Linköping Studies in Science and Technology
Thesis, No. 1665

Gymnasieelevers kommunikativa strategier i matematiklassrummet

En fallstudie av ett smågruppsarbete om derivata

Marie Bergholm

Linköpings universitet
TEKNISKA HÖGSKOLAN

Matematiska institutionen
Linköpings universitet, 581 83 Linköping

Linköping 2014

**Gymnasieelevers kommunikativa strategier i matematikklassrummet –
En fallstudie av ett smågruppsarbete om derivata**

Copyright © 2014 Marie Bergholm unless otherwise noted

Matematiska institutionen
Linköpings universitet
581 83 Linköping
marie.bergholm@soderkoping.se

ISBN 978-91-7519-306-9

ISSN 0280-7971

Denna licentiatavhandling ingår även i serien: Studies in Science and Technology Education 2014:69 ISSN 1652-5051

Nationella forskarskolan i Naturvetenskapernas och Teknikens didaktik, FontD, <http://www.isv.liu.se/fontd>, tillhör Institutionen för samhälls- och välfärdsstudier och Områdesstyrelsen för utbildningsvetenskap (OSU) vid Linköpings universitet. FontD är ett nätverk av 13 medverkande lärosäten. FontD publicerar skriftserien Studies in Science and Technology Education.

Tryckt av LiU-Tryck, Linköping 2014

Förord

Denna avhandling är det skriftliga resultatet av mina forskarstudier som licentiat inom FontD forskarskola i lärarlyfts regi. Den är en skriftlig presentation av en empirisk studie, men den utbildningsresa in i forskarvärlden jag fått möjlighet att genomföra skulle också vara värd att komma på pränt. Arbetet har tagit mig mer tid än jag kunde drömma om. Studierna har inte bara inneburit att min syn på lärande och matematikdidaktiska frågor har förändrats. De observationer, intervjuer och analyser som jag ägnat en stor del av min tid åt, har också kommit att prägla och förändra min egen matematikundervisning. Läsningen av oräkneliga forskningsstudier och rapporter har under studietiden förändrat min uppfattning om hur jag ska välja arbetssätt och metoder för att gynna lärandet och möjliggöra att eleverna ska utveckla olika matematiska kompetenser. Det kan man kalla ett lärarlyft!

Att delta i en forskarskola har inneburit många trevliga och givande möten och samtal med studiekamrater och lärare. Studietiden kan metaforiskt liknas vid en lång resa med många helt olika hållplatser som alla på olika sätt har varit nödvändiga för att jag skulle komma fram till denna slutstation. Konferenser i matematikdidaktik, deltagande i sommarskolor för forskarstuderande, matematikkurser, skrivarkurser, handledarmöten och didaktikseminarier har avlöst varandra. Utan stöd och assistans hade jag aldrig kommit ända fram! Tack Anna Ericsson, administratör för FontD på Linköpings universitet i Norrköping. Du är en pärla och har verkligen varit en spindel i nätet när det trasslat!

Jag vill rikta ett mycket varmt tack till mina bägge handledare, min huvudhandledare Christer Bergsten och biträdande handledare Iris Attorps, för att ni har funnits med under min resa som forskarstuderande. Ni har bägge betytt mycket för att jag slutligen har nått denna ändhållplats. Tack Christer för att du tålmodigt funnits där och med ett vetenskapligt synsätt delgivit mig kloka synpunkter och utmanat mina tankar. Det har varit helt avgörande för att jag nu vågar tro att jag har nått fram till slutstationen. Tack Iris för din generositet och värme och för att du krävde att jag fattade pennan. Mina besök på Högskolan i Gävle har inneburit många handledningstimmar med diskussioner där jag verkligen "fått sätta ord på mina tankar".

Men utan tillträde till matematikklassrummet hade denna studie inte varit möjlig. Mitt allra varmaste tack vill jag därför rikta till lärare och alla de elever som låtit mig finnas med i klassrummet som iakttagare under flera månader. Med en god skopa tålmod har ni vant er vid att umgås med videokameror, sladdar och audio-visuella pennor. Ni har varit underbart rara och hjälpsamma!

