerar ett bråkuttryck. Genom att ringa in både den bråkcirkel som representerar heltalsdelen och den bråkcirkel som representerar bråkdelen kan elevernas erfande av att de båda bråkcirklarna representerar ett och samma tal i bråkform förstärkas. I Tabell 14 presenteras en översikt över undervisning som handlar om att ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren kan skrivas i blandad form.

Tabell 14

Översikt över undervisning om att skriva ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren i blandad form

Lärande- objekt/ US	Dimension av variation öppnas upp		Kopplingarna mellan representationerna	Eleverna erbjuds att erfara		
Skriva ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren i blandad form	Synkront (S)	Diakront (D)	synkront = diakront =	Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande		
				Utvidgat erfarande		
US D ₁	S			Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande		
				Utvidgat erfarande		x
US E ₁		D		Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande		
				Utvidgat erfarande	x	

6.2 Bråk som del av antal

I det följande beskrivs lärares undervisning om bråk som del av antal. Undervisningen om bråk som del av antal beskrivs utifrån lärandeobjekten, *att urskilja skillnaden mellan bråk som del av helhet och bråk som del av antal* och *att urskilja samband mellan del, andel och antal*.

Undervisningssekvenser som illustrerar hur lärare undervisar om skillnaden mellan bråk som del av helhet och bråk som del av antal visar att lärarna uppmärksammar skillnaden mellan exempelvis $\frac{2}{4}$ av en hel (en kontinuerlig mängd) och $\frac{2}{4}$ av ett givet antal (en diskret mängd). Skillnaden mellan bråk som del av helhet och bråk som del av antal representeras med hjälp av olika bilder liknande de som illustreras i Figur 38.

Figur 38

Skillnaden mellan innebörden av $\frac{2}{4}$ av en hel och $\frac{2}{4}$ av ett antal

Vid analysen av lärares undervisning om samband mellan del, andel och antal har lärandeobjektet brutits ned till två mer specificerade lärandeobjekt. Det ena lärandeobjektet innebär att lärarna undervisar om att urskilja samband mellan andelen och delen i bråkuppgifter. Det andra lärandeobjektet innebär att lärarna undervisar eleverna om att urskilja samband mellan delen och antalet i bråkuppgifter. Oavsett vilket samband som lärarna uppmärksammar används bilder, skriftliga symboler eller laborativt material.

6.2.1 Urskilja skillnad mellan bråk som del av helhet och bråk som del av antal

Analysen av undervisningen visar att dimensionen av variation, *att urskilja skillnad mellan bråk som del av helhet och bråk som del av antal* öppnas upp genom synkrona variationer. Detta åskådliggörs nedan med hjälp av ett exempel från US G₁.

Urskilja skillnad mellan bråk som del av helhet och bråk som del av antal

I US G₁ beskrivs hur dimensionen av variation gällande lärandeobjektet att urskilja skillnad mellan bråk som del av helhet och bråk som del av antal öppnas upp synkront. Detta representeras med hjälp av en bild av en kvadrat som är indelad i fyra lika stora delar samt en bild föreställande 16 cirklar, organiserade i fyra rader och fyra kolumner. Dessa två bilder visas samtidigt på en Whiteboardtavla.

Lektionen inleds med att lärare G riktar elevernas uppmärksamhet mot bråk som del av helhet genom att en kvadrat som är indelad i fyra lika stora delar, varav en del markeras med färg, visas på tavlan (Figur 39, vänster bild). Lärare G pekar på kvadraten och säger samtidigt ”Här är en kvadrat som är indelad i fyra lika stora delar. En av delarna, [pekar på den rödmarkerade delen i kvadraten] är en del av fyra, en fjärdedel. Det är en del av den hela kvadraten [pekar samtidigt på hela kvadraten]”.

Figur 39

Skillnad mellan bråk som helhet och bråk som del av antal representeras med hjälp av bilder (US G₁, lärare G)

Lärare G riktar sedan elevernas uppmärksamhet mot innebörden av bråk som del av antal. Detta sker genom att lärare G säger ”Nu ska vi i stället titta på vad en del av ett antal är för något”. Lärare G frågar eleverna hur

mycket en fjärdedel av 16 cirklar är. Cirklarna delas in i fjärdedelar genom att lärare G drar ett vertikalt och ett horisontellt streck mellan cirklarna, (högra bilden i Figur 39). De fyra cirklarna längst upp till vänster ringas in och lärare G säger samtidigt att "Här ser vi att fyra cirklar motsvarar en fjärdedel".

Skillnaderna mellan bråk som del av helhet och bråk som del av antal lyfts fram när lärare G pekar på kvadraten och säger att "bilden visar en hel där en fjärdedel är markerad". Därefter pekar lärare G på cirklarna och säger "här har vi i stället en bild med 16 cirklar, och de här fyra cirklarna [pekar på de fyra inringade cirklarna] är också en fjärdedel, men här ser vi att en fjärdedel motsvarar fyra stycken". Läraren påpekar att i båda bråkuppgifterna efterfrågas en fjärdedel men att "en fjärdedel kan på så vis visas på två olika sätt".

Lärare G gör en kontrast mellan aspekterna bråk som del av helhet och bråk som del av antal eftersom dessa varierar medan (fjärde)delen hålls invariant. Båda subgrupperna av bråk synliggörs samtidigt, vilket innebär att lärandeobjektet "skillnaderna mellan bråk som del av helhet och bråk som del av antal" öppnas upp synkront. Eftersom lärare G enbart, vid ett tillfälle, visar ett exempel på skillnaderna mellan $\frac{1}{4}$ av en kvadrat och $\frac{1}{4}$ av 16 cirklar blir skillnaderna mellan de två subgrupperna av bråk knutna till den uppgift som används i undervisningssekvensen. Eleverna ges i och med det en begränsad möjlighet att erfara skillnaden mellan bråk som del av en hel och bråk som del av antal.

Mellan de två bilderna gör lärare G synkrona kopplingar då hon pekar på kvadraten som delas in i fyra lika stora delar och samtidigt påpekar "att den visar en fjärdedel av en hel medan den andra kvadraten också visar en fjärdedel men att i stället för en del av en helhet så motsvarar delen ett bestämt antal". Bilderna är indelade på liknande sätt med vertikala och horisontella streck. Dessutom är bilderna lika stora. För att markera delarna i varje kvadrat har lärare G med röd färg ringat in samma område (längst upp till vänster) och på så sätt överensstämmer bilderna med varandra.

Sammanfattning - Att undervisa om skillnad mellan bråk som del av helhet och del av antal

Analysen visar att undervisning som handlar om att tal i bråkform kan ses som antingen bråk som del av helhet eller bråk som del av antal

öppnas genom synkron variation när läraren gör samtidiga kontraster mellan aspekterna bråk som helhet och bråk som del av antal. Eleverna ges alltså en möjlighet att erfara att tal i bråkform kan uppfattas på dessa två sätt.

Dimensionen öppnas upp vid ett tillfälle under undervisningssekvensen och det är enbart ett exempel som visas. Detta innebär att elevernas möjligheter att erfara lärandeobjektet begränsas till ett specifikt tillfälle och till ett specifikt exempel.

De representationer som används är en bild av en kvadrat som är indelad i fyra lika stora delar samt en bild föreställande 16 cirkelar. Bilderna är presenterade på ett sätt som kan tolkas som att de främjar elevernas förmåga att koppla samman bilderna med varandra. Mellan representationerna gör läraren synkrona verbala och icke verbala kopplingar.

I Tabell 15 presenteras en översikt över undervisning som handlar om att tal i bråkform kan ses som antingen bråk som del av helhet eller bråk som del av antal.

Tabell 15

Översikt över undervisning om att urskilja skillnaden mellan bråk som del av helhet och bråk som del av antal

Lärande- objekt/ US	Dimension av variation öppnas upp		Kopplingarna mellan representationerna	Eleverna erbjuds att erfara		
Skillnaden mellan bråk som del av en hel och bråk som del av antal	Synkront (S)	Diakront (D)	synkront = diakront =	Ett exempel Flera exempel		
				Begränsat erfarande		
				Utvidgat erfarande		
US G ₁	S			Tal i bråkform kan ses som bråk av helhet respektive bråk av antal

			Flera exempel	
				Ett exempel	
				Begränsat erfarenande	x
				Utvidgat erfarenande	

6.2.2 Urskilja samband mellan del, andel och antal

I avsnittet presenteras lärares undervisning om lärandeobjektet, *att urskilja samband mellan del, andel och antal*. Lärandeobjektet har brutits ned i två mer specificerade lärandeobjekt. Det ena specificerade lärandeobjektet, som beskrivs i US H, handlar om lärares undervisning om sambandet mellan andelen och delen i olika bråkuppgifter. Det andra specificerade lärandeobjektet, som beskrivs i US G₂, handlar i stället om lärares undervisning om sambandet mellan delen och antalet i olika bråkuppgifter. I det förstnämnda specificerade lärandeobjektet öppnas dimensionen av variation upp synkront medan det sistnämnda specificerade lärandeobjektet öppnas upp diakront.

En förändring av andelens storlek påverkar delens storlek

I det följande beskrivs hur dimensionen av det specificerade lärandeobjektet, *att urskilja samband mellan andelarnas och delarnas storlek*, öppnas upp synkront. För att visa sambandet används tre olika exempel: (1) Hur mycket är $\frac{1}{5}$ av 15? (2) Hur mycket är $\frac{2}{5}$ av 15? och (3) Hur mycket är $\frac{3}{5}$ av 15? De tre exemplen behandlas först som isolerade exempel där elevernas uppmärksamhet riktas mot hur stor delen är i respektive exempel. Därefter sammanförs de och behandlas som ett och samma exempel där fokus riktas mot sambandet mellan exemplen.

Undervisningen inleds med att lärare H tar fram ett A3-papper där han skriver ”Hur mycket är $\frac{1}{5}$ av 15?” Därefter ritas en rektangel som delas in i fem lika stora delar. Lärare H tar sedan fram 15 multilinkkuber som fördelas jämnt mellan rektangelns fem delar. Lärare H pekar på en av delarna av rektangeln och säger ”Ser ni att det finns tre kuber i en

del? Så en del eller en femtedel av 15 är tre stycken, vi kan skriva så här: $\frac{1}{5}$ av $15 = 3$ [uttrycket skrivs på pappret]”.

Lärare H fortsätter därefter att fokusera på hur mycket två femtedelar av 15 är genom att säga: ”Men om vi vill ha två femtedelar då, vad blir det?” Bråkuttrycket $\frac{2}{5}$ av 15 skrivs nedanför det första uttrycket. Därefter pekar han på tvåan i bråkuttrycket och poängterar att de måste räkna hur många kuber det finns i två delar av rektangeln. Bakom uttrycket $\frac{2}{5}$ av 15 skrivs $= 6$. På motsvarande sätt uppmärksammas därefter hur mycket $\frac{3}{5}$ av 15 är.

Därefter fokuserar lärare H på sambandet mellan andelarnas storlek och delarnas storlek. Detta sker genom att lärare H riktar elevernas uppmärksamhet mot att delens storlek ökar när täljaren i bråkuttrycken ökar. Lärare H återgår till den första uppgiften $\frac{1}{5}$ av $15 = 3$ och pekar först på ettan i bråkuttrycket $\frac{1}{5}$ och säger ”En femtedel av 15 är 3”. Lärare H pekar på de tre multilinkkuberna som ligger i en av delarna i rektangeln och säger samtidigt att ”en femtedel av 15 kuber är 3 kuber”. Proceduren upprepas med exemplet $\frac{2}{5}$ av $15 = 6$ genom att lärare H pekar på tvåan i bråkuttrycket $\frac{2}{5}$ och säger ”två femtedelar av 15 är 6”. Samtidigt som detta sägs pekar lärare H på sex av multilinkkuberna som ligger i rektangeln. Handlingen upprepas slutligen för exemplet $\frac{3}{5}$ av $15 = 9$ och lärare H konstaterar att ”tre femtedelar av 15 är 9”. Därefter säger lärare H: ”Ser ni här [pekar på täljaren i de tre bråkuttrycken] när täljaren ökar så ökar även delens storlek. Varje gång täljaren ökar så ökar antalet i delen med tre.”

Med hjälp av de tre exemplen varieras andelarnas storlek medan det totala antalet hålls invariant. En dimension av variation, sambandet mellan andelen och delen, kan öppnas upp. Eleverna ges vid flera tillfällen under samma undervisningssekvens möjlighet att erfara att när andelen ökar så ökar också delens storlek. De tre exemplen visas samtidigt, vilket innebär att dimensionen av variation öppnas upp synkront. Eftersom lärare H exempelvis säger ”Varje gång täljaren ökar så ökar antalet i delen” är lärare H:s förklaring inte enbart riktad mot de exempel som används i undervisningssekvensen. I och med detta ges eleverna möjlighet till ett utvidgat erfande av lärandeobjektet.

Mellan multilinkkuberna och uppgifterna $\frac{1}{5}$ av $15=3$, $\frac{2}{5}$ av $15=6$ samt $\frac{3}{5}$ av $15=9$ gör lärare H synkrona kopplingar genom att peka på och förklara att täljarna representerar rektangelns femtedelar.

I undervisningssekvensen används en rektangel som är delad i fem lika stora delar med tre multilinkkuber i varje del, totalt 15 kuber. Med hjälp av rektangeln och multilinkkuberna representeras de tre uppgifterna på en och samma gång. I rektangeln markeras ingen enskild uppgift, vilket innebär att eleverna inte ges något visuellt stöd att urskilja hur varje enskild uppgift är representerad med hjälp av rektangeln och multilinkkuberna. Det kan vara svårt för eleverna att urskilja, att varje gång täljaren i bråkuttrycket ökar så ökar även delens storlek, genom att enbart titta på rektangeln och kuberna.

En förändring av det givna antalet påverkar delens storlek

I US G₂ beskrivs hur dimensionen av variation av det andra specificerade lärandeobjektet, att delens storlek förändras när det givna antalet förändras, öppnas upp. Till skillnad från det ovan beskrivna lärandeobjektet öppnas dimensionen upp diakront. För att visa på sambandet mellan antalet och delen förändras det givna antalet från 16 cirklar till 12 cirklar medan andelen ($\frac{1}{4}$) hålls invariant.

Lärare G som först visat en bild med 16 cirklar tar fram en annan bild föreställande 12 cirklar (Figur 40). Bilden med de 16 cirklarna är inte längre synlig för eleverna. Lärare G säger att "I stället för 16 cirklar där en fjärdedel var fyra stycken cirklar så har vi nu ändrat antalet cirklar till 12 stycken och vi vill ta reda på hur mycket en fjärdedel av 12 cirklar är". Lärare G skriver uttrycket $\frac{12}{4}$ på tavlan och frågar eleverna vad tolv dividerat med fyra är. Eleverna kommer fram till att det är tre. Bakom uttrycket $\frac{12}{4}$ skriver läraren $=3$. Lärare G pekar på bilden med de 12 cirklarna och säger: "Nu har vi 12 cirklar som vi ska dela i fyra lika stora delar, en fjärdedel av 12, och det sa vi att det blev tre." Läraren drar tre vertikala streck mellan cirklarna i bilden så att cirklarna delas in i fyra kolumner med fyra cirklar i varje kolumn och säger samtidigt som hon pekar på en av delarna i bilden "att i varje del finns det nu tre cirklar" (Figur 40).

Lärare G konstaterar att en fjärdedel av 12 är tre medan en fjärdedel av 16 är fyra. Lärare G säger samtidigt som hon pekar på cirklarna: "Här

har vi 12 cirklar och en fjärdedel av det är detsamma som tre. I den förra uppgiften hade vi 16 cirklar och en fjärdedel var då fyra stycken. Så antalet cirklar vi har från början påverkar alltså hur många cirklar vi har i varje del.”

Figur 40

12 cirklar som delas in i fyra lika stora delar (US G₂, lärare G)

En kontrast skapas genom att det givna antalet varieras från 16 cirklar till 12 cirklar medan andelen, en fjärdedel, är invariant. Genom att variera det givna antalet från 16 cirklar till 12 cirklar varieras också delarnas antal (4 stycken till 3 stycken). Dimensionen av variation öppnas upp diakront genom att de båda bilderna av cirkarna inte visas samtidigt för eleverna, lärare G gör enbart en muntlig hänvisning tillbaka till bilden av de 16 cirkarna. Eleverna ges inte möjlighet att samtidigt se bilderna med 12 cirklar och 16 cirklar, vilket innebär att kopplingen mellan bilderna sker diakront. Eleverna ges vid ett tillfälle möjlighet att erfara att delens storlek förändras i samband med att det givna antalet förändras. De behöver emellertid själva komma ihåg hur den ursprungliga bilden såg ut för att kunna göra en kontrast mellan den ursprungliga bilden och den nya bilden. Dessutom begränsas elevernas erfارande till kontrasten mellan en fjärdedel av 16 och en fjärdedel av 12 i och med att inga andra exempel visas. I undervisningssekvensen finns ändå inslag av ett utvidgat erbjudande när lärare G exempelvis säger att ”antalet cirklar vi har från början påverkar alltså hur många cirklar vi har i varje del”. I och med detta ges eleverna en viss möjlighet att erfara att detta samband gäller andra exempel än de som visas i samband med undervisningen.

Bilden av de 12 cirkarna och uttrycket $\frac{12}{4} = 3$ visas samtidigt på tavlan. Lärare G pekar på bilden och säger att de 12 cirkarna ska delas i fyra lika stora delar. Lärare G visar med hjälp av bilden hur de 12 cirkarna kan delas in i fyra lika stora delar samt hur många cirklar det

finns i varje del, men kopplingen mellan bilden och uttrycket $\frac{12}{4} = 3$ urskiljs inte helt, eftersom lärare G inte explicit visar sambandet mellan bilden och uttrycket utan enbart riktar elevernas uppmärksamhet mot hur bilden kan tolkas. Detta innebär att även om båda representationerna visas samtidigt för eleverna är det inte säkert att eleverna urskiljer kopplingen eftersom detta inte uppmärksammas av läraren.

Vidare ses att uttrycket $\frac{12}{4} = 3$ inte tydligt överensstämmer med lärare G:s förklaring att ”en fjärdedel av 12 cirklar är tre” eftersom lärare G inte explicit påtalar att en fjärdedel av 12 kan uttryckas som 12 dividerat med fyra.

Sammanfattning - Att undervisa om samband mellan del, andel och antal

Lärares undervisning om samband mellan del, andel och antal handlar antingen om sambandet mellan andelen och delen i olika bråkuppgifter eller sambandet mellan delen och antalet i en bråkuppgift. Analysen visar att i undervisningen om sambandet mellan andelarnas och delarnas storlek varierar andelarnas storlek, medan det totala antalet hålls invariant. Andelarnas storlek varierar och kontrasteras synkront, vilket medför att dimensionen av variation öppnas upp synkront. Detta kan underlätta elevernas möjligheter att erfara att när andelen ökar så ökar också delens storlek. När undervisningen däremot riktas mot att delens storlek förändras då det givna antalet förändras kontrasteras detta diakront. Detta kan leda till att elevernas erfارande av lärandeobjektet försvåras.

Av analysen framkommer att eleverna ges en viss möjlighet att vid ett eller flera tillfällen utvidga sitt erfارande av lärandeobjekten när lärarnas förklaringar delvis innefattas av mer generella samband som inte är knutna till de bråkuppgifter som används i de aktuella undervisningssekvenserna.

De representationer som lärarna väljer att använda för att representera sambandet mellan delen, andelen och antalet är multilinkkuber, skriftliga symboler i form olika bråkuttryck, bilder av rektanglar och bilder av cirklar av varierande antal. Representationerna överensstämmer helt eller delvis med varandra, vilket kan underlätta elevernas erfارande om att de ingår i ett system som representerar samma aspekter.

Lärarnas kopplingar mellan representationerna sker synkront eller diakront genom antingen både verbala och icke verbala handlingar eller enbart verbala handlingar. De icke verbala handlingarna som sker samtidigt som de verbala, exempelvis genom att läraren pekar på de olika representationerna, kan underlätta för eleverna att uppmärksamma kopplingen mellan representationerna. När kopplingarna sker diakront och enbart muntligt måste eleverna själva hålla i minnet hur den ursprungliga representationen såg ut för att därefter själva koppla ihop den med den andra representationen.

I Tabell 16 presenteras en översikt över undervisningen om samband mellan del, andel och antal.

Tabell 16

Översikt över undervisning om samband mellan del, andel och antal

Lärande- objekt/ US	Dimension av variation öppnas upp		Kopplingarna mellan representationerna	Eleverna erbjuds att erfara		
Samband mellan del, andel och antal	Synkront (S) Diakront (D)		synkront = diakront =	Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande		
				Utvidgat erfarande		
US H	S		av 15 = 3 av 15 = 6 av 15 = 9	Sambandet mellan andelarna $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ och $\frac{3}{5}$ och delarna 3, 6 och 9. När andelarna storlek ökar ökas även delarna storlek.		
				Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande		

				Utvidgat erfarande		x
US G2		D		Samband mellan antalet och delen när antalet ändras från 16 till 12 när andelen $\frac{1}{4}$ är invariant. En förändring av det givna antalet påverkar delens storlek.	Ett exempel	Flera exempel
				Begränsat erfarande		
				Utvidgat erfarande	x	

6.3 Bråk som tal

I kapitlet illustreras lärares undervisning om bråk som tal. Undervisningen om bråk som tal beskrivs utifrån lärandeobjekten (a) *urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck*, (b) *jämföra bråkuttryck med olika nämnare*, (c) *förklara innebörden av delarna i ett tal i bråkform*, (d) *urskilja samband mellan bråk- och procentform* och (e) *beräkningar av bråkuttryck*.

Undervisningen om att *urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck* handlar exempelvis om att lärarna i delstudie II uppmärksammar eleverna på att två bråkuttryck kan skrivas på olika sätt men att bråkuttryckens värde är lika. Exempel på likvärdiga bråkuttryck som förekommer är $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$. De likvärdiga bråkuttrycken representeras med hjälp av skriftliga symboler och cirkclar.

Lärares undervisning om hur *bråkuttryck kan jämföras* handlar om att lärare undervisar om hur bråkuttryck med olika nämnare jämförs, exempelvis $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{4}$. För att representera hur bråkuttrycken jämförs använder sig lärarna av bilder av rektanglar eller cirkclar samt olika skriftliga symboler.

Undervisning om att *förklara innebörden av delarna i ett tal i bråkform* har brutits ned till tre specificerade lärandeobjekt: (a) *innebörden av nämnarna i ett bråkuttryck*, (b) *skillnaden mellan nämnarna och täljarna i ett bråkuttryck* och (c) *skillnaden mellan*

heltalsdelen och bråkdelen i blandad form. För att visa på innebörden av nämnarna i ett bråkuttryck visar lärarna olika bråkuttryck med olika nämnare men med samma täljare, exempelvis, $\frac{3}{4}$ och $\frac{3}{5}$. Bråkuttrycken representeras med hjälp av skriftliga symboler och bilder. För att skilja på täljarna och nämnarna i ett bråkuttryck använder sig lärarna av skriftliga symboler och bilder av rektanglar eller cirklar. När undervisningen handlar om skillnaden mellan heltalsdelen och bråkdelen i ett tal skrivet i blandad form uppmärksammas exempelvis skillnaden mellan heltalsdelen 3 och bråkdelen $\frac{1}{4}$ i bråkuttrycket $3\frac{1}{4}$. Här används cirklar och skriftliga symboler.

Inom undervisning om bråk som tal ingår dessutom lärares undervisning om att *urskilja samband mellan bråkform och procentform*. Exempelvis sambandet mellan $\frac{1}{4}$ och 25 %. Dessa samband representeras med hjälp av skriftliga symboler.

Slutligen beskrivs undervisningssekvenser som visar hur lärare undervisar om hur *bråkuttryck kan beräknas*. De beräkningar som lärarna i delstudie II undervisar om är addition av bråkuttryck med olika nämnare och subtraktion av bråkuttryck med lika nämnare. Dessutom beskrivs hur lärare undervisar om hur ett bråkuttryck multipliceras med ett heltal, exempelvis hur $\frac{1}{4}$ multipliceras med 12. Beräkningarna av bråkuttrycken representeras med hjälp av olika bilder och skriftliga symboler.

6.3.1 Urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck

I följande avsnitt presenteras lärares undervisning om lärandeobjektet, att *urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck*. Analysen visar att dimensionen av variation öppnas upp genom antingen synkrona variationer eller diakrona variationer.

Med hjälp av excerpter från två undervisningssekvenser, US K och US C₂, beskrivs hur lärandeobjektet öppnas upp genom synkrona variationer. Därpå beskrivs i US E₂ hur lärandeobjektet öppnas upp genom diakron variation.

Urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck

I US K illustreras det första exemplet på hur dimensionen av variation gällande lärandeobjektet, att urskilja samband mellan likvärdiga

bråkuttryck, öppnas upp genom synkron variation. I undervisningssekvensen uppmärksammas att bråkuttrycken $\frac{2}{3}$ och $\frac{4}{6}$ är likvärdiga.

