Linköping Studies in Science and Technology. Theses
No. 1134

Läsa matematiska texter:

Förståelse och lärande i läsprocessen

Magnus Österholm

Linköpings universitet
TEKNISKA HÖGSKOLAN

Matematiska institutionen
Linköpings universitet, 581 83 Linköping

Linköping 2004

Läsa matematiska texter: Förståelse och lärande i läsprocessen

Matematiska institutionen
Linköpings universitet
581 83 Linköping
maost@mai.liu.se

LiU-TEK--LIC--2004:63
ISBN 91-85295-94-9
ISSN 0280-7971

Tryckt av UniTryck, Linköping 2004

Innehåll

Sammanfattning

Denna avhandling behandlar läsning av matematiska texter; hur och vad man förstår och lär sig vid läsningen. Fokus ligger på *läsprocessen*, det vill säga själva läsandet av texten och vad man förstår efter att läst igenom texten. Huvudsyftet är att studera specifika aspekter i läsandet av just *matematiska* texter för att testa och utveckla en befintlig, allmän teori kring läsprocessen. Speciellt studeras användningen av symboler i matematiska texter och hur detta kan påverka läsprocessen. Avhandlingen byggs upp av teoretiska diskussioner kring läsning av matematiska texter samt en empirisk studie bland gymnasieelever och universitetsstuderande.

De teoretiska diskussionerna utgår bland annat från en litteraturstudie kring förekommande påståenden om speciella egenskaper hos matematiska texter, och speciellt diskuteras läsning av symboler och algebraiska uttryck.

Den empiriska studien (med 106 deltagare) använde tre olika texter; en historietext om ryska revolutionen samt två matematiktexter om gruppteori. Matematiktexterna behandlar samma sak om gruppteori, men skillnaden mellan dem är att den ena använder matematiska symboler i sin presentation medan den andra inte alls använder symboler. Varje deltagare fick läsa en utav matematiktexterna samt historietexten, och fick efter varje text besvara frågor om textens innehåll.

Den grupp av personer som läste matematiktexten utan symboler har bättre resultat på frågor om texten än den grupp som läste texten med symboler. Detta verkar kunna bero på oförmåga att artikulera symboler vid läsning av texten samt att avkodningsförmågan inte verkar kunna utnyttjas på samma sätt för texten med symboler som för historietexten eller som för matematiktexten utan symboler. Läsning av matematiska texter med symboler är alltså ganska speciellt och man kan behöva lära sig hur man läser sådana texter. Däremot verkar det finnas många likheter med läsning av matematiktexten utan symboler och historietexten. Det matematiska *innehållet* verkar alltså inte i någon större omfattning påverka läsprocessen, utan hur detta innehåll presenteras är en viktigare aspekt.

I de teoretiska diskussionerna ges förslag på hur läsning av matematiska symboler kan infogas i den allmänna teorin för läsprocessen. Överlag finns dock ingen anledning att se läsning av matematiska texter som någon speciell typ av process som skiljer sig från läsning av andra texter. Den allmänna teorin för läsprocessen kan därmed fungera som teoretisk grund även för läsförståelse av matematiska texter, möjligen med föreslaget tillägg om matematiska symboler.

Abstract

The focus of this thesis is the reading of mathematical texts, especially how and what you can understand and learn from reading. The main interest is *the reading process*, that is, the reading itself and what you understand after reading a text. The main purpose is to study the reading of *mathematical* texts in particular, in order to test and develop an existing general theory of reading comprehension. An essential part is to study how the use of symbols in mathematical texts can affect the reading process. The thesis consists of theoretical discussions about the reading of mathematical texts and an empirical study among students from the Swedish upper secondary school and from the university.

A study of existing literature that deal with properties of mathematical texts constitute a starting point for the theoretical discussions. In particular, the reading of mathematical symbols and algebraic expressions is discussed.

The empirical study, which includes 106 participants, used three different texts: one history text about the Russian revolution and two mathematical texts about group theory. The same information about groups is included in both mathematical texts, but one of the texts uses mathematical symbols in the presentation while the other does not use symbols at all. Each participant read one of the mathematical texts and the history text, and after each text they got to answer questions about the content of the text.

The group of participants who read the mathematical text without symbols has a better result on the questions about the text than the group of participants who read the text with symbols. This seems to be caused by an inability to articulate the symbols and by the fact that the ability to decode a text does not seem to be used in the same way for the text with symbols as it is for the history text and the mathematical texts without symbols. Thus, the reading of mathematical texts with symbols is a rather special activity and there might be a need for learning how to read such texts. On the other hand, there seems to be many similarities between the reading of the mathematical text without symbols and the historical text. Therefore, the main factor of the texts influencing the reading process is not the content of the text but the form of the text, that is, how the content is presented.

In the theoretical discussions, some suggestions are presented on how the reading of mathematical texts with symbols can be included in the general theory of reading comprehension. In general there is no reason to consider the reading of mathematical texts as a special kind of reading process, different from the reading of other types of texts. Thus, the general theory of reading comprehension can function as a theoretical framework also for the comprehension of mathematical texts, possibly with the suggested additions about mathematical symbols.

Kapitel 1

Inledning

1.1 Fokus

Denna avhandling fokuserar på läsning av texter; hur och vad man förstår vid läsning samt hur man lär sig genom att läsa texter. Mer specifikt ligger fokus på läsning av matematiska texter, speciellt i relation till att lära sig matematik. Stora delar av denna avhandling behandlar matematiska texter i allmänhet, det vill säga godtyckliga texter med ett matematiskt innehåll. De matematiska texter som primärt kommer att studeras är dock sådana som är skapade med syfte att användas för att läsaren ska lära sig något från texten, till exempel läroböcker i matematik, eftersom just förståelse och lärande vid läsning kommer att studeras.

Läroboken har en central roll inom matematikutbildning där den kan påverka, eller ibland till och med styra, både innehåll och arbetsmetoder i matematikundervisningen. Gällande gymnasienivå konstaterar Skolverket (2003, s. 28) att ”såväl innehåll, uppläggning som undervisningens organisering styrs av boken i påfallande hög grad”. Läsning bör därmed också ha en central roll inom matematikutbildning. Men om läroboken i stor utsträckning används som en samling uppgifter att lösa är själva läsningen inte en lärandeprocess, utan lösandet av uppgifterna ses som sättet att lära sig matematik. Kanske är det ett sådant fokus på att lösa uppgifter som gjort att mycket av forskning kring läsande inom matematik har reducerat läsningen till ett hinder för lärande (Borasi & Siegel, 1990, 1994). Till exempel kan detta ske genom att till stor del studera hur bristande kunskaper i läsning påverkar lärande inom matematik eller hur man förstår, eller missförstår, uppgiftstexter. Hubbard (1990, s. 265) menar också att ”most of the work on reading mathematics has been directed towards improving problem solving skills”. Men läsande av texter kan också ses som en lärandeprocess i sig, något som fungerar som utgångspunkt i denna avhandling, tillsammans med synen på läsande som en aktiv process där mening konstrueras av läsaren och inte finns färdig i texten för att kunna ”överföras” till läsaren. Fokus kommer alltså inte att ligga på läsning i relation till att lösa uppgifter, utan på förståelse och lärande i själva läsningen av matematisk text.

I första hand avser denna avhandling att studera generella aspekter av läsning av matematiska texter och inte någon speciell åldersgrupp eller skolnivå. Det kan dock finnas ett behov att fokusera på någon specifik och någorlunda homogen grupp av personer, till exempel i en empirisk studie.

Matematikundervisning på gymnasie- och universitetsnivå kan skilja sig åt på många sätt. Matematiken kan i detta steg bland annat sägas förändras ”from *describing* to *defining*, from *convincing* to *proving* in a logical manner based on those definitions” (Tall, 1991, s. 20), det vill säga en övergång från deskriptiv till deduktiv matematik. Skillnader finns därmed mellan läroböcker som används på de olika nivåerna, men också hur läroböckerna används kan förändras i steget från gymnasiet till universitetet. Studenter på universitetet förväntas nog i större utsträckning läsa läroböcker på egen hand för att lära sig:

> At the secondary school level it is assumed that students are instructed verbally and that reading is only really important when students are given written problems in homework assignments or tests. However, at the tertiary level students need to be able to read lecture notes, handouts and textbooks as part of the learning process itself. (Hubbard, 1990, s. 265)

Dock kan det visa sig att studenter sällan använder sig av andra delar i texten än exempel på lösningar av uppgifter (Stephens & Sloan, 1981). Kanske beror detta på att studenterna inte *kan* läsa och använda andra delar av texten på ett för dem gynnsamt sätt. Efter att ha undervisat matematik i tio år på grundskolenivå konstaterar Fuentes (1998) att elever behöver få lära sig att läsa och förstå matematiska texter. Cowen (1991) menar att utbildning inom matematik på universitetsnivå också borde fokusera på att lära studenter att läsa och förstå matematiska texter, och att detta också måste vara en del av examinationen. Att läsning är något som ska ses som en del av vad som menas med kunskap i matematik anser också Niss och Højgaard Jensen (2002), som har karakteriserat matematisk kunskap med hjälp av åtta kompetenser, där en är kommunikations-kompetens som inkluderar förmågan att tolka och förstå matematiska texter.

Mot bakgrund av ovanstående diskussion kring skillnader mellan gymnasie- och universitetsnivå kommer elever i slutet av sin gymnasieutbildning och studenter i början av sin universitetsutbildning att studeras i denna avhandling. Avsikten är dock i första hand att studera generella aspekter av läsning, och inte något specifikt för matematik på gymnasie- och universitetsnivå.

1.2 Bakgrund

Innan arbetet med denna avhandling påbörjades, genomfördes två studier som fungerar som bakgrund till och som har lett fram till det som kommer att behandlas i denna avhandling.

Inledningsvis genomfördes ett pilotprojekt kring det beskrivna fokuset att läsa matematiska texter, bland elever på sista året på gymnasiet (Österholm, 2003). Studien var av utforskande karaktär med en öppen frågeställning och med syfte att studera gymnasieelevernas läsning av och diskussion kring en matematisk text hämtad från en inledande kurs på universitetsnivå, för att kunna generera problem eller frågeställningar att gå vidare med i fortsatt forskning. Resultatet i denna studie visade relativt stor påverkan av mer allmänna faktorer inom matematik i lässituationen, såsom ett starkt fokus på givna exempel i texten att använda för att lösa uppgifter, och inte nödvändigtvis på att förstå hela texten. Den huvudsakliga frågan från denna studie blev därför hur man skulle kunna separera dessa mer allmänna faktorer för att kunna studera vad som är speciellt med själva läsningen.

Nästa studie begränsades därför till själva *läsprocessen*, det vill säga situationen då man bara läser igenom en text en gång (Österholm, 2004). En första genomläsning fungerar alltid som utgångspunkt i efterföljande användning av eller diskussion kring texten, och därmed är det av intresse att se hur och vad man förstår från detta. I denna studie användes en teoribildning kring den förståelse-process som är aktuell i läsprocessen (Kintsch, 1998) för att kunna tydliggöra olika aspekter av läsförståelsen. För att studera olika aspekter av matematikämnet användes också olika typer av matematiktexter, dels texter med mer eller mindre användning av symboler och dels texter som antingen förklarade ett begrepp (absolutbelopp) eller en procedur (partialbråksuppdelning). Resultatet i denna studie visade en mycket viktig aspekt i användningen av symboler i texter, eftersom elever fokuserade på symbolerna i texten samtidigt som de såg läsning av symboler som en svårighet.

1.3 Övergripande syfte och metod

I detta avsnitt beskrivs ett övergripande syfte med hela denna avhandling, tillsammans med en beskrivning av de metoder som används för att uppnå detta syfte. Ett mer specifikt syfte med den empiriska studien, som är en del av avhandlingen, ges i kapitel 4.

Som tidigare beskrivits ligger fokus i denna avhandling på läsning av matematiska texter. Detta kommer dock att begränsas till studier kring *läs-processen*, det vill säga situationen då man bara läser igenom en text, utan att bearbeta eller diskutera texten mer ingående. Som nämnts tidigare är denna process av intresse eftersom en första genomläsning alltid fungerar som utgångs-punkt i användning av texter. Detta inkluderar även läsning av uppgiftstexter där resultatet från läsprocessen påverkar hur läsaren sedan går vidare med att lösa uppgiften. Möllehed (2001) konstaterar att det överlag vanligaste felet då elever i grundskolans årskurser fyra till nio löser uppgifter beror på brister i det han kallar textförståelse. I denna avhandling kommer dock inte uppgiftstexter att studeras. Istället ligger fokus på läsning av längre texter som beskriver och förklarar något, där ingen given uppgift finns att lösa, och syftet är att studera hur och vad läsaren förstår och lär sig i läsprocessen.

Syftet med denna avhandling kan sägas att till största del vara av teoretisk karaktär, genom att det primära är att studera specifika aspekter i läsandet av *matematiska* texter för att kunna testa och utveckla befintliga teorier kring läsprocessen. Begränsningen till att endast studera läsprocessen gör det naturligt att främst ha ett teoretiskt syfte eftersom en genuin lässituation inte är begränsad till läsprocessen. Denna avhandling kan också ses som en grund för fortsatt forskning om läsande av matematiska texter där mer genuina situationer studeras. Där kan ett mer pragmatiskt syfte finnas genom att resultat från denna forskning till exempel kan fungera som hjälp i undervisningssituationer där läsning av matematiska texter har en central roll eller i utformning av texter att användas inom matematikutbildning.

I denna avhandling ses två aspekter av matematik och matematiska texter som de mest specifika och centrala. För det första kan man se symbolanvändandet som ett av matematikens mest centrala kännetecken (Pimm, 1989; Woodrow, 1982), och användning av symboler i matematiska texter kommer att studeras i denna avhandling. För det andra kan man göra en distinktion mellan texter som beskriver och förklarar begrepp eller egenskaper samt texter som beskriver en typ av procedur eller algoritm, en distinktion som också kan täcka mycket av matematiken som helhet (Hiebert, 1986). Därför kommer begrepps- respektive procedurförklarande texter att studeras i denna avhandling. För att studera vad, om något, som är speciellt med att läsa matematiska texter kommer dessa också att jämföras med och relateras till andra typer av texter.

Både empiriska och teoretiska studier kommer att användas för att uppnå syftet med denna avhandling. Att få med alla aspekter i en enda studie är alltför komplicerat och i princip praktiskt omöjligt, något som gör det nödvändigt att göra vissa begränsningar och att studera vissa aspekter empiriskt och andra teoretiskt. Den empiriska studien kommer därför att begränsas till begreppsförklarande texter inom olika ämnen, inklusive matematiska texter, där också symbolanvändningen kommer att studeras. Teoretiska studier, som kommer att utgå från och bygga på resultat från annan forskning, kommer att fokusera på vad som är speciellt med matematiska texter och läsning av dessa, symbolanvändningen i matematiska texter samt likheter och olikheter mellan läsning av begrepps- respektive procedurförklarande texter.

1.4 Disposition

Kapitel 2 innehåller en teoretisk bakgrund till studierna i denna avhandling. Här behandlas allmänna aspekter av läsprocessen, där mycket hämtas från Kintschs (1998) teori kring de förståelseprocesser som är aktiva i läsprocessen. Här görs ingen direkt koppling till matematiska texter, men den typ av förståelseprocess som är aktuell kopplas till matematikämnet och matematikdidaktisk forskning på olika sätt.

I kapitel 3 behandlas specifika aspekter av matematiska texter och hur dessa påverkar läsprocessen. Detta görs med utgångspunkt från behandlingen i kapitel 2 tillsammans med resultat från annan forskning som behandlat just matematiska texter. Detta kapitel utgör den teoretiska studien i denna avhandling, där teoretiska modeller för läsprocessen används, granskas och justeras eller specificeras för att också försöka täcka det som är specifikt med matematik och matematiska texter.

Behandlingen i kapitel 3 fungerar också som bakgrund till den empiriska studien som behandlas i kapitel 4, där till exempel vissa delar från kapitel 3 kommer att studeras också empiriskt. I kapitel 4 görs en detaljerad beskrivning av syfte och metod för den empiriska studien.

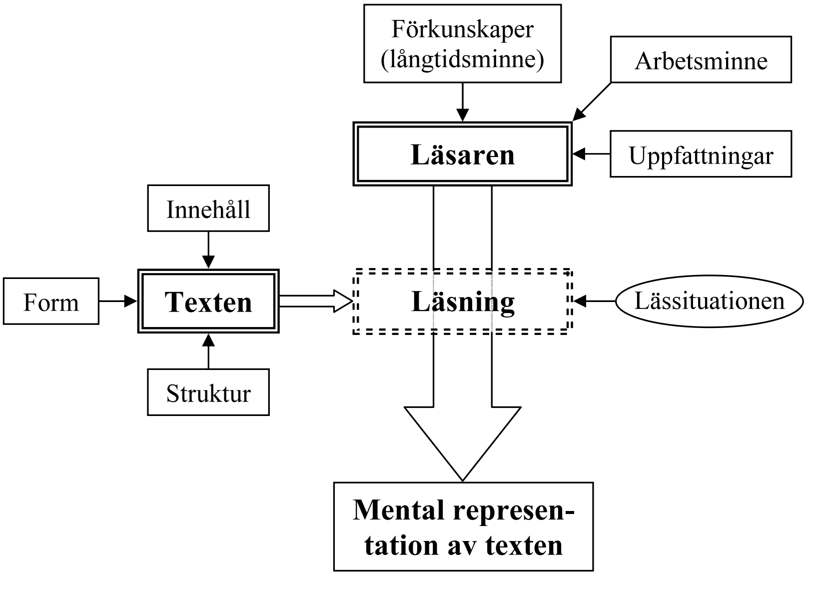
Kapitel 3 och 4 kan ses som separata delstudier där resultat och analyser diskuteras i respektive kapitel. Kapitel 5 inleds med diskussioner kring de slutsatser som kan dras från kapitel 3 och 4, för att sedan med utgångspunkt från det övergripande syftet med hela denna avhandling behandla mer övergripande slutsatser.

Kapitel 2

Läsprocessen

2.1 Grundmodellen

Som utgångspunkt beskrivs här något som kan kallas en grundmodell för läsprocessen, se figur 1. Med denna modell görs ett försök att överblicka och strukturera relevanta aspekter av text och läsare som är aktiva i och kan påverka läsprocessen. Dessa kommer att diskuteras mer noggrant i detta avsnitt, tillsammans med lässituationen. Man kan säga att texten och läsaren möts i läsprocessen, där en sorts förändring av läsaren sker (som symboliseras av den vertikala pilen från läsaren i figur 1) då en mental representation av texten skapas. Med mental representation avses hur läsaren förstår och uppfattar texten. Denna



Figur 1. *Grundmodell för läsprocessen.*

förståelse (dvs. den mentala representation) byggs upp kontinuerligt vid läsning av texten och behöver inte bara studeras som en slutprodukt. I den här avhandlingen är de viktigaste delarna i läsprocessen just själva läsningen och det som är typiskt för denna kognitiva process samt resultatet av denna process, den så kallade mentala representationen. Dessa delar behandlas mer noggrant i avsnitt 2.2 och 2.3. Med *läsprocessen* avses här hela situationen då man läser igenom en text, inklusive den resulterande mentala representationen. Ibland kan man dock avse endast själva läsandet av texten och hur förståelsen byggs upp, där man alltså lägger fokus på läs-*processen*. Det bör dock aldrig vara risk för att förväxla dessa olika användningar av begreppet; anges det inte explicit vilken betydelse som avses, ges betydelsen av sammanhanget.

2.1.1 Texten

Endast allmänna aspekter av texten kommer att tas upp här. Specifika skillnader mellan olika ämnen och olika typer av texter, med fokus på matematiska texter, behandlas i kapitel 3. De aspekter av texter som diskuteras här ska heller inte ses som heltäckande, till exempel behandlas inte alls texters typografi, som dock också kan tänkas påverka läsprocessen (Hallberg, 1992).

Textens *innehåll* avser dels vilket ämnesområde texten behandlar och dels mer detaljerat om vad texten beskriver eller förklarar. Detta avser alltså *vad* som presenteras och inte *hur* något presenteras. Innehållet kan beskrivas på olika nivåer beroende på vad beskrivningen ska användas till och det kan bland annat handla om vad enstaka meningar eller stycken beskriver eller mer övergripande vilket ämne hela texten behandlar. I denna avhandling fokuseras till exempel på texter med ett matematiskt innehåll, och till viss del speciellt matematik på universitetsnivå.

Textens form och struktur handlar om *hur* något presenteras i texten. Textens *form* kan sägas behandla texten som helhet och på vilket sätt innehållet förs fram i texten. Dels kan detta handla om en sorts retorik eller hur författaren av texten adresserar läsaren. Fauvel (1988, s. 25) diskuterar till exempel skillnaden mellan ”Cartesian and Euclidean Rhetoric”, som ger exempel på helt olika ”reader-writer relations”. Beskrivningar av texter som förklarande, berättande, övertygande eller auktoritär kan sägas handla om en texts form. Speciellt för matematiska texter kan också mer eller mindre användning av symboler sägas handla om textens form. Följande två påståenden har därmed samma innehåll men olika form:

- $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$
- För alla reella tal x gäller att absolutbeloppet av x är större än eller lika med noll.

Textens *struktur* handlar om textens uppbyggnad, hur olika delar och meningar i texten relateras till varandra, för vilket man kan prata om koherens: ”Text coherence is the extent to which the relationships between ideas in a text are explicit” (McNamara, 2001, s. 51). Man kan skilja mellan mikro- och makrostruktur, med tillhörande lokal respektive global koherens. Mikrostrukturen berör textens detaljer mening för mening, och lokal koherens behandlar sammanhang mellan enstaka efterföljande meningar eller delar av meningar. Den lokala koherensen byggs upp genom att meningar bygger vidare på föregående mening, och refererar på något sätt till denna. Till exempel kan detta ske genom att relationen mellan meningarna är explicit i texten via ord som *eftersom* eller *därmed,* eller att ett gemensamt ord används i meningarna. Kintsch (1998, s. 39) benämner dessa direkt koherens (explicit relation) respektive indirekt koherens (gemensamt ord). Makrostrukturen syftar mer på texten som helhet och sammanhang mellan olika delar av texten som bygger upp helheten. Sådant kan i texter signaleras genom till exempel underrubriker och styckeindelningar men också genom att texten uttryckligen beskriver dess makrostruktur. För både mikro- och makrostrukturen spelar förkunskaper en viktig roll för att upprätthålla en hög koherens vid läsning, eftersom en text aldrig är fullständigt koherent. Förkunskaper kommer att diskuteras mer i avsnitt 2.1.2, då läsaren är i fokus.

Många studier har på olika sätt och för texter inom olika ämnen[1] fokuserat på hur texters koherens påverkar läsförståelsen. Det har visat sig, kanske som förväntat, att en högre koherens kan hjälpa läsaren, men också att läsare med hög förkunskap inom det område texten behandlar kan gynnas av en text med lägre koherens (McNamara, 2001; McNamara et al., 1996; McNamara & Kintsch, 1996). Dessa resultat kommer också att diskuteras i avsnitt 2.2.2, där resultatet av läsningen i form av den mentala representationen behandlas.

Behandlingen av texters innehåll, form och struktur är inget som avser få med alla tänkbara aspekter av texter, utan syftet är att lyfta fram *vissa* aspekter, som har relevans för arbetet i denna avhandling. De tre diskuterade aspekterna är inte heller helt oberoende, det vill säga att det inte alltid går att hålla två konstanta och endast ändra den tredje. Till exempel kan mycket gemensamt finnas för textens form och dess makrostruktur genom att båda behandlar textens utformning som helhet. Att dra gränsen för när förändringar i form eller struktur också påverkar innehållet är nog inte heller alltid enkelt.

En egenskap hos texter som ibland diskuteras är så kallad läsbarhet (eng. 'readability'), som ibland också beräknas med formler för att på ett mer objektivt sätt kunna jämföra en sorts svårighetsgrad hos texter (se t.ex. Melin, 2004; Newton & Merrell, 1994; Shuard & Rothery, 1984; där de två sista också innehåller speciella formler för matematiska texter). ”[Such formulas] deal only with relatively superficial surface variables, primarily word frequency and sentence length” (van Dijk & Kintsch, 1983, s. 45). Att på detta sätt mäta texters läsbarhet utan koppling till läsaren, kritiseras av Pimm (1987), främst eftersom detta

[1] Vissa har använt historiska texter (t.ex. Britton & Gülgöz, 1991; Linderholm et al., 2000; McNamara & Kintsch, 1996; Vidal-Abarca et al., 2000) eller texter inom naturvetenskapliga ämnen (t.ex. McNamara, 2001; McNamara et al., 1996; Vidal-Abarca & Sanjose, 1998).

grundar sig på synsättet som finns hos bland annat Shuard och Rothery (1984, s. 1) att läsning är ”getting the meaning from the page”, ett synsätt som inte heller överensstämmer med utgångspunkterna i denna avhandling. Att man inte på något sätt tar med läsaren i beräkningar av läsbarhet kan också göra att man automatiskt anser att lättare texter alltid är bättre, något som inte alltid behöver vara sant, som konstaterades i samband med diskussionen om koherensen i texter. Utan att behandla en specifik läsare så kan man införa vissa aspekter av texten som relaterar denna till själva läsprocessen, vilket van Dijk och Kintsch (1983) har gjort i utvecklingen av sin modell, som dock inte primärt har som syfte att fungera som formel för läsbarhet.

2.1.2 Läsaren

Uppdelningen i korttidsminne (primärt minne) och långtidsminne (sekundärt minne) är grundläggande inom kognitiv psykologi[2]. En persons långtidsminne (LTM[3]) kan sägas bestå av ”everything a person knows and remembers” (Kintsch, 1998, s. 217). Vid läsning av en text används olika typer av förkunskaper, till exempel en sorts allmän språklig kunskap som behövs för att över huvud taget kunna läsa, samt mer specifik kunskap relaterat till innehållet i texten som läses. Man kan inte ha allt från LTM i medvetandet samtidigt, och korttidsminnet kan sägas bestå av det som för tillfället är i medvetandet hos en person. LTM kan i praktiken anses ha obegränsad kapacitet, till skillnad från korttidsminnet som är starkt begränsat (Miller, 1956)[4]. Ibland görs ingen distinktion mellan korttidsminne och så kallat arbetsminne, som kan sägas bestå av det som används för att klara av den situation man befinner sig i, till exempel läsning av en text. Men som tidigare nämnts används flera olika typer av kunskaper i läsprocessen, som omöjligen samtidigt kan få plats i korttidsminnet: ”Within the standard working-memory framework, it is not possible to explain how memory is used in many cognitive tasks, such as playing chess or text comprehension” (Kintsch et al., 1999, s. 187). Istället för att likställa korttidsminne och arbetsminne kan korttidsminnet sägas utgöra en del av arbetsminnet, och att ”working memory [also] involves a long-term component” (Kintsch, 1998, s. 219). Men eftersom denna del av arbetsminnet utnyttjar LTM krävs omfattande förkunskaper relaterat till den uppgift man genomför, för att kunna utnyttja denna komponent av arbetsminnet fullt ut. I läsprocessen kan till exempel vissa språkliga förkunskaper, såsom betydelsen av vanliga ord och meningsbyggnader, vara en del i arbetsminnets

---

[2] Det finns en mängd litteratur som behandlar olika aspekter av minnet (se t.ex. Ashcraft, 1994).

[3] Några begrepp kommer att användas frekvent i denna avhandling, därför införs förkortningar för dessa.

[4] Millers (1959) magiska tal, att man får plats med 7±2 ”informationsbitar” (eng. ’chunks’) i korttidsminnet, har dock ändrats med tiden och en mer aktuell uppskattning är fyra bitar (Kintsch, 1998).

långtidskomponent. Dessa kunskaper finns alltså inte nödvändigtvis i korttidsminnet och behöver alltså inte vara i medvetandet hos läsaren, men som del i arbetsminnet kan dessa kunskaper användas på ett mer omedvetet sätt i läsprocessen[5]. Trots möjligheten att utnyttja LTM kan begränsningar i arbetsminnet uppstå eftersom utnyttjande av LTM kräver omfattande relevanta förkunskaper. Så kallad 'cognitive load theory' kan sägas behandla just denna begränsning av arbetsminnet (se t.ex. Kirschner, 2002), även om olika utgångspunkter ibland används kring relationen mellan arbetsminne och korttidsminne, eller om minnets struktur och olika typer av kognitiva processer. Mer om minnets struktur samt dess funktion i läsprocessen tas upp i avsnitt 2.3 respektive 2.4.

Flera olika typer av uppfattningar hos läsaren kan tänkas påverka läsprocessen. I denna avhandling studeras läsandet bland annat i förhållande till att lära sig något genom att läsa en text, och en läsares uppfattningar om kunskap och lärande kan därmed vara relevanta i lässituationen. Säljö (1995, ss. 120-121) drar till exempel slutsatsen att läsarens ”subjektivt logiska bild av *vad* kunskap är och *hur* man lär *utgör en förutsättning för och en begränsning av de försök att förstå som antas vara lämpliga när man närmar sig en text med avsikten att lära*”. Resultat från Schommer et al. (1992, s. 441), som studerade läsning av matematisk text, påvisar ett liknande förhållande: ”Belief in simple knowledge is negatively associated with comprehension.” Uppfattningar kan också handla mer specifikt om det ämne som texten behandlar och textens innehåll. Resultat från Crawford et al. (1994, s. 331) påvisar ”a structural relationship between students' conceptions of mathematics and their approaches to learning it, with a majority of students viewing mathematics as a necessary set of rules and procedures to be learned by rote”. Österholm (2004) noterar en annan specifik aspekt för matematik, att studenter verkar betrakta algebraiska uttryck och symboler som det väsentliga i matematiska texter, något som naturligtvis kan påverka läsprocessen.

Inom det som här kallas uppfattningar kan också läsarens intresse för textens ämne placeras. Vissa resultat (Schiefele, 1996) visar dock ingen entydig påverkan av intresse på läsningen, utan olika typer, eller nivåer, av förståelse och lärande påverkas olika. En tendens finns dock att läsare med lågt intresse, oberoende av förkunskaper, ”assimilate the text in a superficial manner” (s. 13) och att läsare med högt intresse bättre fångar textens betydelse.

2.1.3 Lässituationen

De faktorer hos texten och läsaren som hittills behandlats är inte specifika för en given lässituation, utan kan ses som mer beständiga faktorer, som till exempel kan

[5] ”There is a continuum between some processes where LTWM [long-term working memory] is incidental, as in text comprehension or chess, and other processes where it is intentional, as in the case of the retrieval structures used in mnemonic techniques” (Kintsch et al., 1999, s. 190).

undersökas innan själva läsningen. Det finns dock vissa, mer eller mindre tillfälliga, aspekter av den specifika lässituationen som också kan påverka läsprocessen. Det kan dels handla om externa faktorer, såsom vilken miljö läsaren befinner sig i, med mer eller mindre störande omgivning eller annat som kan påverka läsarens koncentration och agerande. Läsaren kan dessutom känna sig mer eller mindre motiverad för att läsa texten i den givna situationen, något som kan vara speciellt viktigt att tänka på i sådana forskningsstudier där läsningen inte genomförs på initiativ av läsaren utan där uppgiften är speciellt utformad för undersökningen. Syftet med läsning kan också tänkas påverka läsprocessen, till exempel om man läser en text för att efteråt kunna berätta om och förklara innehållet för någon annan, eller om man läser för att (snabbt) få en överblick över innehållet. Detta är också något som kan vara viktigt i forskningsstudier avseende vilka instruktioner och vilken information läsaren får.

2.2 Mentala representationen

Läsning av en text skapar hos läsaren en mental representation av texten, som beskriver hur läsaren förstår denna text. Innan denna mentala representation diskuteras mer detaljerat behövs en generell modell för den mentala strukturen, det vill säga en modell för hur information lagras i minnet. Detta handlar inte om hur hjärnan faktiskt är uppbyggd, utan det väsentliga för denna avhandling är en modell för hur minnen lagras och struktureras, som överensstämmer med observationer av mänskligt agerande i stort och speciellt med forskning kring förståelse och lärande samt i förlängningen läsförståelse och lärande genom att läsa.

2.2.1 Mental struktur

Kintsch (1998) diskuterar olika typer av mentala representationer samt olika sätt att modellera den mentala strukturen, och han använder själv *nätverk av propositioner* som modell i sin teori:

> The various knowledge representations […] all have their strengths and all have their uses, but none of them is sufficient for our purposes by itself […]. Networks of propositions provide an alternative that combines and extends their advantages and avoids some of their limitations. (Kintsch, 1998, s. 37)

Propositioner består av ett predikat tillsammans med ett eller flera argument, som i sig kan bestå av propositioner vilket gör det möjligt att representera mer komplexa strukturer. Detta kan i skrift representeras som PREDIKAT[ARGUMENT, ARGUMENT,…]. Att ”Maria gav boken till Johan” kan då till exempel representeras som GE[MARIA,BOK,JOHAN]. En styrka, speciellt viktig då läsprocessen studeras, med att använda propositioner för att bygga upp den mentala strukturen är att texter på ett naturligt sätt kan representeras på samma sätt, något som förenklar modellering av läsprocessen. För en mer detaljerad beskrivning av denna modell, inklusive exempel på empiri som stöder teorin samt diskussion kring fördelar och begränsningar med denna teori hänvisas till Kintsch (1998). I denna avhandling tas Kintschs modell som utgångspunkt för det fortsatta arbetet.