Möjligheten att genomföra forskarstudierna och parallellt arbeta kvar i min yrkesverksamhet som matematiklärare, har varit en förutsättning för att få kraft och inspiration att fortsätta studierna. Utan möjligheten till att kliva av på denna hållplats och det andhål av glädje och inspiration som min vardag som matematiklärare innebär, hade jag inte kommit fram till slutstationen. Jag vill därför också rikta ett

tack till de skolledare som stöttade mig under studietiden. Tack Ingrid Palgård, Elisabeth Bringer Hallberg och Magnus Ekenblom för att Ni gjorde det möjligt att kombinera mina studier med min anställning som matematiklärare på Nyströmska skolan i Söderköping.

Jag vill också tacka alla mina kollegor som har visat förståelse för att jag ibland ”sprang fortare än min skyddsängel kunde flyga”. Ett särskilt varmt tack vill jag rikta till mina arbetskamrater Lena Widén Kornebäck, Bengt Möller och Annvor Larsson. Tack Lena för att du har stöttat mig när jag darrade inför konferenspresentationer på engelska och för att du tålmodigt korrekturläst artiklar och texter på engelska. Benny, det är tryggt att veta just du har varit med och korrekturläst avhandlingen. Dina kunskaper, ditt engagemang och din säkerhet vid korrekturläsningen är imponerande. Och att lämna mina undervisningsgrupper när forskarstudierna krockade med min undervisningstid i klassrummet hade inte varit tänkbart utan dig, Annvor. Tack för att du alltid ställde upp när jag behövde hjälp och genomförde välplanerade lektioner!

Att ”frysa in och bevara” en liten del av den kommunikation som pågår i klassrummet har inneburit tillgång till en outtömlig källa av datamaterial som kan analyseras utifrån olika frågeställningar och teoretiska antaganden. I ett tidigt skede av min studietid föreställde jag mig att jag den dag då det var dags att avsluta studierna skulle uppleva mig ”färdig” med mina studier. Idag upplever jag en saknad av studierna redan innan jag satt sista punkten i min avhandling. I skrivande stund önskar jag att många fler lärare får möjlighet att ta chansen att bedriva forskning inom det didaktiska forskningsfältet. Det har gett bränsle och inspiration för min yrkesverksamhet som matematiklärare.

Det finns dock stunder då forskarstudierna inte har varit en dans på rosor. Många är de semesterresor, lov, helger, bil- och tågresor då avhandlingen följt med på turen som en oskiljaktig vän. Jag vill rikta ett varmt tack till min familj, och framför allt till min man Uffe, som under långa perioder har tagit över alla praktiska vardagsbestyr och sett till att jag fått mat och stunder av vila. Du är fantastisk!

Söderköping i april 2014

Marie Bergholm

Innehåll

Sammanfattning	ix
Abstract	xi
Kapitel 1 Inledning.....	1
1.1 Introduktion.....	1
1.2 Bakgrund, inriktning och motiv till studien	2
1.3 Studiens syfte och forskningsfrågor.....	6
1.4 Avhandlingens disposition.....	7
Kapitel 2 Forskningsöversikt	9
2.1 Svenska elevers kunskapsutveckling i matematik	9
2.2 Undervisningens utförande	10
2.3 Styrdokumentens presentation av matematikämnet.....	11
2.4 Lärobokens inflytande och lärarens ansvar för undervisningen	13
2.5 Den matematiska diskursens komplexitet och medieringens betydelse ..	16
2.6 Forskning med fokus på samarbetslärandets villkor.....	20
2.7 Lärande kopplat till interpersonella faktorer och känslor	24
2.8 Skillnader i elevernas deltagande och interaktion.....	25
2.9 Problemlösningsuppgiften och aktivitetens utformning	27
2.10 Studier kopplade till begreppet derivata	28
2.11 Sammanfattning	30
Kapitel 3 Centrala teoretiska begrepp	32
3.1 Tänkande, lärande och utveckling ur ett sociokulturellt perspektiv	32
3.2 Medierings- och individualisationsprocessen och lärandet	33
3.3 Diskursbegreppet	35