På en Whiteboardtavla visas en rektangel som är indelad i sex delar varav fyra delar är färgade (Figur 41). De färgade delarna och de ofärgade delarna räknas och bredvid rektangeln skrivs bråkuttrycket $\frac{4}{6}$. Fyran i täljaren skrivs med blå färg och sexan i nämnaren skrivs med svart färg. Därefter säger lärare K att han nu ska visa ”att olika bråktal kan betyda samma sak. Jag ska visa er med hjälp av ett exempel här. Här står bråkuttrycket $\frac{4}{6}$ [pekar på bråkuttrycket och på rektangeln], ser ni att den här rektangeln visar bråkuttrycket, och jag ska visa att det är samma sak som $\frac{2}{3}$ ”.

Figur 41

Rektangel som representerar bråkuttrycket $\frac{4}{6}$ (US K, lärare K)

Lärare K säger till eleverna att de ska föreställa sig att rektangeln är en chokladkaka som är indelad i sex lika stora bitar och att de vill äta upp fyra av dessa bitar. Lärare K pekar återigen på rektangeln. Därefter säger han att ”om jag i stället vill dela in rektangeln i tre lika stora delar men ändå äta upp lika stor del av chokladkakan som förut, då måste jag äta upp två bitar, eller hur. Då äter jag upp $\frac{2}{3}$ av chokladkakan”. Bakom bråkuttrycket $\frac{4}{6}$ skriver lärare K bråkuttrycket $\frac{2}{3}$ och suddar därefter bort det vågräta strecket i rektangeln. Kvar på tavlan blir en rektangel som är indelad i tre delar varav två är färglagda samt de två bråkuttrycken (Figur 42).

Figur 42

Rektangel som representerar bråkuttrycket $\frac{2}{3}$. Skriftliga symboler som visar att bråkuttrycket $\frac{4}{6}$ är lika med bråkuttrycket $\frac{2}{3}$ (US K, lärare K)

Lärare K pekar på de två blåmarkerade delarna av rektangeln i Figur 42 och säger ”de här bitarna är ju lika stora som de fyra bitarna vi hade innan. Det betyder att $\frac{4}{6}$ och $\frac{2}{3}$ är samma sak. $\frac{4}{6}$ och $\frac{2}{3}$ är olika sätt att skriva samma tal på”. Undervisningssekvens K avslutas med att lärare K säger ”Nu visar rektangeln två tredjedelar, den förra visade ju fyra sjättedelar, men det är ju samma sak, bråkuttrycket $\frac{2}{3}$ och $\frac{4}{6}$ är lika mycket värda.” Mellan de två bråkuttrycken sätter lärare K ut ett likhetstecken.

I undervisningssekvens K kontrasteras de två bråkuttrycken med varandra. Bråkuttrycken varieras medan värdet av bråkuttrycken hålls invariant. Lärare K säger att bråkuttrycken är ”lika mycket värda” och visar likvärdigheten mellan bråkuttrycken genom att sätta ut ett likhetstecken mellan bråkuttrycken. Båda bråkuttrycken är synliga för eleverna samtidigt. En dimension av variation öppnas upp synkront och eleverna ges möjlighet att erfara att de två bråkuttrycken är likvärdiga. Eftersom inga andra exempel används av läraren för att förklara sambandet mellan likvärdiga bråkuttryck innebär det att dimensionen av variation begränsas till just detta exempel.

I början av undervisningssekvensen säger lärare K att han ska visa att ”olika bråktal kan betyda samma sak” men vad som är lika lämnas åt eleverna själva att tolka.

Genom att använda samma färg på täljaren i bråkuttrycken som färgen på de skuggade delarna i rektangeln överensstämmer bråkuttrycken med rektangeln och kopplingarna mellan representationerna kan underlättas. Det är ändå inte säkert att eleverna urskiljer detta eftersom det inte tydliggörs av lärare K.

Kopplingarna mellan de två rektangelarna är diakrona eftersom lärare K utgår ifrån en och samma rektangel som först representerar

bråkuttrycket $\frac{4}{6}$ som därefter förändras när den vågräta linjen i rektangeln suddas ut, så att den nya rektangeln representerar bråkuttrycket $\frac{2}{3}$. Läraren hänvisar tillbaka till hur den ursprungliga rektangeln såg ut, men rektanglarna visas inte samtidigt för eleverna. Eleverna behöver själva komma ihåg hur den först visade rektangeln såg ut för att inse att de färglagda delarna täcker lika stora områden i de båda rektanglarna, det vill säga att rektangeln visar två likvärdiga bråkuttryck. Eftersom enbart en rektangel, den som visar bråkuttrycket $\frac{2}{3}$, visas på tavlan i slutet av undervisningssekvensen stämmer rektangeln bara överens med bråkuttrycket $\frac{2}{3}$ och inte med bråkuttrycket $\frac{4}{6}$.

Förutom diakrona kopplingar sker också synkrona kopplingar mellan de skriftliga symbolerna som visar de två bråkuttrycken, eftersom båda bråkuttrycken visas samtidigt samt att lärare K sätter ut ett likhetstecken mellan dem.

Urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck

Nedan beskrivs det andra exemplet på hur dimensionen av variation av lärandeobjektet, att urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck, öppnas upp synkront. Liksom i det förra exemplet ges eleverna en begränsad möjlighet, vid ett tillfälle, med hjälp av ett exempel under undervisningssekvensen, att erfara sambandet mellan två likvärdiga bråkuttryck. Det som skiljer nedanstående undervisningssekvens, US C₂ från US K är hur sammankopplingarna mellan representationerna sker samt överensstämmelsen mellan representationerna.

I undervisningssekvens C₂ har lärare C skrivit upp bråkuttrycken $\frac{2}{2}$ och $\frac{4}{4}$. Ovanför dessa två bråkuttryck har två cirklar, indelade i två respektive fyra lika stora delar ritats upp på tavlan. Mellan bråkuttrycken och bråkcirkelarna har lärare C satt ut likhetstecken (Figur 43). I undervisningssekvensen jämför lärare C hur många fjärdedelar som motsvarar två halvor. Lärare C säger ”Fyra fjärdedelar är samma sak som två halvor”. Samtidigt som lärare C säger detta pekar hon först på de fyra delarna i cirkeln som representerar fjärdedelarna och därefter på de två delarna i den bråkcirkel som representerar de två halvorna. Hon säger att ”Vi har satt ut ett likamedtecken som visar att det är samma sak”. Därpå pekar lärare C på var och en av bråkuttrycken $\frac{2}{2}$ respektive

$\frac{4}{4}$ samt på likhetstecknet som finns mellan de skriftliga symbolerna. Avslutningsvis kopplar lärare C samman representationerna, genom att peka på de två cirkelarna och de två bråkuttrycken samtidigt som hon säger ”Ser ni här att det här är samma sak, även om cirkelarna är indelade i olika många delar och att vi har skrivit upp två olika bråkuttryck är det ändå samma”.

Figur 43

Bråkuttrycket $\frac{2}{2}$ är lika med bråkuttrycket $\frac{4}{4}$ representeras av bråkcirklar och skriftliga symboler (US C₂, lärare C)

Undervisningssekvensen illustrerar att en dimension av variation öppnas upp där lärare C kontrasterar två likvärdiga bråkuttryck med varandra. Båda bråkuttrycken visas och behandlas samtidigt, vilket innebär att dimensionen öppnas upp synkront. Eleverna ges här möjlighet att erfara att bråkuttrycken $\frac{2}{2}$ och $\frac{4}{4}$ är likvärdiga. Elevernas erfarende begränsas till de aktuella bråkuttrycken.

Kopplingarna mellan cirkelarna sker synkront genom att lärare C dels pekar på cirkelarna och bråkuttrycken, dels uttrycker att bråkuttrycken är likvärdiga genom att säga ” [...] det är samma sak”. Kopplingarna förstärks genom likhetstecknet som skrivs mellan cirkelarna. Lärare C gör därutöver synkrona kopplingar mellan de skriftliga symbolerna som förstärker bråkuttrycken. Även denna koppling visualiseras genom likhetstecknet. Lärare C sammankopplar dessutom de skriftliga symbolerna och cirkelarna synkront då hon samtidigt som hon pekar på representationerna säger att ”det här är samma sak”. Att det är samma sak upprepas av lärare C vid ett flertal tillfällen, men vad som är samma sak är emellertid inget som lärare C utvecklar. Detta kan innebära att

elevernas möjlighet att erfara att det är bråkuttryckens värde som är lika begränsas. Representationerna stämmer visuellt överens med varandra eftersom den ena cirkeln är delad i två delar där båda är markerade och den andra cirkeln är delad i fyra delar där alla delar är markerade. Dessutom är båda bråkcirklarna lika stora, vilket betyder att det som varierar (förutom färgerna) är antalet delar bråkcirklarna är indelade i. Bråkuttrycken står under respektive bråccirkel vilket kan underlätta för eleverna att koppla samman representationerna även om inte detta tydliggörs av lärare C.

Urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck

Nedan beskrivs det tredje exemplet på lärandeobjektet, att urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck. Till skillnad från de två ovanstående exemplen öppnas dimensionen av variation upp diakront.

I undervisningssekvens E₂ visas att bråkuttrycket $3\frac{1}{2}$ och bråkuttrycket $\frac{7}{2}$ har lika värde. Även om bråkuttrycken finns uppskrivna på tavlan samtidigt behandlas de av läraren var och en för sig.

Lärare E pekar på de två bråkuttrycken och säger att han ska visa att ”bråkuttrycken är lika stora”. Under bråkuttrycket $3\frac{1}{2}$ ritar lärare E fyra cirklar. Tre av cirklarna skuggas medan den tredje och sista bråccirkeln delas i två delar varpå den ena delen skuggas. Först pekar lärare E på trean i bråkuttrycket $3\frac{1}{2}$ och säger ”den betyder att det är tre hela och att det motsvarar de tre helskuggade cirklarna” [pekar på var och en av de tre helskuggade cirklarna] (Figur 44). På samma sätt kopplas en halv i bråkuttrycket $3\frac{1}{2}$ ihop med den cirkel som är skuggad till hälften. Hela bråkuttrycket $3\frac{1}{2}$ relateras till de uppritade bråccirklarna.

Figur 44

Bråkuttrycket $3\frac{1}{2}$ representeras med hjälp av bråkcirklar (US E₂, lärare E)

För att illustrera bråkuttrycket $\frac{7}{2}$ ritar lärare E först en bråccirklar som delas i två delar. Lärare E påpekar att ”bråccirkeln måste delas i två delar eftersom de håller på med halvor” [pekar på 2:an i bråccuttrycket $\frac{7}{2}$].

Ytterligare tre bråccirklar delas och skuggas på samma sätt som den första cirkeln. Den sista bråccirkeln skuggas till hälften, se Figur 45.

Figur 45

Bråccuttrycket $\frac{7}{2}$ representeras med hjälp av bråccirklar (US E₂, lärare E)

I US E₂ visas att lärare E först uppmärksammar den blandade formen och därefter bråccformen, vilket innebär att de båda bråccuttrycken behandlas var för sig. De valda bråccuttrycken bär i sig på en kontrast. Värdet av bråccuttrycken är invariant men bråccuttrycken varierar var för sig vilket innebär att dimensionen av variation öppnas upp diakront. Eleverna ges möjlighet att erfara att bråccuttrycken är likvärdiga men behöver själva urskilja detta eftersom lärare E, förutom i inledningen av undervisningssekvensen, inte gör några förtydliganden om att bråccuttrycket $3\frac{1}{2}$ och bråccuttrycket $\frac{7}{2}$ är likvärdiga. Därigenom kan elevernas möjlighet att erfara att bråccuttrycken är likvärdiga försvåras. Dessutom begränsas deras erfärande till de bråccuttryck som används i undervisningssekvensen.

Förutom diakrona kopplingar mellan bråkformen och den blandade formen gör lärare E synkrona kopplingar. Exempelvis sker det då han gör kopplingar mellan bråkuttrycket $3\frac{1}{2}$ och de först uppritade bråkcirkelarna (Figur 44), i och med att han pekar på de tre hela bråkcirkelarna och relaterar detta till 3:an i bråkuttrycket samt pekar på den halva cirkeln och relaterar den till $\frac{1}{2}$ i bråkuttrycket. Synkrona kopplingarna sker också mellan bråkuttrycket $\frac{7}{2}$ och de andra bråkcirkelarna (Figur 45), när lärare E exempelvis pekar på bråkuttrycken och på bråkcirkelarna som båda visas samtidigt på tavlan. Genom att peka på 2:an i bråkuttrycket $\frac{7}{2}$ och säga att ” [...] cirkeln måste delas i två delar eftersom vi håller på med halvor” uppmärksammas att bråkcirkelarna ska delas in i två lika stora delar. Lärare E gör en visuell skillnad mellan de bråkcirkel som representerar bråkuttrycken. De cirkel som visar bråkuttrycket i blandad form ($3\frac{1}{2}$) är tre hela bråkcirkel samt en bråkcirkel som delats i två halvor. På så vis överensstämmer samtliga bråkcirkel med de bråkuttryck de är avsedda att representera.

Sammanfattning - Att undervisa om att urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck

Av analysen framkommer att när läraren undervisar om att urskilja att bråkuttryck är likvärdiga öppnas dimensionen av variation upp dels synkront, dels diakront vid ett eller flera tillfällen. Som tidigare nämnts kan elevernas erfarenhet underlättas när dimensionen öppnas upp synkront när båda värdena visas samtidigt för eleverna, jämfört med när värdena visas var och en för sig. Analysen visar också att oavsett om dimensionen öppnas upp synkront eller diakront begränsas elevernas möjlighet att erfara respektive lärandeobjekt, eftersom lärarna enbart använder ett exempel för att visa att två bråkuttryck är ekvivalenta med varandra. Undervisningen är knuten till de specifika bråkuttryck som lärarna väljer ut.

De representationer som lärarna använder i undervisningen är rektanglar, cirkel och skriftliga symboler. Kopplingarna sker verbalt och icke verbalt. Vidare ses att kopplingarna sker både synkront och diakront. Även om kopplingarna sker synkront visar resultatet att i vissa undervisningssekvenser sker kopplingarna inte mellan samtliga

representationer, vilket kan innebära att eleverna inte uppfattar att samtliga representationer ingår i ett och samma representationssystem.

Av analysen framgår att lärarna i studien med hjälp av färger eller i sättet att illustrera rektanglarna och cirkelarna kan underlätta för eleverna att koppla ihop representationerna med varandra. Exempelvis används i en undervisningssekvens samma färg på delarna i en rektangel som täljarna i den skriftliga representationen. På detta sätt kan elevernas erfarenhet att de skuggade delarna i rektangeln motsvarar täljaren i bråkuttrycket underlättas. Fastän kopplingarna mellan rektangeln och bråkuttrycket kan förstärkas genom så kallad färgkodning är det ändå inte säkert att eleverna själva uppmärksammar färgkodningen eftersom läraren inte påtalar detta. Ett exempel på att läraren uppmärksammar kopplingen mellan representationerna genom sättet att illustrera representationerna beskrivs i en annan undervisningssekvens, där läraren skiljer på utseendet av de bråkcirklar som representerar de bråkuttryck som används. En tolkning är att bråkcirkelarnas utseende kan förstärka kopplingen mellan bråkuttrycken och bråkcirkelarna.

I Tabell 17 illustreras en översikt över undervisning som handlar om samband mellan likvärdiga bråkuttryck.

Tabell 17

Översikt över undervisning om att urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck

Lärande-objekt	Dimension av variation öppnas upp		Kopplingarna mellan representationerna	Eleverna erbjuds att erfara		
Urskilja samband mellan likvärdiga bråkuttryck	Synkront (S)	Diakront (D)	synkront = diakront =	Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfارande		
				Utvidgat erfارande		
US K	S		$\frac{2}{3} \longleftrightarrow \frac{4}{6}$	Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfارande	x	
				Utvidgat erfارande		
US C ₂	S		$\frac{2}{2} \longleftrightarrow \frac{4}{4}$	Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfارande	x	
				Utvidgat erfارande		
US E ₂	D		$3\frac{1}{2} \longleftrightarrow \frac{7}{2}$	Bråkuttrycken $3\frac{1}{2}$ och $\frac{7}{2}$ är likvärdiga.		

				Ett exempel		
				Begränsat erfarande	x	
				Utvidgat erfarande		

6.3.2 Jämföra bråkuttryck med olika nämnare

Nedan beskrivs lärares undervisning om lärandeobjektet, *att jämföra bråkuttryck med olika nämnare*. Analysen visar att lärandeobjektet öppnas upp genom synkron variation. Detta åskådliggörs nedan med hjälp av ett exempel från undervisningssekvens J.

Jämföra bråkuttryck med olika nämnare

I undervisningssekvens J illustreras hur dimensionen av variation av lärandeobjektet, *att jämföra bråkuttryck*, öppnas upp genom synkron variation. I undervisningssekvensen är det bråkuttrycken $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{5}$ som jämförs. Båda bråkuttrycken visas samtidigt och representeras med hjälp av två olika bilder, dels används rektanglar som delas in i fjärdedelar respektive femtedelar, dels används bråkcirklar som också de delas in i ovan nämnda delar.

Bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ skrivs upp på tavlan och lärare J poängterar samtidigt som hon pekar på 4:an i bråkuttrycket att nämnaren indikerar att helheten ska delas upp i fyra lika stora delar. Till höger om bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ ritas en rektangel (Figur 46). Lärare J frågar eleverna hur många delar hon ska dela in rektangeln i och en elev svarar att den ska delas i fyra delar. Lärare J pekar på varje del i rektangeln och räknar högt: ”en, två, tre, fyra” och säger: ”Hela rektangeln är delad i fyra delar”. Proceduren upprepas för bråkuttrycket $\frac{1}{5}$.

Nedan illustreras hur lärare J, efter att nämnarens innebörd i de två bråkuttrycken uppmärksammas, riktar elevernas uppmärksamhet mot täljarna i bråkuttrycken.

Excerpt US J, del 1

1 L De här talen talar om hur många av varje del vi ska ta,
 2 i båda fallen är det en del, här är det en fjärdedel och
 3 här har vi en femtedel. [pekar på täljarna i respektive
 4 bråkuttryck]. Täljaren bestämmer hur många delar vi
 5 vill ha och vi vill ha en del. Så därför färglägger jag en
 6 del i varje rektangel (Figur 46). De här delarna i
 7 rektanglarna [pekar på de två färglagda delarna]
 8 motsvarar alltså de här talen [pekar på täljarna i bråk-
 9 uttrycken]. Ser ni, eftersom rektanglarna är lika stora
 10 kan vi se att den här delen, en fjärdedel, är lite större
 11 än den här delen som är en femtedel, visst blir det
 12 enkelt när vi ritar bilder. Det betyder att en fjärde-
 13 del är större än en femtedel.

Figur 46

Täljarens innebörd i bråkuttrycken $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{5}$ representeras med hjälp av rektanglar (US J, lärare J)

Av excerpt J, del 1 framgår det att lärare J gör synkrona kopplingar mellan täljarna i bråkuttrycken och de färglagda delarna i rektanglarna, när hon exempelvis pekar på delarna i rektanglarna och på talen i täljarna i bråkuttrycken och säger att delarna motsvarar bråkuttrycken (rad 6–8). I samband med sammankopplingarna poängterar lärare J att rektanglarna är lika stora och att det därmed, med hjälp av bilderna av rektanglarna, går att avgöra vilket bråkuttryck som är störst.

Lärare J fortsätter därefter att visa hur bråkuttrycken kan representeras med hjälp av två cirklar. I excerpt J, del 2 beskrivs hur lärare J först ritar en cirkel till höger om rektangeln (Figur 47) som delas in i fjärdedelar varav en av fjärdedelarna färgläggs. I samband med att cirkeln med femtedelar ska ritas påpekar lärare J att det är svårt att dela in cirkeln i fem lika stora delar.

Figur 47

Bråkuttrycken $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{5}$ jämförs med hjälp av rektanglar och bråkcirklar (US J, lärare J)

Excerpt US J, del 2

- 1 L Det här blir lite klurigt, det är mycket svårare än den
2 andra cirkeln. Jag börjar med att sätta en punkt i
3 mitten av cirkeln och drar ett streck utåt, sedan jag
4 använder mig av det jag fick reda på tidigare när jag
5 ritade rektanglarna [pekar på först rektangeln som in
6 delats femtedelar och sedan på rektangeln som delats
7 in i fjärdedelar] här ser vi att en femtedel är lite mindre
8 än en fjärdedel. Så när jag ritar i cirkeln försöker jag
9 göra varje del lite mindre än delarna i fjärdedels-
10 cirkeln.

När cirkeln är delad i femtedelar markeras en av dessa och undervisningssekvensen avslutas med att lärare J pekar dels på rektanglarna, dels på bråkcirklarna och sammanfattar med att säga "Genom att titta på de här bilderna kan vi se att en fjärdedel är större än en femtedel".

I US J beskrivs hur bråkuttrycken $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{5}$ jämförs med varandra genom att lärare J, med hjälp av rektanglarna, kontrasterar fjärdedelarna med femtedelarna. Bråkuttrycken visas samtidigt, vilket innebär att dimensionen av variation öppnas upp synkront. Eleverna ges möjlighet att erfara hur bråkuttrycken kan jämföras. Erfarandet att jämföra bråkuttryck med olika nämnare begränsas till dessa specifika bråkuttryck, det vill säga exempel, då lärare J uppmärksammar jämförelsen med hjälp av rektanglarna och bråkcirklarna.

I excerpt J, del 2 visas att lärare J gör synkrona kopplingar mellan rektanglarna och bråkcirklarna (rad 4–8) genom att hon pekar på den

rektangel som representerar en femtedel (rad 6–7). När lärare J gör kopplingen mellan rektangeln som representerar en femtedel och bråkcirkeln som också representerar en femtedel skiftas fokus bort från lärandeobjektet, att jämföra två bråkuttryck, till hur bråkcirkeln som ska representera femtedelarna ska konstrueras (rad 7–10). Detta skifte kan leda till att elevernas fokus riktas mot hur femtedelarna i bråkcirkeln ska konstrueras i stället för att rikta uppmärksamhet mot strategin att använda bilder för att jämföra bråkuttrycken.

Sammanfattning - Att undervisa om hur bråkuttryck med olika nämnare kan jämföras med varandra

Analysen av lärares undervisning om hur bråkuttryck med olika nämnare kan jämföras med varandra visar att detta sker genom att två bråkuttryck kontrasteras samtidigt mot varandra, vilket innebär att dimensionen öppnas upp synkront. Detta upprepas vid flera tillfällen men med samma slags bråkuttryck. Eleverna ges på så sätt en möjlighet att erfara hur två bråkuttryck kan jämföras med varandra. Elevernas erfarande begränsas emellertid till det exempel som läraren väljer att visa. Det är därför inte säkert att eleverna ges möjlighet att utvidga sitt erfarande av hur andra bråkuttryck än de som används i undervisningssekvenserna kan jämföras.

Representationer som används är skriftliga symboler, rektanglar och bråkcirklar. Mellan dessa representationer sker kopplingarna synkront både genom verbala och icke verbala handlingar, vilket kan underlätta för eleverna att erfara kopplingen mellan dem. Att använda en bråkcirkel som ska representera bråkuttrycket $\frac{1}{5}$ visar sig inte vara så enkelt, eftersom det är svårt att på fri hand dela in bråkcirkeln i fem lika stora delar. Här tenderar lärarens koppling till bråkcirkeln att fokusera mer på hur indelning av bråkcirkeln ska göras än att den ska representera bråkuttrycket $\frac{1}{5}$. Detta kan leda till att elevernas fokus riktas bort från vad bråkcirkeln är tänkt att representera.

I Tabell 18 nedan ges en översikt över undervisning om att jämföra bråkuttryck med olika nämnare.

Tabell 18

Översikt över undervisning om att jämföra bråkuttryck med olika nämnare

Lärande-objekt	Dimension av variation öppnas upp		Kopplingarna mellan representationerna	Eleverna erbjuds att erfara		
Jämföra bråkuttryck med olika nämnare	Synkront (S)	Diakron (D)	synkront = diakront =	Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfارande		
				Utvidgat erfارande		
US J	S			Två bråkuttryck ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$) med olika nämnare jämförs. Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfارande	x	
				Utvidgat erfارande		

6.3.3 Förklara innebörden av delarna i ett tal i bråkform
I följande avsnitt presenteras lärares undervisning om lärandeobjektet, *att förklara innebörden av delarna i ett tal i bråkform*. Lärandeobjektet har brutits ned i tre specificerade lärandeobjekt: (a) att förklara innebörden av nämnarna i ett bråkuttryck, (b) att förklara skillnaden mellan täljarna och nämnarna i ett bråkuttryck, och (c) att förklara skillnaden mellan heltalsdelen och bråkdelen i blandad form. Oavsett specificerat lärandeobjekt öppnas dimensionen av variation upp synkront.

Med hjälp av excerpt från en undervisningssekvens, US F₂, beskrivs lärares undervisning om innebörden av nämnaren i ett bråkuttryck. Lärares undervisning om skillnaden mellan täljare och nämnare exemplifieras med hjälp av två exempel från US F₃, och US D₂.

Slutligen presenteras lärares undervisning om skillnaden mellan heltalsdelen och bråkdelen i blandad form med hjälp av excerpt från US D₃.

Förklara innebörden av nämnarna i ett bråkuttryck

I US F₂ beskrivs hur dimensionen av variation av lärandeobjektet, att förklara innebörden av nämnarna i ett bråkuttryck, öppnas upp synkront.