I Kintschs modell ses den mentala strukturen som ett *associativt nätverk* som byggs upp av *propositioner*. Ett associativt nätverk består av sammankopplade noder, där länkarna mellan noderna ”are unlabeled and vary in strength” (Kintsch, 1998, s. 74). En nod kan utgöras av ett begrepp eller en proposition, där propositioner antas utgöra byggstenarna i vissa kognitiva processer, såsom läsprocessen. Noderna kan ha ytlig karaktär (t.ex. genom att representera ett specifikt ord) eller vara mer abstrakta representationer av betydelser, något som propositioner kan sägas göra genom att inte ta med alla ytliga aspekter av till exempel vissa meningar:

> The choice of which sentence properties to represent in the propositional notation is pragmatic: Whatever seems of little importance for a given theoretical or experimental purpose is omitted. Hence, significant differences may be found in the explicitness and completeness of propositional representations constructed for different uses. (Kintsch, 1998, s. 39)

Detta kan ses som ganska naturligt eftersom alla aspekter av kunskap och texter inte är relevanta i alla situationer, och går inte heller att få med i en enda typ av representation.

En viktig aspekt av nätverket i den mentala strukturen är att det ses som *associativt.* I detta associativa nätverk får begrepp sin betydelse genom de länkar som finns till närliggande noder. Eftersom antal länkar i långtidsminnet till en viss nod är fler än som får plats i korttidsminnet (dvs. i medvetandet) kommer betydelsen att variera beroende på vilka kopplingar som ”tas med” till korttidsminnet, något som påverkas av situationen. Därmed kan sägas att betydelse *skapas* i varje situation, och det finns alltså inget fixt lexikon i minnet där ords betydelse mentalt slås upp. Detta uppvisar likheter med det Vinner (1991) kallar ’concept image’, med vilket avses det en viss person associerar till ett visst begrepp, som också kan vara olika i olika situationer (även om Vinner sedan behandlar ’concept definition’ som en speciell typ av association som inte är en del av ’concept image’).

En aspekt av det associativa nätverket är att strukturen är ganska oorganiserad, till skillnad från andra modeller som till exempel utgår från att strukturen byggs upp av scheman (som här fungerar som samlingsnamn för ’scripts’, ’frames’ eller liknande), som gör strukturen mer ordnad och logiskt uppbyggd. Det finns också empiriska undersökningar som påvisar existensen av sådana scheman, men:

> Scripts are not fixed, fully elaborated, preexisting knowledge structures that merely need to be retrieved for use. Instead, only the raw material for constructing a script is part of the knowledge net: a script-proposition that

> can function as a frame for other, contextually appropriate, associated information in the knowledge network. (Kintsch, 1998, s. 83)

I det associativa nätverket sker lärande i princip genom att noder eller länkar mellan noder skapas eller försvinner, eller att styrkan på befintliga länkar förändras. Lärande i förhållande till läsning kommer att diskuteras mer i nästa avsnitt.

2.2.2 Mental representation av text

Vid läsning av en text förändras det associativa nätverk som utgör långtidsminnet, och man skapar därmed en förståelse av textens innehåll. För att bättre kunna karakterisera denna förståelse kan man skilja mellan tre komponenter, eller nivåer, av den mentala representationen av text (se t.ex. Kintsch, 1998); ytlig, textbaserad samt förkunskapsbaserad komponent (eng. 'surface component', 'textbase' respektive 'situation model'). Dessa komponenter ska dock inte ses som separata delar av den mentala representationen eftersom denna ses som en enhetlig struktur, men de tre komponenterna används för att beskriva olika aspekter av den mentala representationen. Dessa aspekter beskriver relationer mellan en given text och den mentala representationen, och kan därmed inte direkt användas för att beskriva mentala representationer i allmänhet.

En *ytlig komponent* av den mentala representationen skapas då ord och meningar i sig, tillsammans med rent språkliga associationer dem emellan representeras, och inte *betydelsen* av orden eller meningarna. När man läser en text skriven i ett obekant språk begränsas man till exempel helt till en ytlig representation av texten. Men även i situationer då man förstår mer av textens innehåll finns en ytlig komponent i representationen eftersom ”it is generally the case, that at least some of the exact words and phrases are remembered” (Kintsch, 1998, s. 105).

Man kan dock komma ihåg mycket av en texts innehåll utan att komma ihåg exakt vilka ord och meningar som användes i texten. Den *textbaserade komponenten (TB)* består av ett nätverk som representerar textens innehåll i form av dess betydelse, som ”consists of those elements and relations that are directly derived from the text itself […] without adding anything that is not explicitly specified in the text” (Kintsch, 1998, s. 103). En noggrann textanalys skulle resultera i en sorts ”komplett” TB, och representation med hjälp av nätverk av propositioner kommer här in som ett naturligt verktyg[6]. En komplett TB skapas dock vanligen aldrig av en läsare, men att till exempel kunna återberätta delar av en text ”med egna ord” kan sägas påvisa delar av en skapad TB.

Även en komplett TB kan vara ”an impoverished and often even incoherent network” (Kintsch, 1998, s. 103), eftersom detta nätverk endast innehåller sådant som *explicit* anges i texten. Vid läsning av texter behövs därför olika typer av

[6] Kintsch (1998, ss. 60-65) ger ett exempel på en sådan analys av en kortare text.

förkunskaper för att kunna skapa en mer sammanhängande mental representation. Detta kan vara förkunskaper av olika typer, från språkliga till mer specifika för innehållet i en given text. *Förkunskapsbaserad komponent (FB)* kallas den del av representationen som integrerar delar från TB med förkunskaper. Skulle en text vara i princip helt koherent skulle alltså ingen speciell förkunskap behövas för att skapa en sammanhängande mental representation, som då skulle vara en ren TB. Mindre koherenta texter kräver dock vissa förkunskaper, och om dessa finns tillgängliga hos läsaren kan möjligen den skapade FB vara mer utvecklad än motsvarande skapad TB för den mer koherenta texten. Detta kan vara ett sätt att tolka resultatet från till exempel McNamara (2001) samt McNamara och Kintsch (1996) om att texter med lägre koherens kan gynna personer med bättre förkunskaper.

Den mentala representationen består i princip alltid av en kombination av alla dessa tre komponenter men i olika proportioner. Kintsch (1998, ss. 104-105) hänvisar till två studier som visar två extremfall, den ena där personers mentala representationer domineras helt av TB med avsaknad av FB och den andra där FB dominerar och med avsaknad av TB, där personer inte hade något minne av texten i sig men kunde besvara frågor som uppenbarligen krävde information från texten.

Om inga kopplingar skapas mellan den mentala representationen av texten och befintlig struktur i långtidsminnet, det vill säga om ingen FB skapas, verkar det orimligt att påstå att läsaren har lärt sig något från texten. Minnet av texten begränsas nämligen då till själva lässituationen och innehållet i texten kommer endast att (delvis) kunna reproduceras och inte användas i andra situationer (Kintsch, 1994, s. 294). Att lära sig något från en text handlar därmed till stor del om skapandet av en FB i den mentala representationen, och skillnaden mellan TB och FB kan delvis sägas handla om skillnaden mellan att förstå en text och att lära sig från en text. Dock kan det vara värt att upprepa att även en omfattande TB kan vara fragmentarisk och osammanhängande, och om den mentala representationen begränsas till en sådan TB kan läsarens förståelse för texten också vara mycket bristfällig. Uppdelningen i de tre komponenterna är endast ett verktyg för att beskriva och analysera den mentala representationen, och när man diskuterar en läsares *förståelse* för en text bör egentligen den mentala representationen som helhet avses.

Distinktionen mellan TB (möjligen inklusive ytlig komponent) och FB uppvisar vissa likheter med distinktioner mellan yt- och djupinriktning samt mellan atomistiskt och holistiskt förhållningssätt. Skillnaden mellan yt- och djupinriktning beskrivs av Marton och Säljö (1995, s. 61) som att ”de studerande *inriktade sig på texten i sig eller på vad texten handlade om; författarens avsikt, huvudpoängen, slutsatserna*”. I detta citat blir dock en skillnad mellan dessa distinktioner tydlig eftersom Marton och Säljö pratar om vad *läsaren inriktar sig på* medan distinktionen mellan TB och FB avser aspekter av den mentala representationen. Men Marton och Säljö diskuterar också både ”processen” och ”utfallet” samt samband mellan dessa, där utfallet kan sägas motsvara den mentala representationen. Någon mer detaljerad behandling och jämförelse mellan dessa teorier görs dock inte här. Hur processen och utfallet behandlas utgör också en skillnad mellan distinktionerna yt/djup och atomistisk/holistisk men definitioner av begreppen uppvisar likheter (Marton & Säljö, 1995), där till exempel ett atomistiskt förhållningssätt handlar om ”att inrikta sig på särskilda jämförelser inom texten, på textens disposition, men inte på de viktiga avsnitten, minnas detaljer” (s. 65).

2.3 Kognitiva processen

Olika typer av kognitiva processer kan vara aktiva i olika situationer, men även om man begränsar sig till läsning av texter kan olika kognitiva processer vara aktuella. Graesser et al. (2002, s. 9) gör en uppdelning av olika typer av kognitiva processer relaterade till läsning, som bygger på Blooms taxonomi. En annan uppdelning kan göras med avseende på hur medveten man är om processen. Observera att denna distinktion handlar om *processen*, medan man alltid antas vara medveten om *resultatet* av processen. Perception och problemlösning kan ses som extremfallen på denna skala av medvetenhet, där perception ses som en helt automatisk och omedveten process medan problemlösning handlar om en aktiv och medveten process. När du till exempel ser en hund och direkt känner igen det som just en hund handlar det om perception där du är medveten om resultatet av den kognitiva processen, att du ser en hund, men inga aktivt medvetna tankeprocesser behövdes för detta. Skulle du däremot möta en person du känner igen (perception) men inte kommer ihåg namnet på, aktiveras en mer problemlösningslik process när du aktivt försöker komma ihåg personens namn.

Vid läsning av texter kan processer liknande både perception och problemlösning vara aktiva. Men för en läsprocess där man inte upplever några direkta problem att förstå vad man läser, har processen mer gemensamt med perception än med problemlösning eftersom själva förståelse-*processen* är omedveten och automatisk. Läsprocessen är representativ för Kintschs teori för ’comprehension’, förståelseprocessen, som ligger ”somewhere along that continuum between perception and problem solving” (Kintsch, 1992, s. 144). Kintschs teori kan sägas definiera *förståelse* (eng. ’comprehension’) som denna typ av kognitiv process, som alltså är mer generell än en teori för läsprocessen, eftersom:

> it is a psychological process theory. That is, it is concerned with the mental processes involved in acts of comprehension – not primarily with the analysis of the material to be comprehended. Applied to text comprehension, this means that it is not a theory of text structure, or a text analysis. The text structure is only indirectly important, in that it is one determinant of the comprehension process and therefore of the product of this process: the mental representation of the text and actions based on this construction. (Kintsch, 1998, ss. 3-4)

På liknande sätt kan de aspekter av texten, läsaren och lässituationen som diskuterades i avsnitt 2.1 sägas utgöra förutsättningar för läsprocessen, men det är hela tiden samma kognitiva *process* som är aktiv, nämligen den som beskrivs av Kintschs teori, och som behandlas mer i avsnitt 2.3.1. Skulle man som läsare uppleva problem med att förstå det man läser kan dock aktiva och medvetna problemlösningsprocesser aktiveras för att försöka reparera denna brist i förståelsen. Denna aktivering är kopplad till så kallade metakognitiva processer, där en ”process of *comprehension monitoring* determines […] whether discrepancies or gaps in understanding are detected, and whether readers repair these problems appropriately” (Graesser et al., 2002, s. 11). Den metakognitiva processen borde också kunna vara både omedveten och medveten samt att den process som aktiveras för att reparera problemen även den kan vara omedveten (som en del i förståelseprocessen) eller medveten (problemlösning). Dessa metakognitiva aspekter av läs- och förståelseprocessen kommer dock inte att behandlas mer ingående i denna avhandling.

Kintschs teori behandlar alltså mer generella kognitiva processer än just läsprocessen, och användningsområdet för denna teori kan innefatta många olika situationer. Kintsch (1998, s. 3) menar till exempel att ”comprehension provides a good paradigm for areas of cognition that have not traditionally been viewed from this vantage point (e.g., […] action planning, which is usually treated as problem solving)”. Studier har också testat Kintschs teori i sådana situationer (t.ex. Kitajima & Polson, 1995; Mannes & Kintsch, 1991), och resultaten gör att man kan fråga sig:

> Where is the boundary between comprehension and problem solving? […] we certainly have here a reversal from the days when text researchers were enjoined to look at text understanding as a process of problem solving. Instead, we can now look at planning and decision making as a comprehension process! (Kintsch, 1998, ss. 392-393)

Inom matematikdidaktisk forskning fokuseras mycket på problemlösning men kanske kan det finnas vinster i att också betrakta förståelseprocessen som en viktig del av verksamhet inom matematik och matematikutbildning. Davis (1984) berättar till exempel om en person (S) som löser en uppgift kring kongruensrelationer med hjälp av en befintlig mental representation för en gammal uppgift (M):

> S. had had in his memory a good representation structure for the ‘M’ problem; unconsciously […] he had mapped the new problem onto this representation […], saw that it could fit with one small adjustment – and had the desired result right there! S. had done this unconsciously, but had been able to reconstruct some of the process by determined introspection afterwards. (Davis, 1984, s. 207)

Eftersom detta inte handlar om en applicering av någon känd procedur eller algoritm kan denna lösning varken sägas vara en lösning av en rutinuppgift eller problemlösning, utan ett sorts mellanting där förståelseprocessen verkar vara aktiv, eller till och med dominerande. Även lösning av rutinuppgifter kan tänkas domineras av förståelseprocessen eftersom denna situation kan ha många likheter med vad Mannes och Kintsch (1991) studerade kring så kallad 'action planning'.

Beskrivningar av intuition inom matematikdidaktisk forskning (Fischbein, 1987) påvisar en mycket stor likhet med den förståelseprocess som diskuteras här:

> The details are eliminated at the conscious level. The sequence of operations takes place tacitly. What we get at the conscious level is only the final product (Fischbein & Grossman, 1997, s. 29).

Intuition beror också på tidigare erfarenheter och på mentala scheman (Fischbein & Grossman, 1997), något som också överensstämmer med förståelseprocessen, även om Kintschs teori inte använder mentala scheman som uppbyggnad av den mentala strukturen.

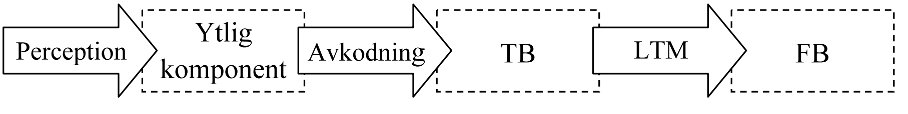
2.3.1 CI-modellen

Mot bakgrund av de tre komponenterna av den mentala representationen kan man också dela upp den kognitiva processen i tre komponenter (se figur 2). Men på liknande sätt som för den mentala representationen skall påpekas att denna uppdelning endast är för att kunna diskutera och beskriva förståelseprocessen, inte för att förståelsen antas ske i tre separata processer.

Kintschs (1998) mer detaljerade teori för förståelseprocessen, CI-modellen, kan beroende på syfte och behov vid användning av modellen göras mer eller mindre utförlig. Modellen behandlar primärt skapandet av en textbaserad (TB) och en förkunskapsbaserad (FB) representation hos läsaren, och behandlar därmed avkodning och aktivering av förkunskaper (långtidsminnet, LTM) i läsprocessen, och ”the theory neglects the perceptual aspects of reading a text” (Kintsch, 1992, s. 147). Som nämnts tidigare är modellen mer generell än en modell för läs-förståelse men modellen behandlar alltid förståelse *av något*: ”The CI theory is an interactive theory in that comprehension always involves the interaction of an outside input” (Kintsch, 1992, s. 147).

CI-modellen delar upp förståelseprocessen i två steg, konstruktion (C) och integration (I):

Begränsningen av korttidsminnet gör att texter läses ”roughly one sentence at a time (sentence groups if the sentences are very short or phrases if a sentence is too long)” (Kintsch, 1992, s. 149). Från denna del av texten konstrueras ett associativt nätverk av propositioner. Från noderna i detta nätverk kan



Figur 2. *Schematisk bild över komponenter av kognitiva processen (pilarna) i relation till komponenter av den mentala representationen.*

associationer finnas tillgängliga i LTM, och dessa associerade noder tas med som en del av nätverket som skapas i arbetsminnet. Detta associativa nätverk, uppbyggt av noder dels från texten och dels från LTM, utgör resultatet av konstruktionssteget i CI-modellen. Aktiveringen av LTM sker genom lokala associationer och många av noderna som aktiveras är därför irrelevanta för den specifika situationen (Kintsch, 1992), och nätverket kan ha låg koherens och vara motsägande (Kintsch, 1988). Men i integrationssteget sker en så kallad ’spreading activation process’ där

> clusters of highly interconnected propositions attract most of the activation in the network, thus deactivating sparsely interconnected portions of the network as well as nodes with negative links (Kintsch, 1992, s. 153).

Resultatet av detta integrationssteg ger innehållet av arbetsminnet efter att ha läst den aktuella delen av texten. De noder med högst aktivering behålls därefter i arbetsminnet och fungerar som delar i det nya nätverk som skapas i upprepningen av denna process för nästa del av texten. Processen kan sägas vara indelad i cykler, och på detta sätt finns möjlighet att bygga en sammanhängande representation av texten, som också kan kopplas samman med delar av LTM om lämpliga associationer har varit möjliga.

Integrationssteget sker egentligen mer kontinuerligt för varje textelement, och inte bara i slutet av meningar, men den integration som sker av hela meningar har trots det en speciell status eftersom korttidsminnet då är fullt (Kintsch, 1998, s. 102). Är man endast intresserad av den resulterande mentala representationen kan man förenkla processen genom att endast genomföra integrationen då korttidsminnet är fullt (Kintsch, 1992, s. 154).

Den genomförda beskrivningen av CI-modellen är mycket kortfattad och övergripande, och modellen är mer detaljerad (se Kintsch, 1988, 1992, 1998). Till exempel beskrivs i konstruktionssteget vilka typer av associationer som kan ske mellan olika delar i texten och till LTM och i integrationssteget de numeriska beräkningar som innefattas i ’spreading activation’-processen[7]. I relation till resultatet från denna process för varje del av texten beskrivs också mer detaljerat hur man får fram den slutliga mentala representationen av en hel text.

I diskussionen kring mental struktur (avsnitt 2.2.1) konstaterades att Kintschs modell med ett associativt nätverk inte utgår från en struktur med scheman (dvs. ’frames’, ’scripts’ eller liknande). Scheman har inte heller någon speciell roll i CI-modellen, till skillnad från vissa andra teorier som beskriver läsprocessen som så kallad ’top-down’: ”a written sentence or paragraph cues the retrieval of one or more *frames* from memory” (Davis, 1984, s. 47). Att på detta sätt utgå från scheman i förståelseprocessen har dock visat sig problematiskt:

---

[7] Ett speciellt datorprogram finns för CI-modellen (för Macintosh-datorer), som bland annat genomför denna process (Mross & Roberts, 1992).

> First and foremost, there exists enough psychological data to question whether the top-down guidance of comprehension is as tight as schema theory suggests. […] Second, human comprehension is incredibly flexible and context-sensitive. It is hard to see how one could model that process with fixed control structures like schemas. (Kintsch, 1998, s. 94)

Kintschs teori beskriver istället, med hjälp av CI-modellen, förståelseprocessen som i huvudsak 'bottom-up', där processen kan sägas styras av det man ska förstå, till skillnad från 'top-down', där processen styrs i större utsträckning av färdiga mentala strukturer.

I denna avhandling tas CI-modellen som utgångspunkt för läsprocessen. Olika aspekter av texten, läsaren och lässituationen (se avsnitt 2.1) kan påverka läsprocessen på olika sätt, och detta sker i CI-modellen i konstruktionssteget. Till exempel kan läsarens förkunskaper och uppfattningar påverka vilka associationer som skapas och hur starka dessa kopplingar är, både mellan olika delar av texten och också mellan texten och LTM. Läsaren kan också ha problem med avkodning av texten, det vill säga att vissa propositioner/noder från texten misstolkas eller inte skapas alls i konstruktionssteget.

Tidigare diskuterades en komplett TB (avsnitt 2.2.2) som det nätverk en noggrann analys av texten skulle ge. Ett mer realistiskt nätverk för att beteckna någon sorts optimal representation skulle istället kunna vara en sorts ideal TB. Med detta avses det resultat man får genom att i enlighet med CI-modellen simulera läsning där alla propositioner och kopplingar som skapades i den nämnda kompletta TB:n används, utan några specifika förkunskapsnoder. Sådana ideala TB togs fram för enkla texter och jämfördes med empiriska data där läsare fick återberätta texten efter att ha läst den, något som visade relativt bra överensstämmelse (Kintsch, 1998, kap. 8.2.1). Dessa resultat ska dock inte övertolkas, eftersom man vid jämförelserna mellan teori och empiri behöver göra vissa antaganden eller kompletteringar till teorin, något som har att göra med de begränsningar modellen har:

> The model takes care of only the input side – the transformation of the text into a mental representation. We need a separate, additional model to account for any behavior based on this mental representation (Kintsch, 1998, s. 280).

Detta är viktigt att ha i åtanke om man vill komma åt personers mentala representationer, eftersom detta alltid måste göras indirekt.

Kapitel 3

Läsa matematiska texter

3.1 Egenskaper hos matematiska texter

Skillnader mellan texter (t.ex. avseende form eller struktur) kan tänkas göra att det finns skillnader mellan att *läsa* olika texter. Brunner (1976, s. 208) menar att sådana skillnader ”stem from both the nature of the subject and the way it is written”, det vill säga att det kan finnas skillnader mellan att läsa texter från olika ämnesområden som beror just på att texterna behandlar olika ämnen. Men det finns också mycket gemensamt i all typ av läsning, oberoende av textens innehåll eller struktur. I denna avhandling ses läsprocessen som en möjlig sådan gemensam aspekt, som alltså är exempel på en förståelseprocess som kan modelleras med CI-modellen (se avsnitt 2.3.1). Men även med denna utgångspunkt finns det intresse av att studera skillnader som kan finnas mellan olika typer av texter. Detta för att för det första granska användning av modellen utifrån speciella egenskaper hos matematiska texter och för det andra för att se hur dessa egenskaper på olika sätt kan *påverka* läsprocessen. Därför görs i detta avsnitt först en granskning av matematiska texter i förhållande till andra typer av texter och därefter granskas två speciella aspekter av matematiska texter, symbolanvändning (avsnitt 3.2) samt begrepps- och procedurförklarande texter (avsnitt 3.3). Allt detta studeras speciellt i relation till läsprocessen och Kintschs (1998) modell för denna process.

För att få en överblick över vad som kan vara speciellt med matematiska texter och läsning av dessa granskas litteratur som på något sätt behandlar just matematiska texter eller läsning av matematiska texter. Därefter diskuteras resultatet av denna överblick i förhållande till läsprocessen (avsnitt 3.1.1); hur vissa speciella egenskaper hos matematiska texter kan påverka läsprocessen och om den modell för läsprocessen som används i denna avhandling kan tänkas fungera tillfredsställande också med de speciella egenskaper som noterats. Syftet med denna litteratursökning är inte att vara heltäckande, avseende till exempel befintlig matematikdidaktisk forskning. Dock har försök gjorts att hitta så mycket material som möjligt för detta och allt av relevans som har hittats har också inkluderats i denna överblick. Men sökandet har alltså inte organiserats eller strukturerats på något särskilt sätt speciellt för denna litteraturstudie. Det primära kravet för litteratur att inkluderas var att innehålla något om vad som är speciellt med matematiska texter eller läsning av matematiska texter. Användning av symboler i matematiska texter kommer att behandlas separat i avsnitt 3.2, och i denna litteraturstudie inkluderas därför inte referenser som endast berör det matematiska symbolspråket. Dessa kriterier resulterade i 19 referenser[8] för denna litteraturstudie.

Resultat från denna litteraturstudie kommer i fortsättningen att diskuteras i generella termer, det vill säga oftast utan att hänvisa till specifika referenser.

Hur användning av symboler i matematiska texter kan påverka läsprocessen behandlas som sagt i avsnitt 3.2 och tas inte upp här. Dock kan det ibland vara svårt att avgöra om ett påstående som påträffas i litteraturstudien avser en egenskap hos symbolspråket eller något mer generellt. Detta kan kanske bero på att det ibland (möjligen implicit) sker en ”identification of mathematics with its symbol system” (Morgan, 1998, s. 13).

Diagram, tabeller och andra typer av figurer eller bilder kan fylla en viktig funktion inom matematik, men dessa möjliga komponenter i en text kommer inte att inkluderas i diskussioner kring matematiska texter i denna avhandling. De texter som diskuteras här kan sägas ha en endimensionell struktur, där läsning sker rad för rad, uppifrån och ner, till skillnad från bilder eller figurer av olika slag som kan ha en tvådimensionell struktur, där det inte alltid heller är uppenbart var man börjar läsa. Algebraiska uttryck, som också kan ses som tvådimensionella i sin struktur, kommer dock att diskuteras i denna avhandling (se avsnitt 3.2.1).

Om någon specifik åldersgrupp behandlas i den granskade litteraturen handlar det oftast om lägre åldrar som parallellt med att läsa matematiska texter också håller på att lära sig, eller ganska nyligen lärt sig, läsa i allmänhet. Ofta fokuseras också på så kallade ’word-problems’, det vill säga uppgiftstexter, då matematiska texter eller läsning inom matematik behandlas. Då läsning behandlas görs detta inte med avseende på läsprocessen[9] utan ofta diskuteras olika typer av (medvetna) lässtrategier då man behandlar texten på olika sätt för att förbättra läsförståelsen. Dessa faktorer gör att ingen har samma inriktning eller fokus som i denna avhandling, och de diskussioner som genomförs kring matematiska texter och läsning av dessa måste hela tiden ses mot bakgrund av det fokus som finns där diskussionen förs. Det kan också konstateras att den behandling av matematiska texter som finns i litteraturen handlar just mycket om *diskussioner* eller

---

[8] Adams (2003); Blanton (1991); Borasi & Siegel (1990); Brunner (1976); Defence (1994); Dunlop & Strope (1982); Fenwick (2001); Freitag (1998); Fuentes (1998); Hubbard (1990, 1992); Kane (1968); Kulm (1973); Morgan (1998, kap. 2); Newton & Merrell (1994); Noonan (1990); O’Mara (1981); Pimm (1989); Shuard & Rothery (1984).

[9] Det finns studier, som dock inte är med i denna litteraturstudie, där läsprocessen behandlas i samband med så kallade ’word-problems’ (Kintsch, 1998, kap. 10; LeBlanc, 1991).

konstateranden kring vad som är speciellt med matematiska texter. Ingen studie har påträffats som *undersöker* eventuella skillnader mellan texter inom matematik och andra ämnen eller vad som kan vara speciellt med att läsa texter med matematiskt innehåll. De egenskaper som förs fram i litteraturen används mer som bakgrund till det huvudsakliga ämnet. Därmed bygger många av de påståenden som görs till stor del på personliga uppfattningar och erfarenheter hos respektive författare. Morgans (1998, kap. 2) diskussioner utgör på flera sätt ett undantag från övriga referenser, speciellt eftersom hon just fokuserar på ”Characteristics of Written Mathematical Texts”. Primärt görs dock ingen åtskillnad mellan påståenden från olika referenser, istället inkluderas alla befintliga diskussioner och påståenden i den granskade litteraturen angående speciella egenskaper hos matematiska texter samt vad som är speciellt med att läsa matematiska texter.

En diskussion om vad som är *speciellt* med matematiska texter förutsätter att man har någon sorts ”normal” referenstext att jämföra med. Denna jämförelse görs i litteraturen antingen utan att explicit ange någon sorts referenstext eller med en jämförelse mot ”vanliga” texter eller naturligt språk, till exempel mellan ’ordinary English’ och ’mathematical English’ (Kane, 1968). Litteraturstudien av O’Mara (1981) visar också att många jämför läsning av matematiska texter med läsning av (engelsk) prosa. Matematiska texter och språket som där används jämförs alltså med mer vardagliga texter. Utan att granska vilka skillnader som finns mellan dessa typer av texter kan man konstatera att läsning av dessa texter skiljer sig åt eftersom lässituationen oftast är annorlunda. Till exempel är syftet med att läsa en skönlitterär bok ofta annorlunda än syftet med att läsa en matematisk text. Jämförelser mellan texter från olika ämnesområden där matematik inkluderats har inte hittats i litteraturen. Detta skulle dock kunna vara av intresse för att påvisa likheter och skillnader mellan olika ämnesområden samt hur detta kan påverka läsning av olika typer av texter.

Diskussioner och kommentarer i litteraturen kring vad som är speciellt med matematiska texter kan delas in i tre kategorier; de som berör enstaka ord, de som berör enstaka eller ett fåtal meningar (textens mikrostruktur) samt de som mer berör texten som helhet (textens makrostruktur eller form). Eftersom påståenden ofta inte förklaras eller diskuteras mer ingående i litteraturen kan vissa vara svåra att placera, speciellt sådana som handlar om mikro- och/eller makrostruktur. Detta ses dock inte som något stort problem eftersom syftet med indelningen i kategorier är att strukturera behandlingen av påståenden. Förutom diskussioner om egenskaper hos texter finns också diskussioner som på något sätt berör själva läsningen av matematiska texter. En sammanställning av påståenden som hittats i litteraturen kring vad som är speciellt med matematiska texter eller med att läsa matematiska texter finns i tabell 1. Denna tabell inkluderar naturligtvis inte *alla* befintliga påståenden i litteraturen utan försök har gjorts att samla flera specifika påståenden i mer generella formuleringar. Vissa specifika formuleringar är dock tagna direkt från någon enstaka referens, men översatta till svenska, och dessa har därför angetts med specifik referens.

Tabell 1. *Resultat från litteraturstudie; påståenden om egenskaper hos matematiska texter och läsning av matematiska texter.*

Enstaka ord
Tre typer av ord: • Helt nya, obekanta ord (teknisk vokabulär) • Ord bekanta sedan tidigare, med samma betydelse som tidigare • Ord bekanta sedan tidigare, med annorlunda betydelse
Ord för kvantifiering (t.ex. 'alla', 'existerar') har mer komplicerad roll
Ord för tal kan agera substantiv (annars vanligen adjektiv)
Adjektiv är oftast oviktiga
Adjektiv är viktiga (t.ex. *komplexa* tal, *växande* funktion)
Ord har vanligen en specifik betydelse
Mikrostruktur
Låg redundans, precisa påståenden, relativt otvetydigt
Påståenden om påståenden
Logiska implikationer; 'om… så…' har alltid strikt logisk betydelse
Komplex meningsbyggnad
Flera ord för kvantifiering i samma mening
Grammatik och syntax mindre flexibelt (Kane, 1968)
Makrostruktur eller form
Mindre rik kontext, behandlar abstraktioner
Låg redundans, kortfattat, kompakt
Mycket fakta och begrepp, tätt med specifika ord för matematik
Presentation: syntetisk, ej intuitiv form, helt matematiskt korrekt och komplett, passiv form används
Uppbyggnad: sekventiell organisation, lager av ökande abstraktioner, hierarkisk uppbyggnad av definitioner
Många typer av syften och sätt att skriva, t.o.m. inom samma sida
Läsning
Speciella lässtrategier behövs: Läsa flera gånger Detaljerad och försiktig uppmärksamhet i långsamt tempo Arbeta samtidigt; läsa med papper och penna Definitioner, satser och begrepp måste *användas* i övningar
Substantiv i teknisk vokabulär måste processas annorlunda än icke-tekniska substantiv för förståelse (Kane, 1968)
Meningar kan ge stor påfrestning på arbetsminnet (Newton & Merrell, 1994)
Skapad mental bild/representation ('mental image') kan vara för långt från verkligheten för att lätt kunna visualiseras (Defence, 1994)

Det är viktigt att ha i åtanke att de speciella egenskaper hos matematiska texter som tas upp i tabell 1 är från litteratur som jämfört med ”vanliga” texter och som inte *undersökt* dessa skillnader, utan tar dessa som bakgrund eller utgångspunkt. Ofta förklaras inte heller påståendena mer ingående, till exempel är det oklart vad som menas med ”komplex meningsbyggnad”. De påståenden som görs i litteraturen är också ofta formulerade som generaliseringar om matematiska texter i allmänhet. Men att alla matematiska texter skulle ha samma egenskaper är en orimlighet. Texter kan ju till exempel vara riktade till olika åldersgrupper, och att texter på universitetsnivå skulle ha samma egenskaper som texter på de lägre åren i skolsystemet verkar inte rimligt. Morgan (1998, s. 10) menar också att ”there is a substantial diversity between the forms of language that are used in different mathematical contexts”. Texter från olika områden inom matematik eller med olika typer av innehåll kan alltså tänkas ha olika egenskaper. Fenwick (2001) menar till exempel att det finns skillnader mellan texter inom statistik och andra områden inom matematik. Eventuella skillnader mellan begrepps- och procedurförklarande texter kommer även att diskuteras i avsnitt 3.3. Med detta som bakgrund kommer här alla påståenden från tabell 1 därför att tolkas som egenskaper hos matematiska texter som *kan existera* och inte som generella egenskaper.

Brunner (1976) pekar på möjligheten att egenskaper i texter kan bero på vissa egenskaper i ämnet som sådant eller på hur man väljer att presentera innehållet. Vissa påståenden i tabell 1 verkar mer ha att göra med sättet att skriva än med någon direkt egenskap hos matematikämnet, andra verkar mer sammankopplade med ämnet i sig och vissa kan vara svåra att direkt placera. De egenskaper som handlar om texters makrostruktur eller form verkar dock till stor del handla om hur texter kan skrivas, och kanske avspeglar vilken norm det finns inom matematikämnet angående hur man bör skriva. Hubbard (1992, s. 81) kritiserar också vissa av dessa egenskaper, speciellt då texten riktar sig till elever eller studenter, eftersom ”the need for the text to be absolutely mathematically correct and complete so that it cannot be criticized by mathematical colleagues […] results in texts written for mathematicians, not students”.