3.4 Från ett monologiskt till ett dialogiskt perspektiv	40
Kapitel 4 Teoretisk utgångspunkt – det kognitiva ramverket	43
4.1 Tänkande, lärande och deltagande i en matematisk diskurs	43
4.2 Utvecklingen av en matematisk diskurs – två vägar för lärande	45
4.3 Lärande, matematiserande, subjektifiering och identitet	46
4.4 Den matematiska diskursens speciella särdrag	51
4.5 Den kognitiva konflikten och lärande.....	55
Kapitel 5 Metodologi och metoder	56
5.1 Valet av en fallstudie och diskursanalys	56
5.2 Studiens design	57
5.3 Valet av derivata som studieobjekt	59
5.4 Tekniska hjälpmedel vid datainsamlingen.....	60
5.5 Datainsamlingsprocedurer och genomförande.....	61
5.6 Urval av deltagare	63
5.7 Förlorade data	65
5.8 Rollen som forskare i gruppen	66
5.9 Förberedande analys och transkription	67
5.10 Diskursanalys av gruppernas kommunikation	69
Kapitel 6 Etiska och metodologiska överväganden	77
6.1 Etiska överväganden	77
6.2 Metodologiska överväganden i studien	79
Kapitel 7 Resultatredovisning av fallstudien	84
7.1 Förutsättningar inför lektionen – undervisningens design.....	84
7.2 Den skriftliga uppgiften och lärarens bidrag i form av ”ledtrådar”	85
7.3 Struktur vid redovisningen av empiriska data	88

7.4 Episod 1: Gruppens inledande matematiska diskurs	90
7.5 Episod 2: Gruppens diskurs efter tilldelning av den första ledtråden	94
7.6 Episod 3: Gruppens diskurs då eleverna fått den andra ledtråden	97
7.7 Episod 4: Eleverna erhåller den tredje ledtråden	102
7.8 Jämförelse av ett urval av resultat från de övriga elevgrupperna	108
Kapitel 8 Sammanfattning och resultatdiskussion	135
8.1 Den matematiska diskursens utformning	135
8.2 Subjektifieringens roll för utvecklingen av den matematiska diskursen	146
Kapitel 9 Implikationer för undervisningen	155
9.1 Studiens relevans	155
9.2 Implikationer för undervisningspraktiken	157
9.3 Fortsatt forskning	161
Referenser	163
Appendix A Flödesscheman för grupp A	175
Appendix B Koder för analys av medierande redskap	179
Appendix C Uppläggning av de första lektionerna om ”derivatan”	180
Appendix D Brev till målsmän och deltagande elever	182
Appendix E Fullmakt till målsmän och deltagande elever	183
Appendix F Fördelning av deltagarnas andel av respektive yttrande	184
Appendix G Transkriptionsmodell	185

Sammanfattning

Denna fallstudie belyser gymnasieelevers arbete i små grupper med ett problem kopplat till derivata och syftar till att belysa faktorer som gynnar eller hindrar individernas deltagande i och utveckling av den matematiska kommunikationen i klassrummet. Studien har sin teoretiska förankring i Anna Sfards kommognitiva ramverk, där lärande i matematik ses som deltagande i en matematisk diskurs.

Under mer än ett årtionde har larmrapporter om svenska elevers bristande kunskaper i matematik avlöst varandra. Forskningsrapporter pekar på olika faktorer bakom denna sjunkande kunskapsutveckling. Den rådande undervisningskulturen, där eleverna i hög grad arbetar individuellt med uppgifter ur läroboken, ses som en förklaring till de försämrade resultaten, och att undervisningen inte ger eleverna möjlighet att utveckla samtliga föreskrivna förmågor i ämnet. För att uppnå detta betonar både forskningsfältet och den nya läroplanen från 2011 vikten av att eleverna kommunicerar i matematik. I detta perspektiv finns ett behov av att belysa skillnader i elevernas deltagande i kommunikationen om matematik, inte minst i samband med lärande i smågrupper, och hur detta antas påverka elevernas förutsättningar till lärande.

Studiens fokus är riktat mot deltagarnas olika bidrag till gruppens matematiska diskurs, det vill säga då eleverna kommunicerar om matematiska objekt eller processer, och hur dessa påverkar elevernas förutsättningar och deltagande i kommunikationen. Fokus är också riktat mot den kommunikation som handlar om deltagarna i gruppen, vad eleverna gör och hur de värderar varandras sätt att delta i den matematiska diskursen i klassrummet. Denna kommunikation, benämns i ramverket för subjektifiering och antas vara sammankopplad med individens lärande i matematik.

Datainsamlingsmetoder som använts är intervjuer, audio- och videoinspelningar och användning av audiovisuella pennor för att sammanföra verbal och skriftlig kommunikation. Diskursen ses som den naturliga analysenheten. I analysens första steg studerades den matematiska diskursen avseende skillnader i innehållet i deltagarnas yttranden. I ett andra analyssteg fokuserades på interaktionsflödet i gruppen för att förstå mer av skillnader i varje elevs deltagande och bidrag till kommunikation.