För att uppmärksamma innebörden av nämnaren i ett bråkuttryck använder lärare F bråkuttrycken $\frac{3}{4}$ och $\frac{3}{5}$. Bråkuttrycken skrivs upp på tavlan.

I excerpt US F₂ exemplifieras hur lärare F uppmärksammar nämnarnas innebörd i bråkuttrycket $\frac{3}{4}$. Förutom bråkuttrycket använder lärare F en rektangel som delas in i fyra lika stora delar. Lärare F pekar på fyran i bråkuttrycket $\frac{3}{4}$ och säger:

Excerpt US F₂

1	L	Den här siffran här, den talar om hur många delar vi
2		har totalt, i det här fallet har vi fyra delar, eller hur?
3		Den informationen ska vi nu försöka använda oss av
4		när vi löser den här uppgiften. Vi kan rita en bild.
5		Eftersom nämnaren i bråket berättar hur många delar
6		som en hel är indelad i och vi har fyra här, så delar vi
7		in rektangeln i fyra lika stora delar.

Därefter riktas elevernas uppmärksamhet mot nämnaren i bråkuttrycket $\frac{3}{5}$. Bråkuttrycket skrivs upp på tavlan och lärare F ritar upp en ny rektangel under den först ritade rektangeln. Lärare F pekar på nämnaren i bråkuttrycket och säger att rektangeln måste delas in i fem lika stora delar. Efter att rektangeln delats in i fem delar uppmärksammas skillnaderna mellan bråkuttrycken. Lärare F säger: ”Ser ni skillnaden? Här är rektangeln delad i fyra lika stora delar eftersom vi har en fyra i nämnaren och här har jag i stället delat in rektangeln i fem lika stora

delar eftersom den här femman här, nämnaren här, [pekar på femman i bråkuttrycket $\frac{3}{5}$] visar att det handlar om femtedelar”.

Undervisningssekvensen avslutas med att lärare F upprepar nämnarens betydelse i ett bråkuttryck genom att på tavlan skriva: ”Nämnaren i ett bråkuttryck visar i hur många delar en helhet har delats in i”. Efter att lärare F skrivit upp detta riktas elevernas uppmärksamhet återigen mot nämnarna i respektive bråkuttryck, då lärare F säger ”här betyder det att helheten delats in i fyra lika stora delar [pekar på fyran i bråkuttrycket $\frac{3}{4}$] och här har helheten delats in i fem lika stora delar [pekar på femman i bråkuttrycket $\frac{3}{5}$]”. Avslutningsvis säger lärare F att ”ju större talet i nämnaren är desto fler delar är helheten indelad i, är ni med på det”.

Av excerpten framgår att dimensionen av variation gällande innebörden av nämnarna i ett bråkuttryck öppnas upp synkront med hjälp av två värden (fjärdedelar respektive femtedelar) som båda visas samtidigt för eleverna. Eleverna ges möjlighet att erfara nämnarens funktion i de två bråkuttrycken ($\frac{3}{4}$ och $\frac{3}{5}$). Även om lärare F enbart utgår ifrån två bråkuttryck, det vill säga ett exempel, ges eleverna ändå möjlighet att utvidga sitt erfande av innebörden av nämnaren när lärare F säger att ”[...] nämnaren i bråket berättar hur många delar som en hel är indelad i”. Detta påtalas av lärare F vid flera tillfällen i undervisningssekvensen.

Av excerpt F₂ framgår att lärare F kopplar samman fyran i bråkuttrycket $\frac{3}{4}$ och rektangeln som delas in i fyra lika stora delar. Genom att uppmärksamma eleverna på att helheten ska delas in i lika stora delar kan representationerna sägas överensstämma med varandra. Kopplingen mellan bråkuttrycket $\frac{3}{4}$ och rektangeln sker synkront, eftersom lärare F pekar på fyran i bråkuttrycket och med hjälp av den informationen delas rektangeln i fyra lika stora delar. Synkrona kopplingar sker också mellan bråkuttrycket $\frac{3}{5}$ och rektangeln som delas in i fem lika stora delar, genom att lärare F pekar på femman i bråkuttrycket $\frac{3}{5}$ och därefter delar in rektangeln i fem lika stora delar. Dessutom gör lärare F synkrona kopplingar mellan bråkuttrycken $\frac{3}{4}$ och $\frac{3}{5}$ samt de två rektanglarna, när han exempelvis pekar på och samtidigt

förklarar att fyran respektive femman i bråkuttrycken $\frac{3}{4}$ och $\frac{3}{5}$ samt de fyra respektive fem delarna i rektanglarna båda representerar nämnaren. De olika kopplingarna mellan representationerna kan sägas ingå i ett system som tillsammans representerar innebörden av nämnaren i ett bråkuttryck.

Förklara skillnaden mellan täljaren och nämnaren i bråkuttryck

I undervisningssekvens F₃ beskrivs det första exemplet på hur dimensionen av variation gällande lärandeobjektet, att förklara skillnaden mellan täljarens- och nämnarens innebörd i ett bråkuttryck, öppnas upp genom synkron variation. För att uppmärksamma skillnaden mellan täljaren och nämnaren använder sig lärare F av bråkuttrycket $\frac{3}{4}$. Förutom skriftliga symboler används en rektangel som delats in i fyra lika stora delar. Först riktas uppmärksamheten mot täljaren och därefter mot nämnaren i bråkuttrycket.

Lärare F pekar på 3:an i bråkuttrycket $\frac{3}{4}$ och frågar om någon av eleverna kommer ihåg vad ”den heter”. En av eleverna räcker upp handen och säger att ”Trean är täljaren”. Detta bekräftas av lärare F som säger att de ska ”lära sig förstå skillnaden mellan det här talet [pekar på 3:an] och det här talet [pekar på 4:an]. Vi börjar med den som vi sa hette täljaren”. I excerpt US F₃ illustreras hur lärare F förklarar täljarens innebörd.

Excerpt US F₃

1	L	Täljaren visar antalet delar och att det i den här
2		uppgiften rör sig om tre delar, men oavsett
3		vilken siffra som står här [pekar återigen på 3:an
4		bråkuttrycket $\frac{3}{4}$] det kan vara en femma eller sju eller
5		vad som helst, så är detta alltid täljaren och den siffran
6		visar antalet delar [tre av de fyra delarna i rektangeln
7		skuggas. [pekar på 3:an i bråkuttrycket]. Den här 3:an
8		visar att vi ska ha tre stycken fjärdedelar och
9		det är det jag markerat här [pekar på de tre skuggade
10		delarna i rektangeln].

Undervisningssekvensen fortsätter med att nämnaren i bråkuttrycket uppmärksammas samt att skillnaden mellan täljaren och nämnaren åskådliggörs. Lärare F pekar på 4:an i bråkuttrycket och frågar eleverna

”vad siffran kallas”. Efter att en av eleverna sagt att talet är nämnaren i bråkuttrycket berättar lärare F att ”Nämnarens uppgift är nämligen att tala om hur många delarna ska vara och i det här bråkuttrycket [pekar på 4:an i bråkuttrycket $\frac{3}{4}$] är det fyra stycken”. Lärare F pekar på de fyra delarna i rektangeln och säger samtidigt att det är därför som rektangeln är indelad i fyra delar.

Undervisningssekvensen sammanfattas med att skillnaden mellan täljaren och nämnaren urskiljs genom att lärare F pekar på trean i bråkuttrycket och på var och en av de tre skuggade delarna i rektangeln och upprepar vad som tidigare sagts om innebörden av nämnaren. På liknande sätt uppmärksammas också täljarens innebörd. Lärare F avslutar med att säga att skillnaden mellan täljaren och nämnaren är att täljaren beskriver antalet delar av en hel medan nämnaren beskriver hur många delarna är.

Lärare F gör en kontrast mellan täljarens och nämnarens innebörd, och en dimension av variation av skillnaden mellan täljarens och nämnarens innebörd i bråkuttryck $\frac{3}{4}$ öppnas upp. Täljaren och nämnaren kontrasteras samtidigt, vilket innebär att dimensionen öppnas synkront. Eleverna ges möjlighet att erfara skillnaden mellan nämnaren och täljaren i bråkuttrycket $\frac{3}{4}$. Genom att säga ” [...] skillnaden mellan täljaren och nämnaren är att täljaren beskriver antalet delar av en hel medan nämnaren beskriver hur många delarna är” utvidgar lärare F förklaringen av skillnaden mellan täljaren och nämnaren till att gälla för vilka bråkuttryck som helst. Förklaringen är således inte knuten till något specifikt bråkuttryck, vilket innebär att eleverna ges möjlighet att utvidga sitt erfande gällande skillnaden mellan täljaren och nämnaren.

Lärare F gör flera synkrona kopplingar genom att peka på talen (3 och 4) som står på nämnarens respektive täljarens plats i bråkuttrycket och på de tre skuggade delarna i rektangeln samt på hela rektangeln som är indelad i fyra delar.

Rektangeln och bråkuttrycket stämmer visuellt överens med varandra på så sätt att rektangeln ser ut att vara indelad i fyra lika stora delar. Detta är inget som påtalas och uppmärksammas explicit av lärare F. Det är något eleverna själva behöver urskilja.

Förklara skillnaden mellan täljaren och nämnaren i bråkuttryck

I undervisningssekvens D₂ beskrivs det andra exemplet på hur dimensionen av lärandeobjektet, att förklara skillnaden mellan täljaren och nämnaren i ett bråkuttryck, öppnas upp synkront. Till skillnad från undervisningssekvens F₃ öppnas dimensionen upp vid ett tillfälle och att elevernas erfارande begränsas till bråkuttrycket $\frac{13}{4}$.

På tavlan finns fyra cirklar delade i fjärdedelar. 13 av delarna är ifyllda och liknar pizzafyllningar.

I excerpt US D₂ beskrivs hur lärare D uppmärksammar hur många delar bråkcirkelarna är indelade i, det vill säga nämnarens innebörd i bråkuttrycket. Därefter uppmärksammas hur många fjärdedelar som är ifyllda (i form av pizzafyllningar), det vill säga täljarens innebörd.

Excerpt US D₂

1	L	Om vi tittar på hur många delar som finns får vi reda
2		på hur mycket en hel är indelad i. Vi tittar på en
3		[pekar på en av bråkpizzorna]. Hur många delar
4		är den här indelad i?
5	E	Fyra.
6	L	Ja, precis fyra delar. Då kan vi skriva en fyra i
7		nämnamren. [uttrycket $\frac{1}{4}$ skrivs på tavlan]. Nu ska vi
8		räkna hur många fjärdedelar vi har totalt. Vi räknar
9		högt tillsammans [läraren pekar på varje enskild
10		bråkdell i bråkpizzorna och slutar när de kommer till
11		den 13:e pizzadelen]. Så vi har nu räknat fjärdedelar,
12		eftersom varje pizza är delad i fyra delar. Då får vi
13		totalt 13 fjärdedelar så då kan vi skriva $\frac{13}{4}$. Så talet 13
14		betyder hur många delar vi har och fyran betyder
15		hur stor varje del är. Det är alltså skillnaden mellan
16		dessa siffror [pekar på täljaren och nämnaren i
17		bråkuttrycket.

I undervisningssekvens D₂ beskrivs hur dimensionen av lärandeobjektet, att förklara skillnaden mellan täljaren och nämnaren i ett bråkuttryck, öppnas upp synkront, genom att lärare D först uppmärksammar eleverna på nämnarens innebörd (rad 1–7; 14–15) och därefter täljarens innebörd (rad 7–13). Eleverna ges här möjlighet att erfara skillnaden mellan täljaren och nämnaren i bråkuttrycket $\frac{13}{4}$.

Täljarens respektive nämnarens innebörd uppmärksammas vid ett tillfälle, och elevernas erfارande gällande skillnaden mellan nämnaren och täljaren begränsas till enbart det exempel som används vid den aktuella undervisningssekvensen. Eleverna ges liten möjlighet att utvidga erfارandet av skillnaden mellan nämnaren och täljaren i ett bråkuttryck eftersom lärare D enbart hänvisar till talen 13 respektive 4.

De kopplingar som lärare D gör mellan bråkcirkelarna och de skriftliga symbolerna för att representera nämnaren respektive täljaren sker i båda fallen synkront. Bland annat ses detta när lärare D pekar på bråkdelen i en av bråkcirkelarna samt frågar eleverna hur många delar den är indelad i och uttrycker detta med skriftliga symboler (rad 10–13). De bråkcirkel som används överensstämmer med bråkuttrycket.

Förklara skillnaden mellan heltalsdelen och bråkdelen i blandad form

I undervisningssekvens D₃ beskrivs hur dimensionen av variation av lärandeobjektet, förklara skillnaden mellan heltalsdelen och bråkdelen i tal skrivet i blandad form ($3\frac{1}{4}$), öppnas upp synkront.

Lärare D visar tre hela bråkcirkelar föreställandes pizzor samt en bild som visar en del av en pizza (Figur 48). Elevernas fokus riktas först mot heltalsdelen och därefter mot bråkdelen i bråkuttrycket. Detta beskrivs i excerpt US D₃.

Figur 48

$3\frac{1}{4}$ representeras med bråkcirkelar och ett tal skrivet i blandad form (US D₃, lärare D)

Excerpt US D₃, del 1

- 1 L Om vi tittar på de här pizzorna och någon frågar oss
2 hur många vi har. Hur skulle vi svara då?
3 E Tre och en fjärdedel
4 L Ja det stämmer, vi kan skriva så här. [skriver 1, 2, 3
5 nedanför respektive bråkpizza] Här [pekar på $\frac{1}{4}$ pizzan]
6 så har vi inte hel pizza utan bara en del av en pizza,
7 bara en fjärdedel är kvar. Det här kan vi skriva som en
8 fjärdedel [skriver $\frac{1}{4}$ nedanför bilden som visar en del
9 av en hel pizza, hela uttrycket $3\frac{1}{4}$ skrivs bredvid
10 bilderna]. Här har vi alltså hur många hela vi har
11 [pekar på 3:an och på de tre hela cirkelarna] och här har
12 vi delarna [pekar på $\frac{1}{4}$ och på den fjärde cirkeln].

Av excerpt US D₃, del 1 framgår att elevernas uppmärksamhet först riktas mot heltalsdelen i bråkuttrycket (rad 1). Antalet hela uttrycks också när läraren skriver siffrorna 1, 2 och 3 under bråkcirkelarna (rad 4–5; 10–11). Därefter urskiljs delen i bråkuttrycket (rad 6–8; 11–12).

Undervisningssekvensen avslutas med att lärare D säger: ”Den här bilden och det här [pekar på fjärdedelspizzan och på $\frac{1}{4}$ i bråkuttrycket $3\frac{1}{4}$] visar oss hur många delar det finns. Totalt blir det tre hela och en fjärdedelspizza. Heltalsdelen är hur många hela det finns och delen är hur många delar i uttrycket det finns”. Lärare D säger att ”den här typen av uttryck som är skrivna på det här sättet kallas för blandad form. De består av en heltalsdel och en bråkdelen. Heltalsdelen är det här [sägs samtidigt som hon pekar på dels de tre hela bråkpizzorna, dels siffran 3]”. Delen i den blandade formen identifieras på liknande sätt när läraren pekar på bråkcirkeln som representerar en fjärdedel och på fjärdedelen ($\frac{1}{4}$) i bråkuttrycket.

I undervisningssekvens D₃ beskrivs hur lärare D uppmärksammar att antalet hela bråkcirklar motsvarar heltalsdelen i den blandade formen. Dessutom uppmärksammas att fjärdedelspizzan motsvarar delen i den blandade formen. Detta sker med hjälp av ett exempel. Lärare D gör en kontrast mellan heltalsdelen (3) och bråkdelen ($\frac{1}{4}$). Eftersom båda delarna visas samtidigt öppnas dimensionen av variation av skillnaden mellan heltalsdelen och bråkdelen i ett tal i blandad form upp synkront. Eleverna ges möjlighet att erfara skillnaden mellan heltalsdelen och

bråkdelen i bråkuttrycket $3\frac{1}{4}$. Även om läraren enbart använder ett exempel ges eleverna ändå en viss möjlighet att utvidga sitt erfarande om skillnaden mellan heltalsdelen och bråkdelen i ett tal i blandad form när lärare D säger ” [...] De består av en heltalsdel och en bråkdelen [...] heltalsdelen är hur många hela det finns och delen är hur många delar i uttrycket det finns”.

Lärare D:s kopplingar mellan de två representationerna, bråkcirklarna och de skriftliga symbolerna, sker samtidigt då hon både pekar på och beskriver för eleverna vad bråkcirklarna visar. Kopplingarna mellan representationerna sker därmed synkront. Det är inte säkert att eleverna ges möjlighet att urskilja att siffrorna kan kopplas till antalet bråkcirklar, eftersom det finns en diskrepans mellan de skriftliga symbolerna, såsom de är skrivna enligt Figur 48, och bråkcirklarna. På det sätt som siffrorna är skrivna kan de förstås som att de ska summeras även om det inte finns något plustecken mellan siffrorna. Detta innebär att de skriftliga symbolerna representerar totalt sex hela pizzor ($1+2+3$) medan bilderna enbart representerar tre hela pizzor. En ytterligare tolkning är att siffrorna indikerar i vilken ordning pizzorna är ritade, det vill säga den första, den andra och den tredje pizzan. Siffrorna representerar ordningstal i stället för att representera antalet pizzor. Lärare D förklarar inte detta.

Sammanfattning - Att undervisa om att förklara innebörden av delarna i ett bråkuttryck

Gemensamt för lärarnas undervisning om innebörden av delarna i ett bråkuttryck är att oavsett vilket specificerat lärandeobjekt som uppmärksammas i undervisningen gör lärarna kontraster genom att exempelvis visa skillnaden mellan nämnaren och täljaren i ett bråkuttryck. Dessa kontraster görs så att innebörden av delarna i bråkuttrycket visas samtidigt, vilket innebär att dimensionen av variation öppnas upp synkront och därmed kan underlätta elevernas erfارande av respektive lärandeobjekt. Vidare ses att lärarna, företrädesvis, inte stannar vid just de exempel som används i de aktuella undervisningssekvenserna utan sätter in lärandeobjektet i mer generella sammanhang, vilket leder till att elevernas möjligheter att erfara innebörden av delarna i ett tal i bråkform kan utvidgas.

De representationer som används är skriftliga symboler, rektanglar och bråkcirklar föreställande pizzor. Genom att läraren exempelvis pekar på representationerna och samtidigt förklarar kopplingen mellan dem kan dimensionen av variation beskrivas som synkron och därmed underlättas för eleverna att följa lärarnas kopplingar. Däremot överensstämmer inte alltid representationerna med varandra, vilket kan försvåra för eleverna att erfara kopplingen mellan dem. Vidare ses att användningen av bråkcirklar föreställande pizzor, det vill säga ett perceptuellt rikt material, i de här undervisningssekvenserna inte tycks påverka elevernas fokus bort från den matematiska idén, då att ingen av eleverna fäster någon uppmärksamhet vid det material som används.

I Tabell 19 visas en översikt över de undervisningssekvenser som förekommer i avsnittet.

Tabell 19

Innebörden av delarna i ett tal i bråkform

Lärande-objekt	Dimension av variation öppnas upp		Kopplingarna mellan representationerna	Eleverna erbjuds att erfara		
Innebörden av delarna i ett tal i bråkform	Synkront (S)	Diakront (D)	synkront = diakront =	Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande		
				Utvidgat erfarande		
US F ₂	S			Innebörden av nämnarna i bråk-uttrycken $\frac{3}{4}$ och $\frac{3}{5}$ Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande		

				Utvidgat erfarande	x	
US F ₃	S			Skillnaden mellan nämnnaren och täljaren i bråkuttrycket $\frac{3}{4}$. Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande		
				Utvidgat erfarande	x	
US D ₂	S			Skillnaden mellan nämnnaren och täljaren i bråkuttrycket $\frac{13}{4}$. Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande	x	
				Utvidgat erfarande		
US D ₃	S			Skillnaden mellan heltalsdelen och bråkdelen i blandad form för bråkuttrycket $3\frac{1}{4}$. Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande		
				Utvidgat erfarande	x	

6.3.4 Urskilja samband mellan bråk- och procentform

I detta avsnitt beskrivs lärares undervisning om lärandeobjektet, *att urskilja samband mellan bråkuttryck och procentform*. Sambandet

öppnas upp genom synkron variation och illustreras nedan med hjälp av undervisningssekvens F₁.

I excerpt US F₁ beskrivs hur dimensionen av variation beträffande att urskilja sambandet mellan bråkuttryck och procent öppnas upp genom synkron variation. I excerpten illustreras hur lärare F visar sambandet mellan bråkuttrycken $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{4}$ och $\frac{1}{4}$ och procentformerna 100 %, 75 % och 25 %. På Whiteboardtavlan finns dels en rektangel som är indelad i fyra lika stora delar, dels bråkuttrycken $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{4}$ och $\frac{1}{4}$.

Excerpt US F₁

1	L	Hela den här figuren, hur många procent kan vi säga
2		att den är?
3	E ₁	Det är 100 procent
4	L	Precis hela figuren är 100 procent. Förut sa vi att hela
5		var fyra fjärdedelar var en hel. Så 100 procent och fyra
6		fjärdedelar är samma sak [pekar på bråkuttrycket $\frac{4}{4}$].
7		Om vi i stället tittar på det här [pekar på tre delar i
8		rektangeln] hur kan vi uttrycka det i procentform, är det
9		någon som vet?
10	E ₂	75 procent.
11	L	Ja visst, så här kan vi säga att vi har 75 procent. Men
12		det här då [pekar på bråkuttrycket $\frac{1}{4}$]? Hur många
13		procent är det?
14	E ₃	25 procent
15	L	Ja precis, den här delen [pekar på en del i rektangeln]
16		är 25 procent. Så då kan vi säga att det här bråket
17		[pekar på $\frac{3}{4}$] är samma sak som 75 procent. Och det
18		här bråket [pekar på $\frac{1}{4}$] är samma sak som 25 procent.

I excerpt F₁ visas hur lärare F kontrasterar bråkuttrycken $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{4}$ och $\frac{1}{4}$ med procentformerna 100 %, 75 % och 25 % (se rad 5, 7–10, 13–15, 17–18) genom att värdena är invarianta medan uttrycksformerna varierar. Lärare F poängterar vid ett flertal tillfällen, med flera exempel, sambandet mellan bråkuttrycken och procentformerna genom att säga att det ”är samma sak”. Eleverna ges möjlighet att vid flera tillfällen erfara sambandet mellan de tre bråkuttrycken och de tre procentformerna. Bråkuttrycken och procentformerna visas samtidigt, vilket innebär att aspekten öppnas upp synkront.

Vidare ses att bråkuttrycken och delarna i rektangeln visas samtidigt för eleverna. Mellan representationerna gör lärare F muntliga synkrona kopplingar genom att lärare F säger och pekar på hela eller delar av rektangeln samt säger vad respektive bråkuttryck motsvarar i procentform. Detta innebär att kopplingarna sker synkront. Däremot sker kopplingarna mellan bråkuttrycken och procentformen diakront eftersom procentformerna enbart representeras muntligt av lärare F och av eleverna (exempelvis rad 3, 9, 14). Eleverna ges alltså inget visuellt stöd i hur procentformen representeras vilket kan försvåra för dem att göra kopplingen mellan bråkuttrycken och procentformerna.

Sammanfattning - Att undervisa om att urskilja samband mellan bråk- och procentform

När läraren i delstudie II undervisar om att urskilja sambandet mellan bråkuttryck och procentform öppnas dimensionen av variation upp synkront när bråk- och procentformerna visas samtidigt. Den synkrona variationen som sker med hjälp av flera exempel kan underlätta elevernas erfارande av att urskilja sambandet mellan bråkuttryck och procentform. Detta kan medföra att elevernas möjlighet att erfara sambandet mellan bråk- och procentform utvidgas.

Sambandet mellan bråk- och procentform representeras med hjälp av skriftliga symboler och en rektangel. Kopplingarna mellan bråkuttrycken och procentformerna sker diakront genom att läraren skriver bråkuttrycken på tavlan men endast muntligt beskriver kopplingen mellan respektive bråkuttryck och procentform. Eleverna erbjuds inget visuellt stöd för att erfara denna koppling. Däremot gör läraren synkrona kopplingar mellan bråkuttrycken och rektangeln som representerar bråkuttrycken. Läraren gör dock inte några markeringar i rektangeln utan pekar endast mot rektangeln. Därför kan det vara svårt för eleverna att urskilja vilken del av rektangeln som representerar respektive bråkuttryck.

I Tabell 20 nedan ges en översikt över undervisning om samband mellan bråk- och procentform.

Tabell 20

Översikt över undervisning om att urskilja samband mellan bråk- och procentform

Lärande- objekt/US	Dimension av variation öppnas upp		Kopplingarna mellan representationerna	Eleverna erbjuds att erfara		
Urskilja samband mellan bråkform och procentform	Synkron (S)	Diakron (D)	synkront = $\longleftrightarrow$ diakront = $\longleftrightarrow$	Flera exempel Ett exempel		
US F ₁	S		$\begin{array}{ccc} \frac{4}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \updownarrow & & \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{array}$ $\frac{4}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \longleftrightarrow \quad 100\%, 75\%, 25\%$	Sambandet mellan bråkuttrycken $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ och procentformerna 25 %, 75 % och 100 %. Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande		
				Utvidgat erfarande		x

6.3.5 Beräkna bråkuttryck

I det avslutande avsnittet beskrivs lärares undervisning som handlar om lärandeobjektet, att beräkna bråkuttryck. Lärandeobjektet har brutits ned i tre specificerade lärandeobjekt, (a) att addera bråkuttryck, (b) att multiplicera bråkuttryck med ett heltal och (c) att subtrahera bråkuttryck.