3.1.1 Textegenskaper i relation till läsprocessen

I detta avsnitt analyseras de egenskaper hos matematiska texter som ges i tabell 1, speciellt i relation till läsprocessen. Detta görs dels med avseende på om egenskaperna kan inrymmas i den teori kring läsprocessen som används i denna avhandling (Kintsch, 1998; se också kap. 2) och dels hur egenskaperna kan påverka läsprocessen.

Eftersom egenskaperna för enstaka ord handlar om användning och betydelse av ord i texter, kan dessa egenskaper utan problem tas med i modellen för läsprocessen eftersom denna just har sitt fokus på betydelsen av ord, meningar och texter. På samma sätt finns också utrymme i modellen för att behandla olika egenskaper i textens struktur, eftersom textens mikro- och makrostruktur kan tas med som ingående komponenter i modellen för läsprocessen.

Att matematik innefattar nya ord, specifika för ämnet, samt ord med en ny eller annorlunda betydelse, användning eller roll, kan direkt tas med i modellen. Ty enligt denna aktiveras i läsprocessen associationer till ord som läses, på ett sätt som inte tar hänsyn till sammanhanget ordet står i, vilket medför att ord med olika betydelser i vardagliga och matematiska sammanhang aktiverar båda dessa betydelser. Därefter aktiveras en för läsaren och situationen mest relevant betydelse utifrån textens sammanhang och övriga associationer som gjorts. Denna betydelse kan vara en sorts blandning mellan den vardagliga och den matematiska betydelsen. Detta kräver starka och relevanta kopplingar mellan det aktuella ordet och matematik för att den önskvärda betydelsen ska få den starkaste aktiveringen. Denna egenskap om ords speciella betydelser finns dock inom många ämnesområden eftersom en egen vokabulär ofta skapas som kan sägas överlappa en mer vardaglig vokabulär. Men kanske är det speciellt för matematiken att mycket vanliga ord, såsom ’alla’ och ’existerar’, får en ”mer komplicerad roll”. Dessa ord får dock sin betydelse i läsprocessen på samma sätt som alla andra ord, men den mer vardagliga betydelsen kan nog ha mycket starka associationer till dessa typer av ord.

Påståendet att adjektiv skulle vara ganska oviktiga inom matematik ter sig ganska märkligt, eftersom man inom matematik karakteriserar, det vill säga beskriver egenskaper hos, objekt av olika typer. Möjligen kan det finnas skillnader i hur och hur mycket man använder adjektiv i olika ämnen eller typer av texter. Men detta verkar inte vara någon egenskap hos matematikämnet i sig, och skulle i så fall behöva undersökas empiriskt som en egenskap hos texter. Det är dock svårt att se någon direkt påverkan detta skulle ha på läsprocessen.

Det är oklart exakt hur man ska tolka påståendet att ord har en specifik betydelse. I alla texter behöver ord ha en specifik betydelse för att man som läsare ska förstå något – detta kan inte vara specifikt för matematik. Möjligen avses att ord inom matematik kan få sin betydelse genom definitioner och att ordets betydelse därmed blir mer specifik genom att dess betydelse explicit ange. Detta kan till exempel vara omöjligt att på ett tillfredsställande sätt göra med mer vardagliga ord, såsom ’bord’ eller ’bil’. Eftersom ords betydelse i läsprocessen skapas genom de associationer som sker till ordet och till det sammanhang ordet står i, kommer alla aspekter av den specifika betydelsen av ord sällan att vara aktiva samtidigt och även andra, för den specifika betydelsen, irrelevanta associationer kan också vara aktiva. Detta gäller även för personer som har den specifika betydelsen befintlig i sitt långtidsminne. Till exempel, vid läsning av en text där ordet triangel finns, associeras till triangel kanske en mental bild av en triangel, som dock har vissa specifika egenskaper som inte är nödvändiga enligt en definition av triangel. Denna mentala bild kan se annorlunda ut beroende på sammanhanget och även variera inom samma text. Antas det av författaren till en text att alla aspekter av den specifika betydelsen hela tiden är aktiva hos läsaren kan texten bli svår att förstå. Det krävs alltså att det i texten finns tillräckligt att associera till för att kunna aktivera de för stunden relevanta aspekterna av ett ords (specifika) betydelse. Det är dock svårt att utifrån detta direkt säga hur en text bör se ut för att uppfylla detta. Egenskapen låg redundans (som här placerats både under mikro- och makrostruktur) kan tänkas motverka möjligheter till lämpliga associationer i läsprocessen, genom att helt enkelt begränsa det totala antalet associationer. Detsamma kan sägas om texter som har mindre rik kontext eftersom en rik (och relevant) kontext kan skapa fler relevanta associationer hos läsaren. Men naturligtvis blir det inte alltid bättre med fler associationer, eftersom det relevanta är vilka typer av associationer som görs.

Att matematiktexter kan innehålla precisa påståenden och vara otvetydiga kan också kopplas samman med diskussionen kring ords specifika betydelse, eftersom påståenden som byggs upp av ord med explicit definierad betydelse kan sägas bli precisa och otvetydiga. Läsarens förståelse av påståenden i en text blir därför också oerhört beroende av de associationer som aktiveras till ord.

Flera av egenskaperna under mikrostruktur kan sägas beröra en sorts komplexitet hos texter, till exempel att det i matematik förekommer påståenden om påståenden, att påståenden har strikt logisk betydelse samt att det i samma mening kan förekomma flera ord för kvantifiering. Om strukturen i texten är komplex verkar det rimligt att det också krävs mer av läsaren för att skapa en mental representation med motsvarande komplexa struktur. Dessa egenskaper kan därmed tänkas påverka och försvåra avkodningen av en text, det vill säga försvåra skapandet av en textbaserad komponent (TB) i den mentala representationen. En bristfällig avkodning kan tillsammans med de associationer som gjorts därmed skapa en mental representation där förkunskaper dominerar, som dock bygger på mer ytliga associationer till enstaka ord eller korta delar av texten. Här har inte specificerats vad som avses med komplex struktur, utan en mer intuitiv betydelse har förutsatts, men med de tre nämnda egenskaperna som möjliga exempel på komplex struktur.

Det är oklart exakt vad som menas med att grammatik och syntax kan vara ”mindre flexibelt” i matematiska texter, Kane (1968) förklarar inte alls vad som avses. Matematiska texter har ju ingen egen grammatik utan följer samma språkliga regler som andra texter. Möjligen avser detta påstående om grammatik och syntax symbolspråket, där man kan prata om en egen grammatik, men alla diskussioner kring symboler samlas i avsnitt 3.2.

Som tidigare konstaterats består egenskaperna under makrostruktur och form till stor del av olika sätt att skriva matematiska texter, eller texter i allmänhet eftersom man oberoende av ämne kan skriva texter som till exempel är mer eller mindre kortfattade eller kompakta. Detta kan också sägas handla om komplex struktur, som kan påverka avkodningen av texten. Möjligen kan en sekventiell organisation vara mer typisk för matematiska texter, eftersom om man definierar ord endast bör använda sig av ord som redan blivit definierade för att åstadkomma de precisa betydelser och meningar som tidigare diskuterats. Samma diskussioner som genomfördes kring enstaka ord och betydelse av dessa är därmed relevanta även här.

Abstraktioner nämns också bland egenskaperna, men exakt vad som avses med detta är oklart, eftersom: ”There is no consensus in regard to a unique meaning for abstraction” (Hazzan, 1999, s. 75). Därmed blir det svårt att diskutera hur abstraktioner i allmänhet kan påverka läsprocessen, och att diskutera olika typer av abstraktioner i relation till läsprocessen skulle bli alltför omfattande för denna avhandling. Ett synsätt på abstraktion kan dock tas upp; som en motsats till konkret, det vill säga sådant som inte grundar sig på enskilda föremål eller händelser, eller konkreta företeelser. Detta skulle medföra en skillnad i abstraktion mellan matematik och till exempel naturvetenskapliga ämnen eller historia, som ju grundar sig på empiriska observationer respektive specifika händelser. Detta kan nämligen få konsekvenser också för läsprocessen eftersom man oftast kan göra fler associationer till konkreta och specifika händelser, speciellt om de innefattar mänsklig aktivitet, eftersom man då kan associera till sig själv. Dock är det inte därmed sagt att dessa associationer alltid *gynnar* läsförståelsen, eftersom olika associationer kan vara mer eller mindre relevanta för en viss text.

Avslutningsvis finns påståenden kring själva läsningen av matematiska texter, som beskriver en komplicerad aktivitet där läsprocessen i sig inte verkar ha något större värde, eftersom den orsakar stora påfrestningar på arbetsminnet och resultatet blir mentala bilder som inte är lätta att visualisera. För att få ut något av läsning inom matematik behövs tydligen andra aktiviteter, parallellt med och efter läsningen, för att skapa någon typ av förståelse. Det kan vara värt att än en gång påpeka att dessa påståenden inte bygger på någon empirisk eller teoretisk undersökning av läsprocessen, utan kan sägas representera personers egna uppfattningar och erfarenheter kring läsning av matematiska texter. Flera av påståendena om läsning kan kopplas samman med vissa påståenden om egenskaper hos matematiska texter. Kommentaren om visualisering av mentala bilder kan till exempel ha att göra med egenskapen att matematiska texter behandlar abstraktioner, och kommentaren om påfrestningar på arbetsminnet kan ha att göra med en komplex struktur i matematiska texter. Men eftersom dessa påståenden inte beskrivs mer utförligt, motiveras eller är relaterade till någon teori eller modell för minnet eller läsning kan de vara svåra att tolka. Vad menas till exempel med att ”processa vokabulär” – avser det någon typ av kognitiv process som skulle vara annorlunda för olika typer av ord, eller avses någon mer aktiv behandling av dessa ord? Kane (1968) förklarar inte alls vad som avses.

Det verkar alltså finnas en gemensam syn, åtminstone i den undersökta litteraturen, på läsning av matematiska texter som något i flera avseenden ganska speciellt (och komplicerat) i förhållande till andra typer av texter. O’Mara (1981, s. 29) menar också att ”we do not have any thorough definitions of reading comprehension in maths”. Men att ens försöka definiera läsförståelse specifikt för matematik, eller för andra typer av ämnen, verkar onödigt eftersom det uppenbarligen finns så mycket gemensamt i all läsning. Och diskussionerna i detta avsnitt kring matematiska texter har åtminstone inte påvisat någon direkt brist i den allmänna teorin för läsprocessen som används som utgångspunkt i denna avhandling. De egenskaper hos matematiska texter som tas som motiv för att läsning inom matematik bör ses som en speciell typ av förståelseprocess verkar alltså kunna inkluderas i den allmänna modellen för läsprocessen. Dessa påstådda egenskaper bör dock granskas mer utförligt, både med empiriska och teoretiska undersökningar. Detta för att se om matematiska texter kan sägas ha vissa speciella egenskaper jämfört med andra ämnen eller andra typer av texter, samt om dessa egenskaper handlar om matematikämnet som sådant eller om det mer handlar om en tradition att skriva matematiska texter på ett visst sätt.

3.2 Symboler

I litteraturstudien som behandlades i avsnitt 3.1 påträffades påståenden som berör symboler inom matematiken på något sätt. Dessa påståenden inkluderades inte i den studien men kommer att tas upp i detta avsnitt. Här kommer dock inte påståenden från litteratur att diskuteras separat, på det sätt som gjordes i avsnitt 3.1, utan kommer att integreras i en samlad diskussion kring symboler och symbolspråket i matematiska texter. Syftet med denna diskussion är dock liknande som med den i föregående avsnitt; att se om och hur läsning av symboler kan inrymmas i den teori kring läsprocessen som används i denna avhandling (Kintsch, 1998; se också kap. 2) samt hur symboler kan påverka läsprocessen.

Ordet ’symbol’ kan i olika sammanhang ges olika betydelse och inkludera eller exkludera olika saker. Eftersom fokus i denna avhandling är på matematiska texter och läsning av dessa, kommer här speciellt att studeras *skrivna matematiska symboler*; deras egenskaper samt läsning och mental representation av dessa. Inledningsvis diskuteras huvudsakligen enstaka symboler, för att därefter behandla sammansättningar av symboler, speciellt algebraiska uttryck (avsnitt 3.2.1). Kintschs (1998) modell för läsprocessen har aldrig diskuterats eller använts för texter som innehåller matematiska symboler, och därför är det här av intresse att diskutera den mentala representationen av symboler samt hur symboler kan påverka läsprocessen. Detta görs för att se om modellen för läsprocessen behöver kompletteras på något sätt för att också inkludera läsning av texter innehållande matematiska symboler.

Matematiska symboler kan ses som figurer som står för något, det vill säga, de har en viss innebörd eller betydelse. Detta kan också sägas om vanliga ord, som i likhet med matematiska symboler oftast kan sägas vara konventionellt skapade (Shuard & Rothery, 1984, s. 36), det vill säga att det inte finns någon direkt koppling mellan symbolens utseende och dess innebörd förutom just en konvention att symbolen står för just detta. Bergsten (1990, s. 55) kallar dessa symboler för stipulativa former, som skiljer sig från de genetiska formerna, med vilket avses matematiska symboler som har en tydlig koppling till dess betydelse. Pimm (1989, s. 142) ger några exempel på sådana symboler, bland annat $\angle$ för vinkel. Denna symbol är också ett exempel på sådana matematiska symboler för vilka man behöver ha lärt sig vad symbolen står för, för att kunna utläsa den, det vill säga att man till symbolen har ett ord eller en fras associerad[10], som man använder då man vill utläsa en text där symbolen ingår[11]. Samma symbol, eller kombination av symboler, kan också ha fler möjliga sätt att utläsas på, till exempel kan '+' utläsas som 'plus' eller 'addera' (med eventuella lämpliga böjningar). Detta skiljer sig från vanliga ord, för vilka man i princip har ett entydigt sätt att utläsa dem på och att man oftast kan utläsa obekanta ord eftersom ord baseras på ljud som byggs upp av alfabetets bokstäver (Noonan, 1990). Den mentala representationen av ett obekant ord kan därmed också bestå mer av hur utläsningen låter, och kanske inte primärt hur ordet är uppbyggt bokstav för bokstav. En obekant symbol, av den diskuterade typen, kommer dock endast att kunna representeras utifrån symbolens utseende, det vill säga som en figur. Obekanta ord respektive symboler kan alltså (primärt) komma att representeras på olika sätt i minnet. Båda tillhör dock en ytlig komponent, eftersom betydelsen av ordet eller symbolen är obekant. Dock kommer det sammanhang ordet eller symbolen ingår i att ge (början till) en viss betydelse till ordet/symbolen, även om ingen förklaring ges explicit i texten. På detta sätt kan man bygga upp en ganska omfattande förståelse (dvs. många associationer) för ett nytt ord eller en ny symbol, men där man för symbolen inte nödvändigtvis vet hur man kan utläsa den. Men Melin (2004, s. 44) refererar till forskning som "visat att vi faktiskt aktiverar en del av talmuskulaturen vid tyst läsning". Vi tar alltså hjälp av hur det låter att utläsa texten i skapandet av den mentala representationen, något som kanske kan göra det svårare att stöta på en obekant symbol än ett obekant ord. Man kanske också kan få svårare att förstå en text innehållande någon symbol man inte kan utläsa än om motsvarande obekanta ord (dvs. hur symbolen utläses) finns i texten, även om man har en omfattande förståelse kring symbolens/ordets betydelse, egenskaper och/eller användning.

Förutom sådana matematiska symboler för vilka man behöver lära sig ett sätt att utläsa dem finns också symboler som direkt kan utläsas även om de är obekanta[12], till exempel sådana som byggs upp av vanliga bokstäver eller siffror. Dock kan denna utläsning ske på olika sätt, vissa som mer fokuserar på ytliga aspekter och andra som mer fokuserar på betydelsen av symbolen. Pimm (1989, s. 181) benämner dessa "spelling pronunciation" respektive "interpretative". Ett inom matematiken allmänt accepterat sätt att utläsa något på behöver dock inte alltid vara av den sistnämnda typen, till exempel kan $\frac{dy}{dx}$ utläsas som "d y d x"

---

[10] Att man till en enstaka symbol associerar ett helt ord eller en hel fras kan göra att symbolspråket kan ses som kompakt jämfört med texter som inte använder symboler i samma utsträckning (Blanton, 1991; Dunlop & Strope, 1982; Kane, 1968).

[11] I Pimms (1989) kategorisering av symboler ingår här 'logograms' och 'pictograms'.

[12] I Pimms (1989) kategorisering av symboler ingår här 'punctuation symbols' och 'alphabetic symbols'.

eller som ”derivatan av y med avseende på x”, som är exempel på de två olika sätten att utläsa på, men som båda kan accepteras som möjliga sätt. Olika sätt att utläsa en symbol på kan också vara lämpliga i olika situationer, eftersom de olika utläsningarna kan fokusera på olika aspekter av symbolens betydelse, som kan vara mer eller mindre relevanta i en specifik situation. Men liknande kan sägas gälla för vanliga ord, där olika aspekter av ordets betydelse kan vara mer eller mindre relevanta i olika situationer, och där sammanhanget spelar in för att aktivera de ”rätta” associationerna. Dock utläses vanliga ord som sagt alltid i princip på samma sätt. Observera att denna diskussion kring utläsning av symboler och ord är relevant för all läsning, eftersom det konstaterats att talmuskulaturen är aktiv även vid tyst läsning (Melin, 2004, s. 44), och vissa skillnader har alltså här framkommit mellan läsning av symboler och vanliga ord. Studier av personer med vissa hjärnskador har också påvisat att symboler för tal, till exempel ’3’, processas annorlunda än motsvarande ord, ’tre’ (McCloskey & Caramazza, 1987). Om denna skillnad har något samband med själva utläsningen av symboler och ord kan dock inte avgöras, och inget säger heller att detta resultat direkt kan generaliseras till alla typer av symboler och ord.

I den mentala representationen kan symboler sägas få sin betydelse på samma sätt som för ord, det vill säga utifrån de associationer som finns till den nod i den mentala strukturen som motsvarar symbolen eller ordet. Symbolen i sig skulle därmed kunna anses tillhöra en ytlig komponent i den mentala representationen, precis som specifika ord eller fraser gör det. Men den mentala representationen av symboler och ord i den ytliga komponenten har alltså visat sig kunna ske på olika sätt, och det finns också anledning till att fördjupa sig mer i hur man kan karakterisera den mentala representationen av matematiska symboler. Inom matematik kan man behandla och hantera symboler som objekt i sig, det vill säga som om symbolen *är* det den symboliserar och inte bara en symbol för det. I sådan hantering kan man sägas försöka undvika att utläsa alla symboler och där behandlingen tycks ske på en ytlig nivå eftersom man hanterar symboler utan att fokusera på betydelsen av symbolerna i sig eller av det man gör med dessa symboler; ”mathematicians who can detach the semantic component of the symbols at will can work much more quickly with the symbols” (Pimm, 1989, s. 183). Förutom att vissa olikheter kan finnas mellan den mentala representationen av symboler respektive ord, kan det alltså inom matematik ibland finnas direkta fördelar med en mental representation begränsad till en sorts ytlig komponent, något som är svårt att se motsvarighet till i ”vanliga” texter. Men som citatet från Pimm antyder finns dessa fördelar med den ytliga komponenten nog i första hand om det sker ”at will”, det vill säga att man avsiktligen (tillfälligt) bortser från betydelsen av symbolerna.

En till synes ytlig representation av symboler, det vill säga som figurer, verkar alltså inom matematik kunna ha en annan roll än en ytlig representation av vanliga ord. Symbolen/figuren kan alltså sägas ha viss betydelse i sig, och det kan verka för begränsande att bara se symbolen i relation till en viss referent. Detta gör nämligen att symbolen skulle ses som i huvudsak ha *en* association, nämligen till dess referent, och att all betydelse finns hos denna, det vill säga att symbolen får sin betydelse *genom* referenten. Istället för detta sätt att se på symboler föreslås här något som redan sagts, nämligen att symbolen får sin betydelse på samma sätt som vanliga ord, genom alla (för tillfället aktiva) associationer som finns till symbolen. Även om man accepterar flera referenter till en symbol, som därmed skapar flera associationer, räcker inte detta eftersom även andra typer av associationer kan påverka betydelsen av symbolen, såsom olika relationer till andra symboler (eller ord) som inte direkt handlar om vad symbolen står för. Möjligen handlar denna diskussion om vad man menar med 'referent', men att prata om en symbol och dess referent(er) kan alltså verka begränsande eftersom detta kan avspegla synen på existensen av en specifik och invariant betydelse. Diskussioner om att man ”bortser” från symbolens betydelse i vissa situationer kan därmed istället sägas handla om att man fokuserar på en viss (möjligen starkt begränsad) betydelse av symbolen. Associationer till symbolen som då aktiveras kan till exempel handla om vissa räkneregler, där symbolen i sig (dvs. figuren) fungerar som ett objekt som följer dessa regler. Det handlar då alltså inte om någon ytlig komponent av den mentala representationen i dessa sammanhang, utan om en sorts specialiserad betydelse, som här benämns den *operativa betydelsen* av symbolen. Bergstens (1990) behandling av *form* berör bland annat denna aspekt av symboler genom att diskutera formoperationer som just avser den operativa aspekten av symboler. Sfard och Linchevskys (1992, s. 136) diskussioner kring 'pseudostructural conceptions' berör också denna typ av betydelse hos symboler, med exempel från likheter och olikheter där ”propositional formulae are conceived just as strings of semantically void symbols, for which the formal transformations used to find the solution are the only source of meaning”. Trots att symbolerna är ”semantiskt tomma” har de alltså en betydelse. Kintschs (1998) beskrivning av den textbaserade komponenten som uppbyggd av den *semantiska* strukturen bör därför utvidgas till att också inkludera den operativa betydelsen hos symboler.

Även om det i diskussionerna hittills inkluderats kommentarer om komponenterna av den mentala representationen (till största delen om den ytliga komponenten), bör det påpekas att den mentala representationen av en enstaka symbol är svår att sägas tillhöra en viss komponent, främst eftersom dessa komponenter i första hand är avsedda att användas för att beskriva den mentala representationen för en längre text. Till exempel behöver en mental representation av en symbol som en figur (dvs. utan att kunna utläsa den) inte begränsa representationen till den ytliga komponenten eftersom även en figur kan ha viss innebörd genom diverse associationer som finns tillgängliga till denna figur. Likaså kan en utläsning av en symbol, även om själva utläsningen kan sägas relatera mer till betydelsen, handla om en rent ytlig association till symbolen, som består av ett ord eller en fras som används för att utläsa denna symbol.

Inga omfattande förändringar verkar behöva göras i Kintschs (1998) modell för läsprocessen för att också innefatta texter med matematiska symboler. Men den diskussion som här genomförts kan sägas gjort vissa nödvändiga förtydliganden eller tillägg i modellen, genom diskussioner kring skillnader och likheter mellan läsning av matematiska symboler och vanliga ord samt mellan den mentala representationen av symboler och ord. Speciellt inkluderas i betydelsen av symboler också den så kallade operativa betydelsen, som tidigare ej behandlats i förhållande till Kintschs teorier, eftersom denna ej är relevant för det naturliga språket, som Kintsch fokuserar på.

3.2.1 Algebraiska uttryck

Även om mest fokus här kommer att vara på algebraiska uttryck, kan denna diskussion också ses i ett mer allmänt perspektiv genom att det handlar om sammansättningar av flera symboler, där läsning och mental representation av sådana sammansättningar kommer att behandlas.

Precis som enstaka symboler kan sammansättningar av symboler också representeras på olika sätt, till exempel mer som figurer eller med mer koppling till hur man kan utläsa symboler. Oberoende av detta kan symbolens betydelse vara mer eller mindre utvecklad samt mer eller mindre relevant för en specifik situation. Kintschs (1998) modell för mental representation och förståelseprocessen utgår från en propositionell representation av både texter och den mentala strukturen. Hur den mentala representationen av algebraiska uttryck kan se ut samt om/hur man kan representera uttryck på samma sätt som vanliga meningar, det vill säga med hjälp av propositioner, är därmed av intresse för att se om/hur förståelse av algebraiska uttryck kan modelleras på liknande sätt. Den mentala representationen av uttryck bestående av matematiska symboler verkar i alla fall bygga på någon sorts meningsfull struktur hos uttrycket (Bernard, 1983), och alltså inte bara ske symbol för symbol. Delvis kan detta handla om en ren utseendemässig struktur (dvs. en sorts ytlig struktur), men Jansen et al. (2003, s. 26) konstaterar i sin studie att ”it is syntactic processing that plays the primary role in the encoding of algebraic expressions”, samt att

> the similarity between the encoding mechanisms used to process algebraic expressions and sentences of natural language suggest that there are common grammatical processes that may be universally used in the processing of all languages (Jansen et al., 2003, s. 28).

Förslaget i denna avhandling är att denna allmänna process kan beskrivas och modelleras med Kintschs (1998) teori kring förståelseprocessen. Även om förståelse av algebraiska uttryck därmed verkar kunna innefattas i Kintschs modell finns det också skillnader mellan det naturliga språket och det matematiska symbolspråket som kan vara värda att studera närmare.

Enstaka matematiska symboler kan ingå i meningar som för övrigt består av vanliga ord och kan där till exempel agera substantiv. Uppbyggnaden av sådana meningar kan då följa grammatiken för det naturliga språket, där

> a single operator (a verb phrase, a verb or an adjective, for example) must act on a single argument (a noun phrase, a noun phrase or a noun,

> respectively, in the examples), to form the legitimate expressions of the language (Ernest, 1987, s. 360).

Grammatiken för algebraiska uttryck skiljer sig dock från grammatiken för det naturliga språket, eftersom de algebraiska uttrycken till stor del kan sägas vara uppbyggda av binära operatorer, som alltså agerar på två argument. Till exempel är '2 + 5' addition som agerar på de två talen. Detta kan dock också ses som en enställig/unär operator (eng. 'unary operator'), som "*two* acted on by the operation *add five*" (Ernest, 1987, s. 360). Vid läsning av algebraiska uttryck kan man alltså behöva använda en annan sorts grammatik än den som används i det naturliga språket, och försök att tolka uttrycken med det naturliga språkets grammatik kan därmed påverka den mentala representationen. Exemplet med addition kan då med den propositionella kodningen representeras till exempel som ADDERA-FEM[TVÅ] eller ADDERA[TVÅ,FEM] där varianterna motsvarar tolkning utifrån grammatiken för det naturliga språket respektive för algebraiska uttryck. Men den sistnämnda propositionen kan också innefatta två tolkningar av addition som kan skrivas som ADDERA[ARGUMENT,ARGUMENT] respektive ADDERA[ARG1, ARG2], där den förstnämnda kan sägas vara symmetrisk med avseende på argumenten (dvs. de ses som likvärdiga) medan den sistnämnda gör skillnad på de två argumenten (asymmetri med avseende på argumenten). Den symmetriska representationen kan här sägas innefatta den kommutativa egenskapen hos addition, och skulle därmed kunna sägas vara en förkunskapsbaserad representation (FB). Detta är dock inte helt självklart eftersom skillnaden mellan FB och textbaserad representation (TB) inte är enkel att beskriva så detaljerat att alla typer av representationer direkt kan klassificeras, detta speciellt eftersom uppdelningen i komponenter av den mentala representationen inte motsvarar någon verklig uppdelning i minnet. Både TB och FB kräver förkunskaper, men av olika typer, där TB kan sägas kräva mer allmänna språkliga kunskaper och FB mer specifika kunskaper relaterade till textens innehåll. Men att addition är kommutativ kan också ses som just mer allmän språklig kunskap kring begreppet addition (eller symbolen '+'), eftersom det handlar om kunskap kring vilka argument som tillåts och hur dessa argument får användas. Denna typ av kunskap behövs i all läsning, till exempel för meningen "Kalle äter glass" behöver man kunskap om verbet 'äter', att detta behöver en agent (dvs. *någon* eller *något* som äter) som argument samt att det också kan finnas (men inte nödvändigtvis finns) ett argument som säger *vad* som äts. Om man väljer att till skapandet av TB lägga kunskaper om argumenten tillhörande predikat i allmänhet, skulle alltså den representation av '2 + 5' som kan sägas inkludera kommutativitet klassificeras som TB.

Även om denna diskussion endast berört binära operatorer kan matematiken i allmänhet sägas innehålla *n*-operatorer, som agerar på *n* argument[13]. Addition kan till exempel tänkas agera på fler än två argument, något som kan representeras

[13] Ernest (1987, s. 360) kallar dessa för "n-place functions".

som ADDERA[ARG,ARG,…]. Alla uttryck kan dock också representeras med endast binära operatorer, där argumenten kan vara propositioner i sig, till exempel ADDERA[ADDERA[ARG,ARG],ARG]. Ingen av dessa kan nog sägas vara mer korrekt än den andra, utan de får ses som möjliga sätt att bygga upp den mentala representationen av algebraiska uttryck, även om representationer med n-operatorer ($n > 2$) kan verka mer kraftfull tack vare sin enklare struktur med färre propositioner.

För att kunna skapa en meningsfull mental representation av en text behöver man för det första känna igen de ord eller symboler som bygger upp texten. Vissa speciella sammansättningar av symboler används ganska ofta inom matematiken, något som kanske kan göra att dessa känns igen på en gång, som om det vore en symbol, och utan att avkoda uttrycket utifrån dess struktur. Jansen et al. (2003) konstaterar att detta i alla fall inte verkar ske i någon större utsträckning, men:

> This, of course, does not exclude the possibility that some collections of symbols are represented as lexical-like tokens. For example, this may well be true for common sub-expressions such as x^2. (s. 24)

Till exempel kan uttrycket 'x^2' därmed representeras på flera olika sätt, dels som motsvarande ett ord eller en symbol, eller som en operator som agerar på x. Denna operator skulle kunna vara att x upphöjs till just 2 (dvs. som en 1-operator) eller som en mer allmän ”potensoperator” som agerar både på x och på 2 (dvs. som en 2-operator). Uttrycket skulle alltså till exempel kunna representeras som UPPHÖJT-TVÅ[X] eller som POTENS[X,TVÅ]. Notera att den sistnämnda operatorn inte finns i uttrycket som någon egen symbol, utan signaleras genom hur symboler placeras i förhållande till varandra. Detta är ett exempel på den tvådimensionella strukturen som kan finnas hos algebraiska uttryck. Men uttrycket kan också skrivas endimensionellt där en symbol för potensoperatorn måste införas, till exempel 'x^2'. Den tvådimensionella strukturen hos algebraiska uttryck utgör ett problem för att direkt kunna applicera CI-modellen på dessa uttryck eftersom modellen bygger på den linjära uppbyggnaden hos texter, där mening för mening processas i en given ordning. För algebraiska uttryck finns ingen uppenbar start- eller slutpunkt för läsning. Ernests (1987, s. 345) modell utgår dock från att man i läsningen börjar med att ”the main operator of the expression is located and identified”, som delar upp uttrycket i två delar, vilka behandlas på liknande sätt var för sig. Han gör ingen skillnad på hur uttrycket skrivs, men uppbyggnaden av uttryck i två dimensioner verkar kunna förenkla läsandet, kanske främst för att få en överblick över hela uttrycket, något som kan vara svårt om samma uttryck skrivs i en dimension. Till exempel känns nog uttrycket

$$\frac{7x-1}{(x-3)\cdot(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

lättare att överblicka än uttrycket

$$(7x-1)/((x-3)\cdot(x+1)) = A/(x-3) + B/(x+1)\,.$$

Men om denna skillnad påverkar den slutliga mentala representationen eller om det endast handlar om en skillnad i tiden som behövs för att läsa och avkoda uttrycken (dvs. tiden för att skapa den mentala representationen) går inte att avgöra här, utan empiriska undersökningar skulle behövas för detta. För kortare uttryck borde det enligt CI-modellen inte spela någon roll hur uttrycken skrivs (så länge läsaren klarar av att avkoda uttrycket) eftersom hela uttrycket då kan ”få plats” i en cykel i modellen, och den slutliga mentala representationen påverkas då inte. För längre uttryck kan dock skrivsätt tänkas påverka den mentala representationen eftersom det då kan spela roll i vilken ordning uttrycket läses. Vad som kan ses som *kortare* respektive *längre* uttryck är beroende av den begränsning som finns i korttidsminnet, och i simuleringar noterades att 6-7 propositioner från texten per cykel gav bäst korrelation till empiriska data (Kintsch, 1998, s. 271). För att kunna avgöra om alla aspekter av CI-modellen också kan beskriva förståelsen för algebraiska uttryck behövs alltså fler empiriska studier kring detta.