Studiens resultat visar på stora skillnader avseende deltagande och innehåll i elevernas kommunikation, både på grupp- och individnivå. Elevernas utveckling av den matematiska diskursen gynnas av användningen av flera olika mediatorer för att representera de matematiska objekten. När eleverna erbjuds kopplingar till en tidigare erövrad diskurs, leder det till diskursiva framflyttningar. Eleverna visar sig vidare ha stora svårigheter att tolka och använda det formella matematiska symbolspråket som stöd för matematiserandet. Elevernas tolkning av likhetstecknet, olikhetstecknet och symbolen $f'(x)$ på en processnivå skapar hinder för att utveckla den matematiska diskursen i önskvärd riktning. Den diskurs som handlar om deltagarna och deras egenskaper (identifiering) utgör ca 10 % av samtliga yttranden och är i stort sett samtliga negativa omdömen, ofta använda i syfte att utesluta eller införliva sig själva eller andra från deltagande i matematiserandet.

Forskningsstudien visar på ett behov av ytterligare kunskap om hur matematiklärare på bästa sätt kan organisera arbete i smågrupper för att öka elevernas engagemang och kvaliteten på elevernas matematiserande. Studien pekar vidare på vikten av att matematiklärare belyser och varierar användningen av olika mediatorer för att representera de matematiska objekt som är föremål för lärandet. Fallstudien belyser även vikten av att bygga upp det tillåtande arbetsklimat där eleverna inte bedömer sig själva och andra, utan istället vågar ställa de frågor som innebär att de blir alltmer delaktiga i den matematiska diskursen. Ett behov framträder av ytterligare forskning riktad mot inte bara mot den bedömning som sker mellan lärare och elev, utan också mot den bedömning som pågår i klassrummet mellan eleverna, vilket kan påverka vilka roller de väljer eller tilldelas i klassrummet. Detta kan antas vara av stor vikt för hur eleverna kommunicerar om matematik med andra deltagare i klassrummet, vilket också kan antas påverka lärandet.

Nyckelord: matematisk diskurs, kognition, deltagande, matematisera, identifiering, subjektivering, lärande i smågrupper

Abstract

This case study takes its focus on upper secondary school students' work in small groups with a problem related to the derivative. The analysis aims to identify factors that promote or hinder an individual's participation in and development of the mathematical communication in the classroom. The theoretical basis of the study is Anna Sfard's commognitive framework, where learning mathematics is seen as participating in a mathematical discourse.

For more than a decade, reports about Swedish students' decreasing levels of school mathematical knowledge have been put forward. Research points to various factors behind this development. The prevailing educational culture, where students largely work individually from the textbook, is seen as one explanation for the deterioration in the results, and that teaching does not give students the opportunity to develop all the required competencies in the curriculum. To achieve this, both research and the new Swedish curriculum from 2011 emphasize the importance of student communication in mathematics. In this perspective, there is a need to highlight the differences in student participation in the communication of mathematics in the classroom, particularly in the context of small group learning, and how this is assumed to influence students' opportunities for learning.

The focus of the research is directed towards the participants' contributions to the group's mathematical discourse, i.e. when they communicate about mathematical objects or processes, and how these affect students' opportunities and participation in the communication. Focus is also directed to the communication that involves participants in the group, what the students are doing and how they evaluate each other's way to participate in the mathematical discourse in the classroom. This type of communication is in the framework referred to as subjectifying, and is assumed to affect the individual's mathematical learning.

Data collection methods used are interviews, audio and video recordings, as well as "smart pens" to combine verbal and written communication. In the first step of the analysis, the mathematical discourse was studied regarding differences in the content of the participants' utterances. The second step of analysis focused on the interaction flow of the group to understand more of the differences in each student's participation and contribution to the communication.

The results point to big differences regarding participation and content in student communication, both at group level and individual level. The development of students' mathematical discourse benefits from the use of multiple mediators to represent the mathematical objects. When connections to a previously acquired discourse are offered, this leads to discursive advancements. Students were observed to have difficulties to interpret and use the formal mathematical symbolic language that would support their mathematizing. Students' interpretation of the equality sign, the sign for inequality, and the symbol $f'(x)$ on a process level, create obstacles to developing the mathematical discourse in the desired direction. The discourse about the participants

and their own traits (identification) constitutes about 10% of all utterances and are almost all negative reviews, frequently used in order to exclude or incorporate themselves or others from participating in the mathematizing activity.