Dimensionen av det första specificerade lärandeobjektet öppnas upp genom synkron variation och exemplifieras i undervisningssekvens L. Dimensionen av variation av det andra och tredje specificerade lärandeobjektet som beskrivs i undervisningssekvens I respektive undervisningssekvens M öppnas upp genom diakron variation.

Addera bråkuttryck

Undervisningssekvens L illustrerar hur dimensionen av lärandeobjektet, att addera bråkuttryck, öppnas upp synkront. I undervisningssekvensen uppmärksammas addition av bråkuttrycken $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{6}$. Additionen representeras av skriftliga symboler samt bilder av rektanglar. För att bråkuttrycken ska kunna adderas med varandra förlängs det ena bråkuttrycket ($\frac{1}{3}$) med 2 till bråkuttrycket $\frac{2}{6}$. Efter att bråkuttrycket förlängts till $\frac{2}{6}$ adderas bråkuttrycket med $\frac{1}{6}$. Förlängningen samt additionen av bråkuttrycken representeras med hjälp av skriftliga symboler i form av ovan nämnda bråkuttryck samt bilder av rektanglar.

Undervisningssekvensen inleds med att additionen av bråkuttrycken $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ skrivs upp på tavlan (Figur 49). Lärare L konstaterar att bråkuttrycken har olika nämnare och att det inte går att addera dem förrän de "har fått samma nämnare". Lärare L berättar att "en av nämnarna måste göras om så att den blir lika stor som den andra innan vi kan addera bråkuttrycken. Jag ska visa med hjälp av bilder hur de här bråken ser ut och hur vi kan göra om dem så att de blir lika stora". Lärare L ritar upp två rektanglar under uttrycket $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Rektanglarna delas in i tre respektive sex delar varav en del i var och en av rektanglarna markeras (övre bild i Figur 49). Lärare L pekar på de två bråkuttrycken och på bilderna av rektanglar och säger "Här har vi två olika nämnare, vi har tredjedelar och vi har sjättedelar".

Undervisningssekvens L fortsätter med att lärare L visar hur bråkuttrycket $\frac{1}{3}$ förlängs till $\frac{2}{6}$. Under den rektangeln som representerar bråkuttrycket $\frac{1}{3}$ ritas en ny rektangel som delas in i tredjedelar varav en av delarna markeras (Figur 49). Lärare L pekar på den nedre rektangeln i Figur 49 och säger att de ska "göra om den här rektangeln till sjättedelar". Med hjälp av lodräta streck delas varje tredjedel i den undre rektangeln in i två lika stora delar. Lärare L poängterar att de nu har sex delar och säger "Om vi tittar här [pekar på de färgmarkerade delarna i den övre rektangeln] i stället för en tredjedel har vi nu två sjättedelar. Så det betyder att en tredjedel är samma sak som två sjättedelar. Bråken är lika mycket värda". Lärare L pekar återigen på respektive bråkuttryck och rektangel och säger att "eftersom uttrycken har samma värde kan jag sätta ett likhetstecken mellan bilderna".

Efter att lärare L påvisat att bråkuttrycket $\frac{1}{3}$ har samma värde som bråkuttrycket $\frac{2}{6}$ riktas elevernas uppmärksamhet mot hur bråkuttrycken $\frac{2}{6}$ och $\frac{1}{6}$ adderas. Lärare L pekar på uttrycket $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ och säger ”I stället för att jag har en tredjedel och en sjättedel så har jag nu två sjättedelar och en sjättedel [pekar först på rektanglarna som representerar additionsuttrycket $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ och därefter på additionsuttrycket $\frac{2}{6} + \frac{1}{6}$]. Nu kan jag addera bråken eftersom de har samma nämnare. Två sjättedelar plus en sjättedel, det blir, är det någon som vet?” En elev svarar tre sjättedelar. Lärare L skriver tre sjättedelar bakom additionsuttrycket $\frac{2}{6} + \frac{1}{6}$ (Figur 49). Undervisningssekvensen avslutas med att lärare L färgmarkerar tre av sjättedelarna i rektangeln som står efter likhetstecknet.

Figur 49

Beräkning av bråkuttrycken $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ och $\frac{2}{6} + \frac{1}{6}$ representeras med hjälp av skriftliga symboler och rektanglar (US L, lärare L)

$$\begin{array}{c}
 \frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{6} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{färgad} \quad \text{vit} \quad \text{vit} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{färgad} \quad \text{vit} \quad \text{vit} \quad \text{vit} \quad \text{vit} \\ \hline \end{array} \\
 = \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{färgad} \quad \text{färgad} \quad \text{vit} \quad \text{vit} \quad \text{vit} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{färgad} \quad \text{vit} \quad \text{vit} \quad \text{vit} \quad \text{vit} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{färgad} \quad \text{färgad} \quad \text{färgad} \quad \text{vit} \quad \text{vit} \\ \hline \end{array} \\
 \frac{2}{6} \quad + \quad \frac{1}{6} \quad = \quad \frac{3}{6}
 \end{array}$$

I undervisningssekvensen visas att lärare L gör en kontrast mellan att addera två bråkuttryck med olika nämnare ($\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$) och att addera två bråkuttryck med lika nämnare ($\frac{2}{6} + \frac{1}{6}$). En dimension av variation, att bråkuttrycken måste ha samma nämnare för att de ska kunna adderas, öppnas upp. Dimensionen öppnas upp synkront därför att lärare L säger, samtidigt som hon pekar på rektanglarna och bråkuttrycken: ”I stället

för att jag har en tredjedel och en sjättedel så har jag nu två sjättedelar och en sjättedel. Nu kan jag addera bråken med varandra eftersom de har samma nämnare.” Eleverna ges möjlighet att erfara att för att bråkuttrycken som används i undervisningssekvensen ska kunna adderas behöver bråkuttrycken ha en gemensam nämnare. Elevernas erfarande begränsas till additionen av de bråkuttryck som används i undervisningssekvensen, även om det finns inslag av ett utvidgat erfarande genom att lärare L säger att en av nämnarna måste ”göras om så att den blir lika stor som den andra”.

Additionen av bråkuttrycken representeras med hjälp av dels skriftliga symboler, såsom uttrycken $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ och $\frac{2}{6} + \frac{1}{6}$, dels bilder av rektanglar som delats in i tredjedelar och sjättedelar. Mellan representationerna gör lärare L synkrona kopplingar, exempelvis genom att samtidigt som hon pekar på rektanglarna och additionsuttrycken säga att rektanglarna representerar bråkuttrycken. Mellan bråkuttrycken och rektanglarna gör lärare L synkrona kopplingar. Hon pekar på bråkuttrycken och rektanglarna samtidigt som hon påtalar att de har samma värde och likhetstecken sätts ut mellan rektanglarna. Kopplingarna är därmed både muntliga och visuella och stämmer överens med varandra.

Multiplitera bråkuttryck

I undervisningssekvens I exemplifieras hur dimensionen av lärandeobjektet, att multiplicera bråkuttryck med ett heltal, öppnas upp diakront. Multiplikationen representeras enbart av skriftliga symboler.

Lärare I visar på två olika strategier där bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ multipliceras med heltalet 12. För att visa strategierna utgår lärare I från bråkuppgiften ”Hur mycket är $\frac{1}{4}$ av 12?” Först visas en strategi som innebär att heltalet (12) omvandlas till ett bråkuttryck ($\frac{12}{1}$) innan multipliceringen sker. Därefter visas den andra strategin som innebär att bråkuttrycket ($\frac{1}{4}$) multipliceras med heltalet (12) utan att heltalet (12) omvandlas till ett bråktal. Av inledningen av lektionen framgår det att eleverna tidigare har mött liknande uppgifter och att de vid dessa tillfällen har använt sig av bilder för att lösa denna typ av uppgifter. Lärare I säger exempelvis ”Kommer ni ihåg att vi förra gången använde oss av bilder för att lösa

sådana här typer av uppgifter [pekar på uppgiften $\frac{1}{4}$ av 12 som står på tavlan]”.

I excerpt US I, del 1, beskrivs hur lärare I säger att de idag ska arbeta med andra strategier än bilder för att göra en beräkning av bråkuttryck. Vidare ses i excerpt US I, del 1, att den strategi som visas för eleverna är att bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ multipliceras med heltalet 12. Multipliceringen föregås av att heltalet 12 omvandlas till bråkuttrycket $\frac{12}{1}$.

Excerpt US I, del 1

- 1 L Men om vi säger, jag har inte tid att rita en bild. Hur
2 kan jag lösa uppgiften då? Det är lätt. Vi kan
3 använda siffror. Vi kan multiplicera $\frac{1}{4}$ med 12
4 [under bråkuttrycket skrivs $\frac{1}{4} \cdot 12 =$]. Hur multiplicerar
5 vi ett helt tal [pekar på talet 12]? Jo vi kan göra om
6 heltalet till ett bråktal. 12 hela kan vi skriva som $\frac{12}{1}$.
7 Det är ju samma sak, eller hur. 12 endelar är ju 12 hela.
8 12 dividerat med 1 är samma som 12. Jag skriver så här
9 [uttrycket $\frac{1 \cdot 12}{4 \cdot 1} =$ skrivs upp]. Nu multiplicerar vi, först
10 täljarna, 1 gånger 12 är lika med 12 [skriver =].
11 Sedan nämnarna, 4 gånger 1 är lika med 4 [skriver 4: an
12 under 12:an]. Nu har vi 12 fjärdedelar. Här kan vi tänka
13 12 dividerat med 4 är lika med 3 [skriver 3 efter
14 uttrycket].

I excerpt US I, del 1 beskrivs att lärare I visar en strategi att multiplicera ett bråkuttryck med ett heltal genom att först fokusera på hur heltalet 12 omvandlas till ett bråktal $\frac{12}{1}$ (rad 5–6). Genom att peka på talet 12 (rad 5) och samtidigt säga och skriva att det motsvarar bråktalet $\frac{12}{1}$ (rad 7) gör lärare I en kontrast mellan talet 12 och bråktalet $\frac{12}{1}$. Eleverna ges möjlighet att erfara att ett heltal kan uttryckas som ett bråktal. Lärare I fortsätter med att visa hur $\frac{1}{4}$ multipliceras med $\frac{12}{1}$ (rad 9–12). Först multipliceras täljarna med varandra (rad 10) och därefter multipliceras nämnarna (rad 11–12). Beräkningen avslutas med att 12 divideras med 4 och att det är lika med 3 (rad 12–14).

I excerpt US I del 2 illustreras hur lärare I fortsätter med att visa hur bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ multipliceras med heltalet 12. Denna gång visas hur multipliceringen sker utan att heltalet omvandlas till ett bråkuttryck.

Excerpt US I, del 2

- 1 L I stället för att omvandla 12 hela till ett bråkuttryck så
 2 kan vi multiplicera direkt, så här. Och varför
 3 fungerar det då kanske ni undrar? Jo om vi tittar på
 4 hur vi sa förut då kom vi ju fram till att 12 endelar
 5 och 12 är samma sak eller hur? Och eftersom 12 och
 6 12 endelar är samma sak kan vi ta bort den där
 7 ettan som står i nämnaren i uttrycket. Vi tar bort den
 8 helt enkelt [1:an och multiplikationstecknet i uttrycket
 9 $\frac{1 \cdot 12}{4 \cdot 1} =$ suddas bort och kvar står bråkuttrycket
 10 $\frac{1 \cdot 12}{4}$]. Då har vi att 1 gånger 12 är lika med 12
 11 och 12 dividerat med 4 är 3 [pekar på respektive
 12 siffror i uttrycket och skriver ett likhetstecken
 13 och en 3: a bakom uttrycket].

Av excerpt US I, del 2, framgår att lärare I visar på ytterligare en strategi för att multiplicera ett bråkuttryck med ett heltal. Denna strategi innebär att bråkuttrycket ($\frac{1}{4}$) multipliceras med helheten (12) utan att heltalet 12 omvandlas till ett bråkuttryck. Lärare I visar att omvandlingen från heltalet 12 till bråkuttrycket $\frac{12}{1}$ inte är nödvändig eftersom värdet på båda dessa tal är detsamma (rad 4–6).

Lärare I gör en kontrast mellan de två strategierna för att multiplicera bråkuttrycket med ett heltal. Kontrasten sker genom att lärare I visar två sätt att multiplicera bråkuttrycket med ett heltal. Den ena strategin innebär att skriva multiplikationen som två separerade bråkuttryck $\frac{1}{4} \cdot \frac{12}{1}$ (rad 9, US I del 1), och den andra strategin innebär att multiplikationen skrivs på ett gemensamt bråkstreck $\frac{1 \cdot 12}{4}$ (rad 10, US I del 2). Dimensionen av variation öppnas upp diakront eftersom båda uttrycken inte synliggörs samtidigt för eleverna när lärare I suddar bort 1:an som står i nämnaren och multiplikationstecknet (rad 9–10, US I, del 2). Eleverna ges möjlighet att erfara att ett bråk kan multipliceras med ett heltal utan att heltalet omvandlas till ett bråktal. Dimensionen av variation öppnas upp vid ett tillfälle och begränsas till det exempel som

visas i undervisningssekvensen. Detta innebär att elevernas erfaran-
de av att multiplicera bråkuttryck med heltal är begränsat.

För att representera de två uttrycken används skriftliga symboler i
form av uttrycken $\frac{1}{4} \cdot \frac{12}{1}$ och $\frac{1 \cdot 12}{4}$. Läraren säger att uttrycken visar samma
tal men kopplingarna mellan uttrycken sker diakront eftersom lärare I
suddar bort 1:an som står i nämnaren i uttrycket $\frac{1}{4} \cdot \frac{12}{1}$. Uttrycken
visualiseras alltså inte samtidigt utan den visuella kopplingen sker
diakront.

Subtrahera bråkuttryck

Undervisningssekvens M beskriver också lärandeobjektet, att beräkna
bråkuttryck. Specifikt handlar det om att subtrahera bråkuttryck. I likhet
med US I öppnas dimensionen upp diakront vid ett tillfälle. Det som
skiljer US M från US I är vilka representationer som används. I US I
användes enbart skriftliga symboler, medan det i US M används både
skriftliga symboler och cirklar. Dessutom skiljer sig undervisnings-
sekvenserna åt beträffande lärarnas kopplingar mellan
representationerna.

I undervisningssekvensen US M, beskrivs hur lärare M visar
subtraktionsuppgiften $\frac{4}{4} - \frac{1}{4}$. Fokus riktas mot att det enbart är täljarna i
bråkuttrycken som subtraheras. Lärare M skriver upp subtraktions-
uppgiften på tavlan och berättar för eleverna att de idag ska ”Kika på
hur man subtraherar två bråk med samma nämnare”. Lärare M säger
samtidigt som hon pekar på nämnarna i bråkuttrycken: ”Här har vi fyra
fjärdedelar som vi ska subtrahera med en fjärdedel.” Därefter tar lärare
M fram en cirkel som är indelad i fyra lika stora delar där tre av delarna
är färgmarkerade” (Figur 50).

Figur 50

Beräkning av $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ representeras med hjälp av en bråkcirkel och skriftliga symboler (US M, lärare M)

Lärare M pekar på den ofärgade delen av bråkcirkeln och säger att "vi ska ta bort en fjärdedel, en av de här fyra delarna". Lärare M ritar en pil mot den ofärgade delen i bråkcirkeln och skriver orden "ta bort" på Whiteboardtavlan (Figur 50). Lärare M poängterar att den ofärgade delen av bråkcirkeln representerar fjärdedelen i subtraktionsuppgiften när hon säger "Den här delen; det är samma sak som den här fjärdedelen [pekar på $\frac{1}{4}$ i subtraktionsuppgiften $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} =$]. Det är den här delen vi ska ta bort [ritar en pil mot $\frac{1}{4}$ och skriver återigen orden ta bort på Whiteboardtavlan]." Lärare M frågar eleverna hur många delar de har kvar efter att de tagit bort en fjärdedel. En av eleverna säger att de har tre fjärdedelar kvar, vilket bekräftas av lärare M. Lärare M säger: "Ja precis vi har de här tre fjärdedelarna kvar [pekar på de tre grönfärgade delarna i bråkcirkeln], fyra fjärdedelar minus en fjärdedel är lika mycket som tre fjärdedelar [bakom uttrycket $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} =$ skrivs $\frac{3}{4}$]."

Undervisningssekvensen fortsätter med att lärare M uppmärksammar eleverna på att det enbart är täljarna och inte nämnarna som subtraheras i subtraktionsuppgiften. Lärare M frågar eleverna om det är någon som kan förklara varför "fyrororna i nämnaren inte ska subtraheras med varandra". Ingen av eleverna vill delge sina svar högt, vilket medför att lärare M ställer frågan "Vad är nämnarnas uppgift i ett bråkuttryck?". En av eleverna säger att "Det är delarna av en hel". Lärare M upprepar och utvecklar elevens svar genom att säga "Nämnarna visar hur många lika stora delar en helhet är indelad i. Om vi tittar på de här bråken här

[pekar på bråkuttrycket $\frac{4}{4}$ och $\frac{1}{4}$], de här fyrorna här [pekar på fyrorna i nämnarna] visar hur många delar vi ska dela in en helhet i”. I excerpt US M visas hur lärare M riktar elevernas uppmärksamhet mot bråkcirkeln och uppmärksammar eleverna på vad en subtraktion av nämnarna skulle innebära.

Excerpt US M

1	L	Det är därför cirkeln är indelad i fyra lika stora delar.
2		Är ni med? Delarna, alltså nämnarna, är fortfarande
3		samma. Om vi skulle subtrahera nämnarna med
4		varandra så kommer vi att få noll och det talet
5		motsvarar inte hur många delar bråket är indelat i,
6		det är fortfarande fjärdedelar. Så när vi ska subtra-
7		hera två bråk med varandra så är det bara täljarna som
8		subtraheras med varandra.

Med hjälp av kontraster mellan subtraktion av täljare och nämnare i bråkuttrycken öppnas dimensionen att när två bråkuttryck subtraheras är det bara täljarna som subtraheras. Eleverna ges här möjlighet att erfara att det endast är täljarna i ett bråkuttryck som subtraheras med varandra. Dimensionen öppnas upp diakront. Lärare M pratar om vad som händer om nämnarna subtraheras med varandra, när uppgiften $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} =$ ska beräknas (rad 3–5) men visar inte detta explicit för eleverna. Eleverna lämnas själva att visualisera vad som händer om nämnarna subtraheras med varandra. Även om lärare M endast visar hur två bråkuttryck subtraheras med hjälp av en subtraktionsuppgift vid ett tillfälle, ges eleverna ändå viss möjlighet att utvidga sitt erfande, eftersom lärare M:s förklaring (rad 7–8) är mer generell och kan appliceras på vilka subtraktionsuttryck som helst och inte enbart den uppgift som visas i undervisningssekvensen.

För att representera att det enbart är täljarna i bråkuttrycken som subtraheras använder lärare M en bråkcirkel och subtraktionsuttrycket $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Genom att peka på bråkcirkeln och på fyrorna i bråkuttrycken visar lärare M att nämnarna förblir oförändrade i subtraktionen eftersom de ” [...] visar hur många lika stora delar en helhet är indelad i”. Kopplingarna mellan representationerna sker synkront.

En tolkning är att kopplingarna mellan bråkcirkelns ofärgade del och subtrahenden ($\frac{1}{4}$) i subtraktionsuppgiften förstärks då lärare M ritar en pil som riktas mot dessa delar samt skriver ordet ”ta bort” på Whiteboardtavlan.

Sammanfattning - Att undervisa om att beräkna bråkuttryck

När lärarna undervisar om att beräkna bråkuttryck uppmärksammas addition, multiplikation och subtraktion av bråkuttryck.

Av analysen av lärarnas undervisning framkommer det att när undervisningen handlar om addition av olika bråkuttryck kontrasteras addition med lika nämnare med addition med olika nämnare genom att båda additionerna visas samtidigt, vilket gör att dimensionen av variation öppnas upp synkront. Eleverna ges möjlighet att erfara hur två bråkuttryck kan adderas.

Vidare framgår att när undervisningen handlar om multiplikation av ett bråkuttryck eller om subtraktion av olika bråkuttryck gör lärarna kontraster genom att exempelvis först visa hur ett bråkuttryck multipliceras med ett heltal utan att heltalet omvandlas till ett bråktal och därefter visa hur ett bråkuttryck multipliceras med ett heltal då heltalet omvandlas till ett bråktal. Här öppnas dimensionen av variation upp diakront, vilket kan försvåra elevernas erfارande eftersom det krävs att eleverna behöver komma ihåg hur det först visade värdet på dimensionen såg ut för att kunna kontrastera detta med det andra värdet.

För att öppna upp dimensionen av variation använder lärarna i delstudie II enbart en uppgift eller ett exempel. Detta gör att elevernas möjlighet att utvidga och generalisera sitt erfارande i andra sammanhang kan försvåras. Det finns emellertid undervisningssekvenser som trots att endast ett exempel visas ändå ger eleverna möjlighet till ett visst utvidgat erfارande eftersom lärarens förklaring är av en mer generell karaktär.

De representationer som lärarna använder för att representera hur bråkuttrycken ska beräknas är skriftliga symboler och bilder av antingen bråkcirklar eller rektanglar. Dessa representationer visas antingen samtidigt eller var och en för sig. När representationerna visas samtidigt sker också sammankopplingarna synkront, vilket kan underlätta elevernas erfارande. Exempelvis kan det handla om att läraren pekar på skriftliga symboler och på bilder av rektanglar samtidigt som läraren

förklarar att både de skriftliga symbolerna och bilderna av rektanglarna representerar samma uttryck. När representationerna visas var och en för sig medför det att kopplingarna mellan representationerna sker diakront. I dessa sammanhang är det inte säkert att eleverna ges möjlighet att erfara att representationerna representerar samma uttryck.

I Tabell 21 presenteras en översikt över undervisningen om att beräkna bråkuttryck.

Tabell 21

Översikt över undervisning om att beräkna bråkuttryck

Lärande-objekt	Dimension av variation öppnas upp		Kopplingarna mellan representationerna	Eleverna erbjuds att erfara		
Beräkna bråkuttryck	Synkon (S)	Diakron (D)	synkront = diakront =	Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat Erfarande		
				Utvidgat erfarande		
US L	S			Addition av bråkuttryck ($\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$) med olika nämnare genom att bråkuttrycken skrivs med samma nämnare. Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande		
				Utvidgat erfarande	x	

US I		D	$\frac{1}{4} \cdot \frac{12}{1} \longleftrightarrow \frac{1 \cdot 12}{4}$	Multiplikation av heltal (12) och ett bråkuttryck ($\frac{1}{4}$) genom att heltalet omvandlas till ett bråkuttryck ($\frac{12}{1}$). Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande	x	
				Utvidgat erfarande		
US M		D	$\longleftrightarrow \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	Vid beräkning av bråkuttryck ($\frac{4}{4} - \frac{1}{4}$) med lika nämnare subtraheras enbart täljarna. Flera exempel Ett exempel		
				Begränsat erfarande		
				Utvidgat erfarande	x	

6.4 Resultatsammanfattning delstudie II

I resultatet av delstudie II beskrivs hur lärare använder representationer när de undervisar om tal i bråkform. Detta har beskrivits med hjälp av följande huvudteman: (a) bråk som del av helhet, (b) bråk som del av antal och (c) bråk som tal med tillhörande lärandeobjekt (Tabell 11).

Av analysen framgår det att lärarnas iscensatta variation av ett lärandeobjekt kan med hjälp av variationsteorin beskrivas som *synkron variation* och *diakron variation*. I Figur 51 presenteras en sammanställning över de analyserade undervisningssekvenserna där det framkommer vilka undervisningssekvenser som öppnas upp med synkron respektive diakron variation.

Analysen visar att en dimension av variation kan öppnas upp med hjälp av *ett* eller *flera exempel* under en och samma undervisningssekvens. När flera exempel används ges eleverna möjlighet att utvidga sitt erfande av lärandeobjektet jämfört med om endast ett exempel används. I det utvidgade erbjudandet vidgas lärarnas förklaring från det specifika exemplet till att också omfatta hur andra

uppgifter av den karaktären kan förstås. Resultaten visar också att eleverna ges möjlighet att utvidga sitt erfarande i undervisningssekvenser där endast ett exempel används. I dessa sekvenser är det en kombination av det enskilda exemplet som tillsammans med lärarens förklaring ger eleverna möjlighet att utvidga sitt erfarande av lärandeobjektet bortom det valda exempel som visas under lektionerna.

Ett begränsat erbjudande innebär att lärarens förklaring är riktad mot ett specifikt exempel. Detta innebär att undervisningen blir knuten till just lärarnas val av exempel, vilket kan leda till att elevernas erfارande begränsas till att enbart omfatta det specifika exemplet.

I Figur 51 beskrivs för respektive lärandeobjekt om dimensionen av variation öppnas upp synkront eller diakront. I Figur 51 framkommer även om det sker med hjälp av ett eller flera exempel samt om elevers möjlighet att erfara lärande är begränsat eller utvidgat.