Läser man ett algebraiskt uttryck kommer man med största sannolikhet inte att komma ihåg alla detaljer i detta uttryck, åtminstone inte om uttrycket står i ett sammanhang, det vill säga i en längre text. CI-modellen borde till exempel kunna beskriva vad man kommer ihåg från ett algebraiskt uttryck efter att ha läst det. Men ett och samma uttryck (av mindre storlek) har visat sig kunna representeras på olika sätt, och det skulle alltså behövas empiri för att se om dessa olika representationssätt existerar hos personer, samt om CI-modellen då på ett tillfredsställande sätt skulle förutsäga hur den mentala representationen av hela uttryck ser ut. I CI-modellen är det enklast att betrakta skapandet av en ren TB eftersom denna endast bygger på propositioner från texten, men olika typer av förkunskaper kan också ”hjälpa” den mentala representationen, det vill säga så att en FB skapas. Till exempel kan man i den likhet med tre bråk som gavs tidigare se detta som en partialbråksuppdelning, som kan göra att man fokuserar på vänsterledet i likheten eftersom man då kan veta hur högerledet ser ut, givet ett visst uttryck i vänsterledet. Detta gör att man kan rekonstruera uttrycket utan att komma ihåg hela uttrycket i sig. Förkunskaper kan alltså göra att man fokuserar på olika aspekter av ett uttryck, som sedan används i den mentala representationen av uttrycket. Detta verkar också vara relevant då man i en text ger ett konkret exempel på något, till exempel en viss metod för att genomföra något, där de exakta uttrycken i sig kanske inte är viktiga, utan det viktiga kan vara att se hur man skriver om dessa uttryck. För detta verkar dock i allmänhet krävas förkunskaper om de aktuella uttrycken, det vill säga skapandet av en FB är av vikt. Om till exempel uttrycket ’$x^2 + 3x + 7$’ skulle representeras som ’polynom av grad 2’ skulle en FB skapas, om inte texten refererar till uttrycket som just ett polynom av grad 2, eftersom detta inte är en representation av uttrycket som sådant (dvs. inte som det explicit ges i texten) utan viss förkunskap *om* detta uttryck har använts för den mentala representationen. Det kan alltså vara viktigt att i en liknande representation just innefatta någon (för situationen relevant) egenskap hos det aktuella uttrycket för att i texten som helhet kunna skapa en sammanhängande mental representation. Österholm (2004, s. 10) observerade dock exempel på elever där ”the expressions seem to be represented only as ‘an expression’, where no properties of this expression are preserved”. Detta fenomen liknar det Woodrow (1982, s. 290) kallar ’temporary redundancy’; ”in which a whole group of symbols are at one stage carried without reading, only to need detailed reading later”. Som sagt borde det alltid vara åtminstone någon egenskap hos ett uttryck som är relevant i en viss text, men om man inte uppmärksammar detta kan uttrycken sägas störa flödet i läsningen av texten (Freitag, 1998, s. 17). En anledning till att inte uppmärksamma sådana egenskaper kan vara att de erfarenheter läsaren haft med algebraiska uttryck aldrig gjort detta nödvändigt. Ernest (1987, s. 350) menar till exempel att

> mathematical expressions are commonly presented, not for purposes of comprehension, in the psycholinguistic sense of contributing to the construction of a larger meaning context, but as the initial state of a mathematical task which will be transformed in the performance of the task.

3.3 Begrepp och procedurer

Eftersom denna avhandling primärt avser att studera läsning av matematiska texter i relation till förståelse och lärande är det av intresse att diskutera läsning av texter som fokuserar på olika typer av kunskap. Eftersom mycket diskussioner och debatt förts kring kunskap om begrepp respektive procedurer inom matematik (eng. ’conceptual and procedural knowledge’) och att denna uppdelning även kan sägas ha en central roll inom mer allmänna diskussioner om kunskap och lärande (Hiebert & Lefevre, 1986), kan just dessa typer av kunskap vara intressanta att behandla också i denna avhandling. Här kommer därför läsning av texter som kan sägas behandla någon utav dessa typer av kunskap att diskuteras, texter som här kallas begreppsförklarande respektive procedurförklarande.

Även om många på något sätt diskuterar kunskap om begrepp och procedurer, kan språkbruket vid beskrivningar av dessa typer av kunskap variera och det kan då även finnas, små eller stora, skillnader i vad man avser med denna distinktion. Men här ses begreppskunskap som bestående av kunskap om egenskaper hos begrepp (eller symboler) eller relationer mellan olika begrepp, och kan också beskrivas som kontrast till procedurkunskap, som består av kunskap kring möjliga aktiviteter som kan utföras med begreppet (eller symbolen). Detta är naturligtvis en ganska oprecis beskrivning, men någon mer detaljerad definition av dessa begrepp ses inte som nödvändig för diskussionerna i detta avsnitt. Speciellt är texter av intresse i denna avhandling, och exempel på begreppsförklarande texter kan vara sådana som presenterar ett ord/begrepp med en definition och vissa egenskaper som följer av denna. Texter som behandlar metoder att lösa vissa typer av ekvationer kan ses som exempel på procedurförklarande texter.

Hiebert och Lefevre (1986) ser kunskap kring symbolanvändning som en viktig aspekt av procedurkunskap. Men procedurförklarande texter behöver inte nödvändigtvis innehålla symboler, även om det kanske är vanligt att man i en procedurförklarande text ger ett exempel på proceduren genomförd och inte bara ger en mer allmän beskrivning av proceduren. Även om en procedur i allmänhet inte måste behandla matematiska symboler, så kan man nog hålla med Hiebert och Lefevre om att just behandlingen av symboler är en central aspekt när det gäller procedurkunskap inom matematik. Men eftersom *behandlingen* av symboler är det centrala i en procedurförklarande text kan den operativa betydelsen av symboler bli viktigast att aktivera hos läsaren. En procedurförklarande text kan till exempel bestå av omskrivningar av algebraiska uttryck (eller sammansättningar av symboler i allmänhet), där det viktigaste inte nödvändigtvis är uttrycken i sig, utan vad man gör med dem (dvs. proceduren). Som diskuterades i avsnitt 3.2.1 kan det då vara viktigt med en förkunskapsbaserad representation (FB) av de algebraiska uttrycken, där endast vissa relevanta aspekter av uttryck tas med i representationen för att denna inte ska begränsas till just det specifika exemplet som behandlas i texten, utan beröra mer generella aspekter av proceduren.

Begreppsförklarande texter kan till exempel införa en ny symbol, något som kan orsaka problem i själva läsprocessen eftersom symbolen, åtminstone inledningsvis, inte nödvändigtvis kan utläsas utan endast ses som en figur (se diskussion i avsnitt 3.2). Den operativa betydelsen av symbolen behöver då inte vara i fokus, utan texten kan till exempel behandla vad symbolen står för och hur dess betydelse kan relateras till andra symboler eller begrepp.

Vissa skillnader kan alltså tänkas finnas mellan begrepps- respektive procedurförklarande texter som kan påverka läsprocessen på olika sätt. Men de exempel på möjliga skillnader som här berörts kan naturligtvis inte direkt generaliseras, utan bör endast ses som just *exempel* på hur olika egenskaper i texten avseende begrepp och procedurer kan tänkas påverka läsprocessen och den mentala representationen. Och även om någon klassificerar en given text som antingen begrepps- eller procedurförklarande, är det inte säkert att alla läsare gör samma tolkning av texten. Till exempel kan en introduktion av absolutbelopp av reella tal med hjälp av en definition anses vara en begreppsförklarande text men kan också tolkas som en beskrivning av en procedur som ska genomföras då denna nya symbol används (dvs. de två lodräta strecken). Samtidigt kan vissa typer av procedurer (eller processer) också ses som ett begrepp (eller objekt) i sig. Detta påvisar det intrikata samspel som kan finnas mellan procedur- och begreppskunskap, som också studerats mycket (t.ex. Sfard, 1991; Tall et al., 2001). Detta kanske speciellt berör just användningen av symboler, vilket också fokuseras på av Tall et al. (2001) som behandlar symbolers roll som både process och begrepp.

Kapitel 4

Empiriska studien

4.1 Syfte

Denna empiriska studie är tänkt att fungera som fortsättning och fördjupning på tidigare genomförda empiriska studier (Österholm, 2003, 2004; se också avsnitt 1.2) och naturligtvis också som en del i denna avhandling, som tillsammans med de teoretiska studierna i kapitel 3 uppfyller det övergripande syftet (se avsnitt 1.3).

Huvudfokus i hela denna avhandling är läsprocessen; hur och vad man som läsare förstår och lär sig genom att läsa en matematisk text. De två föregående kapitlen har diskuterat många aspekter av läsprocessen samt påvisat faktorer som kan påverka denna process, mer generella sådana i kapitel 2 följt av diskussioner i kapitel 3 kring mer specifika aspekter för läsning av just *matematiska* texter. Från denna mer teoretiska behandling finns många frågor som skulle vara intressanta att också undersöka empiriskt, men vissa begränsningar måste göras för genomförande av denna empiriska studie.

De teoretiska diskussionerna har inte direkt berört någon specifik nivå i utbildningssystemet eller åldersgrupp, och teorin är tänkt att vara generell i detta avseende. Men i inledningen av denna avhandling påpekades att fokus till viss del kommer att vara på övergången mellan gymnasie- och universitetsnivå (se avsnitt 1.1), något som kommer att avspeglas i denna empiriska studie, i vilken elever i slutet av gymnasieutbildningen samt studenter som läst några kurser i matematik på universitetsnivå deltagit[14].

Den fortsatta behandlingen av studiens syfte kan sägas utgå från grundmodellen för läsprocessen (se avsnitt 2.1) för att beskriva vilka begränsningar som görs och vad som kommer att fokuseras på.

Angående texters innehåll behandlas primärt matematiska texter i denna avhandling. I kapitel 3 noterades dock avsaknaden av jämförelser mellan texter från olika ämnesområden. Eftersom fokus här är på läsprocessen och inte på texter

---

[14] Ibland kommer endast att refereras till *elever* avseende gymnasieelever och *studenter* avseende universitetsstuderande.

i sig kommer inte texter att jämföras, istället kommer *läsning* av texter från olika ämnesområden att studeras.

Kunskap (inom matematik) eller innehållet i matematiska texter kan behandla begrepp eller procedurer, men denna indelning behöver inte täcka all typ av kunskap eller alla typer av matematiska texter. Men eftersom denna distinktion diskuterats mycket, kanske speciellt för matematik, finns anledning att behandla den. Denna empiriska studie kommer dock endast att innehålla studier kring begreppsförklarande texter, dels för att få en studie med ett tydligt fokus, men också för att dessa typer av texter kan sägas ha mest gemensamt med texter från många andra ämnesområden. Jämförelsen mellan läsning av texter från olika ämnesområden kan därmed göras mer rättvis.

En för matematik mycket framträdande aspekt av texters form är användningen av matematiska symboler. Diskussionerna i kapitel 3 har också visat på vissa skillnader som kan finnas mellan att läsa matematiska symboler och vanliga ord eller mellan algebraiska uttryck och vanliga meningar. Samtidigt verkar det finnas allmänna aspekter av all läsning, till exempel att den mentala representationen för både algebraiska uttryck och vanliga meningar bygger på grammatiska regler, det vill säga att avkodningen verkar kunna ske på liknande sätt. Det verkar alltså finnas ett behov att jämföra läsning av symboler och mer vanlig text, och denna empiriska studie kommer att göra just detta.

I kapitel 2 konstaterades att många studier undersökt läsprocessen i relation till texters struktur, speciellt avseende låg- och högkoherenta texter, något som aldrig verkar ha gjorts för matematiska texter. Österholm (2004) gör dock observationer som tycks peka på ganska stora problem hos svenska gymnasieelever med avkodningen av de matematiska texter som där användes. Om matematiska texter i allmänhet har så komplex uppbyggnad som påstås i litteraturen (se avsnitt 3.1) är dessa observationer kanske inte överraskande. Istället för att studera skillnader i texters struktur används därför här texter som är någorlunda högkoherenta för att på detta sätt förhoppningsvis förenkla avkodningen av texterna, så att den mentala representationen inte begränsas till den ytliga komponenten.

Läsarens förkunskaper är viktiga för läsprocessen på flera sätt, till exempel behövs vissa mer allmänna språkliga förkunskaper för att kunna skapa en textbaserad representation samt mer specifika, i förhållande till textens innehåll, för att skapa en förkunskapsbaserad representation. Förkunskaper i relation till läsprocessen kommer också att studeras i denna empiriska studie. Läsarens kön har inte nämnts som en faktor som kan påverka läsprocessen, främst för att det är svårt att teoretiskt förklara en sådan eventuell skillnad. Men allmänna könsskillnader kan trots det finnas, så även om denna studie inte fokuserar på detta kommer eventuella könsskillnader att undersökas och diskuteras. Läsarens uppfattningar kan på flera sätt påverka läsprocessen (se avsnitt 2.1.2), men detta är ett omfattande område i sig och kommer inte att behandlas i någon större utsträckning i denna studie. Likaså kommer variationer i lässituationen inte heller att undersökas, utan försök görs för att skapa så ”ideala” yttre förhållanden som möjligt samt för att få motiverade läsare som deltagare i studien.

Fokus för hela denna avhandling är läsprocessen som helhet, men denna empiriska studie kommer primärt att behandla den resulterande mentala representationen, och inte läsningen i sig. Dock kommer en liten del av studien att behandla också själva läsningen men detta görs primärt som komplement till studierna kring den mentala representationen. Hela den mentala representationen kommer inte heller att studeras, något som naturligtvis är omöjligt, utan fokus kommer att vara på olika aspekter av texternas *betydelse*. Den textbaserade och förkunskapsbaserade mentala representationen kommer därför att studeras medan omfattningen av den ytliga komponenten inte kommer att behandlas.

Syftet med denna studie kan, precis som med hela avhandlingen, till största del sägas vara av teoretisk karaktär, genom att försöka utveckla kunskapen kring läsprocessen, speciellt för matematiska texter. Denna empiriska studie kommer alltså därför att studera variationer i den mentala representationen, dels vid läsning av texter av olika typer (olika ämnen och olika form), och dels i relation till variationer i förkunskaper samt i relation till övergången mellan gymnasie- och universitetsnivå. Placering av denna studie till övergången mellan gymnasiet och universitetet kan sägas utgöra ett mer pragmatiskt syfte, där en sorts utveckling av läsförståelse hos elever och studenter avses att studeras.

4.2 Metod

Inledningsvis görs här en mer allmän beskrivning av den använda metoden, för att därefter i tre separata avsnitt (4.2.1-4.2.3) mer detaljerat behandla skapandet av det materiel som användes samt metoder för bearbetning och analys av data.

Elevers och studenters läsning av olika typer av texter fungerar som grund i denna studie. Tre olika typer av texter användes; två med matematiskt innehåll och en med historiskt innehåll. De två matematiska texterna har samma innehåll men olika form genom att den ena använder matematiska symboler medan den andra inte gör det (se avsnitt 4.2.1 för mer detaljer om texterna samt bilaga B där de tre texterna finns).

69 gymnasieelever och 37 universitetsstuderande deltog i denna studie. Eleverna gick sista terminen på det naturvetenskapliga programmet och genomförandet skedde i slutet av terminen då alla kurser i matematik i princip var avslutade, även om de ännu inte hade fått betyg i alla kurser. Studenterna hade alla läst gymnasiematematik motsvarande det naturvetenskapliga programmet, även om detta kan ha skett på olika sätt, till exempel genom basår eller komvux. Deras universitetsutbildningar var av olika typ (ingenjörs-, civilingenjörs- och lärarstuderande) men gemensamt för dem var att de vid genomförandet alla hade läst analys- och algebrakurser vid universitetet, det vill säga att de alla hade flera kursers erfarenhet av matematik på universitetsnivå.

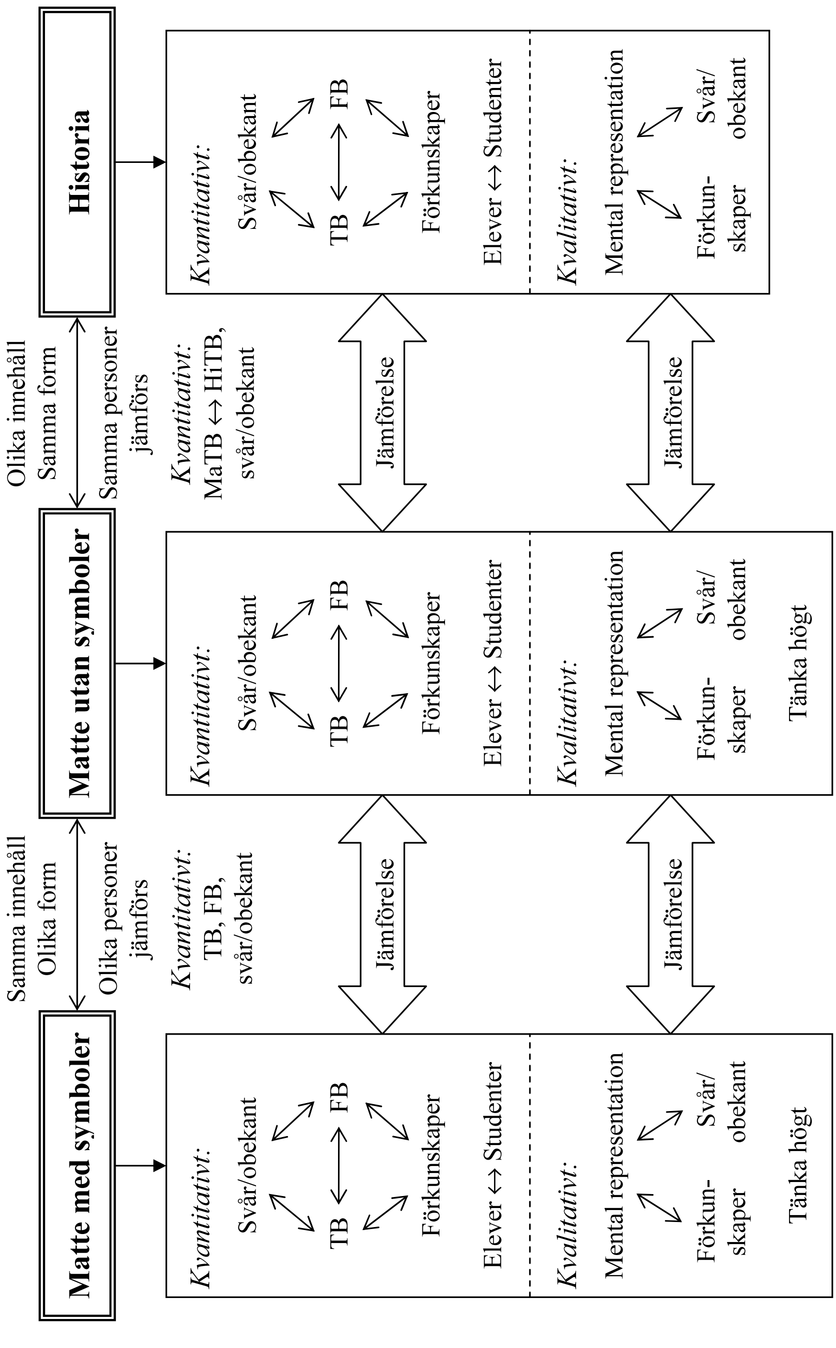
Genom kontakt med gymnasieelevernas matematiklärare kunde genomförandet ske på ett ordinarie lektionstillfälle. Eleverna informerades och tillfrågades dock i förväg om detta, och vissa personer valde att inte komma på den aktuella lektionen. Vid genomförandet observerades också personer som till stor del inte arbetade med de givna uppgifterna, och efter kontroll av deras svar på frågor (t.ex. om svar i princip helt saknades eller om svaren var uppenbart oseriösa) ges möjlighet att exkludera dessa personer från studien. Samtliga universitets-studerande ställde upp frivilligt och genomförandet skedde på deras fritid. För vissa personer låg dock denna tid efter terminstid och eftersom det var svårare att få frivilliga personer vid denna tidpunkt erbjöds en gåva (värd cirka 200 kronor) för att ställa upp. Detta gäller 20 personer av dem som deltog. Som helhet anses därför det datamaterial som erhålls komma från personer som kände sig motiverade att deltaga.

Fyra av deltagarna, två elever och två studenter, genomförde inte exakt samma sak som övriga, och i den fortsatta beskrivningen avses inte dessa fyra personers aktiviteter utan de behandlas separat i avsnitt 4.2.4. (Dessa personer deltog i den del av studien som fokuserade på själva läsningen.)

Deltagarna fick arbeta självständigt med det materiel som finns i bilaga A, som var uppdelat i ett omslag (ett vikt A3-papper) samt ett papper med inledande instruktioner, del 0, och fem häften, del 1 till del 5 inuti omslaget (i A4-format). Alla svar gavs alltså skriftligen direkt i häftena. På *framsidan av omslaget* fick deltagarna ange kön och utbildning från gymnasium och universitet inklusive betyg i matematikkurser. I *del 0* ges allmänna instruktioner om genomförandet samt specifika instruktioner om del 1. Speciellt ges instruktion om att arbeta igenom delarna i ordning och att aldrig gå tillbaka till en avslutad del. *Del 1* består av ett förkunskapstest som är tidsbegränsat (se avsnitt 4.2.2 för detaljer kring detta). *Del 2* består av en utav de matematiska texterna, med eller utan symboler, något som fördelades slumpmässigt bland deltagarna. Inför läsandet av texten instrueras om att man efteråt får ge kommentarer om vad man tyckte om texten samt svara på frågor om textens innehåll. *Del 3* innehåller just dessa olika typer av frågor om texten (se avsnitt 4.2.3 för detaljer kring dessa). *Del 4* och *del 5* är sedan en upprepning av del 2 respektive del 3 fast med historietexten och frågor om denna. Varje deltagare fick alltså läsa en utav matematiktexterna samt historietexten.

För att få deltagarna att läsa igenom texterna noggrant och koncentrerat informerades de inför läsning av varje text att de efteråt skulle få frågor om textens innehåll. Syftet med denna avhandling är att studera *förståelse* och *lärande* i läsprocessen och det är därför väsentligt att få läsaren att läsa texterna med syfte att försöka förstå och lära sig något.

Fokus i denna studie är läsprocessen, men eftersom deltagarna fick arbeta helt självständigt kan inte uteslutas att vissa personer på något sätt mer aktivt behandlade texterna eller läste (vissa delar av) texterna flera gånger. Instruktionerna inför läsningen angav dock att texten skulle läsas igenom en gång från



Figur 3. *Schematisk bild över analyser och jämförelser som genomförs i den empiriska studien.*

början till slut, och det kan nog i alla fall antas att ingen omfattande behandling skedde, det vill säga att läsprocessen i sig till största del skapade den mentala representationen. Vid genomförandet fanns också möjlighet att observera om vissa personer tycktes ta lång tid på sig med att läsa texterna.

Innan denna studie genomfördes i full skala testades den beskrivna proceduren med fyra frivilliga universitetsstuderande. Efter själva genomförandet fick dessa personer också fritt kommentera instruktioner, texter och frågeformuleringar. Detta test gjordes för att se om frågor och instruktioner var lättlästa och lättförståeliga. Endast små justeringar av formuleringar och tillägg i instruktioner genomfördes efter detta test. Ett annat syfte med detta test av materiel och procedur var att se om frågor om texterna och förkunskapstestet gav något ”utslag” och inte var för lätta eller för svåra. Naturligtvis är det svårt att med bestämdhet avgöra detta från bara fyra personers svar, men det var i alla fall ingen fråga som antingen ingen kunde besvara alls eller som alla kunde besvara helt korrekt, vilket ansågs som tillräckligt tillfredställande för att använda frågorna.

I figur 3 visas, med utgångspunkt från de tre texterna, de analyser och jämförelser som görs i denna studie, symboliserat av alla dubbelriktade pilar. Både kvantitativa och kvalitativa analyser kommer alltså att göras av samma datamaterial. Frågorna som avser att undersöka läsarens förkunskaper och den mentala representationen består inte av flervalsfrågor utan är mer ”öppna”, där läsaren fritt får skriva sina svar. Kvantifiering av dessa svar kommer att behandlas i avsnitt 4.2.2 respektive 4.2.3. De kvalitativa analyserna kommer i denna studie att användas som komplement till de kvantitativa analyserna, för att ha möjlighet att studera resultaten på olika sätt. Ingen i förväg mer specificerad metod för dessa kvalitativa analyser kommer att användas, utan dessa analyser kommer att styras av uppkomna behov från de kvantitativa analyserna.

4.2.1 Texter

De tre texter som används i denna studie är alla begreppsförklarande; en historietext som beskriver händelseförlopp kring de ryska revolutionerna och två matematiktexter som båda beskriver matematiska system och grupper (se bilaga B). Eftersom syftet är att studera förståelse och lärande vid läsning av dessa texter bör de till största del innehålla något som är relativt obekant för deltagarna. Även om samtliga är mer eller mindre bekanta med ryska revolutionen kan innehållet göras så pass detaljerat att det kan antas att det mesta är obekant för alla deltagare, eller åtminstone de flesta. Inom matematik stöter man normalt inte på gruppteori förrän i fördjupande kurser på universitetsnivå, och innehållet i matematiktexterna bör därför vara obekant för alla deltagare. Skulle det dock visa sig i de kommentarer som ges om hur bekant texten är att någon redan innan är bekant med gruppteori eller uppvisar detaljerad kunskap kring ryska revolutionen ges möjlighet att exkludera dessa personer från studien.

Matematiktexterna behandlar något som är hämtat från universitetsnivå och de utgår från definitioner för att beskriva och förklara de införda begreppen. Detta är också syftet med texterna, att på detta sätt introducera begrepp, något som kan uppfattas som typiskt för texter på universitetsnivå jämfört med texter på gymnasienivå. Matematiktexterna skapades speciellt för denna studie[15], för att vara relativt korta (maximalt en A4) men samtidigt behandla ett väl avgränsat ämne passande för både gymnasieelever och universitetsstuderande avseende förkunskaper. Skillnaden mellan de två matematiktexterna är att den ena använder matematiska symboler medan den andra inte alls gör det. För övrigt är texterna skapade för att ha samma innehåll och makrostruktur och så långt som möjligt även samma mikrostruktur. Oftast utgicks från formuleringar med matematiska symboler som ”översattes” till naturligt språk. Precis som att man i översättningar mellan olika språk oftast inte kan genomföra översättningen ord för ord, går det oftast inte att ”översätta” sammansättningar av symboler en symbol i taget, och därmed kan mikrostrukturen förändras. *Betydelsen* av det som uttrycks med symboler försöktes dock bevaras i övergången till naturligt språk, något som ibland orsakade en ganska komplex meningsbyggnad med långa meningar och bisatser[16]. Försök gjordes att hitta en så enkel meningsbyggnad som möjligt, något som gäller i allmänhet för båda matematiktexterna. Detta gjordes eftersom Österholm (2003, 2004) observerade ganska stora problem hos gymnasieelever att avkoda de matematiktexter som då användes. För att förenkla skapandet av en mer sammanhängande mental representation hos deltagarna i denna studie gjordes försök att skapa en högkoherent text med enkel meningsbyggnad. Detta gjordes till exempel med en tydlig makrostruktur i texterna och genom att inte använda olika ord för att referera till samma sak. Dock gjordes detta överlag på ett mer intuitivt sätt utan hjälp av någon detaljerad textanalys.

Historietexten som används i denna studie hämtades från Vidal-Abarca et al. (2000), som använde den i en studie om hur olika sätt att förbättra texter påverkar läsning av dem. Den version som har hög koherens används här för att historietexten i detta avseende inte ska skilja sig från matematiktexterna, men för att få en lagom lång text (högst en A4) används dock inte hela texten från Vidal-Abarca et al. Eftersom texten var på engelska översattes den till svenska, något som skedde så ordagrant som möjligt för att på så sätt bevara den befintliga strukturen.

4.2.2 Läsarens förkunskaper

Förkunskapstestet som används i denna studie består av tio ord, fem vardera för matematik- och historietexterna som läses, till vilka läsaren får ge sina spontana

[15] Dock har vissa delar och formuleringar hämtats från Keyser (1959-1960), till exempel begreppet (matematiskt) system och vissa formuleringar utan matematiska symboler.

[16] Detta kanske kan sägas motsvara den kompakthet hos symbolspråket som ibland påtalas (t.ex. Blanton, 1991; Dunlop & Strope, 1982; Kane, 1968).

tankar och associationer[17]. En tidsbegränsning på sex minuter användes för denna del för att deltagarna inte skulle fundera så mycket kring varje ord, utan just ge sina *spontana* associationer[18]. Syftet med att testa förkunskaper på detta sätt är att försöka få en bild av det associativa nätverket i LTM kring de ord som ges. De associationer som aktiveras i första steget i CI-modellen beror inte på sammanhanget ordet står i, och detta sätt att testa förkunskaper är därmed relevant också i relation till läsning av en specifik text. Dock är det omöjligt att få en bild av alla associationer (som kan påverka läsprocessen) på detta sätt, men det antas här att vissa av de starkaste associationerna uppvisas i detta test. De ord som används i testet finns också i texterna och kan sägas vara centrala i textens behandling. Samma ord används för de två olika matematiktexterna.

Deltagarnas betyg från matematikkurser kan också ses som ett relevant mått på förkunskaper. Detta är dock inte lika specifikt som associationer till ord från texten, utan är mer allmänt och inkluderar till exempel också mått på procedurkunskaper. Men eftersom mycket av matematikkunskap kan anses bygga på tidigare kunskap (Brunner, 1976; Hubbard, 1990, 1992) kan matematikbetyg till viss del vara ett relevant mått genom att avspegla någon sorts allmän utveckling eller mognad inom matematik. Detta kan vara relevant i förhållande till innehållet i de texter som används i denna studie. Betyg i historia ses dock inte ha samma egenskap i förhållande till innehållet i historietexten, speciellt eftersom samma sorts beroende av tidigare kunskap inom ämnet inte anses finnas inom historia. Därför blir det här inte relevant att använda betyg i historia som mått på förkunskaper. Till största del kommer associationer till orden därmed att användas som mått på förkunskaper för både matematik och historia, för att använda samma sätt att mäta förkunskaper i relation till de olika texterna.

För att få ett kvantitativt mått på deltagarnas förkunskaper utifrån deras associationer används en indelning av associationer baserat på hur välorganiserad kunskapen är, hämtad från Langer (1984). Tabell 2 är en översatt version av en liknande tabell från Langer (1984, s. 470), med de ursprungliga exemplen utbytta mot exempel för ord som används i denna studie. Tabellen beskriver, med utgångspunkt från olika kategorier av möjliga associationer, tre nivåer för hur välorganiserad kunskapen är. Som utgångspunkt behövs en definition av det ord som associeras till, för att avgöra hur en specifik association förhåller sig till denna och för att därmed kunna placera associationen i en kategori. I denna studie har detta gjorts genom att för varje ord ange typiska exempel för varje kategori (se bilaga C). Dessa exempel skapades dels innan analysen av deltagarnas associationer genomfördes men utökades också kontinuerligt i och med själva analysen

[17] Orden som används är för matematiktexterna; addition, mängd, invers, definition och heltal, samt för historietexten; tsar, proletariat, Lenin, samhällsklass och bolsjevik.

[18] Detta genomfördes med några olika tidsbegränsningar då denna procedur testades inför genomförandet av studien.

Tabell 2. *Kategorier av associationer till ord i förhållande till organisation av kunskap (Langer, 1984, s. 470).*

Nivåer av organisation av kunskap		
Hög organisation	**Partiell organisation**	**Diffus organisation**
Överordnat begrepp (t.ex. addition – ett räknesätt)	Exempel (t.ex. invers - 1/x är invers till x)	Association (t.ex. mängd – venndiagram)
Definition (t.ex. bolsjevik – medlem i Lenins parti)	Attribut (t.ex. definition – betydelse)	Morfem; bygger vidare på (del av) ordet (t.ex. proletariat – proletariatets diktatur)
Analogi (exempel saknas)	Definierande egenskap (t.ex. heltal – tal utan decimaler)	Ljudliknande (exempel saknas)
Koppling; relaterar två begrepp (t.ex. tsar – en sorts kejsare/kung i Ryssland)		Personlig erfarenhet (t.ex. Lenin – historialektion)

för att få samma bedömning av alla associationer. Bedömningsmallarna i bilaga C är alltså till viss (och ibland stor) del uppbyggda av de svar som erhållits av deltagarna i denna studie. Det finns därmed möjlighet att granska den analys som genomförts genom dessa bedömningsmallar.

Poängsättning av associationerna sker genom att sätta ett, två respektive tre poäng till de tre nivåerna diffust, partiellt respektive högt organiserad kunskap. Direkt felaktiga eller irrelevanta associationer (i förhållande till den definition som utgås från) ger noll poäng. Kategorierna under diffust organiserad kunskap kan därmed i denna studie sägas vara mer begränsade än vad som är fallet hos Langer (1984), eftersom krav här ställs på att associationen ska vara relevant i förhållande till betydelsen av ordet som associeras till. Om flera olika typer av associationer finns till samma ord ges endast poäng för den högsta förekommande nivån och varje enskild association poängsätts inte. Varje person kan alltså få noll till tre poäng för varje ord som associeras till.

För denna studie blir det alltså viktigast att skilja mellan de tre nivåerna och inte nödvändigtvis att placera associationerna i en specifik kategori. Men dessa kategorier bygger upp de tre nivåerna och hjälper till med att kunna placera olika associationer. Det kan dock vara väsentligt att diskutera mer allmänna skillnader mellan de tre nivåerna och hur kategorier från olika nivåer skiljer sig åt. Dessa diskussioner är specifika för denna studie och behöver inte vara representativa för andra som använt detta sätt att studera förkunskaper (t.ex. Langer, 1984).

Kategorierna under diffus organisation kan alla sägas inte direkt eller explicit beröra betydelsen av ordet. Dessa kategorier berör till exempel användning av ordet eller ospecificerade associationer till ordet, som inte direkt behandlar betydelsen. Just denna aspekt av associationer pekar på en skillnad mellan kategorierna ’association’ och ’koppling’, att kopplingen handlar om att explicit ange relationen mellan ordet och något annat begrepp, som belyser betydelsen av ordet. Kategorierna under hög organisation kan i allmänhet sägas beröra ordets betydelse som helhet, medan kategorierna under partiell organisation behandlar någon del av ordets betydelse. Till exempel kan både ’överordnat begrepp’ och ’attribut’ sägas beröra ordets relation till något mer allmänt begrepp, men där ett attribut handlar om en viss aspekt av ordets betydelse och inte ordet som helhet.