This research study points to a need for more knowledge about how mathematics teachers can best organize work in small groups to increase student engagement and the quality of their mathematizing. The study also indicates the importance of mathematics teachers highlighting and varying the use of different mediators to represent the mathematical objects to learn. The case study also highlights the importance of building up a permissive environment in which students do not evaluate themselves and others, but instead dare to ask questions that will make them increasingly involved in the mathematical discourse. A need emerges for further research not only on the assessment between teacher and student, but also on the assessment that goes on in the classroom between the students, which can affect what roles they take or are assigned to in the classroom. This can be assumed to be of great importance to the way students communicate about mathematics with other students in the classroom, which is also likely to influence learning.

Keywords: mathematical discourse, commognition, participation, matematizing, subjectifying, identifying, small group learning

Kapitel 1 Inledning

1.1 Introduktion

Fältanteckning den 21 januari

Det är dags att påbörja denna empiriska klassrumsstudie i sal 101. Det är idag den fjärde lektionen i gymnasiekursen Matematik C, och eleverna är på väg in till det första arbetspasset om det matematiska begreppet derivata. Flertalet av eleverna tycks ha all tid i världen kvar, innan det är dags för lektionen. Diskussionerna i korridoren handlar om allt utom matematik. Men plötsligt uppmärksammar jag en tjej nära mig som drar i armen på en kompis och uppfattar henne halvhögt anförtra sig till henne: "Jag fattade **ingenting** av förra lektionen". Det var min första observation och blev så också den första fältnoteringen i denna klassrumsstudie. Fullastad med räknare, whiteboardpennor, en bärbar dator och arbetsblad, sätter läraren nyckeln i låset. Eleverna makar sig åt sidan och släpper fram honom, följer sedan efter in i salen och förefaller släntra ner planlöst till en ledig plats. Men jag noterar snart att vissa elever har kursen inställd på en plats långt bak, medan andra aktivt väljer att sitta på första bänkraden. Läraren stänger dörren till klassrummet och tittar ut över salen och söker ögonkontakt med eleverna för att fånga deras uppmärksamhet. "Okey, hej allihop! [...] Idag börjar vi med att gå tillbaka och se vad ni kan om funktioner...". När den gemensamma genomgången går mot sitt slut, avbryts den av att Kim dyker upp för sent: "Ursäktat att jag är sen", säger han och halkar ner på en ledig stol. "Ovanligt", kommenterar en kille tillräckligt högt för att alla ska höra. Bänkkamraten skjuter fram sina anteckningar och Kim kommenterar högt: "Det är lugnt!"

Bild för bild stödjer Power Point-presentationen lärarens genomgång, och värdetabeller, grafer och formler virvlar förbi på vita tavlan. De ord och matematiska symbolspråk som kännetecknar en matematisk klassrumsdiskurs avlöser varandra i en jämn ström förmedlade både verbalt och visuellt: funktioner, $f(x)$, rät linje, tabell, riktningskoefficient, förändringshastighet, $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, y-axeln, värde, graf, gränsvärde, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-(x)}$, derivatan, $f'(x)$, approximativt, definition. Läraren övergår till att lösa några exempeluppgifter och pendlar mellan att visa beräkningar på tavlan och peka i den med hjälp av modern datateknik framställda visuella presentationer av funktionens graf och dess derivata. Flickan från korridoren dröjer sig kvar i mitt minne och jag observerar att hon inte antecknar under genomgången, och inte heller frågar något när läraren tittar ut över klassen och säger: "Var du med, Kim? Någon annan som är tveksam?". Kim har ännu inte plockat upp papper och penna utan sitter och betraktar lärarens genomgång framför tavlan. Genomgången avslutas och läraren delar ut ett arbetsblad med dagens övningar. Uppskattningsvis hälften av eleverna byter nu plats i salen för att jobba ihop med någon annan elev och snart sjunker ljudnivån och arbetet är i full igång. Några händer flyger i luften direkt och läraren

har fullt sjå resten av lektionen med att vandra mellan de uppsträckta händerna, och klassrummet kan liknas vid bilden av sjömän i nöd i ett stormande hav.