Figur 51

Sammanfattning av resultat, delstudie II. Tal i bråkform representeras genom antingen synkron eller diakron variation med hjälp av ett eller flera exempel. Eleverna ges möjlighet till ett begränsat eller utvidgat erfارande av lärandeobjektet.

Synkron variation			
Ett exempel		Ett exempel	Flera exempel
Begränsat erfارande	Uttrycka en hel som ett bråkuttryck med samma nämnare och täljare (US A ₁ , A ₂)	Förklara delarnas innebörd i tal i bråkform (US F ₂ , F ₃ , D ₃)	Uttrycka en hel som ett bråkuttryck med samma nämnare och täljare (US B)
	Urskilja skillnaden mellan bråk som del av helhet och antal (US G ₁)	Beräkna bråkuttryck (US L)	Urskilja relationen mellan del, andel och antal (US H)
	Urskilja sambandet mellan likvärdiga bråkuttryck (US K, C ₂)		Urskilja sambandet mellan tal i bråk- och procentform (US F ₁)
	Förklara delarnas innebörd i tal i bråkform (US D ₂)		Skriva ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren i blandad form (US D ₁)
			Utvidgat erfارande
Begränsat erfارande	Jämföra bråkuttryck med olika nämnare (US J)		
	Urskilja sambandet mellan likvärdiga bråkuttryck (US E ₂)	Skriva ett bråkuttryck där täljaren är större än nämnaren i blandad form (US E ₁)	Uttrycka en hel som ett bråkuttryck med samma nämnare och täljare (US C ₁)
	Beräkna bråkuttryck (US I)	Urskilja relationen mellan del, andel och antal (US G ₂)	
		Beräkna bråkuttryck (US M)	
Diakron variation			

Kommentar: Kolumnen ”flera exempel” innefattar även undervisningssekvenser där läraren muntligt ger eleverna möjlighet att utvidga erfandet av tal i bråkform även om undervisningssekvensen innehåller ett exempel.

Analysen av delstudie II visar att de representationer som lärarna använder i undervisningen för att representera tal i bråkform är skriftliga symboler i form av bråkuttryck, olika bilder såsom bråkcirklar, kvadrater, rektanglar och tallinje. De använder också laborativt material, såsom multilinkkuber och frukter som till exempel en melon. Därutöver representeras tal i bråkform i vardagliga situationer. Av resultatet framkommer det att lärare använder antingen en representation, exempelvis bråkuttryck, eller två representationer, exempelvis bråkcirkel och bråkuttryck. Det finns också undervisningssekvenser som visar att tre representationer används.

Lärarnas kopplingar mellan representationerna sker antingen i direkt anslutning till varandra, det vill säga lärarna gör synkrona kopplingar, eller så gör lärarna diakrona kopplingar mellan representationerna. Det innebär att det sker en fördröjning mellan kopplingarna. Vidare framkommer det att vid synkrona kopplingar använder lärarna både verbala och icke verbala handlingar för att koppla samman representationerna. Vid diakrona sammankopplingar används däremot enbart verbala handlingar.

7. Diskussion

Kapitlet utgörs av två delar. I den första delen diskuteras resultatet i relation till studiens syfte, frågeställningar, teori och tidigare forskning. I den andra delen förs en metoddiskussion.

7.1 Resultatdiskussion

Denna avhandling handlar om lärares undervisning om tal i bråkform på mellanstadiet. Tidigare studier har visat att tal i bråkform ofta är komplicerat och utmanade att lära för elever (Hecht m.fl., 2003; Vukovic m.fl., 2014) och att svårigheter att förstå tal i bråkform ofta kvarstår under hela elevens skolgång (Calhoon m.fl., 2007; Siegler m.fl., 2012; Wang & Siegler, 2013). Bristande kunskaper i bråk påverkar lärandet inom andra områden i matematik, som exempelvis algebra (Booth m.fl., 2014; Siegler m.fl., 2012). Vilka erbjudanden som lärare ger elever när de undervisar om tal i bråkform är däremot fortfarande relativt outforskat inom matematikdidaktisk forskning (Lee m.fl., 2011; McCloskey m.fl., 2017; Mills 2016; Thompson & Saldanha, 2003). Resultatet i avhandlingen bidrar med kunskaper som lärare kan använda sig av i sitt yrkesutövande i syfte att möta eleverna och utveckla deras förståelse för tal i bråkform. Det vill säga kunskaper som enligt Carlgren (2017) är nödvändiga för lärare att behärska när det gäller att utveckla sin egen undervisning. Genom att använda ett variationsteoretiskt perspektiv ges en möjlighet att studera hur ett matematiskt innehåll behandlas i undervisningen. De övergripande frågeställningarna i denna avhandling är: Hur används olika typer av representationer i undervisning om tal i bråkform? och Vad görs möjligt för eleverna att erfara om tal i bråkform? I resultatet framkommer det att när lärarna undervisar riktar de uppmärksamheten mot och varierar olika aspekter av ett lärandeobjekt, vilket innebär att eleverna ges olika möjligheter att erfara lärandeobjektet. En variation av hur lärarna handlar i undervisningssituationen, som har betydelse för vad eleverna ges möjlighet att lära, har uppmärksamats vad gäller olika sätt att synliggöra kunskanden. I det följande diskuteras tre mönster som framträtt med avseende på lärares handlande: (a) variation av innehållet, (b) användningen av representationer, dels utifrån vilka representationer

som används, dels utifrån hur olika representationer kopplas samman, och (c) val av exempel.

7.1.1 Variera innehållsliga aspekter av tal i bråkform

När lärarna undervisar om tal i bråkform varierar de innehållet på olika sätt. Framför allt handlar det om att de skapar kontraster¹⁷ för att eleverna ska ges möjlighet att urskilja det som ska läras. Genom att läraren använder kontraster ökar elevernas lärandemöjligheter (Marton, 2015). Kontrasterna skapas genom att lärarna låter de aspekter som ska fokuseras träda fram medan andra aspekter bildar bakgrund. För att jämföra och storleksordna bråkuttryck kan läraren exempelvis låta nämnaren i bråkuttrycken variera medan täljaren i bråkuttrycken hålls invarianta (exempelvis $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$). Genom att storleksordna bråkuttryck där enbart nämnaren varierar kan problematiken med *the whole number bias* (Ni & Zhou, 2005; Siegler m.fl., 2011) synliggöras.

Kontrasterna görs synkront eller diakront. När ett lärandeobjekt varieras synkront är de bråkuttryck som uppmärksammas i undervisningen synliga för eleverna samtidigt. När lärarna gör kontrasten simultant kan det tydliggöra kontrasten, vilket Marton (2015) menar kan underlätta elevernas möjlighet att erfara lärandeobjektet. När bråkuttrycken däremot varieras diakront, det vill säga att de visas var för sig vid olika tillfällen, behöver eleverna själva komma ihåg hur det först visade bråkuttrycket såg ut för att kunna relatera och kontrastera det med det sist visade bråkuttrycket. Genom att lämna över ansvaret till eleverna att göra kontrasten finns det en risk att den inte medvetandegörs i undervisningssituationen. Om kontrasten inte blir medvetet fokuserad kan den gå eleverna förbi (Lo, 2012). Kontrasten kan bli otydlig, vilket kan försvåra elevernas möjlighet att erfara lärandeobjektet.

Bergentoft (2014, 2020) har noterat ett liknande mönster när hon studerade undervisning om kroppshållning vid löpning inom skolämnet idrott och hälsa. I hennes studier visades att kontraster som öppnas upp synkront i högre omfattning gav eleverna en helhetsbild, en mer differentierad och rikare kroppsmedvetenhet och möjlighet att själva kunna växla mellan rörelsens innebörd och struktur.

När lärarna undervisar med kontrasterna diakront, som exempelvis när de undervisar om hur ett bråkuttryck kan skrivas i blandad form, så

¹⁷ Kontrasterna skapas av lärarna medvetet eller omedvetet.

visas först bråkuttrycket där täljaren är större än nämnaren; därefter raderas detta bråkuttryck innan den blandade formen presenteras. I dessa undervisningssituationer måste eleverna själva medvetandegöra lärandeobjektet, vilket kan leda till att elevernas erfarenhet av samband mellan de olika delarna inom tal i bråkform begränsas. Att inte kunna urskilja hur olika delar av tal i bråkform är förenade, såsom sambandet mellan ett bråkuttryck och ett tal i blandad form, kan enligt Schoenfeld (2007) försvåra elevernas förståelse av tal i bråkform. Resultatet i denna studie indikerar, i likhet med Bergentofts (2014, 2020) studier, att elevernas möjlighet att erfara lärandeobjektet begränsas när kontrasterna öppnas upp diakront jämfört med synkron kontrastering.

Resultatet i denna avhandling visar också att lärarna i vissa undervisningssituationer inte skapar några kontraster. Det som ska fokuseras varierar inte mot något utan ställs mot ett värde som inte visas och undervisningen innehåller således inte några skillnader av det som ska erfaras. Dessa undervisningssituationer kan därigenom beskrivas av vad Marton (2015) benämner som repetition. Det innebär att, vid dessa undervisningssekvenser, ges eleverna inte någon ny möjlighet att erfara lärandeobjektet eftersom inga dimensioner av variation öppnas upp.

Resultatet visar dessutom att lärarna i andra undervisningssituationer varierar flera aspekter utan att några aspekter hålls invarianta. När flera aspekter varierar samtidigt försvåras urskiljningen (Marton m.fl., 2004) och elevers erfarenhet av tal i bråkform kan begränsas. Det kan till exempel handla om att representationernas form och storlek samtidigt varierar, så kallad samvariation. Lo (2012) beskriver detta i termer av att det är svårt att fokusera på allt samtidigt, när flera aspekter varierar är det svårt att uppfatta vad som är specifikt.

Sammanfattningsvis visar avhandlingen att lärare som undervisar om tal i bråkform varierar innehållet på åtminstone fyra övergripande sätt, synkron respektive diakron variation, repetition samt samvariation. Beroende av hur innehållet varierar i en undervisningssituation skapas olika möjligheter för eleverna att erfara tal i bråkform. Genom att lärare använder synkron variation i undervisningen kan de aspekter som är nödvändiga att urskilja tydliggöras för eleverna jämfört med om variationen sker exempelvis diakront.

7.1.2 Användningen av representationer

I avsnittet diskuteras användningen av representationer och hur dessa kopplas samman. Användningen av representationer beskrivs i denna avhandling som något som huvudsakligen sker utifrån två olika arbetssätt: (a) laborerande arbetssätt eller (b) konkretiserande arbetssätt. Ett annat sätt att beskriva användningen av representationerna är genom att fokusera på vilka sätt sammankopplingarna mellan representationerna sker, det vill säga hur övergången mellan representationerna tydliggörs av lärarna.

Vad representationerna används till

Resultatet visar att när lärare undervisar om bråk använder de flera olika representationer. Detta görs inte på något enhetligt sätt utan på ett mångfacetterat sätt. Det leder till att elevers möjligheter att erfara ett lärandeobjekt varierar beroende på hur de enskilda representationerna används. Resultaten visar att när lärare undervisar om tal i bråkform utifrån det Trygg (2014) benämner som ett laborerande eller konkretiserande arbetssätt, är det inte självklart vilket kunnande som synliggörs för eleverna. Avgörande för vad elevernas uppmärksamhet riktas mot är hur lärarna skapar variation mellan representationerna. Det kan handla om att läraren använder likadana eller olika representationer.

När lärare använder representationer visar resultatet att det är av betydelse att de representationer som används utgör minst två olika värden av den nödvändiga aspekten (jfr. Marton, 2015). Det innebär att i stället för att använda flera olika representationer kan likadana representationer användas för att ge eleverna möjlighet att erfara en aspekt av tal i bråkform. Vidare innebär det att detta gäller oavsett om det är konkreta eller abstrakta representationer som används för att representera lärandeobjektet. Resultatet visar exempelvis att eleverna ges möjlighet att erfara att alla bråkdelar som ingår i samma helhet måste vara lika stora (se Aliustaoğlu m.fl., 2018; Hodnik m.fl., 2018) genom att läraren kontrasterar två likadana kvadrater där delarnas storlek varierar, medan andra aspekter såsom form och antal delar hålls invarianta. I dessa undervisningssituationer skapas variation med hjälp av likadana representationer, vilket kan bidra till elevernas möjliga lärande.

Resultatet visar också att läraren använder skriftliga symboler, det vill säga abstrakta representationer, när han eller hon kontrasterar till

exempel två strategier för att multiplicera ett bråkuttryck med ett heltal. Användandet av abstrakta representationer kan skapa vissa problem för elevernas lärande. Om inte elevernas förståelse först förankrats i konkreta representationer blir det svårare för dem att förstå de abstrakta representationerna, vilket är centralt för lärande i matematik (Flores m.fl., 2019; Fyfe m.fl., 2014; Levenson, 2010).

Resultatet visar också att det inte är självklart att användandet av likadana konkreta representationer skapar förutsättningar för att eleverna ska ges möjlighet att erfara lärandeobjektet. Detta gäller när undervisning om tal i bråkform bedrivs med hjälp av *perceptuellt rika material*, som i sig självt bär på egenskaper som kan leda eleverna bort från det matematiska innehållet eller idén som materialet är tänkt att representera (Carbonneau m.fl., 2013; Kaminski m.fl., 2008). Det kan exempelvis handla om att eleverna i avhandlingen inkluderar representationernas egenskaper när de ska avgöra vilka bråkuttryck som är likvärdiga. Istället för att enbart fokusera på att det är förhållandet mellan täljaren och nämnaren i respektive bråkuttryck som ska vara likvärdigt (se Hecht m.fl., 2003; Jigyel & Afamasaga-Fuataí, 2007; Siegler m.fl., 2010; Van Steenbrugge m.fl., 2014) fokuseras representationernas utseende. I dessa undervisningssituationer skapar de perceptuellt rika materialen (jfr. Belenky & Schalk, 2014; DeLoache, 2000) en otydlighet avseende vad eleverna ska rikta uppmärksamheten mot, vilket ligger i linje med tidigare forskning (exempelvis Carbonneau m.fl., 2013; Kaminski m.fl., 2008; McNeil m.fl., 2009; Petersen & Mc Neil, 2013) om hur ett perceptuellt rikt material kan komma att påverka elevernas förståelse av ett matematiskt innehåll.

Resultatet visar även att undervisning om tal i bråkform med hjälp av *enkla material* utan några särskilda kännetecken (se Petersen & Mc Neil, 2013) kan leda till att elevernas erfarenhet av tal i bråkform begränsas. Detta sker till exempel när elever använder sig av kort utan några särskilda kännetecken för att öva sig på att storleksordna bråkuttryck där nämnarna varierar medan täljarna är invarianta. Trots att detta är en relativt enkel representation riktas elevernas fokus mot *hur* korten ska användas i stället för att storleksordna bråkuttrycken utifrån principen att ju större nämnarna är desto mindre är bråkuttrycket (se Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Tidigare forskning (Carbonneau m.fl., 2013; Kaminski m.fl., 2008; McNeil m.fl., 2009) har visat att användandet av enkla representationer

är fördelaktigt att använda i matematikundervisningen. Denna avhandling visar emellertid att även enkla representationer kan begränsa elevers erfarenhet av tal i bråkform. Det kan finnas flera möjliga förklaringar till att resultatet i denna avhandling skiljer sig från tidigare forskningsresultat. En förklaring kan vara vilket matematiskt innehåll som studerats i relation till elevers användande av enkla representationer. I studien av McNeil m.fl. (2009) undersöktes elevers problemlösningsförmåga. En annan förklaring kan vara vilka instruktioner eleverna fick om hur de enkla representationerna skulle användas. Exempelvis visade Liggetts (2017) att eleverna blev frustrerade över hur de skulle använda ett laborativt material eftersom instruktionerna var otillräckliga. En ytterligare förklaring är att det inte är representationerna i sig själva som är av betydelse, utan det är hur de används som är avgörande för elevers lärande. Detta belyser en väsentlig punkt gällande användningen av representationer: att även om en representation kan hjälpa eleverna att utveckla olika matematiska förmågor så är det inte säkert att den matematiska idén överförs från representationen till eleverna. "Although kinesthetic experience can enhance perception and thinking, understanding does not travel through the fingertips and up the arm" (Ball 1992, s. 47).

Resultaten i denna avhandling visar också att lärarna använder olika representationer när de undervisar om tal i bråkform. Ofta utgår de från en konkret representation för att senare använda mer abstrakta representationer. Det vill säga de använder ett laborerande arbetssätt när de undervisar om tal i bråkform. Tidigare forskning (exempelvis Butler m.fl., 2003; Fuchs m.fl., 2007; Fyfe m.fl., 2014) har visat att undervisning, framför allt undervisning om tal i bråkform, som sker utifrån ett laborerande arbetssätt är gynnsamt för elevernas lärande. Denna avhandling visar på någonting mer. Det räcker inte med att fokusera på i vilken ordning representationerna används för att eleverna ska ges möjlighet att erfara lärandeobjektet. Det handlar också om hur lärarna använder representationerna och hur de kopplar samman dem i bråkundervisningen.

Sammankopplingar av representationer

Resultatet i denna avhandling visar att när lärarna undervisar om tal i bråkform med hjälp av olika representationer kopplas dessa samman med varandra på olika sätt. När flera representationer kopplas samman

skapas ett representationssystem som ger eleverna möjlighet att erfar lärandeobjektet (jfr. Goldin & Shteingold, 2001). I ett representationssystem ingår de representationer som lärarna använder och som de aktivt kopplar samman. Ibland kopplar lärarna inte samman de representationer som används för att rikta uppmärksamheten mot lärandeobjektet i undervisningen. I de undervisningssituationer där samtliga representationer inte kopplas samman av lärarna lämnas detta åt eleverna. Det är inte säkert att eleverna per automatik själva kopplar samman representationerna med varandra även om dessa är tillgängliga och synliga för eleverna (jfr. Ekdahl, 2019). Resultaten från denna avhandling understryker vikten av att läraren aktivt kopplar samman representationer med varandra för att eleverna ska förstå vad i det matematiska innehållet uppmärksamheten ska riktas mot. Genom att koppla samman flera representationer kan det leda till att eleverna ges möjlighet till ökad och fördjupad förståelse av matematiska begrepp (Dündar, 2015; Ekdahl, 2019; Lesh, 1981).

Sammankopplingar mellan representationer av samma aspekt eller skillnad mellan aspekter inom ett lärandeobjekt görs av lärarna på flera olika sätt, dels genom att koppla samman representationer som förekommer i undervisningssituationen, dels genom att koppla samman representationer som har förekommit tidigare. Skillnaderna mellan lärarnas sammankopplingar ligger således i själva tidsaspekten av hur representationerna visas, samt vilka handlingar som lärarna använder för att tydliggöra kopplingen mellan representationerna.

När lärarna i denna avhandling visar representationerna samtidigt och kopplar samman dem, det vill säga synkront, görs sammankopplingarna med hjälp av både verbala och icke verbala handlingar. Lärarna har då en möjlighet att beskriva och förklara likheter mellan olika representationer samtidigt som de exempelvis pekar på dem. Lärarna ges då en möjlighet att utnyttja båda dessa handlingar i undervisningssituationen för att rikta uppmärksamhet mot de innehållsliga aspekterna av lärandeobjektet som eleverna ska fokusera på. De icke verbala handlingarna kännetecknas i denna avhandling av att lärarna pekar på eller ringar in någon central aspekt av representationen eller sätter ut ett likhetstecken mellan representationerna. Genom att lärarna använder sig av dessa typer av icke verbala handlingar kan det enligt tidigare forskning underlätta för eleverna att tolka representationen och därmed kan de få en bättre

möjlighet att förstå lärarens förklaring (exempelvis Alibali m.fl., 2014; Alibali & Nathan, 2012; Church m.fl., 2004; Cook m.fl., 2013; Goldin-Meadow & Singer, 1999; Koumoutsakis m.fl., 2016; Surahmi m.fl., 2018).

När lärarna i denna avhandling gör kopplingar till representationer som har förekommit tidigare, det vill säga diakront, görs sammankopplingarna endast verbalt. När dessa sammankopplingar görs lämnas eleverna att själva koppla ihop representationerna. Lärarna har då inte samma möjligheter att peka på och samtidigt förklara likheter mellan vad representationerna är tänkta att representera. Detta kan leda till att det blir otydligt vad eleverna ska urskilja, något som även Alibali m.fl. (2014) och Alibali och Nathan (2012) kommit fram till.

Oavsett om lärarna gör synkrona eller diakrona kopplingar för att tydliggöra det matematiska innehållet så har lärarnas språk en central roll i strävan att rikta uppmärksamhet mot det som ska fokuseras. Språket kan peka ut och benämna olika aspekter av bråk, vad som är förgrund och vad som är bakgrund. Med hjälp av språket kan läraren frigöra sin undervisning från den omedelbara omgivningen och relatera till tidigare erfarenheter. Det matematiska språket kan därför vara ett kraftfullt sätt att precisera vad lärarna vill rikta uppmärksamheten mot. Lärarnas språkbruk när de undervisar om tal i bråkform kännetecknas i denna avhandling av ett vardagligt språk som är kontextbundet, när de kopplar samman representationer av det matematiska innehållet, vilket ligger i linje med Muzheve och Capraros (2012) studie. Till skillnad från deras studie, där lärarna använde sig av ett informellt språkbruk genom att de själva bytte ut vissa formella uttryck (exempelvis nämnare) till mer informella uttryck (exempelvis nanny), visar resultatet i denna avhandling att det vardagliga språkbruket är av en mer oprecis karaktär. Exempelvis visar resultaten att lärare uttrycker att något är ”samma sak” när de förklarar likheter mellan representationer. Lärarnas språkbruk knyter an till en specifik uppgift, vilket gör att eleverna inte ges någon möjlighet att generalisera så att de kan använda den kunskapen när de arbetar vidare med andra uppgifter av liknande karaktär.

Sammanfattningsvis visar resultaten att lärare undervisar om tal i bråkform utifrån ett laborerande eller konkretiserande arbetssätt. Avgörande för vad eleverna ges möjlighet att erfara är emellertid att minst två värden av de nödvändiga aspekterna varierar, inte i vilken ordning representationerna används. Resultatet visar också att vad

eleverna ges möjlighet att erfara om tal i bråkform kan komma att påverkas av vilken typ av representation, perceptuellt rikt eller enkelt material, som används. Dessutom visar resultatet att hur lärare kopplar samman representationerna, synkront eller diakront, är av betydelse för vad eleverna ges möjlighet att erfara. När lärare kopplar ihop representationerna synkront tydliggörs för eleverna hur representationerna ska tolkas.

7.1.3 Användningen av ett eller flera exempel

Ett annat mönster som framträder i resultatet är att lärare undervisar om tal i bråkform genom att använda ett eller flera exempel. Beroende på hur många exempel som lärarna använder leder det till olika möjligheter för eleverna att erfara lärandeobjektet.

När lärare i avhandlingen undervisar om tal i bråkform använder de företrädesvis ett exempel. Genom att använda ett exempel kan enligt Sun (2015) och Watson och Mason (2006) elevernas möjligheter att generalisera lärandeobjektet begränsas. Detta sker exempelvis när läraren förklarar skillnaden mellan täljaren och nämnaren i ett bråkuttryck. I dessa undervisningssituationer undervisar lärarna om hur en procedur ska genomföras för att lösa det enskilda exemplet. Resultaten visar också att lärare som använder sig av ett exempel ibland för resonemanget vidare, bort från det enskilda exemplet, mot en mer generell förklaring av innebörden av lärandeobjektet. Detta handlande kan bidra till att eleverna ges en möjlighet att utvidga sitt erfarande av tal i bråkform. Det visade exemplet och lärarens generella förklaring av lärandeobjektet kan här ses som det Sun (2015) benämner som ett ”set” av exempel som tillsammans bildar en helhet och kan betraktas som tillräckligt för att eleverna ska ges möjlighet att utvidga sitt erfarande av lärandeobjektet för att kunna göra en generalisering (jfr. Marton, 2015).

När lärare däremot använder flera sammanhängande exempel ges eleverna möjlighet att upptäcka både det specifika och det generella i det som undervisas (Kullberg m.fl., 2014; Watson & Mason, 2006). Genom att lärarna använder flera exempel, relaterat till samma lärandeobjekt, presenterade i genomtänkta sekvenser, skapas således ett ”set” av exempel (jfr. Sun, 2015). När lärarna använder flera ”set” av exempel ges eleverna en utvidgad möjlighet att erfara lärandeobjektet jämfört med när läraren endast använder ett enskilt exempel i undervisningssituationen.

Ett annat resultat i avhandlingen visar att lärarnas förmåga att fånga upp och möta elevernas svar med lämpliga exempel i den pågående interaktionen påverkar vad eleverna ges möjlighet att erfara. Lärarnas agerande kan i dessa undervisningssituationer förstås mot bakgrund av det Ball (2001) benämner som lärarnas reflektiva praxis. När lärarna väljer exempel som möter elevernas uppfattningar av lärandeobjektet kan läraren rikta elevernas uppmärksamheten mot lärandeobjektet. Beroende på lärarens förmåga att möta eleverna med relevanta exempel i relation till både eleven och lärandeobjektet påverkas vad eleven ges möjlighet att erfara.