4.2.3 Läsarens uppfattningar och mentala representation

De uppfattningar som här avses är kommentarer som deltagarna gav direkt efter att ha läst varje text, om hur lätt/svår texten var att läsa samt hur (o)bekant innehållet i texten var. Detta skiljer sig från de mer generella uppfattningar som diskuterades i kapitel 2, även om deltagarnas kommentarer också kan beröra just mer generella uppfattningar om till exempel läsning, texter eller ämnena.

Deltagarna fick dels ange hur lätt/svår respektive (o)bekant texten var på en fyragradig skala och dels fritt beskriva vad som gjorde texten lätt/svår respektive (o)bekant. Svarsalternativen på de fyragradiga skalorna är ”Mycket lätt”, ”Ganska lätt”, ”Ganska svår” och ”Mycket svår” samt motsvarande från ”Mycket bekant” till ”Mycket obekant”. Kvantifiering av läsarnas uppfattningar kan därmed direkt göras från deras val på de fyragradiga skalorna genom att ange hur svår respektive obekant texten var med tal ett till fyra, där fyra motsvarar ”Mycket svår/obekant”. Eftersom deltagarna själva i princip skapar kvantifieringen av sin uppfattning bör man vara försiktig med analyser av dessa siffror eftersom det inte är säkert att alla uppfattar till exempel skillnaden mellan ”Mycket lätt” och ”Ganska lätt” på samma sätt eller vad som menas med att en text är lätt eller svår att läsa. För det sistnämnda finns dock möjlighet att granska deras beskrivningar av vad som gjorde texten lätt/svår.

Olika metoder kan användas för att komma åt en persons mentala representation. Österholm (2004) lät elever bland annat återberätta texten så noggrant som möjligt men noterade vissa brister med denna metod genom att elevernas uppfattningar om matematik samt tidigare erfarenheter inom ämnet kunde påverka hur de besvarade uppgifterna, oberoende av vad de kom ihåg från texten. Det kan också med denna metod vara svårt att värdera resultatet, till exempel att kunna skilja mellan en rent ytlig memorering av texten och en djupare förståelse för textens innehåll. En läsare kan också ha förstått en del av en text utan att därefter komma ihåg denna del i efterföljande uppgift att återberätta texten.

I denna studie används specifika frågor som metod för att komma åt deltagarnas mentala representationer. Detta kan sägas ge en lokal bild av den mentala representationen kring de ord och begrepp frågan berör. Ett alternativ till specifika frågor skulle kunna vara att endast ge ett begrepp från texten att låta läsaren associera till och ange vad man kommer ihåg om detta. Men för att förenkla kvantifieringen ses specifika frågor som mer lämpliga eftersom man för dessa kan poängsätta på en skala av rätt och fel i förhållande till texten.

Vilken metod man än använder sig av sker detta på ett indirekt sätt, det vill säga man kan aldrig direkt observera den mentala representationen. Istället får man observera någon typ av aktivitet, eller resultatet från denna aktivitet, till exempel vad personer säger eller skriver som svar på frågor. Dessa aktiviteter måste bero på den mentala representationen, men det är inte trivialt att avgöra exakt *hur* detta sker. I dessa aktiviteter finns också möjligheten att något *skapas* i den mentala representationen i och med själva aktiviteten, och att metoden därmed inte undersöker en befintlig struktur. Detta problem finns dock i alla typer av undersökningar genom att själva undersökningen kan påverka det man vill studera. I denna studie väljs att förenkla situationen genom att se deltagarnas svar som mer eller mindre direkta mått på den mentala representationen. Dock kommer svaren på frågor att undersökas för att se om det finns risk för att frågan inte primärt avspeglar redan befintlig struktur i LTM.

Valet att i denna studie låta deltagarna *skriva* sina svar på frågorna är till största del rent praktiskt motiverat för att kunna ha ett stort antal deltagare. Att muntligen besvara frågor kan ses som ett bättre sätt att komma åt den mentala representationen eftersom svaren kan ges mer direkt och spontant, utan att också behöva formulera sig i skrift. Skriftliga svar kan dock uppvisa saker som muntliga inte kan, nämligen användande av sådana symboler som man kanske inte kan utläsa. Detta kan vara speciellt viktigt mot bakgrund av diskussionerna kring att se symboler som figurer utan att utläsa dem.

Eftersom fokus i denna studie ligger på den textbaserade (TB) och den förkunskapsbaserade (FB) komponenten av den mentala representationen används frågor av olika typ, som primärt avser avspegla TB respektive FB[19]. TB-frågor är alltså sådana som kan besvaras direkt med någon information som finns i texten, medan FB-frågor kräver någon mer information/kunskap. Delar av vissa FB-frågor kan dock också utnyttjas som TB-fråga eftersom deltagarna ombads skriva partiella svar om de inte kunde besvara hela frågan samt att beskriva varför de inte kan besvara frågan alls om så är fallet. För att TB-frågor inte ska avspegla en ytlig komponent i den mentala representationen formuleras dessa inte på sätt som för starkt påminner om specifika formuleringar i texten. För att kunna jämföra resultat från de två olika matematiktexterna användes samma åtta frågor för dessa texter. Dessa frågor, tillsammans med de nio frågorna för historietexten, finns i bilaga A. Ordningen på frågorna, som presenterades tre per sida, påverkades av försök att se frågor vars formulering eller eventuella svar skulle kunna tänkas påverka svar på andra frågor. Till exempel placerades en fråga om relationen mellan matematiskt system och grupp inte på samma sida som en fråga om vad som menas med ett

[19] Två av frågorna för historietexten hämtades från Vidal-Abarca et al. (2000, s. 116) och resten skapades speciellt för denna studie.

matematiskt system. Deltagarna instruerades också att arbeta med frågorna i ordning och att aldrig gå tillbaka till föregående sidor.

För att få en kvantifiering av svaren på frågorna skapades för varje enskild fråga kategorier av svar, som ordnades hierarkiskt. Kategorierna motsvarar svar som anses till olika grad fullständiga eller korrekta. Svar tillhörande en viss kategori ska alltså ge mer eller mindre poäng än svar tillhörande en annan kategori, beroende på hur dessa kategorier är placerade i förhållande till varandra i hierarkin. Dessa kategorier skapades dels innan analysen av svar genomfördes men uppdaterades också kontinuerligt i och med analysen. En viss kategori kunde då till exempel delas upp i flera kategorier eller beskrivningen av en viss kategori kunde kompletteras och förtydligas. Även om stor möjlighet gavs för att låta datamaterialet styra kategoriseringarna visade sig deltagarnas svar till stor del passa de på förhand skapade kategorierna. På liknande sätt som för förkunskaps-testet kompletterades bedömningsmallarna kontinuerligt, dels för att få samma bedömning av alla svar och dels för att möjliggöra en granskning av de analyser som genomförts.

Efter att kategorier skapats för alla frågor tillhörande matematiktexterna jämfördes dessa kategorier för att poängsätta kategorierna på ett likvärdigt sätt för alla frågor, där TB- respektive FB-frågor dock behandlas separat. Frågorna till historietexten behandlas för sig på samma sätt. Alla kategorier karakteriserades i denna jämförelse bland annat avseende om svar i kategorin primärt avspeglar förståelse för ett enstaka påstående från texten eller något förhållande mellan olika delar i texten. Vissa kategorier kom efter denna karakterisering att värderas på samma sätt, det vill säga placeras på samma nivå i hierarkin. I bilaga C finns alla kategorier för varje fråga, karakteriseringar av dessa kategorier samt den poäng-sättning detta resulterar i. För kategorierna av svar ges i bilagan också exempel på svar från deltagare som använts som tillägg i bedömningsmallen för att förtydliga beskrivningen av innehållet i kategorin och skillnader mellan olika kategorier.

Kvantifieringen består därmed av en TB-poäng och en FB-poäng för varje läst text (MaTB, MaFB, HiTB och HiFB), som skapas genom att addera poängen från alla TB-frågor respektive FB-frågor för vardera text. Dessa poäng ses primärt som ett mått på *kvaliteten* hos de två komponenterna av den mentala representationen eftersom bedömningen av svaren på frågorna hela tiden utgår från vad som anses vara mer eller mindre fullständigt eller korrekt i förhållande till texten. En person kan till exempel skapa en väl utvecklad FB utan att få hög FB-poäng genom att de associationer till LTM som görs orsakar en sorts konflikt med textens innehåll, och svar på frågorna kan därmed komma att klassificeras som felaktiga och ge låga poäng eller inga poäng alls. Att studera hur förkunskaper kan påverka den mentala representationen på olika sätt är en intressant aspekt, som också kan behandlas i den kvalitativa delen av analysen.

4.2.4 Tänka högt

Fyra personer, två gymnasieelever och två universitetsstuderande, genomförde inte exakt samma uppgifter som övriga deltagare. Dessa personer fick istället läsa endast en text, någon utav de två matematiktexterna, och fick muntligen *tänka högt* vid läsning av texten. Texterna fördelades så att de båda texterna lästes av både gymnasieelever och universitetsstuderande. Förutom inför själva läsandet av texten fick de samma skriftliga instruktioner och genomförde samma uppgifter som övriga deltagare. De fyra personerna fick därmed fylla i bakgrundsinformation, göra förkunskapstestet med endast de fem matematikorden, genomföra själva läsningen och avslutningsvis svara på frågorna om texten. Precis som övriga deltagare fick de alltså besvara alla frågor skriftligen. Detta genomfördes med en deltagare åt gången och vissa instruktioner, specifika för denna del av studien, gavs muntligen vid genomförandet.

Inför läsning av texten gavs instruktioner om hur texten skulle läsas där deltagarna uppmanades att säga allt de kommer att tänka på när texten läses, till exempel hur de förstår och uppfattar texten eller vilka associationer de gör. Innan matematiktexten lästes övades denna procedur på en kort del av historietexten som övriga deltagare fick läsa. Läsaren uppmuntrades då att säga vad som helst som man kommer att tänka på och vissa hjälpande frågor ställdes, såsom om läsaren förstod allt eller kände igen något från texten, till exempel något enstaka ord. Liknande kommentarer gavs också då matematiktexten lästes, vid tillfällen då deltagaren hade svårt att spontant ge kommentarer. Dock frågades aldrig om något specifikt om textens innehåll. Allt spelades in med bandspelare och transkriberades sedan verbatim.

Hela texten presenterades inte direkt för läsaren utan delades upp i mindre delar, som i tur och ordning presenterades på en datorskärm[20]. En del av texten gavs på skärmen och lästes tyst igenom. Därefter rensades skärmen och läsaren fick tänka högt kring det som nyss lästes. Då denna procedur testades inför genomförandet av studien fanns texten kvar på skärmen då läsaren fick ge sina kommentarer, något som gjorde att kommentarerna till stor del verkade utgå från texten och inte från läsarens mentala representation av texten. Därför valdes att istället rensa skärmen efter att en del lästs igenom. Då läsaren kommenterat färdigt gavs nästa del av texten på datorskärmen, och tidigare genomlästa delar av texten visades aldrig igen. Deltagarna informerades om detta upplägg inför genomförandet.

Att få tänka högt vid läsning kan tänkas påverka läsprocessen och den mentala representationen. Ericsson och Simon (1980, s. 215) konstaterar dock att ”verbalizing information is shown to affect cognitive processes only if the instructions require verbalization of information that would not otherwise be attended to”.

[20] Båda matematiktexter delades in på samma sätt, och i bilaga B finns denna indelning markerad i den ena texten.

Eftersom inga detaljerade instruktioner gavs om vilka typer av kommentarer som skulle ges vid läsning ses det inte som något problem att deltagarna tvingas verbalisera sina tankar. I huvudsak är alltså samma process aktiv för deltagarna i denna del av studien som för övriga deltagare.

Analyser av resultatet från denna del av studien kan till viss del komma att styras av övriga delar av studien genom att utgå från vissa hypoteser eller observationer från andra delar som här kan studeras på annat, kompletterande sätt. Mer fristående analyser kommer dock också att genomföras, med fokus på läsprocessen; hur förståelsen byggs upp och förändras vid läsningen samt om och hur läsarens förkunskaper och uppfattningar kan påverka läsförståelsen.

4.3 Resultat och analys

De fyra personer som fick läsa en text och tänka högt behandlas separat i avsnitt 4.3.6 och övrig behandling i detta avsnitt avser inte resultat från dessa personer.

Bland alla deltagare exkluderas sex gymnasieelever och en universitetsstuderande från det resultat som behandlas här. Eleverna som exkluderas uppvisade ett ointresse att genomföra uppgiften och gav endast ett fåtal eller uppenbart oseriösa svar på frågorna, eller hann inte genomföra alla uppgifter på grund av sen ankomst. Den universitetsstuderande som exkluderas hade tidigare studerat gruppteori och matematiktexten innehöll för denna student inget obekant alls. Eftersom syftet med texterna var att de till största del skulle behandla något nytt för läsaren exkluderas resultatet från denna person. Totalt behandlas därmed resultat från 61 elever och 34 studenter (exklusive de fyra personer som fick läsa en text och tänka högt). Tabell 3 visar dessa personer uppdelade med avseende på vilken typ av matematiktext de läste och kön.

Den fortsatta behandlingen av resultat från denna studie delas upp i avsnitt som fokuserar på olika aspekter. Ett visst överlapp finns dock mellan dessa, och i varje avsnitt beskrivs inledningsvis vad som kommer behandlas i det aktuella avsnittet. Mer diskussioner kring resultat som presenteras här kommer att genomföras i kapitel 5.

Tabell 3. *Antal deltagare uppdelade med avseende på om de läste matematiktexten med eller utan symboler samt med avseende på kön.*

Gymnasieelever				**Universitetsstuderande**			
Symboler		**Ej symboler**		**Symboler**		**Ej symboler**	
30		31		16		18	
Kvinnor	*Män*	*Kvinnor*	*Män*	*Kvinnor*	*Män*	*Kvinnor*	*Män*
13	17	11	20	3	13	7	11

Tabell 4. *Möjliga poäng för de kvantitativa mått som används i den empiriska studien.*

	Matematik	Historia
Förkunskaper	0-15	0-15
TB	0-19	0-26
FB	0-13	0-16
Svårläst text	1-4	1-4
Obekant innehåll	1-4	1-4

Kvantitativa mått på läsarens förkunskaper, TB, FB och uppfattning om texterna kommer användas kontinuerligt i behandlingen av resultaten. Tabell 4 visar de skalor som används för respektive variabel (se avsnitt 4.2.2-4.2.3 för skapandet av dessa skalor). De statistiska analyser som kommer att genomföras handlar om samband mellan två variabler inom en grupp samt om skillnader mellan två grupper med avseende på en variabel. Eftersom det inte kan förutsättas att dessa variabler är normalfördelade kommer icke-parametriska tester att användas för de statistiska analyserna[21]. Spearmans rangkorrelationskoefficient kommer att användas vid analys av samband mellan variabler, där koefficienten r_s beräknas. För jämförelser mellan grupper kommer Mann-Whitneys U-test att användas. För båda dessa typer av analyser anges sannolikheten (p) att sambandet eller skillnaden uppstått av en slump och sambandet eller skillnaden sägs vara statistiskt signifikant om p understiger 0,05 (dvs. signifikansnivån 0,05 används). Nivån 0,01 kommer också att anges då den är uppfylld. I alla analyser kommer signifikansprövningen att genomföras dubbelsidigt.

Måtten på förkunskaper, TB och FB beräknas alla genom att summera resultaten på olika frågor, där alla frågor för ett givet mått avser att mäta delar av samma ”fenomen” hos deltagarna. För att studera dessa mätningars homogenitet studeras korrelationen mellan olika frågor samt mellan enskilda frågor och summan av alla frågor (se tabeller E, F och G i bilaga D för alla beräknade korrelationer och detaljer kring signifikans). För alla sex mått (tre mått för respektive text) finns starka, positiva korrelationer mellan varje enskild fråga och summan. Mellan olika frågor finns större variationer bland måtten. För mått på förkunskaper i matematik finns signifikanta korrelationer för fyra av tio relationer och för förkunskaper i historia gäller detta för fem av tio relationer. Motsvarande siffror för MaTB, HiTB, MaFB och HiFB är fem av 15, två av 15, två av sex

[21] Förkunskapspoängen (se figur 4) verkar kunna vara normalfördelad, även om en viss asymmetri finns. TB och FB uppvisar dock överlag inga tendenser till att vara normalfördelade, det finns till exempel en så kallad golveffekt för dessa variabler (se figur A i bilaga D).

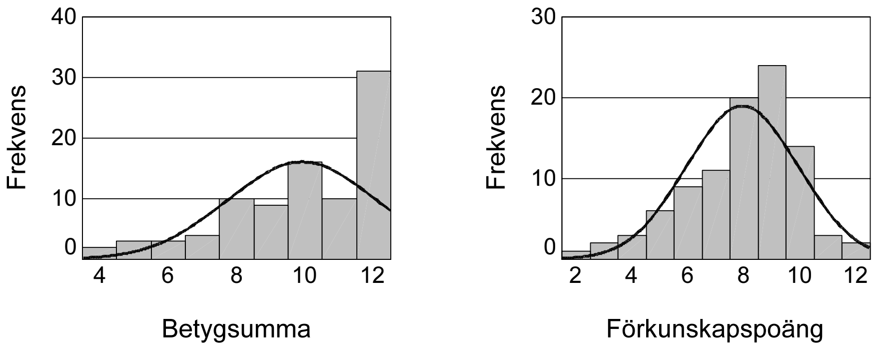
respektive noll av sex. Man kan notera att de olika frågorna avser att ha en viss spridning, det vill säga inte att mäta *exakt* samma kunskap/förståelse, vilket kan förklara variationer i korrelationer mellan frågor.

4.3.1 Förkunskaper och den mentala representationen

Fokus i detta avsnitt ligger på läsarens förkunskaper och relationer till den mentala representationen, det vill säga på relationer mellan TB, FB och förkunskaper för varje text, samt jämförelser utifrån detta mellan de tre texterna.

Betyg kan tas som ett mått på förkunskaper men kommer inte att användas i någon större utsträckning i denna studie (se diskussion i avsnitt 4.2.2). Matematikbetygen visar också upp så kallad takeffekt, eftersom så många deltagare har högsta betyg i alla matematikkurser från kurs A till kurs D på gymnasiet. För att jämföra betyget som mått på förkunskaper med det mått som används i denna studie, kvantifieras betygen genom att ansätta poäng 1, 2 och 3 för betyg G, VG respektive MVG. Sedan summeras poängen för alla fyra kurser A till D, vilket ger en möjlig betygsumma från tre till tolv. Spridningen för de två sätten att mäta förkunskaper på visas i figur 4, där takeffekten för betyget som mått blir tydlig. Förkunskapsmåttet som används i denna studie uppvisar ingen sådan tydlig takeffekt. Vissa universitetsstuderande har inte fått betyg på det sätt som görs på gymnasiet idag, och dessa personer exkluderas därför från behandlingar som använder sig av betyget. Likaså exkluderas personer som ej angett alla betyg.

Bland de 59 gymnasieelever som har angett betyg i alla kurser A till D finns en positiv och signifikant korrelation mellan betygsumman och förkunskapsmåttet ($r_s = 0{,}305$, $p = 0{,}019$). Detta kan sägas stärka validiteten för den metod att mäta förkunskaper som används i denna studie. Mot bakgrund av ovan diskussion om



Figur 4. *Spridning av deltagare avseende betygsumma för matematikkurser A till D på gymnasiet (till vänster) och avseende resultat på det förkunskapstest som används i denna studie (till höger). Tillhörande normalfördelningskurvor är inritade.*

betyg väljs att endast använda associationer till ord som mått på förkunskaper i den fortsatta behandlingen.

För gruppen av alla deltagare (N = 95) finns en positiv och signifikant korrelation mellan förkunskaper i matematik och förkunskaper i historia (r_s = 0,344, p = 0,001). Hur detta ska tolkas kan dock vara svårt att avgöra. Till exempel kan möjligen en viss typ av kunskapssyn påverka en persons organisation av kunskap i allmänhet, något som skulle kunna avspeglas på alla ämnen. Oberoende av orsaken till denna korrelation är observationen viktig i sig när man vill studera vad som är speciellt med läsning av de olika texterna, där man antingen vill försöka bortse från eventuella effekter av variationer i förkunskaper eller just försöka studera effekten av sådana variationer. Just sådana diskussioner kommer också att genomföras i denna studie.

I tabell 5 visas beräknade korrelationer mellan förkunskaper och komponenter av den mentala representationen. Där ses att bättre förkunskaper till viss del ger bättre mental representation av texter, något som också var förväntat. De två matematiktexterna uppvisar i tabellen liknande egenskaper avseende samband mellan förkunskaper och den mentala representationen samt avseende relationen mellan TB och FB. Inga stora skillnader finns mellan motsvarande korrelationskoefficienter för de olika matematiktexterna.

Det finns en skillnad mellan matematiktexterna å ena sidan och historietexten å andra sidan i tabell 5. Korrelationskoefficienten för sambandet mellan TB och FB för matematiktexterna är betydligt större än koefficienterna för övriga två samband, medan alla koefficienter för historietexten är av samma storleksordning. Detta pekar på att det finns en skillnad i relationen mellan skapande av TB och FB för de olika ämnena, eller att FB-frågorna har olika karaktär för de olika texterna. Man kan också notera en viss skillnad mellan FB-frågorna för ämnena. Mate-

Tabell 5. *Korrelationer mellan förkunskaper och komponenter av den mentala representationen för de tre texterna.*

	Förkunskap & TB	**Förkunskap & FB**	**TB & FB**
Matte med symboler (N = 46)	r_s = 0,330* p = 0,025	r_s = 0,264 p = 0,076	r_s = 0,628** p = 0,000
Matte utan symboler (N = 49)	r_s = 0,305* p = 0,033	r_s = 0,156 p = 0,286	r_s = 0,642** p = 0,000
Historia (N = 95)	r_s = 0,324** p = 0,001	r_s = 0,304** p = 0,003	r_s = 0,264** p = 0,010

* Signifikant korrelation vid nivå 0,05.

** Signifikant korrelation vid nivå 0,01.

matikfrågorna berör ofta en sorts tillämpning av det texten behandlar, något som kanske inte skapas i den mentala representationen direkt vid läsning av texten, utan först när frågan ställs. Även om historiefrågorna inte direkt handlar om tillämpningar på samma sätt som matematikfrågorna, finns möjligheten att den mentala representationen ändras/skapas vid frågeställningen även för historietexten. Det är alltså svårt att här avgöra vad en skillnad i relationen mellan TB och FB för de olika ämnena beror på – detta skulle behöva studeras mer noggrant.

Att bättre förkunskaper kan hjälpa till att skapa en bättre mental representation för texten var alltså väntat. Men för att också studera en eventuell annan påverkan av förkunskaper på läsprocessen kan behandlingen av *invers* studeras för matematiktexterna. Detta ord finns med i förkunskapstestet, används i texterna och betydelsen efterfrågas i första matematikfrågan. Jämförelser mellan varje deltagares svar på frågan och svar på förkunskapstestet kan visa om och hur texten påverkat deras uppfattning om inverser. 18 personer (19 %) ger ett svar på frågan om vad som menas med invers som inte direkt kan relateras till texten och som inte endast anger att personen inte vet. Dessa svar är av tre typer; allmänna förklaringar (t.ex. ”tvärtom” eller ”omvändning”), den multiplikativa inversen eller en funktions invers. Dessa tre typer av svar ges också av de 18 personerna som svar på förkunskapstestet för ordet invers. 14 personer upprepar samma svar på frågan efter att texten lästs som gavs på förkunskapstestet (nio, fyra respektive en person för de tre typerna) medan åtta personer ger (minst) en typ av svar på förkunskapstestet men någon annan av de tre typerna efter att ha läst texten. Exakt hur förkunskapen påverkar läsprocessen är svårt att avgöra, möjligheten finns ju att vissa personer efter att ha läst texten skriver något de vet sedan tidigare för att de inte kommer ihåg vad texten sade om just invers. Det finns också 11 personer som ger någon av de tre typerna av svar på förkunskapstestet men som sedan anger att de inte vet exakt vad som menas med invers efter att ha läst texten. Möjligheter finns att förkunskapen också på ett mer direkt sätt påverkar läsprocessen och tolkning av det som står i texten på ett sådant sätt att förkunskapen får en mer framträdande roll än själva texten. En sådan typ av påverkan blir tydlig för två personer som relaterar a' till derivatan och som svarar att inversen antingen *är* derivatan eller har med derivatan att göra.

Svaren från deltagarna på fråga två för matematiktexterna visar också hur förkunskaper kan ”ta överhand” vid läsning. För 23 personer blir det uppenbart att de inte uppfattat att ordet *grupp* ges en specifik, ny betydelse i texten. I svaren från dessa personer blir det nämligen tydligt att de använder en mer vardaglig betydelse av ordet, som en samling av flera saker. Detta gör att vissa personer ser *grupp* och *mängd* som synonymer, och flera svarar också att en grupp är en del av ett system.

4.3.2 Mental representation för olika typer av texter

Fokus i detta avsnitt ligger på jämförelser mellan läsning av de olika texterna, i första hand mellan de två matematiktexterna respektive mellan matematiktexten utan symboler och historietexten. Den mentala representationen studeras i detta avsnitt och jämförelser mellan texterna avseende läsarnas uppfattningar om texterna och läsningen behandlas i avsnitt 4.3.4.

En viktig faktor i läsprocessen är en sorts allmän läsförmåga, det vill säga en allmän språklig kunskap om till exempel meningsbyggnader och avkodning av text. Personer med en bättre sådan allmän kunskap borde alltså kunna skapa en bättre TB än personer med sämre sådan kunskap. Detta bör också gälla för texter i allmänhet, det vill säga oberoende av textens innehåll eftersom det handlar om en förmåga att avkoda strukturen i texten. Men eftersom även förkunskaper inom ämnet påverkar skapandet av en TB samt att det har visat sig också finns en korrelation mellan förkunskaperna i matematik och historia, räcker det inte att bara observera en korrelation mellan TB för de olika texterna eftersom en sådan korrelation till stor del kan bero på förkunskaperna. Det finns i gruppen som läste matematiktexten utan symboler ($N = 49$) en positiv och signifikant korrelation mellan TB för matematik- och historietext ($r_s = 0{,}474$, $p = 0{,}001$). Dock finns denna korrelation inte i gruppen som läste matematiktexten med symboler ($p = 0{,}698$, $N = 46$). Eftersom förkunskaper har visat sig påverka skapandet av TB på liknande sätt för de båda matematiktexterna finns det alltså här någon annan faktor som påverkar läsförståelsen. Detta kan vara den allmänna läsförmågan som är aktiv för historietexten och matematiktexten utan symboler men som inte verkar ha samma inverkan på läsning av matematiktexten med symboler. Eftersom deltagarna läste historietexten efter matematiktexten kan det dock tänkas att de olika korrelationerna kan bero på att läsningen av matematiktexten påverkade hur de därefter läste historietexten. Denna påverkan kan alltså vara olika för de olika grupperna. Det finns också en skillnad mellan grupperna avseende TB för historietexten, där gruppen som läst matematiktexten utan symboler har ett högre medelvärde ($m = 7{,}76$ och $m = 6{,}13$ för respektive grupper). Men denna grupp har också ett högre medelvärde på förkunskaper i historia ($m = 8{,}37$ och $m = 7{,}89$). Ingen av dessa skillnader är dock statistiskt signifikant. Skillnaden mellan medelvärdena på TB ligger dock nära signifikansnivån ($p = 0{,}081$), vilket inte skillnaden mellan förkunskaper gör ($p = 0{,}329$), och det kanske därmed kan finnas en liten effekt av vilken typ av matematiktext som läses på resultatet vid läsning av historietexten. Men den tydliga avsaknaden av korrelation mellan TB för matematik- och historietext för gruppen som läste matematiktexten med symboler gör det troligt att någon mer allmän aspekt av läsning påverkat detta resultat och inte endast den specifika situation deltagarna ställdes inför.

Jämförelser mellan grupperna som läste matematiktexten med symboler ($N = 46$) respektive utan symboler ($N = 49$), avseende förkunskaper, TB och FB för matematiktexten visar ingen signifikant skillnad mellan gruppernas medelvärden på förkunskaper[22] ($p = 0{,}486$) men signifikanta skillnader avseende

[22] Medelvärden på förkunskap i matematik för grupperna som läste matematiktexten med symboler och utan symboler är 7,74 respektive 8,12.

Tabell 6. *Jämförelser av medelvärden av förkunskaper, TB och FB för gymnasieelever och universitetsstuderande.*

	Förkunskaper	**TB**	**FB**
Matte med symboler			
Elever (N = 30)	7,63	3,77	3,00
Studenter (N = 16)	7,94	4,94	4,06
Skillnad	*0,31*	*1,17*	*1,06*
Matte utan symboler			
Elever (N = 31)	8,00	5,26	4,10
Studenter (N = 18)	8,33	8,67	5,50
Skillnad	*0,33*	*3,41**	*1,40**
Historia			
Elever (N = 61)	8,48	6,84	2,90
Studenter (N = 34)	7,53	7,21	2,68
Skillnad	*-0,95*	*0,37*	*-0,22*

* Signifikant skillnad vid nivå 0,05.

TB (p = 0,019) och avseende FB (p = 0,033). De som läste matematiktexten utan symboler har bättre resultat både avseende TB (m = 6,52 och m = 4,17 för respektive grupp) och FB (m = 4,61 och m = 3,37), något som alltså till största del inte beror på skillnader i förkunskaper.

4.3.3 Elevers och studenters mentala representationer

I detta avsnitt fokuseras på eventuella skillnader mellan gymnasieelever och universitetsstuderande, avseende den mentala representationen, speciellt för matematiktexterna. Diskussion kring uppfattningar om texterna och läsningen behandlas i avsnitt 4.3.4.

Jämförelse mellan alla elever (N = 61) och alla studenter (N = 34) visar ingen signifikant skillnad mellan medelvärden på förkunskap i matematik (p = 0,461) men signifikanta skillnader avseende både TB (p = 0,015) och FB (p = 0,011) för matematiktexten, där studenterna har högre resultat än eleverna[23]. Studenterna måste alltså skilja sig åt i något annat avseende än förkunskaper för att kunna förklara denna skillnad. En uppdelning av grupperna avseende vilken matematiktext de läste visar att skillnaden i TB endast kommer från de som läst texten utan

[23] Medelvärden för elever och studenter är avseende förkunskap 7,82 respektive 8,15, avseende TB 4,52 respektive 6,91 samt avseende FB 3,56 respektive 4,82.

symboler. Det finns nämligen ingen signifikant skillnad avseende TB eller FB mellan elever och studenter som läste matematiktexten med symboler utan bara mellan elever respektive studenter som läste texten utan symboler (se tabell 6). I båda dessa fall finns fortfarande ingen signifikant skillnad avseende förkunskaper i matematik.

De observerade skillnaderna skulle därmed kunna förklaras med att studenterna har bättre allmän läsförmåga, men att de verkar läsa texten med symboler på liknande sätt, och med liknande resultat, som eleverna. Detta borde i så fall betyda att studenterna också ska ha bättre resultat på TB för historietexten, utan motsvarande skillnad avseende förkunskaper. Jämförelserna i tabell 6 visar att eleverna har högre poäng i förkunskaper i historia men att studenterna har högre poäng i TB för historietexten än eleverna. Ingen av dessa skillnader är dock signifikant vid nivå 0,05. Skillnaden i förkunskaper ligger dock nära signifikansnivån (p = 0,076), vilket gör det mer troligt att det faktiskt kan röra sig om en bättre allmän läsförmåga hos studenterna, som påverkar både läsning av historietexten och matematiktexten utan symboler men inte matematiktexten med symboler.

4.3.4 Uppfattningar om texterna och läsningen

I detta avsnitt behandlas deltagarnas svar på hur svår texten var att läsa samt hur obekant innehållet var. Läsarens uppfattningar relateras till den mentala representationen och jämförelser görs mellan de olika texterna samt mellan elever och studenter.

Skillnaden mellan ”ganska” och ”mycket” kan uppfattas olika bland deltagarna, medan skillnaden mellan ”lätt” och ”svår” här anses tydligare. Därför slås inledningsvis svaren ”ganska” och ”mycket” ihop till en kategori för vardera ”lätt”, ”svår”, ”bekant” och ”obekant”. De som svarat ”ganska lätt” eller ”mycket lätt” refereras därmed bara till som de som svarat ”lätt”, och på motsvarande sätt med övriga svarskategorier. (Hela skalan kommer dock att utnyttjas senare.) Tabell 7 visar hur svaren fördelades för de olika texterna. En mycket stor skillnad kan där noteras mellan matematiktexterna respektive historietexten avseende hur svårläst de ansågs vara. En viss skillnad finns i detta avseende också mellan de olika matematiktexterna, där avsaknaden av symboler verkar göra att deltagarna anser texten mer svårläst.

Tabell 7. *Andelen deltagare som svarat att texten var svårläst respektive obekant.*

	Svårläst	**Obekant**
Matte med symboler (N = 46)	67 %	59 %
Matte utan symboler (N = 49)	82 %	47 %
Historia (N = 95 respektive N = 94)*	8 %	34 %

*En deltagare gav inget svar för historietexten avseende hur obekant den var.