Jag sneglar på tjejen från korridoren och ser att hon till skillnad från flertalet av eleverna arbetar ensam med de tilldelade uppgifterna. Då och då räcker hon upp handen, säkerligen med förhoppningen att få lärarens hjälp och stöd för att komma vidare. När jag vandrar fram mellan bänkraderna faller min blick ner i hennes arbetshäfte där några nedtecknade svar är spåren efter dagens lektion. Jag lyfter blicken och ser att Kim som missade nästan hela genomgången slagit sig ner tillsammans med två andra elever och det går inte att undvika att höra att det är matte på gång när de ivrigt diskuterar sina lösningar av en uppgift. Min första lektionsobservation avslutas och jag stänger av videoinspelningarna. Tre elever dröjer sig kvar och läraren går fram till eleverna för att besvara lektionens sista handuppräckningar. En av eleverna är Lisa, tjejen från korridoren. Hon slår ihop böckerna och suckar uppgivet: "Jag kommer aldrig att klara den här matten, jag är så trög i huvudet".

(Fältanteckning, lektion i kursen matematik C den 21 januari)

Fältanteckningen ovan är hämtad från den första observationen i denna klassrumsstudie där vi följer Kim och Lisa och nio andra elever på Samhällsvetenskapliga programmet. Det står matematik på schemat och studien följer eleverna under ett par lektioner i kursen Matematik C¹ när de arbetar tillsammans i smågrupper. Klassrumsstudien kan beskrivas som etnografiskt och interaktionellt inriktad, då datainsamlingen sker under elevernas naturliga klassrumsarbete när de arbetar med att förstå sig på det matematiska begreppet derivata. Det empiriska materialet för fallstudien är hämtat från en av läraren anordnad problemlösningsaktivitet. Inom ramen av denna licentiatavhandling redovisas en grupp i sin helhet och ett urval av det empiriska materialet från de övriga inspelade tre grupperna.

1.2 Bakgrund, inriktning och motiv till studien

Att inrikta mina licentiatstudier mot klassrumsforskning då elever arbetar tillsammans under en lektion i matematik var tidigt ett självklart val. Tanken på att få möjlighet att med hjälp av videoinspelningar och audiovisuella pennor frysa den skriftliga och verbala kommunikation som ständigt pågår i matematikklassrummet och lyssna på den om och om igen, fascinerade och lockade mig. I det vardagliga "ensamarbetet" som matematiklärare är fokus "här och nu" i en ständigt pågående kommunikation med eleverna i klassrummets alla hörn. Ett första argument för denna naturliga klassrumstudies berättigande är att den kan vara av intresse för matematiklärare ute på fältet, för att mer i detalj få möjlighet att kunna observera den pågående interaktion och kommunikation som sker under lektionerna (Bräuning & Steinbring, 2011, s. 928).

¹ Enligt den nya kursplanen för 2011 motsvarar den huvudsakligen Matematik 3B inom Samhällsvetenskapsprogrammet.

Genom att på mikronivå reflektera över denna, erbjuds möjligheten att utifrån dessa iakttagelser förändra och förbättra klassrumsdiskursen om matematik. Att skapa förutsättningar för att möjliggöra en effektiv och ändamålsenlig kommunikation om matematik i elevernas lärandemiljö får betraktas som en nyckelfråga för matematikundervisare, både vad gäller lärarens egen kommunikation med eleverna men inte minst för den kommunikation och interaktion som pågår mellan eleverna.

Under det senaste årtiondet har larmrapporter om svenska elevers sjunkande kunskaper i matematik både ur ett nationellt och internationellt perspektiv avlöst varandra (se t.ex. Skolverket 2001, 2003a, 2004a, 2004b, 2004c, 2004d, 2006, 2007, 2008a, 2008b, 2009, 2012a, 2013). Skolverket har i flera återkommande rapporter pekat på att eleverna i den svenska matematikundervisningen i allt för hög grad lämnas till att arbeta individuellt i ett eget tempo med uppgifter ur läromedlet (se t.ex. Skolverket 2003a, 2006, 2008a, 2008b, 2009, 2012b). Vidare konstateras att eleverna har en bristande förmåga till matematiskt tänkande, analys- och problemlösning-förmåga, men visar en större säkerhet vad gäller förmågan att klara enkla rutinuppgifter. Detta kan förklaras av en ökning av individuella arbetsformer under matematiklektionerna (Skolverket, 2006). Arbete i små informella grupperingar innebär att eleverna till stor del lämnas att själva styra sina matematiklektioner. Lärarens möjligheter med denna arbetsform att kunna ta ansvar och kontroll över innehållet i elevernas matematiska samtal går till stor del förlorade (Sahlström, 2008). Forskning om lärande i smågrupper som undervisningsform kan vara befogat utifrån den svenska undervisningstradition som domineras av den ovan beskrivna ”tysta” individuella arbetsformen (Brandell & Backlund, 2011, s. 11).