Sammanfattningsvis visar resultatet att beroende på hur lärare väljer och använder exempel i undervisningen om tal i bråkform påverkas elevernas möjligheter att erfara lärandeobjektet. När eleverna får möjlighet att fokusera på flera, sammanlänkade, exempel kan de upptäcka både specifika och det generella i det som undervisas och kan på så sätt utvidga sitt erfärande om tal i bråkform.

7.1.4 Slutsatser, implikationer och förslag till vidare forskning

Resultatet i föreliggande avhandling bidrar med detaljerade beskrivningar av undervisning om tal i bråkform med avseende på (a) variation av innehållet, (b) användningen av representationer och (c) val av exempel. Denna avhandling kan på så sätt ge ett ämnesdidaktiskt bidrag inom matematikdidaktik gällande undervisning med representationer av tal i bråkform. Beskrivningar av undervisning om hur tal i bråkform representeras kan fungera som utgångspunkter när lärare planerar och undervisar om tal i bråkform. Resultatet kan även bidra med en begreppsapparat för lärare att använda vid diskussion med kollegor om undervisning av tal i bråkform (jfr. Carlgren, 2017). Till exempel kan denna undervisning planeras och iscensättas utifrån de undervisningssituationer som visat sig främja elevers möjligheter att erfara tal i bråkform. Det handlar bland annat om att variation av innehållsliga aspekter av tal i bråkform kan underlättas när dessa kontrasteras synkront. Det gäller även att göra medvetna val beträffande vilka representationer som ska användas för att representera ett matematiskt innehåll. Framför allt rör det sig om att bli medveten om hur representationerna används och att tydligt koppla samman representationerna med hjälp av både verbala och icke verbala

handlingar. Slutligen handlar det om att använda flera sammanlänkade exempel som ger eleverna möjlighet att upptäcka både det specifika och det generella i det som undervisas.

Tidigare variationsteoretiska studier (exempelvis Ekdahl, 2019; Häggström, 2008, Mannula, 2018; Runesson, 1999) har genom att använda begreppet ”dimensioner av variation” analyserat och jämfört undervisning. I denna avhandling har i stället både dimensioner av variation, med fokus på synkron och diakron samtidighet, och sammankopplingar av representationer av tal i bråkform använts för att beskriva skillnader av innehållsliga variationer och skillnader i hur sammankopplingar av representationer sker. Genom att både fördjupa och bredda analysen kan avhandlingen bidra till framtida diskussioner om hur undervisning kan analyseras med hjälp av variationsteorin.

I resultaten framkommer det att lärare som undervisar om tal i bråkform kan skapa mer eller mindre gynnsamma förutsättningar för att eleverna ska ges möjlighet att urskilja aspekter av tal i bråkform. Med utgångspunkt i resultaten kan följande modell, se Figur 52, beskriva olika utfallsrum vad gäller vilka undervisningshandlingar som kan skapa gynnsamma förutsättningar för elevernas lärande av tal i bråkform. Modellen har tre dimensioner som var och en för sig varierar mellan vilka undervisningshandlingar som kan skapa gynnsamma förutsättningar: (a) variation av innehållet, (b) användningen av representationer, och (c) val av exempel. Det innebär att det går att teckna åtta utfallsrum som vart och ett begreppsliggör olika typer av undervisningshandlingar relaterat till hur lärare använder representationer i undervisningen om tal i bråkform. Gynnsamma förutsättningar (se grön kub i Figur 52) för att eleverna ska urskilja specifika aspekter av tal i bråkform kännetecknas av att läraren låter de nödvändiga aspekterna bilda förgrund och därmed lämnar andra aspekter i bakgrunden (jfr. Lo, 2012). Detta sker när läraren varierar de innehållsliga aspekterna av lärandeobjektet genom att skapa synkrona kontraster. En ytterligare förutsättning är att läraren med hjälp av både verbala och icke verbala handlingar aktivt kopplar samman de representationer som används för att representera lärandeobjektet, så att dessa representationer och kopplingar träder fram och kan urskiljas av eleverna. Slutligen är det gynnsamt när läraren använder flera exempel som presenteras för eleverna i genomtänkta och framträdande sekvenser. Genom att erbjuda eleverna sådana möjligheter i en

undervisningssituation kan det skapa gynnsamma förutsättningar så att ett lärande av tal i bråkform kan ske.

Figur 52

Modell över utfallsrum av lärares undervisningshandlingar som skapar olika förutsättningar för elevers möjlighet att urskilja aspekter av tal i bråkform

Även om modellen ger en schematisk bild och beskriver de olika utfallsrummen i denna avhandling, är det viktigt att poängtera att utfallsrummen inte ska förstås som absoluta. I stället handlar det om en glidande skala, ett kontinuum, mellan vad som är gynnsamma förutsättningar för elevers urskiljande av aspekter av tal i bråkform. Modellen kan användas som ett tankeverktyg kring hur lärare använder representationer i bråkundervisningen och vad eleverna ges möjlighet att erfara om tal i bråkform. Modellen kan på så sätt användas som ett underlag för fortsatt diskussion kring undervisning om tal i bråkform.

I Tabell 22 presenteras utifrån avhandlingens resultat vad som kan karakterisera en gynnsam undervisning av tal i bråkform med avseende på de tre dimensionerna (a) variation av innehåll, (b) användande av representationer och (c) användande av exempel.

Tabell 22

Exempel på gynnsam undervisning för att ge elever möjlighet att erfara aspekter av tal i bråkform

Dimension	Gynnsam undervisning för att ge elever möjlighet att erfara aspekter av tal i bråkform
Variation av innehåll	<p>Läraren varierar innehållet genom att skapa synkrona kontraster som eleverna kan erfara i undervisnings-situationen</p> <p>Läraren varierar nödvändiga aspekter i relation till lärandeobjektet med hjälp av minst två värden, vilket kan leda till att eleverna ges möjlighet att erfara lärandeobjektet</p>
Användning av representationer	<p>Läraren använder lämpliga representationer som hjälper eleverna att rikta uppmärksamhet mot lärandeobjektet</p> <p>Läraren kopplar samman representationerna synkront med hjälp av verbala och explicita icke verbala handlingar som kan leda till att aspekter av representationerna tydliggörs</p>
Användning av exempel	<p>Läraren använder flera sammanhängande exempel som kan leda till att eleverna ges möjlighet att utvidga sitt erfande av lärandeobjektet</p> <p>Läraren använder lämpliga exempel i relation till elevernas uppfattning av lärandeobjektet</p>

Förslag till vidare forskning

Denna avhandling har visat att, beroende på hur lärare varierar innehållet, vilka representationer de använder och hur dessa kopplas samman samt vilka exempel de väljer, iscensätts olika undervisnings-situationer, vilket leder till att eleverna ges olika möjligheter att erfara lärandeobjektet. Med utgångspunkt i den modell som beskriver olika utfallsrum är ett förslag till vidare forskning att pröva denna modell. Genom att pröva modellen går det, till skillnad från föreliggande avhandling, att beskriva elevernas erfande av lärandeobjektet, det vill säga utfallet av de iscensatta undervisningssituationerna.

Denna avhandling har bland annat visat att olika typer av representationer kan leda till att elevernas uppmärksamhet riktas bort från den matematiska idén, som representationerna var tänkta att representera, på grund av representationens eventuella inbyggda dubbeltydiga representation. Med utgångspunkt i detta och med tanke på de senaste framstegen inom datateknik, där det numera förutom fysiska representationer, som beskrivits i denna avhandling, även används virtuella representationer, dynamiska objekt (jfr. Moyer m.fl., 2002) i matematikundervisningen, är ett ytterligare förslag till vidare forskning att studera om lärares val av representationer, som även inkluderar virtuella representationer, påverkar vad eleverna erfar om tal i bråkform.

7.2 Metoddiskussion

Studiens metod diskuteras med hjälp av begreppen tillförlitlighet och äkthet.

7.2.1 Studiens tillförlitlighet och äkthet

Aspekten *tillförlitlighet* innefattar enligt Lincoln och Guba (1994) kriterierna trovärdighet, överförbarhet, pålitlighet och konfirmation. Med trovärdighet avses att forskningen genomförs korrekt samt att datamaterialet analyseras korrekt.

För att stärka metodens trovärdighet har respondentvalidering (se Bryman, 2018) använts genom att de observerade lärarna har erbjudits att ta del av mina iakttagelser av lektionerna. Samtalen kunde på grund av tidsbrist inte genomföras med tre av lärarna. Detta innebär att respondentvalideringen inte fullt ut har kunnat åberopas. Ett annat sätt att stärka trovärdigheten skedde i analysens tredje (delstudie II) respektive fjärde steg (delstudie I). Med inspiration av arbetsmodellen för samarbete, *förhandlad samstämmighet* (Wahlström m.fl., 1997), analyserades delar av datamaterialet i samråd med kollegor insatta i matematikdidaktik eller variationsteori.

I syfte att tillmötesgå kriteriet om överförbarhet (jfr. Lincoln & Guba, 1994; Kvale & Brinkman, 2014) har strävan varit att så utförligt som möjligt beskriva dels analysprocessen, dels delstudiernas resultat. Ett sätt att tillmötesgå detta kriterium är att i resultatkapitlet redovisa de

observerade matematiklektionerna med hjälp av excerpter där både ord och handling återges. Ambitionen har varit att återge och beskriva de observerade undervisningssekvenserna om tal i bråkform på ett så detaljerat sätt som möjligt, så att de kan vara igenkänningsbara i andra matematikklassrum. De omfattande beskrivningarna av delstudiernas resultat är ett sätt att sträva efter att överföra och generalisera resultatet efter det Larsson (2009) benämner som kontextlikhet. Utifrån det resonemanget kan det vara möjligt att generaliseringar kan göras till liknande kontexter, det vill säga andra matematikklassrum. Generaliseringar via kontextlikhet är, enligt Larsson (2009), inte okomplicerade eftersom det kan vara svårt att bedöma vad som är lika även om kontexten stämmer överens. Detta innebär därför att det finns en begränsning gällande överförbarheten av studiens resultat till andra undervisningssituationer av tal i bråkform.

Det tredje och fjärde kriteriet gällande metodens tillförlitlighet handlar om pålitlighet och möjlighet att styrka och konfirmera. Ambitionen har varit att skapa en tillgänglig och fullständig redogörelse av processens alla faser, exempelvis forskningsfrågor, urval och analys av datamaterialet, utan att medvetet låta personliga värderingar påverka resultatet. Även om intentionen varit att sådana faktorer inte ska påverka kan det inte uteslutas att en viss påverkan ändå har skett.

En sådan faktor är min egen bakgrund som lärare i matematik, och att jag har undervisat om tal i bråkform för elever i samma ålder som eleverna som observerats. Denna förförståelse kan innebära både för- och nackdelar. Kullberg (2014) menar att en fördel med att vara förtrogen med fältet är att forskaren "talar samma språk" som de observerade lärarna, i stället för att ägna kraft åt att förstå grunderna i undervisningen. En nackdel kan däremot vara att komma alltför nära datamaterialet. För att skapa distans mellan min förförståelse och datamaterialet har ambitionen i analysprocessen varit att upprätthålla en kritisk blick och enbart fokusera på vad som visas i datamaterialet (se Fangen, 2005). Ett annat sätt att bearbeta förförståelsen är, enligt Larsson (2005), att redovisa den tolkningsteori som legat till grund för analysen. Användandet av en teori för att tolka datamaterialet kan bidra till att skapa distans till förförståelsen (jfr. Larsson, 2005). I föreliggande avhandling har den tolkningsteori som använts beskrivits i kapitel 3, *Variationsteori*.

En ytterligare faktor berör valet av metod. I avhandlingen studeras lärares och elevers användande av representationer av tal i bråkform. För att kunna beskriva detta har autentiska klassrum studerats genom delvis deltagande observation. Det kan diskuteras om det går att studera autentiska klassrum, eftersom både min och videokamerans närvaro i klassrummet kan komma att påverka undervisningen (jfr. Bryman, 2018). Det innebär att det kanske inte är autentiska klassrum som studeras. Granström (2007) påpekar emellertid att samspel mellan lärare och elever som skapas över tid är tämligen stabila, vilket leder till att samspelet inte påverkas så lätt även om de som blir observerade är medvetna om att de blir observerade.

En tredje faktor rör urvalet. De lärare som kontaktades är lärare som jag sedan tidigare varit i kontakt med, vilket innebär att det fanns en viss yrkesmässig relation mellan mig och lärarna. En fördel med att det sedan tidigare fanns en yrkesmässig relation är att detta kan ha underlättat tillgången till fältet, exempelvis tackade endast ett fåtal (5 av 38 lärare) av de tillfrågade lärarna nej till att delta i studien. Relationen kan ha kommit att påverka både hur lektionerna genomfördes och mina analyser av lektionerna. För att vidmakthålla den kritiska blicken och inte påverkas av tidigare relationer användes, som tidigare nämnts, förhandlad samstämmighet där delar av datamaterialet analyserades i samråd med kollegor insatta i matematikdidaktik och eller variationsteori.

Beträffande aspekten *äktethet* handlar detta, enligt Lincoln och Guba (1994), bland annat om att ge en rättvis bild av det som observerats. Denna aspekt har beaktats genom att försöka skildra de observerade undervisningssekvenserna på ett så rättvist sätt som möjligt med avsikt att avspegla undervisningen i de observerade klassrummen. En fördel med att jag sedan tidigare hade en yrkesmässig relation till de observerade lärarna är att jag som observatör kunde uppträda på ett naturligt sätt, vilket skapade förutsättningar för att de som studerades i sin tur kunde agera på ett naturligt sätt, eftersom det redan fanns en etablerad tillit. Detta är, enligt Fangen (2005), en förutsättning för en deltagande observation.

Summary

The topic of this dissertation is how teachers teach middle school pupils about fractions in mathematics. The dissertation consists of two studies. Study I is an investigation into how teachers and pupils use manipulatives to represent numbers in fractions. Study II focuses on how teachers use various forms of representations to represent fractions and how these representations are linked to each other. Both studies investigate what pupils are able to learn about fractions as a result. Teaching can be described as an interaction between teacher, pupil and subject matter. An important element in teaching is the representations that teachers and pupils use to enable pupils to acquire subject knowledge (Uljens, 1997). In other words, the interaction between teacher, pupil, subject matter and the use of manipulatives is the foundation of teaching and a prerequisite for what pupils are able to learn. In this dissertation, how teachers and pupils make use of representations, such as pictures, words, symbols and concrete objects (cf. Cai, 2005; Lesh, 1981), is studied. One representation which is given particular attention is concrete objects; that is, manipulatives.

Aim and research questions

The aim of the dissertation is to create an understanding of teacher teach fractions in school years 4 to 6. The specific research questions that are investigated are as follows: (1) How to make use of different types of representations when teaching fractions? and (2) What are pupils able to learn about fractions as a result?

Previous research

A number of studies (e.g. Booth et al., 2014; Hecht et al., 2003; Siegler et al., 2012; Vucovic et al., 2014; Wang & Siegler, 2013) have contributed data concerning pupils' knowledge of fractions. They point out that pupils' lack of understanding about fractions remains throughout schooling, and that this lack of understanding may have an impact on their learning in other areas of mathematics. The complexity of the matter is partly due to the fact that fractions consist of subconstructs (cf. Kieren, 1980; Schoenfeld, 2007). Pupils' limited understanding of fractions is also reflected in international student

assessments, such as TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) and PISA (Programme for International Student Assessment). Problems with understanding fractions often remain throughout pupils' education, including at upper secondary school (cf. Calhoon et al., 2007; Siegler et al., 2012; Wang & Siegler, 2013).

There are several reasons why pupils may have difficulties understanding fractions. One reason is uncertainty about how fractions should be interpreted. Fractions are expressed in the form $\frac{a}{b}$, where a and b are integers. Many pupils have years of experience of integers before they are taught about fractions, which means that there is a risk that their earlier experiences will prevail as they try to interpret fractions. These experiences of integers as independent numbers may come to overshadow their realisation that a fraction should be understood as a ratio between the numbers 'a' and 'b' (Siegler & Lortie-Forgues, 2017). This phenomenon is called *the whole number bias* (Ni & Zhou, 2005; Siegler et al., 2011). A conflict may emerge for pupils between prior knowledge about integers and new knowledge about fractions. Another reason for pupils' problems with understanding fractions is that fractions have multiple meanings, for instance equal division, scale, ratio, part and proportion (Cramer et al., 2002; Kilpatrick et al., 2001; McMullen et al., 2015).

Some researchers find that teachers' use of representations, such as everyday incidents, manipulatives, pictures and oral and written language, are particularly favourable when teaching fractions (Cathcart et al., 2006; Fazio et al., 2016; Lamon, 2001; Rau & Matthews, 2017; Siegler et al., 2010). There are, however, only a few studies where teachers' use of representations when teaching mathematics has been observed. These studies have primarily focused on how teachers describe their use of representations when teaching fractions (Izsák et al., 2008; Lee et al., 2011). Which representations teachers use to represent fractions vary. So, for instance, a band with two pearls of different colours can be used to represent a ratio, while a fraction circle may represent a fraction as part of a whole (Dreher et al., 2014). The most common representation used by teachers is verbal and oral. This representation is used when the teacher explains new concepts, for example (Coe et al., 2014). Because no single representation can be used to represent all mathematical concepts, teachers need to choose the most suitable representation or representations to represent the specific

concept to be introduced in the mathematics lesson (Ball, 1993; Cramer & Wyberg, 2009).

According to the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2002) and Ainsworth (2006), it is not only the use of representations that is important; of equal importance is how the links between the different representations are made. These links can be made by means of verbal and non-verbal actions (i.e. gestures). These two types of actions can strengthen and complement each other (cf. Edwards, 2009; Yeo et al., 2017), and several studies (e.g. Church et al., 2004; Cook et al., 2013; Koumoutsakis et al., 2016; Surahmi et al., 2018) demonstrate that pupils' learning increases when the teacher uses both verbal and non-verbal actions.

Theoretical framework

In this dissertation, *variation theory* was chosen as a theoretical framework. A basic assumption in variation theory is that we learn new things primarily by experiencing differences rather than similarities. In other words, we see something in a 'new, more qualitative way', and we thus experience aspects of a learning object that we have not experienced before (Marton, 2015). The choice of theory is based on the fact that variation theory is empirically anchored and has, in previous studies, proved to be a useful tool when analysing teaching in relation to subject matter as well as what pupils are able to learn (cf. Guo et al., 2012; Häggström, 2008; Kullberg & Runesson, 2013; Runesson, 1999; Sun, 2015). Research has demonstrated that pupils are offered different possibilities to learn, even though the subject content is the same (Ek Dahl, 2019; Häggström, 2008; Mannula, 2018; Ryve et al., 2012; Runesson, 1999).

Variation theory has a clear connection to learning and teaching, and offers a framework that makes it possible to describe differences in how content is dealt with and what pupils are able to learn (Runesson, 2005). The origin of variation theory can be traced back to phenomenography (Marton, 1981). According to phenomenography, we conceive a phenomenon *as something*, but this something is conceived differently by different people. Every phenomenon contains a number of aspects. Depending on which aspects of the phenomenon come to the fore, we conceive it in a specific way. Because different aspects may come to the

fore for each individual, the same phenomenon can be conceived in different ways (Marton & Booth, 2000; Pang, 2003).

Learning is essential according to variation theory, and it always means learning of something. In other words, it has an object, which in variation theory is denoted as *the object of learning* (Lo, 2012; Marton, 2015; Runesson, 2017). Variation theory facilitates the understanding of how different ways to deal with a specific topic are connected to the variation in pupils' possibilities to learn. An object of learning consists of a varying number of aspects. The learner is likely to have discerned some aspects of the object of learning at hand. Learning may thus be described as the process that takes place as the learner discerns more aspects of the object of learning. How a phenomenon is conceived or experienced depends on which aspects of the phenomenon we are focusing on. For these aspects to be discerned, they need to be seen as *dimensions of variation* (Runesson, 2017). Marton (2015) mentions colour as an example of a dimension of variation. Within the dimension of 'colour' there are many different varieties, e.g. blue, green and red. There are, in other words, several options in the variation of colours. Marton (2015) has named these variations *values* of a dimension. The colours blue, green and red are examples of the dimension of variation named colour. Which aspects of an object of learning the pupils are able to discern depends on which dimensions of variation are made visible. For a certain aspect to become visible it needs to be *varied* while, at the same time, other aspects need to be *invariable*; that is, constant. When teaching, teachers need to make the objects of learning accessible through different *patterns of variation*, i.e. contrast and generalisation are used in teaching (Marton, 2015). The variation pattern of 'contrast' is used to discern an aspect that has not yet been seen, in other words a critical aspect. This may occur when at least two different values are compared. As two values are contrasted, a dimension of variation opens up. Due to this comparison, or contrasting, the aspect can be discerned (Marton, 2015). In the example of colour, the colour blue can be contrasted with the colour red. When the two colours are present simultaneously, it is possible to compare the two values. There are different types of simultaneity: *synchronic* and *diachronic* (Marton, 2015; Marton et al., 2004; Pang, 2003). The difference between synchronic and diachronic simultaneity pertains to the aspect of time: "[T]he different things or qualities may be present at the same time

(synchronic simultaneity) or may have appeared at different points in time but are experienced simultaneously (diachronic simultaneity)” (Marton, 2015, p. 109). This quotation shows that a synchronic simultaneity means variation on one and the same occasion. Diachronic simultaneity, on the other hand, means variation in relation to previous experiences or occasions. Marton and Booth (2000) and Bergentoft (2014, 2020) claim that the possibilities to learn increase in synchronic simultaneity because more than one value of the object of learning are experienced simultaneously.

Method

To describe and analyse how teachers and pupils use manipulatives, how teachers use and link together different representations, and what pupils are able to experience when they are taught fractions, a number of mathematics lessons have been observed and videotaped. A mathematics lesson is here defined as a room where a specific group of pupils (in school years 4 to 6) is given a 40- to 90-minute lesson by a mathematics teacher (cf. Kilhamn et al., 2019). In Study I, the video recording was limited to focusing on incidents where teachers or pupils used some type of manipulatives during the lesson. In Study II, the focus was on incidents where only the teacher used representations when teaching fractions. Data from Study I consist of observations from 20 different mathematics lessons, while data from Study II consist of 13 different mathematics lessons. Analysis of the data material was inspired by the process of thematic analysis described by Braun and Clarke (2006). This process can be described as an interaction between the empirical material, variation theory and concepts found in previous research. The analysis demonstrated that a total of 13 different objects of learning were created in interaction between the pupils and the teacher. Some of these objects were the same in the two studies, while other objects were specific to each study.

Results and discussion

The results of the studies demonstrate that teachers focus their attention on different objects of learning, despite the fact that the mathematical content is the same. How teachers act in the teaching situation – which, in turn, is important in terms of what the pupils are able to learn concerning fractions – is discussed based on three aspects: (a) variation

of content; (b) use of representations, with respect to both which representations are used and how the different representations are linked to each other; and (c) choice of examples.

Variations of aspects of content in teaching fractions

When teachers teach fractions, they vary the content in different ways. Above all, they create contrasts in order to enable pupils to discern what is to be learned (cf. Marton, 2015). The contrasts are created by teachers when making the aspects to be focused on stand out, while other aspects form the background. In order to compare and arrange fractions according to size, the teacher can give examples in which the denominator varies while the numerator is invariant. By arranging fractions according to size where only the denominator is variant, the problem of *whole number bias* will be made visible (Ni & Zhou, 2005; Siegler et al., 2011). The contrasts are made synchronically or diachronically. When an object of learning is varied synchronically, the examples of fractions that are focused on during instruction are visible to the pupils simultaneously. As the teacher makes the contrast simultaneously, it will be more visible, which will make it easier for the pupils to experience the object of learning (cf. Marton, 2015). By contrast, if the examples of fractions are varied diachronically, that is, they are presented separately, the pupils must remember what the first presented example looked like in order to be able to link and contrast it with the later presented example. By handing over responsibility for contrasting the examples to the pupils, there is a possible risk that the pupils will not be made aware of the contrast during the lesson. If the contrast is not consciously focused on, the pupils may miss it altogether (Lo, 2012). The contrast will then be vague, which makes it difficult for the pupils to discern the object of learning. The results of this dissertation also demonstrate that, in certain teaching situations, teachers do not consciously create any contrasts. The object of learning that should be focused on is not varied against something specific; it is, instead, set against an unexpressed value and thus does not contain any variations of what is to be experienced. This kind of teaching situation can therefore be described, in Marton's (2015) terms, as *repetition* rather than as a lesson in which contrasts open up a dimension of variation to the pupils. Furthermore, the present research reveals that teachers in other teaching situations vary a number of aspects without keeping any

aspects invariant. When several aspects are varied simultaneously, discernment becomes more difficult (Marton et al., 2004) and the pupils' experiences of fractions are narrowed down. One example is when both the form and the size of the representation are varied simultaneously. Lo (2012) describes this in terms of our inability to focus on everything at the same time, so when several aspects are varied simultaneously, it will be difficult to discover one specific item.