Jämförelser mellan de som angett matematiktexten som lättläst (N = 24) respektive svårläst (N = 71) visar att dessa två grupper inte har någon signifikant skillnad mellan förkunskaper (p = 0,209) men att de som angett texten som lättläst har signifikant bättre TB och FB (p = 0,003 för båda). Samma förhållanden fås även om man gör separata jämförelser för personer som läst olika matematiktexter. Eftersom detta handlar om uppfattningar om hur svår texten var att läsa kan detta avspegla en svårighet i att avkoda texten, det vill säga uppfattningen relateras till den mer allmänna läsförmågan. Dessa resultat kan också bero på en uppfattning om ämnet i sig eller om läsning eller kunskap i allmänhet. Vissa motiverar också sina svar med mer allmänna aspekter av ämnet och inte med aspekter av texten som just lästes. Till exempel ges kommentarer om att matematiktexter är svåra i allmänhet eller att man måste tänka när man läser matematiktexter. Mer allmänna kommentarer förekommer också för historietexten, men dessa handlar om att historia är roligt eller intressant, eller motsatsen. På grund av den stora övervikten på uppfattningen att historietexten är lättläst ses tyvärr ingen mening med en liknande analys av förhållandet mellan uppfattning samt förkunskaper och den mentala representationen för denna text. Detta eftersom endast åtta personer (av 95) svarat att historietexten var svårläst.

Tabell 8 visar jämförelser mellan de som angett en text som obekant respektive bekant avseende förkunskaper och den mentala representationen.

Tabell 8. *Medelvärden av förkunskaper, TB och FB för de som angett textens innehåll som obekant respektive bekant.*

	Obekant	**Bekant**	***Skillnad***
Matte med symboler	(N = 27)	(N = 19)	
Förkunskaper	7,48	8,11	*0,63*
TB	3,04	5,79	*2,75***
FB	2,33	4,84	*2,51***
Matte utan symboler	(N = 23)	(N = 26)	
Förkunskaper	7,87	8,35	*0,48*
TB	6,78	6,27	*-0,51*
FB	4,43	4,77	*0,34*
Historia*	(N = 32)	(N = 62)	
Förkunskaper	7,53	8,45	*0,92*
TB	6,56	7,16	*0,60*
FB	2,56	2,95	*0,39*

* En deltagare gav inget svar för historietexten.

** Signifikant skillnad vid nivå 0,01.

Endast för matematiktexten med symboler finns statistiskt signifikanta skillnader, för TB och FB men inte för förkunskaper. Matematiktexten utan symboler uppvisar alltså i detta avseende mer likheter med historietexten än med den andra matematiktexten. Betyder detta att textens form påverka mer än textens innehåll då deltagarna avgör hur bekant texten är? Detta resultat kan ha att göra med att deltagarna har svårare att avkoda matematiktexten med symboler, det vill säga att de vid läsning av den texten har svårare att ”komma fram” till textens innehåll eftersom de begränsas till den ytliga komponenten. Därmed bedöms alltså texterna på olika sätt avseende hur bekant den är. Värt att notera i tabell 8 är att bland dem som angett matematiktexten som bekant, är grupperna som läst olika texter fullt jämförbara avseende förkunskaper, TB och FB. Den stora skillnaden finns bland dem som angett texten som obekant, där de som läst matematiktexten med symboler har signifikant sämre resultat än de som läst texten utan symboler ($p = 0,008$ och $p = 0,016$ för TB respektive FB). Bland de 27 personer som läste texten med symboler och angett texten som obekant har 25 personer också beskrivit texten som svårläst. Åsikterna om denna text är för övrigt överlag ”polariserade”, genom att 83 % av de som läste texten antingen angav texten som lätt och bekant eller som svår och obekant. För matematiktexten utan symboler är denna andel 53 %.

Man kan notera att det finns en skillnad mellan matematiktexterna och historietexten avseende vad som borde var bekant och obekant för de flesta deltagare. I matematiktexterna kan vissa detaljer sägas vara bekanta eftersom de berör enklare egenskaper hos räknesätt, men att helheten i form av matematiska system och grupper är obekant. Förhållandet kan sägas vara tvärtom för historietexten eftersom de flesta hört talas om ryska revolutionen (dvs. helheten) men att det detaljerade händelseförloppet som beskrivs i texten är mer obekant för de flesta deltagare. För matematiktexterna är det dock 58 personer (61 %) som inte direkt berör textens innehåll i kommentarer om vad som gör den obekant eller bekant, och för historietexten är det 65 personer (68 %). Detta gör det tyvärr svårt att mer detaljerat undersöka hur deltagarna har uppfattat denna skillnad mellan texterna samt hur detta kan ha påverkat den mentala representationen.

Eftersom varje person läst två texter kan hela skalan användas (1-4) för hur svår och obekant texterna är, för att se hur samma person bedömer texterna i förhållande till varandra. Därför införs ett nytt mått som skapas genom att beräkna skillnaden mellan bedömningen för matematiktexten och historietexten[24]. Detta ger ett mått på hur mycket svårare (eller mer obekant) matematiktexten anses vara i förhållande till historietexten. Ett negativt värde anger alltså att historietexten är svårare (eller mer obekant), något som endast fyra personer har för texternas svårighet. Totalt 22 personer har angett innehållet i historietexten som mer

[24] Figur B i bilaga D visar spridningen av deltagare med avseende på detta mått, något som inte uppvisar några extrema egenskaper hos detta mått som skulle kunna försvåra analyser.

obekant än innehållet i matematiktexten. I tabell 9 jämförs de olika matematiktexterna samt elever och studenter avseende texternas svårighet samt hur obekant texterna är. Endast en signifikant skillnad finns, den mellan studenters och elevers uppfattning om svårigheten för matematiktexten med symboler jämfört med historietexten. Studenterna verkar alltså inte uppleva samma svårighet med texten med symboler som eleverna, i jämförelse med historietexten. Hos studenterna har till och med matematiktexten med symboler lägre svårighet jämfört med historietexten än matematiktexten utan symboler har, även om skillnaden inte är statistiskt signifikant (p = 0,088).

Motsvarande analys för deltagarnas uppfattning om hur obekant texternas innehåll är ger signifikanta skillnader mellan elever och studenter, för båda typer av matematiktexter (se tabell 9). Elever ser alltså matematiktexten som mer obekant än historietexten, medan studenterna upplever det motsatta. Tidigare noterades en viss skillnad i förkunskaper för historietexten mellan elever och studenter, något som kan förklara skillnaden i hur obekant historietexten uppfattas vara. Flera kommentarer från studenter handlar också om att det var länge sedan de läste historia eller att de aldrig studerat denna del av rysk historia, medan många elever hänvisar till att de läst om det texten behandlar på historielektioner.

Vid jämförelse med historietexten verkar alltså varken elever eller studenter uppleva någon tydlig skillnad vid läsning av de olika typerna av matematiktexter. Det verkar mer handla om att matematiktexter i sig ses som svårare än texter i andra ämnen. Dock bör här påminnas om de begränsningar som finns med den

Tabell 9. *Medelvärden för skillnaden mellan deltagares bedömningar av matematiktexten och historietexten. (Elever; N = 30 och N = 31 för text med respektive utan symboler. Studenter; N = 16 och N = 18 för respektive text.)*

	Matematiktext med symboler	**Matematiktext utan symboler**	***Skillnad***
Svårläst			
Elever	1,17	1,03	*-0,14*
Studenter	0,44	0,83	*0,39*
Skillnad	*-0,73***	*-0,20*	
Obekant			
Elever	1,10*	0,71	*-0,39*
Studenter	-0,75	-0,50	*0,25*
Skillnad	*-1,85***	*-1,21***	

* N = 29 eftersom en deltagare inte gav något svar.

** Signifikant skillnad vid nivå 0,01.

skala som använts för vissa analyser, som består av endast fyra steg, där skillnaderna mellan de olika stegen kan anses oklara. Dessutom uppmanades inte deltagarna att direkt jämföra de två texterna med sina bedömningar, denna jämförelse är ju konstruerad från deras separata bedömningar av respektive text. Dock känns det rimligt att varje person gör samma tolkning av skalan vid båda bedömningarna.

4.3.5 Könsskillnader

I detta avsnitt kommer flera analyser som redan gjorts att tas upp igen men denna gång med uppdelningar avseende kön för att studera eventuella könsskillnader. Förkunskaper, mental representation och uppfattningar om texten samt relationer mellan dessa kommer att studeras. Eftersom så få kvinnliga studenter deltog kommer inga jämförelser mellan elever och studenter att göras. Dessutom, eftersom vissa skillnader observerats mellan elever och studenter kommer här endast elever att studeras för att få en så homogen grupp som möjligt.

Tyvärr visar det sig finnas ganska stora skillnader i förkunskaper vid uppdelning på kön och vilken matematiktext som lästes (se tabell 10), vilket försvårar analysen. Även om alla skillnader i tabell 10 inte är statistiskt signi-

Tabell 10. *Jämförelser av medelvärden på förkunskaper, TB och FB för matematiktexten uppdelat på kön och typ av matematiktext som lästes, bland gymnasieelever. (Kvinnor; N = 13 och N = 11 för text med respektive utan symboler. Män; N = 17 och N = 20 för respektive text.)*

		Matematiktext med symboler	**Matematiktext utan symboler**	***Skillnad***
Förkunskap	Kvinnor	7,00	8,55	*1,55**
	Män	8,12	7,70	*-0,42*
	Skillnad	*1,12*	*-0,85*	
TB	Kvinnor	3,15	5,82	*2,57*
	Män	4,24	4,95	*0,71*
	Skillnad	*1,09*	*-0,87*	
FB	Kvinnor	1,54	3,82	*2,28***
	Män	4,12	4,25	*0,13*
	Skillnad	*2,58**	*0,43*	

* Signifikant skillnad vid nivå 0,05.

** Signifikant skillnad vid nivå 0,01.

fikanta (vid nivå 0,05) följer överlag skillnader i TB och FB de skillnader som finns för förkunskaper. Dock kan vissa tendenser noteras. Bland män ses en viss effekt av vilken typ av text som lästes på TB och FB, eftersom de som läste texten utan symboler har sämre förkunskaper men bättre TB och FB. En liknande effekt skulle kunna ”gömmas” i de stora skillnader som finns för kvinnor. Skillnaden i förkunskaper mellan män och kvinnor avspeglas i TB för båda texterna. För FB finns däremot en tendens till skillnad mellan könen för båda texter, eftersom det är en signifikant skillnad mellan könen för texten med symboler, samt att män har bättre FB för texten utan symboler trots sämre förkunskaper (och TB). Men notera att dessa observationer handlar om vissa tendenser som kan utläsas i tabell 10, och överlag inga statistiskt signifikanta skillnader. Eftersom grupperna i dessa analyser består av så få personer blir det också svårt att analysera ännu mindre grupper för att till exempel försöka få jämförbara värden på förkunskaper.

Överlag verkar det alltså inte finnas några tydliga skillnader mellan kvinnor och män i de avseenden som studerats i tabell 10. Den enda tendens till skillnad avser skapandet av FB i den mentala representationen. Analyser av korrelationer mellan förkunskap, TB och FB för matematiktexten visar också skillnader mellan könen. Bland män (N = 37) finns en stark korrelation mellan TB och FB ($r_s = 0{,}773$, $p = 0{,}000$), en svagare korrelation mellan förkunskap och TB ($r_s = 0{,}365$, $p = 0{,}026$) samt en nästan signifikant korrelation mellan förkunskaper och FB ($r_s = 0{,}300$, $p = 0{,}071$). Bland kvinnor (N = 24) finns inga korrelationer mellan dessa tre variabler ($p > 0{,}200$ för alla). Liknande förhållanden gäller även om man undersöker de två matematiktexterna var för sig, förutom en allmän försvagning av korrelationerna mellan förkunskaper och TB samt mellan förkunskaper och FB hos män. Vid läsning av matematiktexten verkar alltså män ha lättare än kvinnor att koppla samman textens innehåll med förkunskaper (dvs. skapa en FB). Tabell 11 visar samma jämförelser för historietexten som visas för matematiktexterna i tabell 10. Där framgår det att en liknande tendens finns också för historietexten, att män skapar bättre FB även om förkunskaper och skapad TB är jämförbara. Denna effekt verkar alltså vara mer generell än att bara gälla matematik.

Tabell 11. *Jämförelser av medelvärden på förkunskaper, TB och FB för historie-texten mellan kvinnor och män bland gymnasieelever.*

	Förkunskap	**TB**	**FB**
Kvinnor (N = 24)	8,08	7,00	2,21
Män (N = 37)	8,73	6,73	3,35
Skillnad	*0,65*	*-0,27*	*1,14**

* Signifikant skillnad vid nivå 0,05.

Tabell 12. *Andelen gymnasieelever som svarat att texten var svårläst respektive obekant uppdelat på kvinnor och män (N = 24 respektive N = 37).*

	Svårläst		Obekant	
	Kvinnor	**Män**	**Kvinnor**	**Män**
Matematiktext	92 %	81 %	71 %	65 %
Historietext	5 %	9 %	9 %*	19 %

* $N = 23$ eftersom en deltagare inte gav något svar.

Uppdelning med avseende på kön samt begränsningen att bara studera gymnasieelever skapar relativt små grupper för jämförelser, och fördelningen av uppfattningar om texterna (se tabell 12) gör det svårt att göra mer detaljerade studier kring eventuella skillnader i hur texterna uppfattas. Till exempel har bland kvinnorna endast två personer angett matematiktexten som lättläst och en person har angett historietexten som svårläst. Det verkar som män tycker ”bättre” om matematiktexten än kvinnor gör, och tvärtom för historietexten. Men jämförelser mellan medelvärden för skillnaden mellan deltagares bedömningar av matematiktexten och historietexten avseende hur svårläst texterna är, ger ingen signifikant skillnad mellan män och kvinnor ($p = 0{,}899$), inte heller om man delar upp eleverna avseende vilken text de läste ($p = 0{,}883$ och $p = 0{,}944$ för texten med respektive utan symboler).

4.3.6 Tänka högt

Ibland hade de fyra personer som deltog i denna del av studien vissa svårigheter att ge spontana kommentarer vid läsningen. Detta visade sig till exempel genom att de inte sade något alls efter att ha läst en del av texten eller att de sade att de inte hade något speciellt att kommentera. De uppmanades då att kommentera om det var något i texten som de kände igen eller som de inte kände igen. Vissa kommentarerna begränsades också till att handla om texten som helhet utan att på något sätt beröra det specifika innehållet, till exempel avseende hur lätt- eller svårläst texten var. Vid sådana tillfällen har deltagarna uppmanats beskriva vad i texten som de tänker på i sina mer allmänna kommentarer.

Vid ett tillfälle blir det uppenbart att själva proceduren med att tänka högt påverkar den mentala representationen. I början av en kommentar beskriver först personen hur en del av texten är svår att förstå, men genom att beskriva detta kommer personen på vad som stod tidigare i texten och reder ut den svårighet som uppstod. Proceduren att tänka högt kan ha påverkat den mentala representationen vid fler tillfällen och för fler personer även om inget mer direkt har observerats. Men de allra flesta kommentarer handlar inte om något resonemang kring texten, utan verkar mer handla om en beskrivning av en vid läsningen skapad uppfattning och förståelse kring texten.

Notera att endast matematiktexterna användes i denna del av studien, och den fortsatta behandlingen utgår därför hela tiden från dessa texter.

På tre ställen i texterna finns en lista med punkter, två onumrerade punkter i inledningens definition av matematiskt system samt fyra numrerade, dels i definitionen av grupp och dels i det avslutande exemplet med mängden av alla heltal med addition (se bilaga B för hela texterna). I alla tre fall anger texten precis innan listan antalet punkter som kommer att listas samt vad dessa punkter beskriver. För två av deltagarna gör detta upplägg av texten att fokus läggs nästan helt på punkterna och inte på den mening som står precis innan listan. Denna mening innehåller också viktig information, som därmed missas av dessa personer. Ena personen säger också om dessa meningar innan listan att ”det är väl en del av en text som man kanske inte spontant lägger märke till så jättemycket […] man tror att det som kommer efter är viktigare”. För dessa personer ses därmed inte att punkterna tillsammans beskriver ett sammanhang, eftersom detta sammanhang beskrivs i texten just av meningen precis innan listan. Punkterna ses istället som enskilda bitar, vilket också blir uppenbart vid deras svar på frågorna om texten där det framgår att de inte har någon förståelse för vad ett matematiskt system eller en grupp är. På frågan om vad ett matematiskt system är svarar de båda personerna på liknande sätt, att det kan vara eller definieras som två saker. De kommer alltså ihåg de två punkterna i samband med matematiskt system, men eftersom meningen innan punkterna inte sågs som viktig ses inte ett system *bestå* av två saker. Båda dessa personer lästa texten med symboler, men det är svårt att se någon speciell egenskap i denna text som skulle orsaka detta fokus på punkterna i listorna som uppvisas. Till exempel är inledningen innan första listan identisk för de båda matematiktexterna. Likaså är det svårt att motivera att detta skulle vara något speciellt för *matematiska* texter. Detta verkar istället handla om en uppfattning hos läsarna om vilka delar av en text som är viktigast, något som i detta fall på ett ganska drastiskt sätt påverkar den mentala representationen. Dessa två personer ser det avslutande exemplet som en omformulering av det som sagts innan och inte som ett specifikt exempel, vilket just kan bero på att de inte ser hur de fyra punkterna utgör ett sammanhang utan bara ser att fyra punkter upprepas. Ena personen säger vid läsning av exemplet med addition att ”jag förstod inte innan att det bara var addition utan jag trodde det kunde vara vilket som”. Texten ses därmed till stor del som en beskrivning av vissa egenskaper för addition (av heltal).

Texterna inför flera ord för att benämna objekt och egenskaper; matematiskt system, mängd, kombinationsregel, grupp, slutet system, associativ, neutralt objekt och invers. Men det förutsätts i princip aldrig att läsaren ska känna till dessa i förväg, det vill säga texterna innehåller också en förklaring av dessa begrepp. De fyra deltagarna verkar dock inte alltid uppfatta detta, åtminstone inte för alla ord. En person uttrycker till exempel att eftersom ordet invers är obekant, så var delen om invers svår att förstå och en annan säger att texten inte förklarade vad invers är. Eftersom just invers fanns med som ord på förkunskapstestet kanske detta lättare uppfattades som ett ord man borde känna till. Kommenterar vid läsning handlar för övrigt sällan om de nya orden. Istället fokuseras till exempel i de fyra punkterna i definitionen av grupp ofta på själva förklaringen av vad som menas med ordet, men någon stark association till detta ord verkar inte ofta ske. En person som läste texten med symboler kommenterar också att ”man kollar på likheten […] och försöker och tänka till”. De svar som ges på frågor om dessa ord visar också att olika punkter blandas ihop eller att personer svarar att de glömt ordet. Trots tydliga signaler i texten med rubriken och med ”Definition av begreppet…” för matematiskt system och grupp verkar inte fokus hos deltagarna vara på att förstå dessa begrepp. För punkterna vid exemplet med addition av heltal nöjer sig deltagarna till exempel ofta med att konstatera att det som står är korrekt (t.ex. att $a + b$ är ett heltal om a och b är det). Detta påminner om det Österholm (2003, s. 9) observerade hos elevers aktiviteter där ”the text is reduced to familiar details that can be checked quite easily”. Kanske kan detta avspegla synen på att matematik handlar om att *göra* något och inte primärt om betydelser av (nya) ord. En person säger också att det är svårt att tänka på *egenskaper* hos räknesätt eftersom man just *räknar* med dessa.

För de flesta av de begrepp som tidigare räknades upp, som texterna inför, har deltagarna ingen detaljerad förkunskap. För invers finns dock hos vissa personer förkunskaper, där invers primärt ses som *multiplikativ* invers. Denna förkunskap skapar för två personer en motsättning när exemplet med addition läses. Den ena personen accepterar noll som neutralt objekt men tycker därefter fortfarande att invers handlar om multiplikativ invers, och ser alltså inte kopplingen till det neutrala objektet. Förkunskapen verkar alltså ta överhand, och personen nöjer sig med att konstatera att ”det där […] har jag inte hört förut”. Den andra personen verkar dock skapa en mer sammanhängande förståelse för invers och neutralt objekt efter att ha läst exemplet. Men för denna person påverkade också en begränsad förkunskap kring *heltal*, som endast innefattande positiva tal. Alternativt handlar detta om att inte se skillnad på negativa tal och subtraktion, eftersom personen kommenterade att ”kanske kunde ha sagt att då man har med negativa tal också när man har addition”.

Kapitel 5

Slutsatser och diskussion

5.1 Teoretiska och empiriska resultat

I detta avsnitt finns alla diskussioner kring slutsatser samlade. Först behandlas separata slutsatser från den teoretiska studien i kapitel 3 och från den empiriska studien i kapitel 4 (avsnitt 5.1.1 respektive 5.1.2). Därefter genomförs en mer övergripande diskussion kring både teoretiska och empiriska resultat. Dessa diskussioner genomförs med utgångspunkt från det övergripande syftet med denna avhandling (se avsnitt 1.3). Först diskuteras speciella aspekter av läsning och förståelse av matematiska texter (avsnitt 5.1.1), något som sedan kopplas samman med den teoretiska modell som använts och testats i denna avhandling (avsnitt 5.1.2).

5.1.1 Den teoretiska studien

Den genomförda litteraturstudien[25] pekar på avsaknaden av *studier* kring matematiska texter eller läsning av matematiska texter. De jämförelser som gjorts mellan matematiktexter och andra typer av texter i den granskade litteraturen visar på egenskaper som kan sägas beskriva en komplexitet i matematiska texter och i att läsa dessa texter. Men eftersom dessa jämförelser gjorts i relation till ”vanliga” (mer vardagliga) texter och inte texter inom något annat ämnesområde är det inte så konstigt att denna komplexitet observeras. Skulle man göra en liknande jämförelse mellan texter från något annat ämnesområde och vanliga texter skulle nog en motsvarande komplexitet finnas.

Många av de påståendena i litteraturen om egenskaper hos matematiska texter handlar om sättet att skriva, det vill säga hur man presenterar innehållet, och inte direkt om någon egenskap i ämnet som sådant. Det kan vara av intresse att studera just sådana skillnader för att det kan ge en bild av hur de flesta texter ser ut inom olika ämnen, vilket kan användas för att jämföra normer eller traditioner kring texters form och struktur. Men i ett teoretiskt perspektiv kan det vara av mer

[25] Litteratur (eller enstaka egenskaper/påståenden inom viss litteratur) som behandlar symbolanvändningen inkluderades inte i denna litteraturstudie.

intresse att studera sådana skillnader som kan bero på ämnet i sig. Vissa sådana egenskaper för matematiska texter påträffades också i litteraturstudien, såsom en speciell eller frekvent användning av ord för kvantifiering (t.ex. ’alla’, ’existerar’) samt att texter innehåller påståenden om påståenden.

Analyser som genomfördes i relation till läsprocessen av de egenskaper hos matematiska texter som kom fram i litteraturstudien uppvisade inga hinder för att kunna behandla också matematiska texter med Kintschs (1998) modell för läsprocessen. Eftersom denna litteraturstudie inte inkluderat symbolanvändningen är detta resultat kanske ingen överraskning, eftersom sådana texter som inte använder symboler kommer att ha liknande form som de texter Kintsch använder som utgångspunkt och i beskrivning av teorin.

I diskussioner kring symbolanvändningen i matematiska texter framkom flera viktiga skillnader mellan enstaka symboler och vanliga ord samt mellan uttryck av symboler och vanliga meningar.

Diskussionen kring enstaka symboler resulterade i två skillnader jämfört med vanliga ord, som kan påverka läsning och förståelse. För det första kan läsningen av symboler ibland primärt baseras på att se symbolen som en figur, till skillnad från vanliga ord som baseras på artikulering. För det andra kan man se två skilda typer av betydelser hos symboler, dels en semantisk betydelse[26] som motsvarar den betydelse man avser med ett vanligt ord och dels en operativ betydelse som avser vad man kan göra med symbolen i sig (t.ex. att man kan hantera den enligt vissa räkneregler). Man kan också se vissa samband mellan dessa två aspekter. Ett fokus på den operativa betydelsen kan göra att man ser symbolen som en figur, eller tvärtom. Om man utläser en symbol och inte primärt ser den som en figur finns mer likheter med hur man behandlar vanliga ord, och därmed kan den semantiska betydelsen hamna i fokus.

För algebraiska uttryck (eller sammansättningar av symboler i allmänhet) kan också noteras vissa skillnader, men också likheter, jämfört med vanliga meningar. Likheter visar sig finnas i hur texterna avkodas och mentalt representeras, till exempel genom att detta alltid primärt bygger på en meningsfull struktur (dvs. kopplat till *betydelsen* av texten). Detta öppnar upp möjligheten för att använda Kintschs (1998) modell för läsprocessen också för algebraiska uttryck. I texter byggs dock det naturliga språket upp endimensionellt medan algebraiska uttryck kan ha en tvådimensionell struktur. Kintschs modell förutsätter just en endimensionell struktur, vilket gör att det behövs mer noggranna studier och analyser för att se om och exakt hur denna modell kan användas för algebraiska

[26] Denna speciella benämning införs primärt som kontrast till den andra typen av betydelse, och dess uppbyggnad, som kan ses som en upprepning eftersom ”semantisk” just avser betydelse, behöver inte fokuseras på.

uttryck. Även om själva läsningen inte sker linjärt och endimensionellt[27] kan en teori på ett tillfredställande sätt använda sig av en linjär modell för att behandla läsning. Men det kanske också kan finnas fördelar med att förändra/utveckla modellen till att på något sätt inte endast använda en endimensionell uppbyggnad. En annan skillnad mellan algebraiska uttryck och vanliga meningar ligger i grammatiken, som alltså är annorlunda utformad för algebraiska uttryck. Detta pekar på att det kan finnas en direkt skillnad i att avkoda dessa typer av texter, i alla fall avseende vilka förkunskaper som behövs för att kunna skapa en mer utvecklad mental representation.

En kortare diskussion kring begrepps- och procedurförklarande texter pekade på möjliga skillnader i hur symboler används, där begreppsförklarande texter i första hand fokusera på den semantiska betydelsen medan procedurförklarande texter primärt behandlar den operativa betydelsen. Dessa skillnader ska dock inte ses som generaliseringar.

5.1.2 Den empiriska studien

Resultaten från användningen av de tre olika texterna visar vissa likheter och olikheter mellan att läsa dessa texter. En viss skillnad finns mellan matematiktexterna å ena sidan och historietexten å andra sidan, som berör typen av förkunskapsbaserade frågor som användes för respektive ämne. För matematiktexterna har dessa frågor en starkare koppling till de textbaserade frågorna än vad som är fallet för historietexten. Detta skulle kunna tas som en brist med de frågor som använts men kan också avspegla något mer allmänt förhållande mellan ämnena. Men om det beror på ämnet i sig eller på hur deltagarna uppfattar ämnena, som sedan påverkar på vilket sätt de läser texterna, är svårt att avgöra.

Förkunskaper har samma samband med läsförståelsen för alla tre texter. Som väntat skapas en bättre förståelse för texten om läsaren har bättre förkunskaper. Speciellt kan konstateras att sambandet mellan förkunskaper och läsförståelse är lika starkt för de båda matematiktexterna, men att läsförståelsen är tydligt sämre för de som läst matematiktexten med symboler. Resultaten i den empiriska studien uppvisar alltså olikheter mellan de två olika matematiktexterna men också likheter mellan matematiktexten utan symboler och historietexten. Den stora skillnaden vid läsning av texterna visar sig alltså finnas i texternas form och inte i deras innehåll, det vill säga det verkar vara viktigare *hur* något presenteras och inte *vad* som presenteras avseende påverkan på läsprocessen.

Deltagarna i studien verkar uppleva matematiktexten utan symboler som svårare än texten med symboler. Detta kan bero på en ovana med att läsa matematiska texter utan symboler, men samtidigt skapar läsning av texten utan symboler bättre förståelse. Istället kan det handla om att symboler läses på ett

[27] Man kan också ifrågasätta om läsning av texter i det naturliga språket sker linjärt (de Beaugrande, 1984).

sådant sätt att textens innehåll inte sätts i fokus, det vill säga texten läses på ett mer ytligt sätt. Därmed kan man uppleva en lätthet i att läsa texten trots att man skapar en bristfällig förståelse för textens innehåll. I allmänhet finns uppfattningen att matematiktexterna är svårare än historietexten, men denna skillnad är mindre bland studenter. Eftersom de har läst kurser i matematik på universitetsnivå kan man tänka sig att de redan innan dessa kurser föredrog matematik som ämnesområde samt att studier i matematik gjort de mer vana med att läsa matematiska texter. Men skillnader mellan elever och studenter avseende förkunskaper i matematik[28] samt förståelse för texten med symboler är marginell (dvs. inte statistiskt signifikant). Studenter skapar dock bättre förståelse för texten utan symboler än vad eleverna gör. Man kan konstatera att de matematikkurser de läst på universitetsnivå inte verkar ha påverkat deras förmåga att läsa matematiktexter innehållande symboler, men att en viss förbättring verkar ha skett avseende deras förmåga att läsa texter som inte innehåller symboler, både matematik- och historietexter. Observera att denna diskussion om ”påverkan” och ”förbättring” inte får tas för bokstavligt eftersom undersökningar inte gjorts av samma grupp av personer. Dock kan man notera att detta stärker den tidigare diskuterade slutsatsen om en skillnad i läsning av matematiktexter med respektive utan symboler samt en likhet i läsning av matematiktexter utan symboler och historietexter.

För studier kring eventuella könsskillnader har relativt små grupper använts varav vissa inte är jämförbara på önskvärda sätt. Den enda tendens till skillnad mellan män och kvinnor som noterats är att män verkar ha lättare att koppla samman textens innehåll med befintliga förkunskaper. Denna tendens uppvisas för både matematiktexterna och historietexten, det vill säga att det verkar handla om en mer generell aspekt än avseende något enskilt ämne/innehåll.

Studierna kring själva läsningen av matematiktexterna visar tydligt hur vissa uppfattningar om samband mellan texters struktur och innehåll kan påverka läsförståelsen. Vissa personer uppvisade tydligt en uppfattning om att det som står innan en viss uppräkning av egenskaper eller komponenter inte är lika viktigt som den efterföljande uppräkningen. Detta gjorde att väsentliga delar av förklaringar kring de centrala begreppen missades vid läsning av texten. Synen på matematik som att genomföra beräkningar, eller att *göra* saker i allmänhet verkar också påverka läsprocessen, genom att fokus inte läggs på nya ord som introduceras i texten – vissa har också svårigheter att se att ord faktiskt introduceras/förklaras. Kanske kan detta vara speciellt för just begreppsförklarande texter och att deltagarna hade större vana med att läsa procedurförklarande texter inom matematik.

[28] Notera att de förkunskaper som här avses är begränsade till kunskaper kring specifika ord som används i texterna.

5.1.3 Läsa matematiska texter

Den empiriska studien visar en tydlig skillnad i den mentala representationen mellan de som läste matematiktexten med respektive utan symboler, där personer som läste texten utan symboler skapar en mer utvecklad mental representation. Från detta skulle man kunna konstatera att texter med symboler är svårare att läsa, men hur påverkas läsprocessen av användningen av symboler i texten? Naturligtvis är det svårt att exakt avgöra detta, men två faktorer kommer fram i denna avhandling som möjliga orsaker.

För det första framkom det i den teoretiska studien att den mentala representationen av matematiska symboler kan vara mer begränsad än den mentala representationen av vanliga ord. Detta eftersom artikuleringen av ordet kan hjälpa till att skapa en mer utförlig mental representation, och att symboler ibland kan representeras mer som figurer utan artikulering, vilket kan försvåra användningen av symboler i läsprocessen. Alltså kan det vara fördelaktigt att fokusera på att också artikulera matematiska symboler för att mer effektivt kunna skapa en mer omfattande förståelse vid läsning av matematiska texter med symboler.

För det andra verkar deltagarna som läste texten med symboler inte kunna utnyttja sin kunskap att avkoda texter på samma sätt som de gör för historietexten, eller som de andra deltagarna gör för matematiktexten utan symboler. Problemet kanske inte är att texterna läses på olika sätt utan att de läses *på samma sätt*, eftersom det kan sägas finnas en skillnad i den grammatik som används för algebraiska uttryck jämfört med grammatiken för det naturliga språket.

Dessa två faktorer pekar på att läsning av matematiska texter med symboler är ganska speciellt och att man kan behöva lära sig hur man läser sådana texter. Däremot verkar det finnas många likheter med läsning av matematiktexten utan symboler och historietexten. Det matematiska *innehållet* verkar alltså inte i någon större omfattning påverka läsprocessen, utan hur detta innehåll presenteras är en viktigare aspekt. Men observera att dessa resultat har handlat om begreppsförklarande matematiktexter, och vissa deltagare uttrycker ovana med att läsa just sådana texter. Detta verkar bero på att kunskap i matematik ses som att kunna *göra något* och att inte primärt handla om betydelser av, eller relationer mellan, begrepp. För procedurförklarande texter kan tänkas att den operativa betydelsen av symboler, där de mer kan ses som figurer, kan vara mer användbar. Därmed skulle inte samma behov finnas av att artikulera symbolerna för att skapa en mer omfattande mental representation. En procedurförklarande text handlar också just om att göra något, och det kan alltså finnas fördelar med att läsa begrepps- respektive procedurförklarande texter på olika sätt. Men det finns här ett behov av fortsatta empiriska undersökningar kring eventuella skillnader vid läsning av dessa typer av texter.

5.1.4 Den teoretiska modellen

I denna avhandling har Kintschs (1998) modell för förståelseprocessen använts och testats för läsning av matematiska texter. Modellen avser att vara en generell teori för just förståelseprocessen som inte är beroende av vad det är som ska förstås men har mest använts för läsprocessen. Med detta allmänna syfte med modellen som utgångspunkt finns det inget som säger att läsning av just *matematiska* texter inte skulle kunna inkluderas i modellen. Men teorin innehåller mer detaljerade beskrivningar av den kognitiva processen och den resulterande förståelsen, vilka också har granskats i denna avhandling avseende läsning av just matematiska texter. I kapitel 3 konstateras att användandet av matematiska symboler i texter är det enda som kan behöva behandlas på något speciellt sätt inom Kintschs teori eftersom all tidigare användning endast studerat texter uppbyggda av det naturliga språket. Resultaten i denna avhandling visar också att matematiktexten utan symboler och historietexten verkar behandlas på liknande sätt av läsarna, men att läsande av texten med symboler skiljer sig åt.

För att på ett tillfredsställande sätt också behandla läsning och förståelse av symboler görs ett tillägg eller förtydligande i Kintschs (1998) modell för läsprocessen. Detta tillägg handlar om att också se den operativa betydelsen hos symboler som att fungera som en del av en textbaserad komponent i den mentala representationen – en typ av betydelse som för vanliga ord skulle ses som del av en ytlig komponent. För symboler finns därmed inte bara olika betydelser utan också kvalitativt olika *typer* av betydelser; dels referent(er) till symbolen på samma sätt som för vanliga ord men också den operativa betydelsen, där symbolen kan ses mer som en figur.

Den empiriska studien fokuserade på den resulterande mentala representationen vid läsning och några långa sammansatta uttryck med symboler fanns inte i texterna som där användes. Läsning och mental representation av algebraiska uttryck diskuterades dock i kapitel 3. Där konstaterades att det finns vissa oklarheter i exakt hur dessa kan behandlas i den teoretiska modellen för läsprocessen, något som bland annat har att göra med att de algebraiska uttrycken ofta är tvådimensionella i sin struktur där det är oklart i vilken ordning man läser symbolerna. Men skapandet av en mental representation av algebraiska uttryck har dock, precis som för det naturliga språket, visat sig bygga på den syntaktiska strukturen av uttrycket (Jansen et al., 2003).

Överlag finns alltså ingen anledning att se läsning av matematiska texter som någon speciell typ av process som skiljer sig från läsning av andra texter. Kintschs (1998) modell för läsprocessen kan därmed fungera som teoretisk grund även för läsförståelse av matematiska texter, möjligen med vissa föreslagna tillägg för matematiska symboler.

5.2 Fortsatt forskning

I det övergripande syftet (avsnitt 1.3) påpekades att denna avhandling delvis är tänkt som en grund för fortsatt forskning kring läsning av matematiska texter. I detta avsnitt kommer därför att diskuteras hur resultat från denna avhandling kan användas för vidare forskning. Först diskuteras fortsatt forskning med fokus på läsning av matematiska texter (avsnitt 5.2.1) för att sedan också behandla användning av Kintschs (1998) modell kring förståelse mer allmänt inom matematikdidaktisk forskning, i situationer som inte nödvändigtvis handlar om läsning (avsnitt 5.2.2).

5.2.1 Läsa matematiska texter

Vissa saker avseende läsprocessen som skulle behöva studeras mer noggrant har redan pekats på i denna avhandling. Detaljer kring hur den mentala representationen av (långa) algebraiska uttryck byggs upp skulle behöva studeras både empiriskt och mer noggrant med hjälp av den teoretiska modellen. Hur omgivande text eller andra algebraiska uttryck kan påverka denna mentala representation skulle också vara av intresse att studera, för att se hur ett sammanhang kan påverka den mentala representationen av algebraiska uttryck. Olika sammanhang kan ju kräva att olika delar eller aspekter av uttryck fokuseras på.

De olika sätten att representera enstaka symboler kan också studeras mer, till exempel om och hur artikulering av symboler kan påverka den mentala representationen. Även de olika typerna av betydelser för symboler kan behöva studeras mer i förhållande till läsprocessen, speciellt hur de olika typerna kan aktiveras i olika situationer eller för olika texter. Speciellt kanske detta kan relateras till eventuella skillnader mellan läsning av begrepps- respektive procedurförklarande texter, eftersom det finns vissa skillnader, kanske speciellt avseende symbolanvändningen, som skulle kunna påverka läsprocessen på olika sätt.

För läsprocessen i allmänhet kan sägas att Kintschs (1998) modell kan behöva användas och granskas mer noggrant för matematiska texter när det nu på en mer allmän nivå konstaterats att modellen borde kunna användas också för läsning av matematiska texter. Detta skulle till exempel kunna göras genom att mer fokusera på *skapandet* av den mentala representationen än vad som gjorts i denna avhandling.

Förutom fortsatta studier kring läsprocessen kan resultat från denna avhandling användas vid studier kring läsning i ett större perspektiv, där fokus inte bara ligger på själva läsningen av texten. Detta kan till exempel handla om situationer då möjlighet finns att diskutera en text eller då behov finns att använda en text på något sätt, till exempel för att lösa problem i matematik. Kunskap kring läsprocessen kan i sådana studier hjälpa till att förstå personers ageranden som kan tänkas baseras på den skapade mentala representationen vid läsning av texten.

Resultatet i denna avhandling pekar på ett behov av att lära sig läsa matematiska texter med symboler eftersom detta skiljer sig från att läsa andra typer av texter. Fortsatt forskning skulle därmed kunna fokusera på att skapa och utvärdera undervisningssituationer som just avser att utveckla läsförståelsen för läsning av texter med symboler. I studien kring själva läsningen (dvs. ”tänka högt”) noterades speciella uppfattningar om vilka delar av en text som är mer respektive mindre viktiga. Beskrivningar av vad som kommer att förklaras eller beskrivas sågs då av vissa som mindre viktiga. Dessa delar i en text kan vara speciellt viktigt att verkligen fokusera på, kanske speciellt inom matematik eftersom sådana delar av en text till exempel kan beskriva vilket begrepp som definieras. Det har också visat sig kunna finnas behov av att läsa begrepps- och procedurförklarande texter på olika sätt, med olika fokus. I studier kring hur man kan lära sig läsa matematiska texter kan alltså också finns behov av att studera andra aspekter än bara användningen av symboler.

5.2.2 Den teoretiska modellen

I denna avhandling har likheter med eller relationer till vissa andra teorier diskuterats. Dessa diskussioner har aldrig gått på djupet eftersom avhandlingen inte fokuserat på sådana jämförelser mellan teorier. Speciellt har några teorier från matematikdidaktisk forskning diskuterats, och det skulle vara intressant att studera likheter och skillnader mellan Kintschs (1998) teori kring förståelse och dessa teorier. Det finns ju fördelar med att kunna beskriva flera fenomen inom en och samma teori, vilket gör dessa jämförelser mellan olika teorier intressanta. Vid diskussion kring den mentala strukturen (avsnitt 2.2.1) behandlas begreppet ’concept image’ (Vinner, 1991) och i samband med diskussioner kring den kognitiva processen (avsnitt 2.3) behandlas intuition (Fischbein, 1987). Båda dessa teorier skulle alltså vara intressanta att mer noggrant studera i relation till Kintschs teorier.

Kintschs (1998) syn på den mentala strukturen som relativt oorganiserad och uppbyggd av associationer går emot uppfattningen att kognitiva processer primärt utnyttjar ”the retrieval of one or more *frames* from memory” (Davis, 1984, s. 47), som bygger på statiska och färdiga strukturer som finns i den mentala strukturen. Det skulle vara intressant att specifikt för aktiviteter inom matematik undersöka mer noggrant vilken av dessa teorier som är mest rimlig, men också på vilket sätt dessa skiljer sig åt och hur dessa skillnader kan påverka synen på kunskap eller lärande inom matematik.

Inom matematik och matematikdidaktisk forskning finns ett ganska starkt fokus på problemlösning, eller lösning av uppgifter i till exempel läroböcker. I avsnitt 2.3 argumenteras för att också se förståelseprocessen som en väsentlig del av aktivitet inom matematik. Eftersom Kintschs (1998) teori kring förståelse har visat sig användbar i olika typer av situationer skulle det vara intressant att också testa användning av denna teori i större utsträckning inom matematik. Till exempel kanske elevers och studenters agerande vid lösning av uppgifter ibland kan beskrivas som en förståelseprocess (och inte problemlösning), liknande

Mannes och Kintschs (1991) beskrivning av 'action planning' som en förståelse-process.

Läsandet av problemet som ska lösas kan ses som en del av problemlösning, där läsprocessen alltså är aktiv och en mental representation av problemtexten skapas. Men redan här kan man säga att lösningsprocessen också har börjat, det vill säga att förståelseprocessen är en del av lösningsprocessen, och inte bara en förutsättning för att lösningsprocessen ska kunna starta (efter att man läst texten). Men även efter att texten har lästs finns rimligen också förståelseprocesser aktiva som en del av de kognitiva processerna (dvs. som en del av problemlösning). Förhållandet mellan förståelseprocesser och problemlösningsprocesser skulle därför vara intressant att studera vidare.

Referenser

Adams, T. L. (2003). Reading mathematics: more than words can say. *The reading teacher, 56* (8), ss. 786-795.

Ashcraft, M. H. (1994). *Human memory and cognition* (2. uppl.). New York: HarperCollins.

Bergsten, C. (1990). *Matematisk operativitet: en analys av relationen mellan form och innehåll i skolmatematiken.* Linköping: Institutionen för pedagogik och psykologi, Linköpings universitet.

Bernard, J. (1983). An essay on perception and understanding of mathematical symbolism. *International journal of mathematical education in science and technology, 14*, ss. 489-496.

Blanton, M. (1991). Teaching reading in the math classroom. *Clearing house, 64* (3), ss. 162-164.

Borasi, R. & Siegel, M. (1990). Reading to learn mathematics: New connections, new questions, new challenges. *For the learning of mathematics, 10* (3), ss. 9-16.

Borasi, R. & Siegel, M. (1994). Reading, writing and mathematics: rethinking the "basics" and their relationship. I F. Robitaille, D. H. Wheeler & C. Kieran (red.). *Selected lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education* (ss. 35-48). Sainte-Foy [Québec]: Presses de l'Universit, Laval.

Britton, B. K. & Gülgöz, S. (1991). Using Kintsch's computational model to improve instructional text: effects of repairing inference calls on recall and cognitive structures. *Journal of educational psychology, 83* (3), ss. 329-345.

Brunner, R. B. (1976). Reading mathematical exposition. *Educational research, 18*, ss. 208-213.

Cowen, C. C. (1991). Teaching and testing mathematics reading. *American mathematical monthly, 98* (1), ss. 50-53.

Crawford, K., Gordon, S., Nicholas, J. & Prosser, M. (1994). Conceptions of mathematics and how it is learned: the perspectives of students entering university. *Learning and instruction, 4*, ss. 331-345.

Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education*. Norwood, N.J.: Ablex Publ. Corp.

de Beaugrande, R. (1984). The linearity of reading: fact, fiction, or frontier? I J. Flood (red.). *Understanding reading comprehension* (ss. 45-74). Newark: International Reading Association.

Defence, A. (1994). *The readability of the mathematics textbook: with special reference to the mature student*. Master theses, The department of mathematics and statistics, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada. Ottawa: National Library of Canada. Tillgänglig (2004-11-12): <http://www.nlc-bnc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp04/MQ44873.pdf>

Dunlop, W. P. & Strope, G. J. (1982). Reading mathematics: review of literature. *Focus on learning problems in mathematics, 4* (1), ss. 39-50.

Ericsson, K. A. & Simon, H. A. (1980). Verbal reports as data. *Psychological review, 87* (3), ss. 215-251.

Ernest, P. (1987). A model of the cognitive meaning of mathematical expressions. *The British journal of educational psychology, 57*, ss. 343-370.

Fauvel, J. (1988). Cartesian and Euclidean rhetoric. *For the learning of mathematics, 8* (1), ss. 25-29.

Fenwick, C. (2001). Students and their learning from reading. *Humanistic mathematics network journal, 24*, ss. 52-58.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: D. Reidel.

Fischbein, E. & Grossman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational studies in mathematics, 34*, ss. 27-47.

Freitag, M. (1998). Reading and writing in the mathematics classroom. *The mathematics educator, 8* (1), ss. 16-21. Tillgänglig (2004-11-12): <http://jwilson.coe.uga.edu/DEPT/TME/Issues/v08n1/3freitag.pdf>

Fuentes, P. (1998). Reading comprehension in mathematics. *Clearing house, 72* (2), ss. 81-88.

Graesser, A. C., León, J. A. & Otero, J. (2002). Introduction to the psychology of science text comprehension. I J. Otero, J. A. León & A. C. Graesser (red.). *The psychology of science text comprehension* (ss. 1-15). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Assoc.

Hallberg, Å. (1992). *Typografin och läsprocessen: grafisk kommunikation med text och bild*. Halmstad: Spektra.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational studies in mathematics, 40*, ss. 71-90.

Hiebert, J. (red.) (1986). *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. I J. Hiebert (red.). *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (ss. 1-27). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Hubbard, R. (1990). Teaching mathematics reading and study skills. *International journal of mathematical education in science and technology, 21*, ss. 265-269.

Hubbard, R. (1992). Writing humanistic mathematics. *Humanistic mathematics network journal, 7*, ss. 81-88.

Jansen, A. R., Marriott, K. & Yelland, G. W. (2003). Comprehension of algebraic expressions by experienced users of mathematics. *The quarterly journal of experimental psychology, 56A* (1), ss. 3-30.

Kane, R. B. (1968). The readability of mathematical English. *Journal of research in science teaching, 5*, ss. 296-298.

Keyser, C. J. (1959-1960). Gruppbegreppet. I J. R. Newman (red.). *Sigma: en matematikens kulturhistoria. Band 4* (ss. 1625-1645). Stockholm: Forum.

Kintsch, W. (1988). The role of knowledge in discourse comprehension: a construction-integration model. *Psychological review, 95* (2), ss. 163-182.

Kintsch, W. (1992). A cognitive architecture for comprehension. I H. L. Pick, P. van den Broek, & D. C. Knill (red.). *Cognition: conceptual and methodological issues* (ss. 143-163). Washington, DC: American Psychological Association.

Kintsch, W. (1994). Text comprehension, memory, and learning. *American psychologist, 49*, ss. 294-303.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kintsch, W., Patel, V. L. & Ericsson, K. A. (1999). The role of long-term working memory in text comprehension. *Psychologia, 42*, ss. 186-198.

Kirschner, P. A. (2002). Cognitive load theory: implications of cognitive load theory on the design of learning. *Learning and instruction, 12*, ss. 1-10.

Kitajima, M. & Polson, P. G. (1995). A comprehension-based model of correct performance and errors in skilled, display-based, human-computer interaction. *International journal of human-computer studies, 43* (1), ss. 65-99.

Kulm, G. (1973). Sources of reading difficulty in elementary algebra textbooks. *The mathematics teacher, 66*, ss. 649-652.

Langer, J. A. (1984). Examining background knowledge and text comprehension. *Reading research quarterly, 19*, ss. 468-481.

LeBlanc, M. D. (1991). From natural language to mathematical representations: a model of 'mathematical reading'. *Intelligent tutoring media, 2* (3/4), ss. 149-158.

Linderholm, T., Everson, M. G., van den Broek, P., Mischinski, M., Crittenden, A. & Samuels, J. (2000). Effects of causal text revisions on more- and less-skilled readers' comprehension of easy and difficult texts. *Cognition and instruction, 18*, ss. 525-556.

Mannes, S. M. & Kintsch, W. (1991). Routine computing tasks: planning as understanding. *Cognitive science, 15*, ss. 305-342.

Marton, F. & Säljö, R. (1995). Kognitiv inriktning vid inlärning. I F. Marton, D. Hounsell & N. Entwistle (red.). *Hur vi lär* (ss. 56-80). Stockholm: Rabén Prisma.

McCloskey, M. & Caramazza, A. (1987). Cognitive mechanisms in normal and impaired number processing. I G. Deloche & X. Seron (red.). *Mathematical disabilities: a cognitive neuropsychological perspective* (ss. 201-219). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

McNamara, D. S. (2001). Reading both high-coherence and low-coherence texts: effects of text sequence and prior knowledge. *Canadian journal of experimental psychology, 55*, ss. 51-62.

McNamara, D. S., Kintsch, E., Songer, N. B. & Kintsch, W. (1996). Are good texts always better? Interactions of text coherence, background knowledge, and levels of understanding in learning from text. *Cognition and instruction, 14*, ss. 1-43.

McNamara, D. S. & Kintsch, W. (1996). Learning from texts: effects of prior knowledge and text coherence. *Discourse processes, 22*, ss. 247-288.

Melin, L. (2004). *Språkpsykologi: hur vi talar, lyssnar, läser, skriver och minns*. Stockholm: Liber.

Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information. *Psychological review, 63*, ss. 81-97. Tillgänglig (2004-11-12): <http://www.well.com/user/smalin/miller.html>

Morgan, C. (1998). *Writing mathematically: the discourse of investigation*. London: Falmer.

Mross, E. F. & Roberts, J. O. (1992). *The construction-integration model: a program and manual* (Rapport nr. 92-14). Boulder, CO: Institute of Cognitive Science, University of Colorado. Tillgänglig (2004-11-12):
<http://ics.colorado.edu/techpubs/pdf/92-14.pdf> (Rapport)
<http://psych.colorado.edu/~emross/work.html> (Datorprogram)

Möllehed, E. (2001). *Problemlösning i matematik: en studie av påverkansfaktorer i årskurserna 4-9*. Malmö: Institutionen för pedagogik, Lärarhögskolan.

Newton, D. P. & Merrell, C. H. (1994). Words that count: communicating with mathematical text. *International journal of mathematical education in science and technology, 25*, ss. 457-462.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (red.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring - ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriets forlag. Tillgänglig (2004-11-12):
<http://pub.uvm.dk/2002/kom/hel.pdf>

Noonan, J. (1990). Readability problems presented by mathematics text. *Early child development and care, 54*, ss. 57-81.

O'Mara, D. A. (1981). The process of reading mathematics. *Journal of reading, 25* (1), ss. 22-30.

Pimm, D. (1989). *Speaking mathematically: communication in mathematics classrooms* (paperback edition). London: Routledge.

Schiefele, U. (1996). Topic interest, text representation, and quality of experience. *Contemporary educational psychology, 21*, ss. 3-18.

Schommer, M., Crouse, A. & Rhodes, N. (1992). Epistemological beliefs and mathematical text comprehension: believing it is simple does not make it so. *Journal of educational psychology, 84* (4), ss. 435-443.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*, ss. 1-36.

Sfard, A. & Linchevsky, L. (1992). Equations and inequalities - processes without objects? I W. Geeslin & K. Graham (red.). *Proceedings of the sixteenth PME conference : University of New Hampshire Durham, NH (USA) August 6-11, 1992* (vol. 3, s. 136). Durham, NH: University of New Hampshire.

Shuard, H. & Rothery, A. (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.

Skolverket (2003). *Lusten att lära – med fokus på matematik* (Rapport nr. 221). Stockholm: Statens skolverk. Tillgänglig (2004-11-12): <http://www2.skolverket.se/BASIS/skolbok/webext/trycksak/DDD/1148.pdf>

Stephens, L. J. & Sloan, B. F. (1981). Important sources used for doing homework and preparing for exams in undergraduate mathematics courses. *International journal of mathematical education in science and technology, 12* (2), ss. 135-138.

Säljö, R. (1995). Att lära genom att läsa. I F. Marton, D. Hounsell & N. Entwistle (red.). *Hur vi lär* (ss. 102-125). Stockholm: Rabén Prisma.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. I D. Tall (red.). *Advanced mathematical thinking* (ss. 3-21). Dordrecht: Kluwer academic publishers.

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M. & Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian journal of science, mathematics and technology education, 1* (1), ss. 81-104.

van Dijk, T. A. & Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York: Academic Press.

Vidal-Abarca, E., Martínez, G. & Gilabert, R. (2000). Two procedures to improve instructional text: effects on memory and learning. *Journal of educational psychology, 92* (1), ss. 107-116.

Vidal-Abarca, E. & Sanjose, V. (1998). Levels of comprehension of scientific prose: the role of text variables. *Learning and instruction, 8*, ss. 215-233.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. I D. Tall (red.). *Advanced mathematical thinking* (ss. 65-81). Dordrecht: Kluwer academic publishers.

Woodrow, D. (1982). Mathematical symbolism. *Visible language, 16* (3), ss. 289-302.

Österholm, M. (2003). *Learning mathematics by reading – a study of students interacting with a text* (Rapport nr. 2003-29). Linköping: Linköpings universitet, Matematiska institutionen. Tillgänglig (2004-11-12): <http://www.mai.liu.se/~maost/forskning1.pdf>

Österholm, M. (2004). *Reading mathematical texts: cognitive processes and mental representations*. Presenterat vid The 10th International Congress on Mathematical Education, ICME-10, Köpenhamn, Danmark, 4-11 juli, 2004. Tillgänglig (2004-11-12): <http://www.mai.liu.se/~maost/forskning2.pdf>

Bilaga A

Instruktioner och frågor

I denna bilaga presenteras det materiel som användes i den empiriska studien (se kap. 4). Till deltagarna i studien gavs ett omslag i form av ett vikt A3-papper innehållande uppgifter att arbeta med på egen hand, uppdelade i olika häften där endast ena sidan på pappret användes:

Framsida på omslaget (1 A4)

Del 0 (1 A4)

Del 1 (3 A4), framsidan innehöll ingen information och inga instruktioner och finns därför inte med i denna bilaga

Del 2 (2 A4), endast framsidan finns med i denna bilaga, texterna finns i bilaga B

Del 3 (5 A4), de tre sista sidorna med frågor är endast beskrivna i denna bilaga

Del 4 och del 5 har samma upplägg som del 2 respektive del 3

Kön: ☐ Kvinna ☐ Man

Gymnasieprogram: ______________________________________

Matematikbetyg från gymnasiet (skriv 'pågår' om kursen ej avslutad):

Kurs A	____________	Kurs E	____________
Kurs B	____________	Breddning	____________
Kurs C	____________	Diskret	____________
Kurs D	____________		

Annan kurs (ge namn): _________________ ____________

Utbildningsprogram på universitet: ____________________________

Matematikkurser på universitet (skriv 'pågår' om kursen ej avslutad):

Kurs	Betyg
_________________________________	____________
_________________________________	____________
_________________________________	____________
_________________________________	____________
_________________________________	____________
_________________________________	____________

Ta fram Del 0 samt läs och följ instruktionerna.

Del 0

Instruktioner

I detta omslag finns utöver dessa instruktioner 5 delar att arbeta igenom. Delarna ska arbetas med i ordning, endast en del i taget och när en del är avklarad lägger du tillbaka den i omslaget och går aldrig tillbaka till den delen.

Arbetet handlar om två texter du kommer att få läsa, texter som är av olika typ och handlar om helt olika saker.

Läs alltid igenom och följ de instruktioner som finns på de olika delarna.

Del 1 har en tidsbegränsning, och därför ska alla starta med den samtidigt. De övriga delarna saknar tidsbegränsning, och de arbetar du sedan igenom i egen takt.

I del 1 kommer du att få 10 ord, uppdelade på två blad. För vart och ett av dessa ord ska du skriva ner dina spontana tankar och associationer till ordet. Det kan handla om ordets betydelse, någon användning av ordet eller annan typ av association kring ordet. Försök att beskriva dina associationer, även om du bara kommer att tänka på ett annat ord så försök beskriva hur du associerar till detta. Det handlar alltså om dina spontana associationer, dvs. du ska inte sitta och fundera mycket kring varje ord, och denna del är tidsbegränsad till 6 minuter för alla 10 ord, men tiden är tillräcklig för att inte behöva stressa!

Invänta nu besked från försöksledaren innan du tar fram del 1.

Beskriv dina spontana tankar och associationer kring varje ord, t.ex. om ordets betydelse, användning av ordet eller association till ordet.

Addition:

Mängd:

Invers:

Definition:

Heltal:

Beskriv dina spontana tankar och associationer kring varje ord, t.ex. om ordets betydelse, användning av ordet eller association till ordet.

Tsar:

Proletariat:

Lenin:

Samhällsklass:

Bolsjevik:

Del 2

Instruktioner

På nästa sida finns en text. Läs igenom den en gång. Läs lugnt och noggrant i den takt som passar dig, från början till slut och stanna inte upp i texten.

När du läst texten lägger du undan denna del inuti omslaget, och arbetar vidare med nästa del. I nästa del kommer du få kommentera vad du tyckte om texten samt svara på frågor om textens innehåll.

Del 3

Instruktioner

På följande sidor finns olika frågor att besvara, som berör texten du nyss läste. Arbeta igenom frågorna i ordning och bläddra aldrig tillbaka i häftet när du väl är färdig med en sida.

Arbeta i din egen takt, men sitt inte och fundera för mycket på varje fråga.

Besvara frågorna så utförligt som möjligt. Men även om du känner att du inte kan ge ett *fullständigt* svar på frågan, så skriv ner de saker som skulle vara delar i ett mer fullständigt svar. Om du inte kan besvara en fråga, så försök förklara/beskriva varför, tillsammans med eventuella delar av ett svar, och gå sedan vidare till nästa fråga – grubbla inte för mycket på varje fråga.

Hur var texten att läsa?

- ☐ *Mycket lätt*
- ☐ *Ganska lätt*
- ☐ *Ganska svår*
- ☐ *Mycket svår*

Kommentarer om vad som gjorde texten lätt eller svår:

Hur bekant var du med textens innehåll?

- ☐ *Mycket bekant*
- ☐ *Ganska bekant*
- ☐ *Ganska obekant*
- ☐ *Mycket obekant*

Kommentarer om vad som gjorde texten bekant eller obekant:

Åtta frågor avseende matematiktexten fördelades på tre sidor, med utrymme att skriva svar direkt efter varje fråga. Här anges efter varje fråga vilken komponent av den mentala representationen frågan testar; textbaserad (TB), förkunskapsbaserad (FB) eller både och (FB+TB). Dessa markeringar fanns dock inte när frågorna ställdes i genomförandet av studien. Frågorna var då inte heller numrerade men gavs i den ordning som anges här:

1. Vad menas med inversen till ett objekt? (TB)
2. Är påståendet "Ett matematiskt system är en grupp" sant eller falskt? Motivera! (TB)
3. Är mängden av alla heltal med division som kombinationsregel ett slutet system? Motivera! (FB+TB)
4. Kan ett objekt i en grupp kombineras med sig själv? Motivera! (FB)
5. Vilket neutralt objekt har mängden av alla heltal med multiplikation som kombinationsregel? Motivera! (FB+TB)
6. Är mängden av alla heltal med multiplikation som kombinationsregel en grupp? Motivera! (FB)
7. Vad är ett matematiskt system? (TB)
8. Vad menas med att en kombinationsregel är associativ? (TB)

Efterföljande del 4 och del 5 är identiska med del 2 respektive del 3 avseende instruktioner, frågor om hur lätt/svår och (o)bekant texten var samt hur frågorna om texten presenterades. Nio frågor avseende historietexten fördelades på tre sidor (frågor markerade med * är hämtade från Vidal-Abarca et al. (2000, s. 116)):

1. Vad gjorde att Ryssland kunde få en stark ekonomisk tillväxt kring sekelskiftet 1900? (TB)
2. Vad ville bolsjevikerna uppnå med revolutionen i oktober 1917? (FB+TB)*
3. Vad var en utlösande faktor till revolutionen 1905? (TB)
4. Hur påverkade första världskriget de ryska revolutionerna? (FB)
5. När och varför infördes duman? (TB)
6. I andra stycket nämns att proletariatet kämpade för revolution. Vad hoppades de åstadkomma med revolutionen? (FB)*
7. Vad gjorde att Ryssland inte hade samma stora förändringar i samhället som resten av Europa på 1800-talet? (TB)
8. Vilken utav revolutionerna var minst blodig? Motivera! (FB)
9. När förlorade tsaren sin makt och vilka fick makten därefter? (TB)

Bilaga B

Texter

I denna bilaga finns de tre texter som används i den empiriska studien (se kap. 4). I studien gavs texterna på ett A4-papper och de har därför förminskats för att få plats i formatet för denna avhandling. I den första texten finns markerat streckade linjer som delar in texten i mindre delar. Detta visar den indelning som användes i den del av studien där personer fick läsa en del av texten i taget och fritt kommentera läsningen där de ombads ”tänka högt” (se avsnitt 4.2.4). Dessa markeringar fanns alltså inte i texten när den användes i studien. De tre texter som användes i studien och som finns i denna bilaga är:

Matematiktext med symboler
Matematiktext utan symboler
Historietext

Matematiska system och grupper

Definition av begreppet *matematiskt system*:

Ett *matematiskt system* består av två saker:

- En mängd, dvs. en samling av ändligt eller oändligt antal objekt.
- En kombinationsregel, som kan betecknas ~, dvs. en regel som ger resultatet av att kombinera två objekt som tillhör mängden; $a \sim b = c$.

Mängden av alla heltal med addition som kombinationsregel är ett exempel på ett matematiskt system. Alla heltal med subtraktion är ett annat matematiskt system, som också visar att $a \sim b$ inte behöver ge samma resultat som $b \sim a$.

Genom att ta tillvara på gemensamma egenskaper hos olika matematiska system, kan man bilda en generell teori för dessa system. På så sätt är det möjligt att erhålla resultat som är giltiga för vart och ett av systemen, utan att behöva visa dessa resultat för varje system för sig. Ett sätt att beskriva vissa sådana gemensamma egenskaper är med så kallade *grupper*.

Definition av begreppet *grupp*:

En *grupp* är ett matematiskt system, dvs. en mängd G och en kombinationsregel ~, som dessutom har följande fyra egenskaper:

1) Om a och b tillhör G, så tillhör $a \sim b$ också G. Man säger att systemet är slutet.
2) Om a, b och c tillhör G, så gäller att $(a \sim b) \sim c = a \sim (b \sim c)$. Man säger att kombinationsregeln är associativ.
3) G innehåller ett neutralt objekt e, sådant att om a tillhör G, så gäller att $a \sim e = e \sim a = a$.
4) Om a tillhör G, så finns det i G ett objekt a', kallat inversen till a, sådant att $a \sim a' = a' \sim a = e$.

Nu kan vi se att mängden av alla heltal med addition är en grupp, eftersom detta matematiska system har alla fyra egenskaper:

1) Systemet är slutet eftersom om a och b är heltal är också $a+b$ ett heltal.
2) Kombinationsregeln är associativ eftersom $(a+b)+c = a+(b+c)$ för alla heltal a, b och c.
3) Heltalet 0 är det neutrala objektet eftersom $a+0 = 0+a = a$ för alla heltal a.
4) Varje heltal a har heltalet $-a$ som invers, eftersom $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

Matematiska system och grupper

Definition av begreppet *matematiskt system*:

Ett *matematiskt system* består av två saker:

- En mängd, dvs. en samling av ändligt eller oändligt antal objekt.
- En kombinationsregel, dvs. en regel som ger resultatet av att kombinera två objekt som tillhör mängden.

Mängden av alla heltal med addition som kombinationsregel är ett exempel på ett matematiskt system. Alla heltal med subtraktion är ett annat matematiskt system, som också visar att det inte behöver ge samma resultat att kombinera ett första objekt med ett andra som att kombinera det andra objektet med det första.

Genom att ta tillvara på gemensamma egenskaper hos olika matematiska system, kan man bilda en generell teori för dessa system. På så sätt är det möjligt att erhålla resultat som är giltiga för vart och ett av systemen, utan att behöva visa dessa resultat för varje system för sig. Ett sätt att beskriva vissa sådana gemensamma egenskaper är med så kallade *grupper*.

Definition av begreppet *grupp*:

En *grupp* är ett matematiskt system, dvs. en mängd och en kombinationsregel, som dessutom har följande fyra egenskaper:

1) Om två objekt tillhör mängden, så tillhör kombinationen av dessa också mängden. Man säger att systemet är slutet.
2) Om tre objekt tillhör mängden, så får man samma resultat från följande två kombinationer
   – första objektet kombineras med kombinationen av det andra och tredje objektet
   – kombinationen av första och andra objektet kombineras med tredje objektet
   Man säger att kombinationsregeln är associativ.
3) Mängden innehåller ett neutralt objekt, sådant att om det neutrala objektet kombineras med ett objekt i mängden, i vilken ordning som helst, blir resultatet samma objekt som det neutrala objektet kombinerades med.
4) Till varje objekt i mängden finns det en invers i mängden, sådan att resultatet av att kombinera ett objekt med sin invers, i vilken ordning som helst, är det neutrala objektet.

Nu kan vi se att mängden av alla heltal med addition är en grupp, eftersom detta matematiska system har alla fyra egenskaper:

1) Systemet är slutet eftersom summan av två heltal är ett heltal.
2) Kombinationsregeln är associativ eftersom det vid addition av tre heltal blir samma resultat om man adderar det första talet med summan av de två sista, eller om man till summan av de två första talen adderar det sista talet.
3) Det finns ett neutralt objekt i mängden, nämligen heltalet noll, eftersom summan av ett heltal och noll samt summan av noll och ett heltal blir detta heltal.
4) Varje heltal har en invers i mängden eftersom det alltid finns ett annat heltal sådant att summan av de två blir noll.

Rysslands utveckling och ryska revolutionen

Under 1800-talet hade Ryssland lyckats hålla sig utanför politiska, ekonomiska och vetenskapliga revolutioner som helt hade förändrat samhället i resten av Europa. Den politiska makten i Ryssland kontrollerades av tsarerna som reagerade med fast hand mot alla försök till reformer av vissa samhällsklasser. Denna situation orsakade en stor ojämlikhet mellan rika och fattiga, där de rika kontrollerade hela samhället och de fattiga hade varken rättigheter eller ekonomiska resurser.

Kring sekelskiftet 1900 var adeln och prästerna fortfarande de dominerande samhällsklasserna. Medelklassen fanns i princip inte och proletariatet, en samhällsklass i minoritet, kämpade för revolution. Lantbruksarbetare var den största samhällsklassen med fyra femtedelar av befolkningen.