The use of representations

The results of this study demonstrate that when teachers teach fractions, they use several different representations. This is not done in a standardised way, but rather multifariously. As a consequence, the possibilities for pupils to experience the object of learning vary depending on how each representation is used. It is revealed that in order for pupils to experience a certain aspect of fractions, it is vital that the representations used – whether they are concrete or abstract – have to express a variation in at least two of the aspects that are to be focused on (cf. Marton, 2015). For example, pupils are offered the possibility to experience how all fractions which are part of the same whole must be equal in size (cf. Aliustaoğlu et al., 2018; Hodnik et al., 2018) when the teacher contrasts two similar squares in which the sizes of the parts vary, while other aspects – such as form and number of parts – are kept invariant. In such lessons, variations are created by means of similar representations, thus contributing to the pupils' possibilities to learn. Another example described in this study is when the teacher uses written symbols – that is, abstract representations – to contrast two different strategies for multiplying fractions. Using similar abstract representations may, however, create problems for the pupils' learning. If the pupils' comprehension has not been firmly established in concrete representations, it will be more difficult for them to understand abstract representations, which is essential when learning mathematics (Flores et al., 2019; Fyfe et al., 2014; Levenson, 2010).

The results further reveal that it cannot be taken for granted that using similar concrete representations will automatically create conditions for the pupils to experience the object of learning. This is obvious when teaching fractions by using *perceptually rich manipulatives*, which in themselves contain characteristics that may lead pupils' thoughts away from the mathematical content or idea that the manipulatives are

supposed to represent (cf. Carbonneau et al., 2013; Kaminski et al., 2009). This can be observed when the pupils in the study include the characteristics of the representations when asked to decide which examples of fractions are equal (cf. Booth, 1987; Pern et al., 2003). Instead of solely focusing on whether the ratio between the denominator and the numerator in each fraction is equal (cf. Hecht et al., 2003; Siegler et al., 2010; Van Steenbrugge et al., 2014), they focus on the appearance of the representation. In such teaching situations, the perceptually rich manipulatives (cf. Belenky & Schalk, 2014; De Loache, 1995; 2000) create a vagueness concerning what the pupils are supposed to focus their attention on (cf. Carbonneau et al., 2013; McNeil et al., 2009; McNeil & Uttal, 2009; Kaminski et al., 2009). The present study reveals that teaching fractions by means of *bland manipulatives* without any significant characteristics (cf. Petersen & McNeil, 2013) may result in the pupils' learning experiences of fractions being limited. This is the case, for instance, when pupils use cards without significant characteristics in order to practise arranging fractions according to size, in which the denominator varies while the numerator is invariant. Despite the fact that this is a relatively simple representation, the pupils' focus is geared towards *how* the cards are to be used, rather than focusing on the principle of 'the larger the denominator, the smaller the fraction' (cf. Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Furthermore, this study demonstrates that teachers use different representations when they teach fractions. They often start the lesson by using a concrete representation and then later switch to using more abstract representations. In other words, they use manipulative procedures when teaching fractions. Previous research (e.g. Butler et al., 2003; Fuchs et al., 2007; Fyfe et al., 2014) has shown that teaching – in particular teaching fractions – in a manipulative manner is favourable for pupils' learning. The present study has revealed something beyond this. It is not enough to focus on the order in which the representations should be used to give the pupils the best possible chances to experience the object of learning at hand. The way in which teachers use representations – and how they link them together in their teaching of fractions – is equally important.

The results of this dissertation demonstrate that teachers link together the representations they use when teaching fractions in various ways. When a number of representations are linked with each other, a system

of representations is created which enables pupils to discern the object of learning (cf. Goldin & Shteingold, 2001). A system of representations includes representations that the teacher has decided to use and actively link together. Sometimes, however, teachers do not make the links between the representations they use in order to focus attention on the object of learning. In lessons where all relevant representations are not linked together by the teacher, the pupils are left to make the links themselves. It cannot be taken for granted that the pupils will automatically make these links, even though the representations are readily available and visible. The present research shows how important it is that the teacher clarifies the links between the representations, so that the pupils will understand what to focus their attention on. Hence, making the links clear between the relevant representations gives the pupils a better chance to get a broader and deeper understanding of mathematical concepts (Dündar, 2015; Lesh, 1981). Teachers make the links between representations in various ways, such as linking together representations that are used during a specific lesson, as well as linking them with representations that have been used previously. The difference could thus be a matter of time; that is, when the representations are presented, and what actions the teachers take to clarify the links between the representations. When the teachers present the representations simultaneously and link them with each other – in other words, when they make synchronic links – they use verbal as well as non-verbal actions. This enables the teachers to describe and explain similarities between the representations while at the same time pointing them out. The teachers can use both actions in their teaching to turn the pupils' attention towards the actual object of learning. Non-verbal actions are characterised by teachers pointing at or circling some essential aspect of the representation, or putting an equals sign between the representations. This will enable the pupils to better understand the teacher's explanation, which in turn will make it easier for them to interpret the representation (Alibali et al., 2014; Alibali & Nathan, 2012; Church et al., 2004; Cook et al., 2013; 2017; Koumoutsakis et al., 2016; Goldin & Meadow, 199; Surahmi et al., 2018). On the other hand, when the teachers in this study make links with representations that have been introduced on previous occasions – that is, diachronically – the links are presented in verbal form only. In this way, the pupils are left to visualise the links between the representations themselves. Teachers then do not

have the same opportunities to point out and explain similarities between representations, which may result in the pupils getting a vague idea of what they are expected to discern (cf. Alibali et al., 2014; Alibali & Nathan, 2012).

The use of one or more examples

Another pattern that stands out in the results of the present study is that teachers teach fractions by giving the pupils one or more tasks or examples. Depending on how many examples the teachers use, the pupils will have different opportunities to experience the object of learning. The teachers in this study teach fractions primarily by using one single example. In this way, the pupils' opportunities to generalise the object of learning are limited (cf. Sun, 2015; Watson & Mason, 2006). The teachers merely give instructions about the procedure that should be implemented in order to solve the specific task. The results of the study also reveal that teachers who use only one example sometimes discuss mathematics with their pupils and explain the significance of the object of learning, which may contribute to the pupils' understanding and increase their opportunities to learn fractions. The actual example and the teacher's explanation of the object of learning can here be seen as a 'set' of examples (cf. Sun, 2015), which – taken together – create a whole and can therefore be sufficient to give the pupils opportunities to expand their experience of the object of learning and enable them to make a generalisation (cf. Marton, 2015).

When, on the other hand, teachers use combined tasks – that is, several examples – pupils have opportunities to discover both the specific and the general characteristics in what is taught (Kullberg et al., 2014; Watson & Mason, 2006). By using several examples related to the same object of learning and presented in well thought-out sequences, a 'set' of examples is created (cf. Sun, 2015). Furthermore, when teachers use several 'sets' of examples, pupils are given a wider array of opportunities to experience the object of learning, compared to when teachers only use one single example in their teaching. Another finding in the study is that teachers' ability to capture and give feedback to pupils' responses with appropriate examples in the ongoing interaction will have an impact on pupils' possibilities to experience the object of learning. In such a situation, the teachers' actions may be understood against the background of what Ball (2001) calls the 'reflective practice'

of the teacher. When teachers choose examples that match pupils' conceptions, they can direct the pupils' attention towards the object of learning. A teacher's ability to respond to pupils with relevant examples in relation to the individual pupils as well as the object of learning will influence what it is possible for the pupils to discern.

Referenser

- Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16(3), 183–198.
- Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (2002). Examining the effects of different multiple representational systems in learning. *Journal of the Learning Sciences*, 11(1), 25–61.
- Alibali, M., & Nathan, M. (2012). Embodiment in mathematics teaching and learning: Evidence from learners' and teachers' gestures. *Journal of the Learning Sciences*, 21(2), 247–286.
- Alibali, M. W., Nathan, M. J., Wolfgram, M. S., Church, R. B., Jacobs, S. A., Johnson Martinez, C., & Knuth, E. J. (2014). How teachers link ideas in mathematics instruction using speech and gesture: A corpus analysis. *Cognition and Instruction*, 32(1), 65–100.
- Aliustaoğlu, F., Tuna, A., & Biber, A. Ç. (2018). Misconceptions of sixth grade secondary school students on fractions. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 10(5), 591–599.
- Ball, D.L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, 16(2), 46-47.
- Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. I T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Red.), *Studies in mathematical thinking and learning. Rational numbers: An integration of research* (s. 157–195). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Ball, D. L., (2001). Teaching with respect to mathematics and students. I T. Wood, B. Nelson, & J. Warfield (Red.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (s. 11-22). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Barbieri, C. A., Rodrigues, J., Dyson, N., & Jordan, N. C. (2020). Improving fraction understanding in sixth graders with mathematics difficulties: Effects of a number line approach combined with cognitive learning strategies. *Journal of Educational Psychology*, 112(3), 628-648.
- Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of*

- Mathematics Education*, 2, 95–102.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. I R. Lesh & M. Landau (Red.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (s. 91–125). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Behr, M., & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. I T. Post (Red.), *Teaching mathematics in grades K–8: Research based methods* (2 uppl., s. 201–248). Allyn and Bacon.
- Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(4), 294–323.
- Belenky, D. M., & Schalk, L. (2014). The effects of idealized and grounded materials on learning, transfer, and interest: An organizing framework for categorizing external knowledge representations. *Educational Psychology Review*, 26(1), 27–50.
- Bergentoft, H. (2014). *Lärande i rörelse: Utveckling av kroppslig förmåga ur ett icke dualistiskt perspektiv*. [Licentiat-uppsats, Göteborgs universitet]
- Bergentoft, H. (2020). Running: A way to increase body awareness in secondary school physical education. *European Physical Education Review*, 26(1), 3–21.
- Björkholm, E. (2015). *Konstruktioner som fungerar: En studie av teknikkunnande i de tidiga skolåren*. [Doktorsavhandling, Stockholms universitet].
- Björkqvist, O. (2003). *Matematikdidaktiken i Sverige: En lägsbeskrivning av forskning och utvecklingsarbete*. Kungliga Vetenskapsakademien.
- Bjørndal, C. R. P. (2005). *Det värderande ögat: Observation, utvärdering och utveckling i undervisning och handledning*. Liber.
- Booth, J. L., Newton, K. J., & Twiss-Garrity, L. K. (2014). The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. *Journal of Experimental Child Psychology*, 118, 110–118.
- Booth, L. R. (1987). Difficulties of learning fractions. *Science Education Monthly*, 100, 8–16.
- Boyer, T., & Cohen, S. (2011). Child proportional scaling: Is $1/3=2/6=3/9=4/12$? *Journal of Experimental Child Psychology*, 111(3), 516–533.

- Braithwaite, D. W., Tian, J., & Siegler, R. S. (2018). Do children understand fraction addition? *Developmental Science*, 21(4).
- Braun, V & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77–101.
- Brown, D. L., & Presmeg, N. C. (1993). Types of imagery used by elementary and secondary school students in mathematical reasoning. I I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F. Lin (Red.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s.137–144).
- Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.
- Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder* (3 uppl.). Liber.
- Butler, F., Miller, S., Crehan, K.D., Babbitt, B., & Pierce, T. (2003). Fraction instruction for students with mathematics disabilities: Comparing two teaching sequences. *Learning Disabilities Research and Practice*, 18, 99–111.
- Cai, J. (2005). U.S. and Chinese teachers' constructing, knowing, and evaluating representations to teach mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(2), 135–169.
- Calhoon, M., Emerson, R. W., Flores, M., & Houchins, D. E. (2007). Computational fluency performance profile of high school students with mathematics disabilities. *Remedial and Special Education*, 28(5), 292–303.
- Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380–400.
- Carlgren, I. (2017). Forskning som utvecklar undervisningen. I I. Carlgren (Red.), *Undervisningsutvecklande forskning: Exemplet learning study* (s. 27–30). Gleerups.
- Cathcart, W. G., Pothier, Y. M., Vance, J. H., & Bezuk, N. S. (2006). *Learning mathematics in elementary and middle schools: A learner-centered approach* (4 uppl.). Pearson.
- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2015). Perspectives on priority mathematics education: Unpacking and understanding a complex relationship linking teacher knowledge, teaching, and learning. I L. D. English & D. Kirshner (Red.), *Handbook of*

- International Research in Mathematics Education*: (3 uppl., s. 19–59). Routledge.
- Charalambous, Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293–316.
- Church, R. ., Ayman-Nolley, S., & Mahootian, S. (2004). The role of gesture in bilingual education: Does gesture enhance learning? *International Journal of Bilingual Education and Bilingualism*, 7, 303–319.
- Clarke, D., Keitel, C., & Shimizu, Y. (2006). *Mathematics classrooms in twelve countries: The insider's perspective*. Sense.
- Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 127–138.
- Clarke, D., Roche, A., & Mitchell, A. (2011). One-to-one student interviews provide powerful insights and clear focus for the teaching of fractions in the middle years. I J. Way & J. Bobis (Red.) *Fractions: Teaching for understanding* (s. 23-41). Australian Association of Mathematics Teachers.
- Clement, L. (2004). A model for understanding, using, and connecting representations. *Teaching Children Mathematics*, 11(2), 97–102.
- Clements, D. H. (1999). "Concrete" manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1(1), 45–60.
- Clements, M. A., Keitel, C., Leung, F. K. S., Bishop, A. J., & Kilpatrick, J. (Red.). (2013). *Third international handbook of mathematics education*. Springer.
- Coe, R., Aloisi, C., Higgins, S., & Major, L. E. (2014). *What makes great teaching? Review of the Underpinning Research (Center for Evaluation and Monitoring, (CEM))*. The Sutton Trust.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8 uppl.). Routledge.
- Cook, S., Duffy, R., Kimberly, M., & Fenn, M. (2013). Consolidation and transfer of learning after observing hand gesture. *Child Development*, 86(6), 1863–1871.
- Cramer, K. A., Post, T. R., Mas, D., C, R., Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using

- commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 111–144.
- Cramer, K. A., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 490–496.
- Cramer, K., & Henry, A. (2002). Using manipulative models to build number sense for addition and fractions. I B. Litwiller & G. Bright (Red.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (s. 41–48). NCTM.
- Cramer, K., & Wyberg, T. (2009). Efficacy of different concrete models for teaching the part-whole construct for fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 226–257.
- DeLoache, J. S. (2000). Dual representation and young children's use of scale models. *Child Development* 71(2), 329–338.
- Derry, S., Pea, R., Barron, B., Engle, R., Erickson, F., Goldman, R., & Sherin, B. (2010). Conducting video research in the learning sciences: Guidance on selection, analysis technology and ethics. *Journal of the Learning Sciences*, 19(1), 3–53.
- DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, 37, 39–49.
- Dreher, A., Kuntze, S., & Lerman, S. (2016). Why use multiple representations in the mathematics classroom? Views of English and German preservice teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14, 363–382.
- Dündar, S. (2015). Mathematics teacher-candidates' performance in solving problems with different representation styles: The trigonometry example. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.
- Edwards, L. (2009). Gestures and conceptual integration in mathematical talk. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 127–141.
- Ekdahl, A-L. (2019). *Teaching for the learning of additive part-whole relations: The power of variation and connections*.

- [Doktorsavhandling, Jönköping University].
- Elby, A. (2000). What students' learning of representations tells us about constructivism. *The Journal of Mathematical Behavior*, 19(4), 481–502. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(01\)00054-2](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(01)00054-2)
- Ellmin, R. (2011). *Elevens lärande: Att erbjuda möjligheter*. Liber.
- Emanuelsson, J., Fainsilber, L., Häggström, J., Kullberg, A., Lindström, B., & Löwing, M. (2011). Research at the University of Göteborg. I J. Emanuelsson, L. Fainsilber, J. Häggström, A. Kullberg, B. Lindström, & M. Löwing (Red.), *Voices on learning and instruction in mathematics* (s. 7–49). Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.
- Erickson, F. (2011). Uses of video in social research: A brief history. *International Journal of Social Research Methodology*, 14(3), 179–189.
- Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1(2), 7–26.
- Fangen, K. (2005). *Deltaande observation*. Liber.
- Fazio, L. K., DeWolf, M., & Siegler, R. S. (2016). Strategy use and strategy choice in fraction magnitude comparison. *Journal of Experimental Psychology: Learning Memory, and Cognition*, 42(1), 1–16.
- Flevaris, L. M., & Perry, M. (2001). How many do you see? The use of nonspoken representations in first-grade mathematics lessons. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 330–345.
- Flores, M. M., Hinton, V. M., & Taylor, J. J. (2018). CRA fraction intervention for fifth-grade students receiving tier two interventions. *Preventing School Failure*, 62(3), 198–213.
- Flores, R., Inan, F. A., Han, S., & Koontz, E. (2019). Comparison of algorithmic and multiple-representation integrated instruction for teaching fractions, decimals, and percent. *Investigations in Mathematics Learning*, 11(4), 231–244.
- Forsblom- Nyberg, Y. (1995). Samtal som transkription. I A.-M. Ivars & P. Slotte (Red.), *Folkmålsstudier* 36 (s. 53–74). Institutionen för nordiska språk och nordisk litteratur.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., & Hollenbeck, K. N. (2007). Extending responsiveness to intervention to mathematics at first and third grades. *Learning Disabilities Research and Practice*, 22(1), 13–14.

- Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y., & Goldstone, R. L. (2014). Concreteness fading in mathematics and science instruction: A systematic review. *Educational Psychology Review*, 26(1), 9-25.
- Gabriel, F., Coch, F., Szucs, D., Caratte, V., Rey, B., & Content, A. (2012). Developing children's understanding of fractions: An intervention study. *Mind, Brain, and Education*, 6(3), 137–146.
- Gersten, R., Schumacher, R. F., & Jordan, N. C. (2017). Life on the numberline: Routes to understanding fraction magnitude for students with difficulties learning mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, 50, 655–657.
- Gibson, J.J., & Gibson, E.J. (1955). Perceptual learning: Differentiation or enrichment? *Psychological Review*, 62(1), 32-41
- Goldin-Meadow, S., Kim, S., & Singer, M. (1999). What the teacher's hands tell the student's mind about math. *Journal of Educational Psychology*, 91, 720–730.
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representation and the development of mathematical concepts. I A. A. Cuoca & F. R. Curcio (Red.), *The role of representation in school mathematics* (s. 1–23). NCTM.
- Goldstone, R. L., & Sakamoto, Y. (2003). The transfer of abstract principles governing complex adaptive systems. *Cognitive Psychology*, 46(4), 414–466.
- Granström, K. (2004). Om tillförlitlighet i observationer inom forskning och psykologisk praktik. *Nordisk Psykologi*, 56, 289-303
- Granström, K. (2007). *Forskning om lärares arbete i klassrummet*. Myndigheten för skolutveckling.
- Gu, L., Huang, R., & Marton, F. (2004). Teaching with variation: A Chinese way of promoting effective mathematics learning. I L. Fan, Y.-L., Wong, J. Cai, & S. Li (Red.), *How Chinese learn mathematics. Perspective from insiders*. (s. 309-347). World Scientific.
- Guo, J.-P., Pang, M. F., Yang, L.-Y., & Ding, Y. (2012). Learning from comparing multiple examples: On the dilemma of “similar” or “different.” *Educational Psychology Review*, 24(2), 251–269.
- Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction*, 28(4), 383–432.
- Hammersley, M & Atkinson, P. (1995). *Ethnography: Principles in*

- practice*. Routledge.
- Hannula, M. S. (2003). Locating fraction on a number line. I N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Red.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 17–24).
- Heath, C., Hindmarch, J., & Luff, P. (2010). *Video in qualitative research: Analysing social interaction in everyday life*. SAGE Publications Inc.
- Hecht, S. A., Close, L., & Santisi, M. (2003). Sources of individual differences in fraction skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 86(4), 277–302.
- Helenius O., Kilhamn C. och Nyström P. (2018). Mathematics education research in Sweden. National presentation at PME 42, I E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Red.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (s. 273–297).
- Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 371–404). Information Age.
- Hodges, T. E., Cady, J., & Collins, L. (2008). Fraction representation: The not-so common denominator among textbooks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(2), 78–84.
- Hodnik, T., Čadež, T. H., & Kolar, V. M. (2018). How fifth-grade pupils reason about fractions: A reliance on part-whole subconstructs. *Educational Studies in Mathematics*, 99(3), 335–357.
- Hostetter, A. B. (2011). When do gestures communicate? A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 137(2), 297–315.
- Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fraction operation sense. I B. Litwiller (Red.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (s. 72–78). National Council of Teachers of Mathematics.
- Häggeström, J. (2008). *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: what is made possible to learn?* [Doktorsavhandling, Göteborgs universitet].
- Inagaki, K., Morita, E., & Hatano, G. (1999). Teaching-learning of evaluative criteria for mathematical arguments through classroom discourse: A cross-national study. *Mathematical Thinking and*

- Learning*, 1(2), 93–111.
- Izsák, A., Tillema, E., & Tunç-Pekkan, Z. (2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(1), 33–62.
- Jigyel, K., & Afamasaga-Fuataí, K. (2007). Models of fractions and equivalence. *Australian Mathematics Teacher*, 63(4), 17–25.
- Jordan, B., & Henderson, A. (1995). Interaction analysis: Foundation and practice. *Journal of the Learning Sciences*, 4(1), 39–103.
- Jönsson, P., & Lingefjärd, T. (2012). *IKT i grund- och gymnasieskolans matematikundervisning*. Studentlitteratur.
- Kamii, C., & Clark, F. B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(4), 365–378.
- Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M., & Heckler, A. F. (2008). The advantage of abstract examples in learning math. *Science*, 320, 454–455.
- Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M., & Heckler, A. F. (2013). The cost of concreteness: The effect of nonessential information on analogical transfer. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 19(1), 14–29.
- Karlsson, N., & Kilborn, W. (2015). *Konkretisering och undervisning i matematik: matematikdidaktik för lärare*. Studentlitteratur.
- Keijzer, R., & Terwel, J. (2003). Learning for mathematical insight: A longitudinal comparative study on modeling. *Learning And Instruction*, 13, 221–236.
- Kelly, C. A. (2006). Using manipulatives in mathematical problem solving: A performance-based analysis. *The Mathematics Enthusiast*, 3(2), 184–193.
- Kersting, N. B., Givvin, K. B., Thompson, B. J., Santagata, R., & Stigler, J. W. (2012). Measuring usable knowledge. *American Educational Research Journal*, 49(3), 568–589.
- Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. I T. E. Kieren (Red.), *Recent research on number learning* (s. 125–149). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education. Victorian Department of Education and Early Childhood.
- Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. I T. P. Carpenter, E. Fennema, &

- T. A. Romberg (Red.), *Rational numbers: An integration of research* (s. 49–84). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Kilhamn, C., Nyman, R., Holmberg, B., & Rystedt, E. (2019). Video studies in classroom research: Hidden dimensions of teaching and learning. I C. Osbeck., Å Ingerman., S. Claesson (Red.), *Didactic classroom studies: A potential research direction*. (s. 151–172). Kriterium/Nordic Academic Press.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.
- Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan. (1.uppl.)*. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.
- Koumoutsakis, T., Church, R. B., Alibali, M. W., Singer, M., & Ayman-Nolley, S. (2016). Gesture in Instruction: Evidence from Live and Video Lessons. *Journal of Nonverbal Behavior*, 40(4), 301–315.
- Kullberg, A., & Runesson, U. (2013). Learning about the numerator and denominator in teacher-designed lessons. *Mathematics Education Research Journal*, 25(4), 547–567.
- Kullberg, B. (2014). *Etnografi i klassrummet* (3 uppl.). Studentlitteratur.
- Kvale, S., & Brinkman, S. (2014). *Den kvalitativa forskningsintervjun* (3 uppl.). Studentlitteratur.
- Kyriakides, L., Christoforou, C., & Charalambous, C. Y. (2013). What matters for student learning outcomes: A meta-analysis of studies exploring factors of effective teaching. *Teaching and Teacher Education*, 36, 143–152.
- Lamon, S. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. I A. Curcio (Red.), *The roles of representations in school mathematics* (s. 146–165). National Council of Teachers of Mathematics.
- Lamon, S. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teacher* (2 uppl.). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Langer, S. (1942). *Philosophy in new key*. Harvard University Press.
- Larsson, S. (2005). Om kvalitet i kvalitativa studier. *Nordisk Pedagogik*, 25(1), 25–38.
- Larsson, S. (2009). A pluralist view of generalization in qualitative research. *International Journal of Research & Method in Education*, 32 (1), 25–38.

- Lee, S. J., Brown, R. E., & Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(3), 198–220.
- Leong, Y. H., Ho, W. K., & Cheng, L. P. (2015). Concrete-pictorial-abstract: Surveying its origins and charting its future. *The Mathematics Educator*, 16(1), 1–19.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 235–264.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. I C. Janvier (Red.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (s. 33–40). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Lesser, L. M., & Tchoshanov, M. A. (2005). The effect of representation and representational sequence on students' understanding. I G. M. Lloyd, M. Wilson, J. L. M. Wilkins, & S. L. Behm (Red.), *Proceedings of the 27th Annual Meeting of PMENA* (s. 813–819).
- Levenson, E. (2010). Fifth-grade students' use and preferences for mathematically and practically based explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), 121–142.
- Liggett, R. S. (2017). The impact of use of manipulatives on the math scores of grade 2 students. *Brock Education Journal*, 26(2), 87–101.
- Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1994). Competing paradigms in qualitative research. I N. Denzin & Y. S. Lincoln (Red.), *Handbook of qualitative research* (s. 105–117).
- Linell, P. (1994). *Transkription av tal och samtal: Teori och praktik*. Linköpings universitet: Tema kommunikation.
- Lo, M. L., (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, (38), 201–221.
- Löwing, M. (2004). *Matematikundervisningens konkreta gestaltning: En studie av kommunikationen lärare- elev och matematiklektionens didaktiska ramar*. [Doktorsavhandling, Göteborgs universitet].

- Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding : Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 16–32.
- Mannula, T. (2018). *Students' and teachers' jointly constituted learning opportunities*. [Doktorsavhandling, Göteborgs universitet].
- Martin, T., & Schwartz, D. L. (2005). Physically distributed learning: Adapting and reinterpreting physical environments in the development of fraction concepts. *Cognitive Science*, 29, 587–625.
- Marton, F. (1981). Phenomenography- describing connections of the world around us. *Instructional Science*, 10, 177–200.
- Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.
- Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Marton, F., & Pong, W. (2005). On the unit of description in phenomenography. *Higher Education Research & Development*, 24(4), 335–348.
- Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. (2004). The space of learning. In *Classroom discourse and the space of learning* (s. 3–40). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Mason, J. (2006). What makes an example exemplary: Pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. I R. Zazkis & S. R. Campbell (Red.), *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (s. 41–68) Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Mayer, R. E., Heiser, J., & Lonn, S. (2001). Cognitive constraints on multimedia learning: When presenting more material results in less understanding. *Journal of Educational Psychology*, 93(1), 187–198.
- McCloskey, A., Lloyd, G., & Lynch, C. (2017). Theorizing mathematics instruction using ritual: Tensions in teaching fractions in a fifth grade classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 195–213.
- McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M., & Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction*, 37, 14–20.
- McNeil, N. M., Uttal, D. H., Jarvin, L., & Sternberg, R. J. (2009). Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems. *Learning and Instruction*,

- 19(2), 171–184.
- McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. University of Chicago Press.
- Mercer, N., & Sams, C. (2006). Teaching children how to use language to solve maths problems. *Language and Education*, 20(6), 507–528.
- Miller, G. (1956). The magic number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity to process information. *Psychological Review*, 63, 81–87.
- Mills, J. (2016). Developing conceptual understanding of fractions with year five and six students. I B. White, M. Chinnappan, & S. Trenholm (Red.), *Opening up mathematics education research Proceedings of the 39th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (s. 479–486).
- Mitchell, A., & Horne, M. (2010). Gap thinking in fraction pair comparisons is not whole number thinking: Is this what early equivalence thinking sounds like. I L. Sparrow, B. Kissane & C. Hurst (Red.), *Shaping the future of mathematics education: proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*.(s. 414 - 421).
- Mondada, L. (2006). Video recording as the reflexive preservation and configuration of phenomenal features for analysis. I H. Knoblauch, J. Raab, H.-G. Soeffner, & B. Schmettler (Red.), *Video analysis* (s. 51–68). Peter Lang.
- Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 175–197.
<https://doi.org/10.1023/A:1014596316942>
- Moyer, P. S., Bolyard, J., J., & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics*, 8(6), 372-377.
- Muzheve, M. T., & Capraro, R. M. (2012). An exploration of the role of natural language and idiosyncratic representations in teaching how to convert among fractions, decimals, and percents. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 1–14.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.002>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2002). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Nationalencyklopedin. (2019). representation.

- <https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/representation>
- Ni, Y. J., (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, 26(3), 400–417.
- Ni, Y. J., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52.
- Nishida, T. K. (2008). *The use of manipulatives to support children's acquisition of abstract math concepts*. [Doktorsavhandling, Univeristy of Virginia].
- Niss, M. (2001). Den matematikdidaktiska forskningens karaktär och status. I B. Grevholm (Red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* (s. 21–47). Studentlitteratur.
- Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part I - differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 217–253.
<https://doi.org/10.1007/BF00304357>
- Noreen, R., & Rana, A. M. K. (2019). Activity-based teaching versus traditional method of teaching in mathematics at elementary level. *Bulletin of Education & Research*, 41(2), 145–159.
- Nuthall, G. (2004). Relating classroom teaching to student learning: A critical analysis of why research has failed to bridge the theory-practice gap. *Harvard Educational Review*, 74(3), 273–306.
- Olive, J., & Vomvoridi, E. (2006). Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes: The case of Tim. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 18–45.
- Pang, M. F. (2003). Two Faces of Variation: on continuity in the phenomenographic movement. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 47(2), 145–156.
- Pang, M. F., & Lo, M. L. (2012). Learning study: Helping teachers to use theory, develop professionally, and produce new knowledge to be shared. *Instructional Science*, 40(3), 589–606.
- Pantziara, M., & Philippou, G. (2012). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 61–83.
- Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods* (2 uppl.). Sage Publications, Inc.
- Payls, T. (2008). Purposive sampling. I L. M. Given (Red.), *The sage encyclopedia of qualitative research methods*, (s. 697–698). Sage

Publications Inc.

- Pearn, C., & Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. I R. Putt, R. Faragher, & M. Mc Lean (Red.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (s. 430–437).
- Pearn, C., Stephens, M., & Lewis, G. (2003). Assessing rational number knowledge in the middle years of schooling. I M. Goos & T. Spencer (Red.), *Mathematics- Making Waves* (s. 170–178). Australian Association of Mathematics Teachers.
- Pedrotti, L. ., & Chamberlain, J. (1995). CORD Applied mathematics: hands-on learning in context. *Mathematics Teacher*, 88(8), 702–707.
- Petersen, L., & McNeil, N. M. (2013). Effects of Perceptually Rich Manipulatives on Preschoolers' Counting Performance: Established Knowledge Counts. *Child Development*, 84(3), 1020–1033.
- Polly, D. (2015). Examining how professional development influences elementary school teachers' enacted instructional practices and students' evidence of mathematical understanding. *Journal of Research in Childhood Education*, 29(4), 565–582.
- Post, T., & Cramer, K. (1987). Children's strategies in ordering rational numbers. *Arithmetic Teacher*, 35, 33–35.
- Raphael, D., & Wahlstrom, M. (1989). The influence of instructional aids on mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 173–190.
- Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2015). Successful learning with multiple graphical representations and self-explanation prompts. *Journal of Educational Psychology*, 107(1), 30–46.
- Rau, M. A., & Matthews, P. G. (2017). How to make 'more' better? Principles for effective use of multiple representations to enhance students' learning about fractions. *ZDM - Mathematics Education*, 49(4), 531–544.
- Resnick, I., Jordan, N. C., Hansen, N., Rajan, V., Rodrigues, J., Siegler, R. S., & Fuchs, L. S. (2016). Developmental growth trajectories in understanding of fraction magnitude from fourth through sixth grade. *Developmental Psychology*, 52, 746–757.
- Richland, L. E., Zur, O., & Holyoak, K. J. (2007). Cognitive supports

- for analogies in the mathematics classroom. *Science*, 316 (5828), 1128–1129.
- Ross, S. M., & Anand, P. G. (1987). A computer-based strategy for personalizing verbal problems in teaching mathematics. *Educational Communication and Technology*, 35(3), 151–162.
- Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies*, 69, 149–163.
- Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik: Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll*. [Doktorsavhandling, Göteborgs universitet].
- Runesson, U. (2005). Beyond discourse and interaction: Variation: A critical aspect for teaching and learning mathematics. *Cambridge Journal of Education*, 35(1), 69–87.
- Runesson, U. (2017). Variationsteori som redskap för att analysera lärande och designa undervisning. I I. Carlgren (Red.), *Undervisningsutvecklande forskning – exemplet Learning study* (s. 45–60). Gleerups.
- Runesson, U., & Kullberg, A. (2010). Learning from variation: Differences in learners' ways of experiencing differences. I B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, C. Michelsen, G. Palsdottir, O. Steinthorsdottir, & L. Haapasalo (Red.), *The Source book on Nordic Research in Mathematics Education* (s. 299–318). Information Age Publishing.
- Runesson, U., & Mok, I. A. C. (2004). Discernment and the question, "What can be learned? I F. Marton, A. Tsui, P. Chik, P. Ko, & M. Lo, (Red.), *Classroom discourse and the space of learning* (s. 63–87). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Ryan, U., Sollervall, H., Lingefärd, T., & Helenius, O. (2015). *Dynamisk representation med digitala verktyg*. Skolverket. <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:lnu:diva-46416>
- Sahlström, F. (1999). *Up the hill backwards: On interactional constraints and affordances for equity-constitution in the classrooms of the Swedish comprehensive school*. Acta Universitatis Upsaliensis.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2016). Physical and virtual manipulatives: What is "concrete"? I P.S. Moyder-Packenham (Red.), *International perspectives on teaching and learning*

- mathematics with virtual manipulatives* (s. 71-93). Springer.
- Schoenfeld, A. H. (2007). Reflections on an assessment interview: What a close look at student understanding can reveal. I A. H. Schoenfeld (Red.), (2007). *Assessing mathematical proficiency*. Cambridge University Press.
- Siegler, R.S., Carpenter, T., Fennell, F., C. Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., & Wray, J.. (2010). *Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade*. Carnegie Mellon University.
- Siegler, R. S. (2003). Implications of cognitive science research for mathematics education. I J. Kilpatrick, W. B. Martin, & D. E. Schifter (Red.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 219-233). National Council of Teachers of Mathematics
- Siegler, R. S., & Braithwaite, D. W. (2017). Numerical development. *Annual Review of Psychology*, 68, 187–213.
- Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., ... Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23(7), 691–697.
- Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2017). Hard lessons: Why rational number arithmetic is so difficult for so many people. *Current Directions in Psychological Science*, 26(4).
- Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, 49(10), 1994–2004.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273–296.
- Skolverket. (2008). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007. En jämförande analys av elevers taluppfattning och kunskaper i aritmetik, geometri och algebra i Sverige, Hong Kong och Taiwan* (Rapport 323). Skolverket.
- Skolverket. (2013). *Diamant- nationella diagnoser i matematik: Rationella tal*. Skolverket.
- Skolverket. (2017). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik: Reviderad 2017* Skolverket.
<https://www.skolverket.se/publikationsserier/kommentarmaterial/>

- 2017/kommentarmaterial-till-kursplanen-i-matematik-reviderad-2017
- Skolverket. (2019). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011: Reviderad 2019* (6 uppl.). <https://www.skolverket.se/getFile?file=4206>
- Smith, C. ., Solomon, G. ., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology*, 51(2), 101–140.
- Son, J. Y., Smith, L. B., & Goldstone, R. L. (2008). *Simplicity and generalization: Short-cutting abstraction in children's object categorizations*. 108, 626–638.
- SOU 2016:38. *Samling för skolan. Nationella målsättningar och utvecklingsområden för kunskap och likvärdighet*. Utbildningsdepartementet. <https://www.regeringen.se/4a75aa/contentassets/70375d2792c94fc2a3e10d9124f5ece5/nationella-malsattningar-och-utvecklingsomraden-for-kunskap-och-likvardighet-sou-2016-38.pdf>
- Sowell, E. (1989). Effects on manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5), 498–505.
- Sparrman, A. (2005). Video recording as interaction: Participant observation of children's everyday life. *Qualitative Research in Psychology*, 2, 241–255.
- Strässer, R. (2005). *An overview of research on teaching and learning mathematics*. https://www.vr.se/download/18.2412c5311624176023d25584/1529480558836/Overview-of-Research-Teaching-Learning-Mathematics_VR_2005.pdf
- Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 325–343.
- Stylianou, D., & Pitta-Pantazi, D. (2002). Visualization and high achievement in mathematics: A critical look at successful visualization strategies. I F. Hitt (Red.), *Representations and mathematics visualization* (s. 31–46). Cinvestav-IPN.
- Sun, X. (2015). "Variation problems" and their roles in the topic of

- fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 65–85.
- Surahmi, E., Budayasa, I. K., & Ekawati, R. (2018). The role of gesture to mathematics' fraction base concept instruction. *Journal of Physics: Conference Series*, 1108(1), 2-7.
- Sveider, C. (2016). *Lärares och elevers användande av laborativt material i bråkundervisningen i skolor 4-6 : Vad görs möjligt för eleverna att erfara?* [Licentiat- uppsats, Linköpings universitet].
- Swan, P., & Marshall, L. (2010). Revisiting mathematics manipulative materials. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 15(2), 13–19.
- Szendrei, J. (1996). Concrete materials in the classroom. I A. Bishop (Red.), *International handbook of mathematics education* (s. 411–434). Kluwer.
- Thompson, P. W Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Red.), *Research companion to the principles and standards for school mathematics* (s. 95–115). NCTM.
- TIMSS. (2007). *TIMSS 2007 Swedish pupils' mathematical knowledge: An analysis*, Rapport 323. Skolverket.
- Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*, 37, 5-13.
- Trygg, L. (2014). Undervisning med laborativt material. Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM http://ls.ncm.gu.se/media/ncm/dokument/176183_trygg.pdf.
- Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, 89, 419-441.
- Uljen, M. (1997). *Didaktik: Teori, reflektion och praktik*. Studentlitteratur.
- Uttal, D. H., Scudder, K. V., & DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18(1), 37–54.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2018).

- Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally* (10 uppl.). Pearson.
- Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2014). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction*, 89, 30-38.
- Van Steenbrugge, H. V., Lesage, E., Valcke, M., & Desoete, A. (2014). Preservice elementary school teachers' knowledge of fractions : A mirror of students' knowledge? *Journal of Curriculum Studies*, 46(1), 138–161.
- Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 167–181.
- Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningsed* (Reviderad). Vetenskapsrådet.
- Vukovic, R. K., Fuchs, L. S., Geary, D. C., Jordan, N. C., Gersten, R., & Siegler, R. S. (2014). Sources of individual differences in children's understanding of fractions, *Child Development*, 85(4), 1461–1476.
- Wahlström, R., Dahlgren, L. O., Tomson, G., Diwan, V. K., & Beermann, B. (1997). Changing primary care doctors' conceptions: A qualitative approach to evaluating an intervention. *Advances in Health Sciences Education*, 2(3), 221–236.
- Wang, Y., & Siegler, R. S. (2013). Representations of and translation between common fractions and decimal fractions. *Chinese Science Bulletin*, 58(36), 4630–4640.
- Watson, A., & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(2), 91–111.
- Way, J. (2011). Developing fraction sense using digital learning objects. I J. Way & J. Bobis (Red.) *Fractions: Teaching for understanding* (s. 153–166). The Australian Association of Mathematics Teachers.
- Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt*. [Doktorsavhandling, Umeå universitet].
- Wong, M. (2013). Locating fractions on a number line. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 18(4), 22–26.
- Yang, D., & Lai, M. L. (2013). Teaching benchmark strategy for fifth-

- graders in Taiwan. *Journal of Education and Learning*, 2(2), 69–77.
- Yeo, A., Ledesma, I., Nathan, M. J., Alibali, M. W., & Church, R. B. (2017). Teachers' gestures and students' learning: Sometimes "hands off" is better. *Cognitive Research: Principles and Implications*, 2(1), 1-11.
- Zhang, X., Clements, M. A., & Ellerton, N. F. (2015). Enriching student concept images: Teaching and learning fractions through a multiple-embodiment approach. *Mathematics Education Research Journal*, 27(2), 201-231.

Bilaga 1

Till vårdnadshavare och elever

Hej!

Mitt namn är Cecilia Sveider och arbetar på lärarutbildningen vid Linköpings universitet. Jag skriver till er därför att jag förutom att undervisa så har jag påbörjat en studie som kommer att handla om matematikundervisning i skolår 4–6. Syftet med studien är att beskriva hur lärare och elever arbetar med laborativt material.

För att kunna genomföra studien kommer jag att besöka och videofilma olika matematiklektioner. Eftersom ditt barns/din lärare har tackat ja till att medverka i studien innebär det att även ditt barn/du kommer att videofilmas. Deltagandet är frivilligt och kan när som helst avbrytas. För att få videofilma behöver jag ert samtycke i form av en underskrift på bifogad blankett.

Materialet som samlas in kommer att behandlas konfidentiellt. Det innebär att ditt barns/ditt namn, lärarens namn eller skolans namn kommer att anonymiseras i studien. Det insamlade materialet enbart kommer att användas i forskningssammanhang.

Har ni några frågor eller funderingar är ni välkomna att kontakta mig via mejl cecilia.sveider@liu.se eller telefon 013- 28 XX XX

Med vänliga hälsningar

Cecilia Sveider

Medgivande till deltagande i studien

☐

Ja, vårt/ mitt barn får delta.

☐

Nej, vårt/mitt barn får inte delta.

Barnets namn:.....

Målsmans/-mäns

underskrift:.....

Bilaga 2

Till vårdnadshavare och elever

Hej!

Mitt namn är Cecilia Sveider och arbetar på lärarutbildningen vid Linköpings universitet. Jag skriver till er därför att jag förutom att undervisa så har jag påbörjat en studie som kommer att handla om matematikundervisning i skolår 4–6. Syftet med studien är att beskriva matematikundervisning om bråk.

För att kunna genomföra studien kommer jag att besöka och videofilma olika matematiklektioner. Eftersom ditt barn/din lärare har tackat ja till att medverka i studien innebär det att även ditt barn/du kommer att videofilmas. Deltagandet är frivilligt och kan när som helst avbrytas. För att få videofilma behöver jag ert samtycke i form av en underskrift på bifogad blankett.

Materialet som samlas in kommer att behandlas konfidentiellt. Det innebär att ditt barns/ditt namn, lärarens namn eller skolans namn kommer att anonymiseras i studien. Det insamlade materialet enbart kommer att användas i forskningssammanhang.

Har ni några frågor eller funderingar är ni välkomna att kontakta mig via mejl cecilia.sveider@liu.se eller telefon 013- 28 XX XX

Med vänliga hälsningar

Cecilia Sveider

.....
Medgivande till deltagande i studien

☐

Ja, vårt/ mitt barn får delta.

☐

Nej, vårt/mitt barn får inte delta.

Barnets

namn:.....

Målsmans/-mäns

underskrift:.....

Bilaga 3

DIAGNOS RB1

Name _____ Klass _____

1 Hur stor del av figuren är skuggad?

a) _____ b) _____ c) _____

2 Ringa in alla figurer där en fjärdedel är skuggad.

3 a) Skugga en sjättedel av figuren. b) Skugga en fjärdedel av figuren.

c) Skugga en tredjedel av figuren.

DIAGNOS RB1

4 Skugga en fjärdedel av dessa figurer.

5 Skriv med siffror (i bokform)

a) en tredjedel _____ b) en halv _____

c) en sjättedel _____ d) en fjärdedel _____

6 Ringa in alla figurer där $\frac{1}{3}$ är skuggad?

7 Skugga $\frac{1}{5}$ av följande figurer.

DIAGNOS RB2

Namn _____ Klass _____

- 1 Hur stor del av figuren är skuggad?

Svar: _____ Svar: _____ Svar: _____

- 2 Skriv med siffror (i bråkform)

a) två tredjedelar _____ b) tre femtedelar _____

c) tre fjärdedelar _____ d) fem sjättedelar _____

- 3 a) Skugga $\frac{2}{5}$ av figuren. b) Skugga $\frac{3}{4}$ av figuren. c) Skugga $\frac{5}{6}$ av figuren.

4. Skugga $\frac{2}{3}$ av följande figurer.

DIAGNOS RB3

Namn _____ Klass _____

- 1 Hur stor andel av cirklarna är skuggade? Svara i bråkform.

Svar: _____ Svar: _____ Svar: _____

- 2 Skugga

a) $\frac{3}{5}$ av cirkelarna

b) $\frac{1}{3}$ av cirkelarna

c) $\frac{3}{4}$ av cirkelarna

- 3 Hur mycket är

a) hälften av 12? _____ b) en tredjedel av 6? _____

c) en femtedel av 10? _____ d) en fjärdedel av 8? _____

- 4 Hur mycket är

a) två tredjedelar av 6? _____ b) två tredjedelar av 9? _____

c) två femtedelar av 10? _____ d) tre fjärdedelar av 8? _____

Rationella tal

DIAGNOS RB3

- 5** En pizza är delad i 6 bitar. Markus åt upp en tredjedel av pizzan.
Hur många bitar åt Markus?

Svar: _____ bitar.

- 6** I en skål låg det 12 karameller. Först åt Ola upp en tredjedel av karamellerna.
Sedan åt Lisa upp hälften av de karameller som var kvar.
Hur många karameller låg det sedan i skålen?

Svar: _____ karameller

DIAGNOS RB4

Rationella tal

Namn _____ Klass _____

- 1 Sätt ett a vid talet $\frac{1}{2}$ på tallinjen och ett b vid talet $\frac{1}{4}$ på tallinjen.

- 2 Sätt ett a vid talet $\frac{1}{3}$ på tallinjen och ett b vid talet $\frac{5}{6}$ på tallinjen.

- 3 Vilket av de två talen är störst?
Gör en ring omkring det största talet i varje par.

a) $\frac{1}{2}$ eller $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{7}$ eller $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ eller $\frac{3}{5}$

- 4 Jämför de båda talen i uppgifterna.
Ringa in de uppgifter där båda talen är lika stora.

a) $\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ c) $\frac{2}{3} = \frac{2}{4}$ d) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

- 5 Fyll i rätt siffror så att alla tal i raden blir lika stora.

a) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{8}{8} = \frac{12}{12}$ b) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{9}{9} = \frac{12}{12}$

c) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{15}{15} = \frac{18}{18}$ d) $1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{7}{7}$

LINKÖPING STUDIES IN BEHAVIOURAL SCIENCE

207. SOLÍS MARCOS, IGNACIO. Challenges in Partially Automated Driving. A Human Factors Perspective. 2018. ISBN: 978-91-7685-296-5
208. THORSTEN, ANJA. Berättelseskrivande i skolan. Att studera, beskriva och utveckla ett kunnande. 2018. ISBN: 978-91-7685-258-3
209. BREDLÖV, ELEONOR. Shaped for beauty. Vocational and gendered Subjectivities in private education for the beauty industry. 2018. ISBN: 978-91-7685-248-4
210. VESTERGREN, SARA. Psychological change as an outcome of participation in collective action. 2018. ISBN: 978-91-7685-242-2
211. MÖLLER, CLARA. Mentalizing Competence and process. 2018. ISBN: 978-91-7685-189-0
212. GIDHAGEN SÖDERBERG, YLVA. Psychological treatment of Outpatients with substance use disorders in routine care – attachment style, alliance and treatment outcome. 2018. ISBN: 978-91-7685-197-5
213. HAGMAN, WILLIAM. When are nudges acceptable? Influences of beneficiaries, techniques, alternatives and choice architects. 2018. ISBN: 978-91-7685-160-9
214. RAHM, LINA. Educational imaginaries – a genealogy of the digital citizen. 2018. ISBN: 978-91-7685-158-6
215. HALVARSSON LUNDQVIST, AGNETA. Learning Dynamics of Workplace Development Programmes. Studies in Swedish national programmes. 2019. ISBN: 978-91-7685-124-1
216. HOLMQVIST LARSSON, MATTIAS. Rupture and Repair in the Working Alliance: Relation to Psychotherapy Outcome and Within-Session Interaction. 2019. ISBN: 978-91-7685-111-1
217. LINDQVIST, HENRIK. Student teachers' and beginning teachers' coping with emotionally challenging situations. 2019. ISBN: 978-91-7685-078-7
218. GRÖNLUND, AGNETA. Återkoppling i analoga och digitala klassrum. Spänningsfyllda verksamheter i samhällskunskapsundervisning. 2019. ISBN: 978-91-7685-074-9

219. ÅKERBLOM, ERIKA. Utbildning och hälsa i nationens intresse. Styrningsteknologier och formering av en förädlad befolkning. 2019. ISBN: 978-91-7685-053-4
220. ÖSTERBORG WIKLUND, SOFIA. Folkbildning i global (o)rättvisa. Makt och motstånd i folkhögskolans internationalisering och transnationella kurser. 2019. ISBN: 978-91-7519-002-0
221. DAHLIN, MATS. Development and evaluation of an internet-based treatment for generalized anxiety disorder. An acceptance-based approach. 2020. ISBN: 978-91-7929-793-0
222. ERIKSSON, ELISABETH. Återkoppling i lågstadielklassrum. 2020. ISBN: 978-91-7929-769-5
223. KÖPSÉN, JOHANNA. Knowledge in VET curricula and power in society and labour market: Policy and practice:demands-based and employer-driven Swedish higher vocational education. 2020. ISBN: 978-91-7929-768-8
224. SJÖGREN, BJÖRN. Bystander behaviors in peer victimization: Associations with moral disengagement, efficacy beliefs, and student-teacher relationship quality 2021. ISBN: 978-91-7929-728-2
225. PERSSON ASPLUND, ROBERT. Learning how to recover from stress-related disorders via internet-based interventions. 2021. ISBN: 978-91-7929-722-0
226. UCKELSTAM, CARL-JOHAN. Looking into the Future: How to Use Advanced Statistical Methods for Predicting Psychotherapy Outcomes in Routine Care. 2021. ISBN: 978-7929-709-1
227. BERG, MATILDA. Just Know it. The role of explicit knowledge in internet-based cognitive behaviour therapy for adolescents. 2021. ISBN: 978-91-7929-687-2
228. FERM, LISA. Vocational students' Agency in Identity Formation as Industrial Workers. 2021. ISBN: 978-91-7929-653-7
229. ANDERSSON, ULRIKA. Framåtsyftande bedömning i tidig läsundervisning. Teori och praktik. 2021. ISBN: 978-91-7929-646-9

UTBILDNINGSVETENSKAP

Linköping Studies in Behavioural Science, Dissertation No. 230, 2021
Institutionen för beteendevetenskap och lärande

Linköpings universitet
581 83 Linköping

www.liu.se