Mellan 1881 och 1914 skedde ekonomisk tillväxt i Ryssland tack vare utländska lån av kapital. Mot bakgrund av denna ekonomiska tillväxt skedde en påfallande ökning av befolkningen och industriproduktionen var tillräckligt hög för att stödja utbyggnaden av järnväg. De utländska lånen löste inte problemen för befolkningen och tvingade också Ryssland till allt större skulder med allt fler länder. Det ekonomiska beroendet orsakat av utländska lån av kapital fördömdes starkt av Lenin, grundare av det bolsjevikiska partiet, som bestod av revolutionära grupper. Dessa grupper skulle senare starta den socialistiska revolutionen, som ett sätt att genomföra radikala förändringar.

Ryska flottans nederlag i rysk-japanska kriget i slutet av 1904 provocerade mobiliseringen av arbetare i en serie av upplopp över hela landet, som resulterade i 1905 års revolution. Revolutionärerna försökte eliminera tsarregimen och få tsar Nikolaj II att följa politiskt mer liberala vägar via skapandet av en rådgivande församling kallad ”duman”.

Trots vissa reformer förblev situationen densamma, och som svar på detta skedde ytterligare två revolutioner i Ryssland 1917. Den första var Februarirevolutionen som underblåstes av ryska förluster mot tyska armén. Med vetskap om dessa militära förluster förenade sig ägare av små företag, soldater och studenter till strejken bland metall- och textilarbetare i Sankt Petersburg. Som en konsekvens av strejken överfördes tsarens makt till dumans exekutiva kommitté, ledd av Kerenskij och av sovjetiska kongressen som representerade soldater och arbetare.

Den andra revolutionen under samma år skedde i oktober när Kerenskijs regering gick emot bolsjevikerna och beslöt att fortsätta kriget mot Tyskland. Det var då soldaterna gick emot sin övermakt, och bolsjevikerna, som kontrollerade sovjetiska kongressen och som leddes av Lenin, tvingade Kerenskij och hans anhängare att fly. I och med denna revolution blev det kommunistiska partiet den regerande makten.

Bilaga C

Bedömningsmallar

I denna bilaga finns de bedömningsmallar som använts i den empiriska studien för att skapa kvantitativa mått på förkunskaper och komponenter av den mentala representationen (se avsnitt 4.2).

Associationer till orden som användes som förkunskapstest bedömdes i tre nivåer. Alla möjliga kategorier under varje nivå finns inte nödvändigtvis med på alla ord. Vissa associationer som kan ses som gemensamma för flera ord kan förekomma på endast ett ord men användes också vid bedömning på andra ord. Detta gäller till exempel ”matematik” eller ”historia” som association till ord från respektive ämne. De mallar som finns i denna bilaga för bedömning av förkunskaper skapades utifrån, och användes parallellt med, mer allmänna beskrivningarna av skillnader mellan de tre nivåerna (se avsnitt 4.2.2).

Svar på frågorna avseende den mentala representationen bedömdes i olika nivåer (A, B, C och D) för olika frågor. Dessa nivåer jämfördes sedan för att få en gemensam poängsättning för matematiktexterna respektive historietexten, samt uppdelat på TB- och FB-frågor (se tabeller A till D). Flera nivåer från samma fråga kom då att erhålla samma poäng, och dessa är också markerade i den inledande beskrivningen av nivåerna med * eller **.

Förkunskapstest - matematikord

Ord nr 1: addition

Hög organisation (3 poäng)

Överordnat begrepp: ett räknesätt. Definition: operation mellan (två) storheter med plusoperator. Koppling: explicit angiven relation till något annat räknesätt.

Partiell organisation (2 poäng)

Exempel: 1+2=3. Attribut: kommutativitet. Definierande egenskap: plus, lägga ihop, addera tal, summa, termer.

Diffus organisation (1 poäng)

Association: subtraktion. Morfem: addera. Personlig erfarenhet: lågstadiet, matematik.

Ord nr 2: mängd

Hög organisation (3 poäng)

Definition: samling av objekt/element.

Partiell organisation (2 poäng)

Exempel: mängden av… Attribut: kan läggas ihop. Definierande egenskap: (många) saker/objekt, antal, hur mycket av något, ett antal saker [måste säkert visa att inte avser antalet som mängden för att bli en definition].

Diffus organisation (1 poäng)

Association: grupp, venndiagram, mycket, många, volym, massa, mått, enheter, område. Morfem: mängdlära, mängddiagram. Personlig erfarenhet: algebra, lågstadiet på 70-talet, kemi, fysik.

Ord nr 3: invers

Hög organisation (3 poäng)

Definition: element som är ett givet elements motsats med avseende på en viss operation.

Partiell organisation (2 poäng)

Exempel: 1/x (är invers till x) Attribut: objekts relation till givet objekt. Definierande egenskap: motsatt/tvärtom objekt.

Diffus organisation (1 poäng)

Association: motsats, tvärtom, omvänt. Morfem: invertera, invers funktion. Personlig erfarenhet: (matematisk) analys.

Ord nr 4: definition
Hög organisation (3 poäng)
Definition: bestämning, angivelse vad något är.
Partiell organisation (2 poäng)
Exempel: hur en funktion definieras, förklaring av ett ord. Attribut: betydelse, överenskommelse. Definierande egenskap: förklarar, beskriver (exakt), påstående.
Diffus organisation (1 poäng)
Association: ord, begrepp, regel. Morfem: definiera, derivatans definition.

Ord nr 5: heltal
Hög organisation (3 poäng)
Definition: uppräkning av alla heltal, t.ex. ”…, -2, -1, 0, 1, 2, …”.
Partiell organisation (2 poäng)
Exempel: ofullständig uppräkning. Definierande egenskap: tal utan decimaler eller bråk.
Diffus organisation (1 poäng)
Association: antal, tallinje, diskret. Morfem: (hela) tal.

Förkunskapstest - historieord

Ord nr 1: tsar
Hög organisation (3 poäng)
Definition: (historisk benämning på) härskare i Ryssland(, Bulgarien och Serbien). Koppling: (som en) kejsare/kung i Ryssland.
Partiell organisation (2 poäng)
Exempel: Nikolaj, Ivan den förskräcklige. Attribut: makt. Definierande egenskap: ledare, (envålds-)härskare.
Diffus organisation (1 poäng)
Association: förtryck, Ryssland, överklass. Morfem: tsarvälde. Personlig erfarenhet: historia.

Ord nr 2: proletariat
Hög organisation (3 poäng)
Definition: (de egendomslösa) arbetarna som kollektiv, arbetarklassen.
Partiell organisation (2 poäng)
Attribut: (lägre) samhällsklass. Definierande egenskap: arbetare, fattig.
Diffus organisation (1 poäng)
Association: kamp, diktatur, kommunism, bönder. Morfem: proletariatets diktatur.

Ord nr 3: Lenin

Hög organisation (3 poäng)

Definition: rysk/sovjetisk politiker, sitt lands ledare i och med revolution 1917.

Partiell organisation (2 poäng)

Attribut: kommunism, marxism. Definierande egenskap: politiker, ledare, revolutionär.

Diffus organisation (1 poäng)

Association: Ryssland, Sovjet, revolution, Stalin. Morfem: leninism.

Ord nr 4: samhällsklass

Hög organisation (3 poäng)

Definition: sätt att efter ekonomiska och sociala måttstockar indela samhällets medborgare.

Partiell organisation (2 poäng)

Exempel: adel, präster, borgare, bönder, rika/fattiga. Attribut: ekonomiska/sociala skillnader. Definierande egenskap: indelning av medborgare (i samhället).

Diffus organisation (1 poäng)

Association: indelning, skillnader, motsättningar, socialism, kommunism, medborgare. Morfem: samhällsgrupp, arbetarklass. Personlig erfarenhet: finns (ej) idag, samhällskunskap, sociologi.

Ord nr 5: bolsjevik

Hög organisation (3 poäng)

Definition: medlem i Lenins parti (som tog makten i revolution 1917). Koppling: explicit given relation till mensjevik.

Partiell organisation (2 poäng)

Exempel: Lenin. Attribut: ryskt politiskt parti. Definierande egenskap: kommunist, radikal, revolutionär.

Diffus organisation (1 poäng)

Association: mensjevik, Ryssland/Sovjet, politik.

Frågor avseende mental representation

Matematikfråga nr 1 (TB): Vad menas med inversen till ett objekt?

Nivå A: Från exemplet, -x invers till x alternativt tal så summan av de två blir noll.

Nivå B: Nivå A plus att resultatet (nollan) blir det neutrala objektet.

Nivå C: Allmänt, kombination av invers och objektet blir neutralt objekt (eller 'e'). Accepterar referens till 'tal' istället för 'objekt' samt andra sätt att beskriva att objekten kombineras (t.ex. ”objekt *tillsammans med* invers”, dock ej ”adderas” eller liknande som är kopplat till exemplet med addition).

Kommentarer:

Utan någon referens till inversens relation till objektet ger noll poäng. Kräver aldrig förklaring av vad neutralt objekt är eller att objektet och inversen ska kunna kombineras i vilken ordning som helst.

Exempel:

”Betecknas a' och är det negativa talet” ger noll poäng eftersom ingen relation finns beskriven mellan invers och objektet.

”Det objekt, som vid kombination med det första resulterar ett neutralt objekt” klassificeras som nivå C även om lite otydlig referens till ”första” objektet.

Matematikfråga nr 2 (TB): Är påståendet ”Ett matematiskt system är en grupp” sant eller falskt? Motivera!

Nivå A: Nej, en grupp är ett system / Exempel på system som ej är grupp utan att explicit ange varför.

Nivå B: Nivå A plus påpekande att en grupp har egenskaper som inte alla system har / Exempel inklusive vilken egenskap som saknas.

Exempel:

Ett ritat Venndiagram med ”grupper” ritat innanför ”system” klassificeras som nivå A.

”En grupp är ett matematiskt system med vissa villkor” klassificeras som nivå B.

Matematikfråga nr 3 (FB+TB): Är mängden av alla heltal med division som kombinationsregel ett slutet system? Motivera!

FB-nivå A: På rätt väg men vissa brister i motivering, t.ex. utan tydlig koppling till mängden (heltal).

FB-nivå B: Finns division mellan heltal som inte blir heltal.

TB-nivå A: Addition med heltal är slutet.

TB-nivå B: Resultat av kombination ska ge heltal eller ligga i mängden.

Kommentarer:

TB-nivåerna bedöms snällt; klassificeras svaret som någon FB-nivå klassificeras det därmed också som TB-nivå B.

Exempel:
”Om man skulle dividera med 0 ex så är det inte det” klassificeras som FB-nivå A eftersom brister finns i motivering.
”Nej, med addition är det ett slutet system” klassificeras som TB-nivå A och noll poäng för FB.

Matematikfråga nr 4 (FB): Kan ett objekt i en grupp kombineras med sig själv? Motivera!

Nivå A: Nej, blir i alla fall ett nytt objekt, även om samma (tal), så kombineras ej med sig själv.

Nivå B: Ja, varför inte? (Accepterar även konstiga/bristande motiveringar.)

Nivå C:* Konkret exempel, t.ex. 2+2=4.

Nivå D:* Allmän förklaring, objekt förbrukas ej eller dylikt och man kan ta samma objekt två gånger från mängden, eller allmänna symboler för objekt och kombinationer.

Kommentarer:

Struntar i om ger exempel från *grupper* eller ej, bara någon kombinationsregel. Accepterar tolkning av frågan som att den inte avser grupper (eller kombinationsregler) i allmänhet, därför slås nivåer C och D ihop. Att svaret är jakande räcker alltså som krav för att klassificeras som nivå B.

Matematikfråga nr 5 (FB+TB): Vilket neutralt objekt har mängden av alla heltal med multiplikation som kombinationsregel? Motivera!

FB-nivå A: Talet ett, bara svar eller med bristande motivering (t.ex. utgående från invers).

FB-nivå B: Att ”gånger ett” ger samma resultat/oförändrat värde. Behöver ej påpeka att 1*x = x*1.

TB-nivå A: Talet noll (ty ger alltid samma resultat vid kombination).

TB-nivå B: Talet ett, ty objekt gånger invers ska bli neutralt.

TB-nivå C: Talet ett, ty kombination förändrar ej talet.

Kommentarer:

Att bara svara ”1” ger alltså FB-nivå A men noll poäng på TB.

Matematikfråga nr 6 (FB): Är mängden av alla heltal med multiplikation som kombinationsregel en grupp? Motivera!

Nivå A: Motiverar ja med bara en av de fyra egenskaperna.

Nivå B: Svaret innehåller att ska uppfylla flera/fyra egenskaper.

Nivå C: Nivå B plus testar egenskap(er), kanske ej kommer ihåg alla, eller någon felaktig / Motiverar nej med att ej har neutralt objekt.

Nivå D:* (Alla tal) har inte inverser, utan mer detaljerad motivering.

Nivå E:* Motivering att inverser ej är heltal.

Kommentarer:

Slår ihop nivåer D och E eftersom skillnaden mellan dessa inte direkt avser motiveringen till frågan som ställs.

Exempel:

”Kanske, (a*b)*c=a*(b*c)” och ” Ja, blir alltid heltal” klassificeras som nivå A.

”Ja, jag tror det uppfyller reglerna men kommer inte ihåg dem exakt” klassificeras som nivå B.

Matematikfråga nr 7 (TB): Vad är ett matematiskt system?

Nivå A: Bara fokus på antingen en mängd eller en regel (som beskrivs/förklaras).

Nivå B: Består av två saker, kommer ihåg den ena.

Nivå C:* Mängd och kombinationsregel (utan beskrivning/förklaring).

Nivå D:* Separerar ej tydligt två saker men beskriver ”tal som kan kombineras” eller dylikt där *kombinationsregeln* beskrivs implicit. Alternativt ger ett konkret exempel, t.ex. addition med heltal. Ska dock framgå att talen/objekten kombineras, annars nivå A.

Nivå E: Allmänt, mängd och kombinationsregel, med beskrivning/förklaring av begreppen. Beskrivningar räcker, dvs. behöver ej använda orden ”mängd” och ”kombinationsregel”.

Kommentarer:

För alla nivåer bortses från eventuellt inkluderande av de fyra gruppegenskaperna, ty relationen grupp-system täcks av annan fråga. Bortser från om anger ”regler” (plural). Endast kommentar om att består av ”två saker” eller dylikt ger noll poäng. Slår ihop nivåer C och D eftersom dessa har liknande brister i förklaringen.

Exempel:

”Delar som hänger ihop med en kombinationsregel och ger ett specifikt resultat” klassificeras som nivå A ty ej tydligt vad ”delar” avser.

”När man kombinerar två tal med en kombination” klassificeras som nivå A.

”En ändlig eller oändlig mängd i kombination med ett räknesätt t.ex. addition” klassificeras som nivå E.

Matematikfråga nr 8 (TB): Vad menas med att en kombinationsregel är associativ?

Nivå A:* Tydlig kommutativitet beskriven.

Nivå B:* Pratar om ordning mellan kombinationer (oklart exakt vad som menas).

*Nivå C**:* Beskrivet med ord men litet fel avseende ordning på kombinationer.

*Nivå D**:* Korrekt uttryck med symboler eller beskrivet i ord.

Kommentarer:
Om ingen likhet/relation behandlas, utan bara prat om tre tal/objekt ger noll poäng. Slår ihop nivåer A och B eftersom nivå B kan handla om kommutativitet. Slår ihop nivåer C och D eftersom det finns felaktiga förklaringar i ord men som skriver rätt med symboler. En allmän kombinationsregel behöver inte behandlas, räcker med t.ex. addition.

Exempel:
”Man kan kasta runt objekten och få samma resultat” klassificeras som nivå A.

”Spelar ingen roll vilken ordning man utför kombinationen” klassificeras som nivå B.

Historiefråga nr 1 (TB): Vad gjorde att Ryssland kunde få en stark ekonomisk tillväxt kring sekelskiftet 1900?

Nivå A:* Lån av pengar / Hjälp från andra länder

Nivå B:* Pengar från utlandet (ej specifikt lån, t.ex. investeringar)

Nivå C: Lån från andra länder

Kommentarer:
Slår ihop nivåer A och B eftersom alla svar i dessa nivåer ses som jämförbara aspekter av nivå C.

Historiefråga nr 2 (FB+TB): Vad ville bolsjevikerna uppnå med revolutionen i oktober 1917?

FB-nivå A: Komma till makten.

FB-nivå B:* Få bort klassamhället. Räcker ej med så allmänna saker som rättvisa, bättre villkor eller liknande.

FB-nivå C:* Förändra samhällsstrukturen i vidare mening än nivå B, t.ex. hänvisning till socialistisk revolution.

FB-nivå D: Både nivå A och nivå B/C.

TB-nivå A: Avsluta kriget (mot Tyskland).

Kommentarer:
Slår ihop nivåer B och C ty svårt att skilja på dessa.

Exempel:
”Ett rättvisare politiskt system där folket skulle få mer makt” ger noll poäng eftersom för allmänt.

”Avsätta den regering som styrde landet” ger noll poäng eftersom det inte framkommer vilka som skulle ta/få makten därefter.

Historiefråga nr 3 (TB): Vad var en utlösande faktor till revolutionen 1905?

Nivå A: Krig mot Japan.

Nivå B: (Flottans) förluster i krig.

Nivå C: Både nivå A och B.

Historiefråga nr 4 (FB): Hur påverkade första världskriget de ryska revolutionerna?

Nivå A: Allmän referens till krigsförluster eller motsättningar om kriga eller ej.

Nivå B: Nivå A plus att påpekar handlar om revolution(er) 1917.

Nivå C: Specifikt om antingen februari- eller oktoberrevolutionen, behöver dock ej namnge den, räcker med (specifik) beskrivning av händelser.

Nivå D: Specifikt om båda revolutioner 1917.

Exempel:

”Fixade revolutionen 1917 eftersom armén hade förlorat många mot tyskarna” klassificeras som nivå B.

”De ryska soldaterna gjorde uppror och stödde det parti som inte ville skicka dem i krig” klassificeras som nivå C eftersom det är en specifik beskrivning av händelser i oktoberrevolutionen.

”Militära förluster mot tyskarna gjorde att bl.a. studenter och småföretagare förenade sig mot tsaren” klassificeras som nivå C eftersom det är en beskrivning av händelser i februarirevolutionen.

”Det fick två revolutioner till följd, en efter kriget mot tyskland, då fick duman makten, sen ytterliggare en samma år då kriget återupptogs, då tog bolsjevikerna med Lenin i spetsen makten” klassificeras som nivå B eftersom beskrivningarna av händelserna är allmänna.

Historiefråga nr 5 (TB): När och varför infördes duman?

När-nivå A: Efter första revolutionen / Årtal i intervall 1901-1909. ”Början av 1900-talet” räcker ej eftersom hela texten i princip handlar om den tiden!

När-nivå B: Efter 1905 års revolution eller bara 1905.

Varför-nivå A:* Påverka tsarens politik / Ge råd till tsaren / Minska tsarens makt (eller avsätt honom). Referens till tsaren krävs, ej bara ”makten” eller dylikt.

Varför-nivå B:* Mer liberal politik, utan referens till tsaren.

Varför-nivå C: Både nivå A och B.

Kommentarer:

Slår ihop varför-nivåer A och B eftersom alla svar i dessa nivåer avser jämförbara aspekter av nivå C. Kejsare som referens till tsar accepteras.

Exempel:

”Infördes av Nikolaj som en rådgivande grupp” klassificeras som varför-nivå A.

Historiefråga nr 6 (FB): I andra stycket nämns att proletariatet kämpade för revolution. Vad hoppades de åstadkomma med revolutionen?

Nivå A: Få det bättre, allmänt om bättre villkor för ”folket”.

Nivå B:* Bättre ekonomiska villkor.

Nivå C:* Politiskt mer jämlikt och rättvist.

Nivå D: Både nivå B och C.

Kommentarer: Nivåer B och C slås ihop eftersom båda avser jämförbara aspekter av nivå D.

Exempel:

”De ville ha mer makt och mer pengar” klassificeras som nivå D eftersom både deras politiska och ekonomiska situation berörs. Men att de ville ”ta över makten” eller att något visst parti skulle få makten ses som felaktigt.

Historiefråga nr 7 (TB): Vad gjorde att Ryssland inte hade samma stora förändringar i samhället som resten av Europa på 1800-talet?

Nivå A: Tsarens stora makt, envälde.

Nivå B: Försök till reformer slogs ned (av makten). Kräver någonting explicit om *motverkande* av reformer på något sätt, räcker ej med ”konservativt styre” eller liknande.

Nivå C: Både nivå A och B.

Exempel:

”De styrande gruppen av adel tillät inte att samhället förändrades” klassificeras som nivå B.

Historiefråga nr 8 (FB): Vilken utav revolutionerna var minst blodig? Motivera!

Nivå A: Relevant händelse/egenskap hos någon utav revolutionerna.

Nivå B: Någon relevant jämförelse mellan olika revolutioner.

Nivå C: Sista revolution av politisk art, därmed oblodig.

Nivå D: Både nivå B och C.

Exempel:

”Den sista, de sittande fick avgå” klassificeras som nivå A eftersom för bristande motivering för att klassificeras som nivå C.

”Möjligen den i februari 1917 för då användes mest strejker som medel för påtryckningar mot tsaren, medan oktoberrevolutionen var en statskupp understödd av vissa militärer” klassificeras som nivå B.

Historiefråga nr 9 (TB): När förlorade tsaren sin makt och vilka fick makten därefter?

När-nivå A: Placeras till de två sista revolutionerna, t.ex. genom att bara ange 1917. Även felaktiga ”oktober 1917” tas med här eftersom att bara ange 1917 lika gärna kan avse oktoberrevolutionen.

När-nivå B: Placeras (implicit) till Februarirevolutionen, t.ex. genom vilken revolution i ordning.

När-nivå C: Februari 1917 / Första revolutionen 1917.

Därefter-nivå A: Duman.

Därefter-nivå B: Bara ”Kerenskij”, eller tydlig referens till denna person även om namnet ej ges.

Därefter-nivå C: De som var innan Bolsjevikerna och Lenin.

Därefter-nivå D: Kerenskij / Sovjetiska kongressen / Exekutiva kommittén (dumans). Här krävs att framgår att någon grupp av personer styrde som utgår från någon av de tre alternativen.

Exempel:

”Kerenskij-regeringen fick makten” och ”då fick duman makten och dess exekutiva kommitté fick leda landet” klassificeras som därefter-nivå D.

Poängsättning av frågor avseende mentala representationen

TB-frågor till matematiktexterna (tabell A).

1 poäng: Svar som direkt berör enstaka sak från exemplet i texten eller bristfälliga, delvis felaktiga svar som berör något mer allmänt.

2 poäng: Svar som berör någon allmän aspekt från exemplet i texten eller allmänna svar med bristande förklaring/beskrivning.

3 poäng: Generella beskrivningar som dock ej är helt specificerade.

4 poäng: Specificerade generella beskrivningar.

Tabell A. *Poängsättning av olika svarsnivåer för TB-frågor till matematiktexterna.*

	Matematikfråga					
Poäng	**1**	**2**	**3**	**5**	**7**	**8**
1	A		A	A	A	A, B
2	B		B	B	B	
3	C	A		C	C, D	C, D
4		B			E	

FB-frågor till matematiktexterna (tabell B).

1 poäng: Delvis felaktiga svar.

2 poäng: Svar som är på rätt väg men med brister i motivering/beskrivning.

3 poäng: (Delvis) korrekta svar avseende en enstaka aspekt i texten.

4 poäng: Helt korrekta svar avseende flera aspekter i texten.

Tabell B. *Poängsättning av olika svarsnivåer för FB-frågor till matematiktexterna.*

	Matematikfråga			
Poäng	**3**	**4**	**5**	**6**
1		A		A
2	A	B	A	B
3	B	C, D	B	C
4				D, E

TB-frågor till historietexten (tabell C).

1 poäng: Svar motsvarande en del av ett påstående i texten.

2 poäng: Svar motsvarande ett specifikt påstående i texten eller en del av ett sammanhang (flera påståenden).

3 poäng: Svar som kräver att två påståenden i texten kopplas samman eller som motsvarar mer relevant del av ett sammanhang (jämfört med 2 poäng).

4 poäng: Specifika/detaljerade beskrivningar.

Tabell C. *Poängsättning av olika svarsnivåer för TB-frågor till historietexten.*

	Historiefråga							
Poäng	**1**	**2**	**3**	**5 När**	**5 Varför**	**7**	**9 När**	**9 Därefter**
1	A, B		A					A
2	C		B	A	A, B	A	A	B
3		A	C	B	C	B	B	C
4						C	C	D

FB-frågor till matematiktexterna (tabell D).

1 poäng: Delvis felaktiga eller ofullständiga svar.

2 poäng: Svar som är på rätt väg men med brister i motivering/beskrivning.

3 poäng: Korrekta svar avseende en relevant aspekt.

4 poäng: Helt korrekta svar avseende flera relevant aspekter.

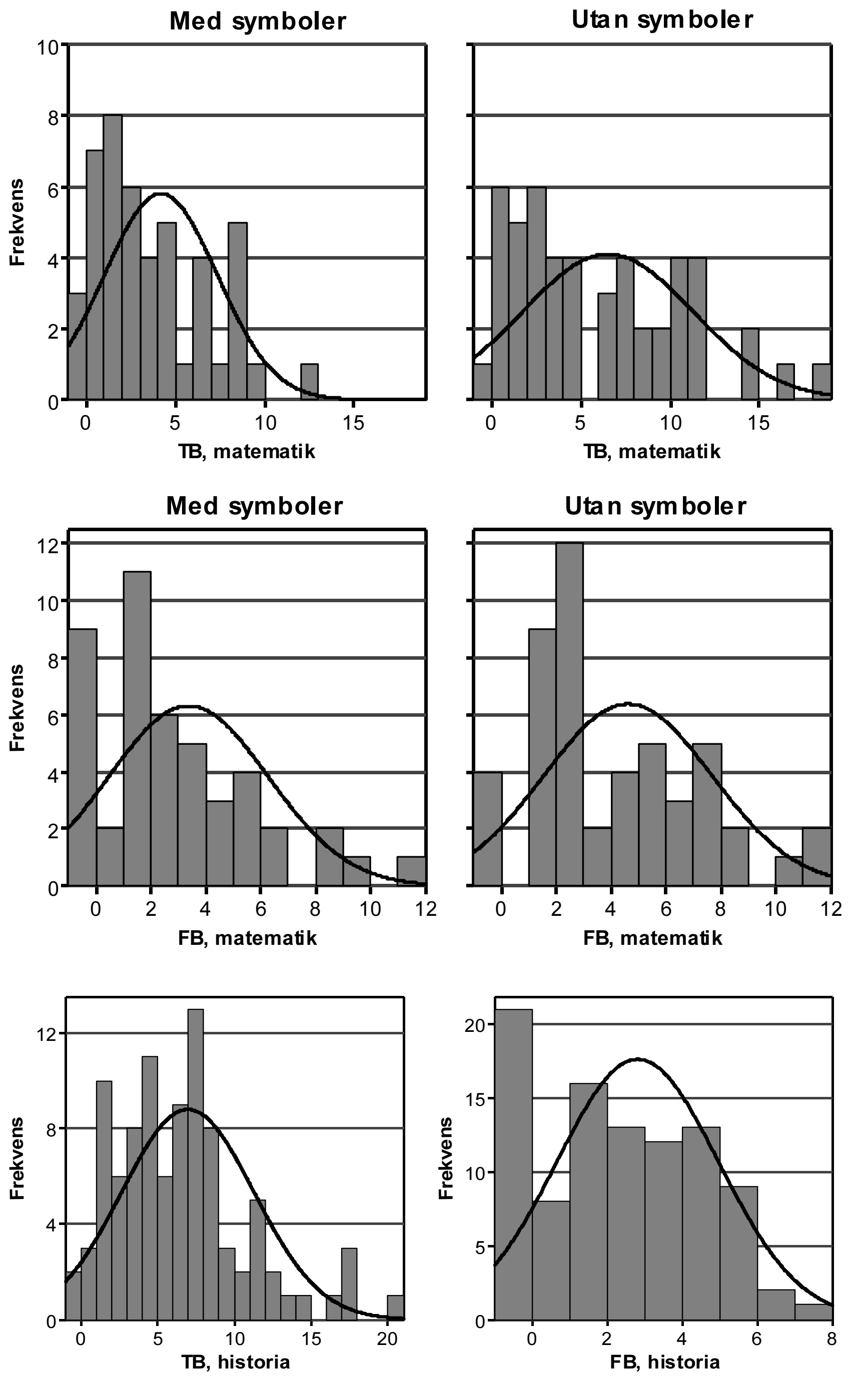
Tabell D. *Poängsättning av olika svarsnivåer för FB-frågor till historietexten.*

	Historiefråga			
Poäng	**2**	**4**	**6**	**8**
1		A		A
2	A	B	A	B
3	B, C	C	B, C	C
4	D	D	D	D

Bilaga D

Diagram och tabeller

I denna bilaga finns diagram och tabeller som inte direkt används i analysen av data i den empiriska studien men som utnyttjas för att granska de variabler och mått som används.



Figur A. *Spridning av deltagare avseende TB och FB för de tre olika texterna. Tillhörande normalfördelningskurvor är inritade.*

Tabell E. *Korrelationer mellan alla enstaka frågor samt totala poängen (summan) för förkunskapstesten. Matematikfrågorna (orden) behandlas i tabellens övre högra del och historiefrågorna i tabellens nedre vänstar del. Spearmans korrelationskoefficient anges i tabellen (N = 95).*

	Ord 1	**Ord 2**	**Ord 3**	**Ord 4**	**Ord 5**	**Summa**
Ord 1		0,459*	0,156	0,380**	0,200	0,511**
Ord 2	0,112		0,121	0,352**	0,095	0,664**
Ord 3	0,314**	0,051		0,223*	-0,196	0,458**
Ord 4	0,229*	0,140	0,084		-0,018	0,744**
Ord 5	0,414**	0,243*	0,293**	0,123		0,327**
Summa	0,668**	0,603**	0,435**	0,523**	0,688**	

* Korrelation signifikant vid nivå 0,05.

** Korrelation signifikant vid nivå 0,01.

Tabell F. *Korrelationer mellan alla enstaka frågor samt totala poängen (summan) för TB-frågor. Matematikfrågorna behandlas i tabellens övre högra del och historiefrågorna i tabellens nedre vänstar del (Mx och Hx avser matematikfråga respektive historiefråga nummer x). Spearmans korrelationskoefficient anges i tabellen (N = 95).*

	M1,H1	**M2,H2**	**M3,H3**	**M5,H5**	**M7,H7**	**M8,H9**	**Summa**
M1,H1		0,069	0,128	0,072	0,149	0,245*	0,459**
M2,H2	0,036		0,068	0,045	0,280**	0,232*	0,573**
M3,H3	0,167	0,032		0,050	0,153	0,208*	0,418**
M5,H5	0,034	0,233**	0,035		0,131	0,287**	0,457**
M7,H7	0,081	-0,048	0,183	0,103		0,201	0,562**
M8,H9	-0,047	0,066	0,120	0,307**	0,051		0,607**
Summa	0,322**	0,427**	0,462**	0,654**	0,397**	0,544**	

* Korrelation signifikant vid nivå 0,05.

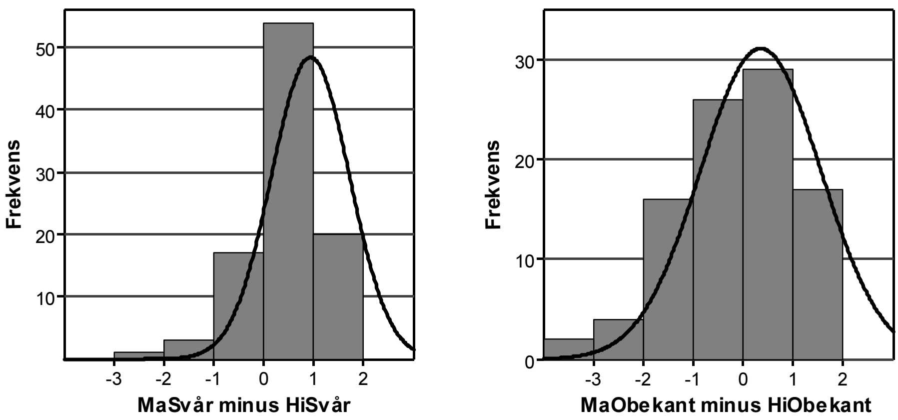
** Korrelation signifikant vid nivå 0,01.

Tabell G. *Korrelationer mellan alla enstaka frågor samt totala poängen (summan) för FB-frågor. Matematikfrågorna behandlas i tabellens övre högra del och historiefrågorna i tabellens nedre vänstar del (Mx och Hx avser matematikfråga respektive historiefråga nummer x). Spearmans korrelationskoefficient anges i tabellen (N = 95).*

	M3,H2	**M4,H4**	**M5,H6**	**M6,H8**	**Summa**
M3,H2		0,056	0,098	0,324**	0,642**
M4,H4	0,132		0,022	0,068	0,403**
M5,H6	0,063	0,134		0,286**	0,623**
M6,H8	0,140	0,066	-0,087		0,634**
Summa	0,611**	0,566**	0,620**	0,285**	

* Korrelation signifikant vid nivå 0,05.

** Korrelation signifikant vid nivå 0,01.



Figur B. *Spridning av deltagare avseende skillnaden mellan bedömningar av matematiktexten och historietexten för hur svårläst texterna är (till vänster) och hur obekant texterna är (till höger). Tillhörande normalfördelningskurvor är inritade.*