Den pågående statliga fortbildningssatsningen ”Matematiklyftet” för att förbättra kvaliteten på svensk matematikundervisning², riktar fokus mot matematiklärares val av och variation av arbetsformer i undervisningen. Det motiverar vikten av att svenska forskningsstudier riktar större uppmärksamhet mot och lyfter fram alternativa arbetsformer i matematikklassrummet och elevernas samarbete och kommunikation. Den matematikdidaktiska forskningens övergripande syfte är, enligt Niss (2001, s. 25), att främja och förbättra elevernas matematikinläring för att de ska ha möjlighet att utveckla en matematisk kompetens. Han konstaterar vidare att det då är en nödvändighet att försöka förstå mer av vad lärande i matematik innebär och att granska och lyfta fram effektiva undervisningsmetoder som gynnar eleverna i klassrummet.

I de år 2011 implementerade nya styrdokumentet för den svenska skolan betonas vikten av muntlig kommunikation och varierande arbetsformer i matematikklassrummet. Detta innebär att utifrån ett svenskt undervisningsperspektiv behövs klassrumsstudier som belyser arbetsformer som möjliggör att eleverna kommunicerar om matematik, samtidigt som läraren tar ett tydligare ansvar för innehållet och utformningen av denna undervisning. Avtryck kan skönjas av den matematikdidaktiska forskningen, till exempel vad gäller vikten av kommunikation, val av arbetssätt och arbetsformer, samt vikten att fokusera på olika matematiska kompetenser i undervisningen (Skolverket,

² Se <http://www.skolverket.se/kompetens-och-fortbildning/larare/matematiklyftet>

2011a, 2011b). Skolverket lyfter i ett kommentarmaterial till ämnesplanen fram att ett syfte med undervisningen i matematik är att eleverna ska utveckla förmågan att kommunicera med och om matematik. Här understryks också att avsikten med de förändrade formuleringarna i styrdokumentet är att ensidig matematikundervisning ska motverkas (Skolverket, 2011b, s. 2). I de långsiktiga målen för undervisningen är också mycket tydligt framskrivet att eleverna ska beredas möjlighet att utveckla förmågan att kommunicera i ämnet, muntligt som skriftligt (Skolverket, 2011a, s. 11). Av de fem förmågor som eleverna ska utveckla i ämnet är två av dem direkt kopplade till elevernas utveckling av den kommunikativa förmågan. Eleverna ska erbjudas möjlighet att föra resonemang och argumentera i ämnet. De ska också erbjudas förutsättningar för att bli förtrodda med användningen av olika uttrycksmedel i ämnet (ibid.). I undervisningens syfte anges också vikten av att eleverna måste kunna lyssna och ta del av andras beskrivningar, förklaringar och argument för dessa. Detta innebär:

att eleverna ska kunna tillägna sig och förstå det matematiska innehållet i situationer där matematiska begrepp och uttrycksformer används [...] att kunna växla mellan olika uttrycksformer [...] får möjlighet att föra matematiska resonemang [...] med hjälp av både informella och formella matematiska argument (Skolverket, 2011a, s. 11)

De svenska styrdokumentens framskrivning av kommunikationens betydelse för lärandet i matematikklassrummet och betoningen av vikten av att använda varierande arbetsmetoder och arbetssätt i undervisningen, berättigar fallstudiens fokus på elevernas hinder och möjligheter att kommunicera om matematik när de arbetar tillsammans i smågrupper.

Samarbetslärande är en arbetsmetod som erbjuder elever möjligheter att utveckla matematiskt tänkande, begreppsförståelse, kompetenser samt utvärdera sin egen insats i matematik (Skolverket, 2003a). Arbetsformen tillhör ur ett internationellt perspektiv ett väl beforskat område (Brandell & Backlund, 1999; Dunkels, 1996). I Sverige finns dock få forskningsstudier om samarbetslärande i matematik, vilket tyder på att undervisningsformen förefaller ha liten utbredning i svensk matematikundervisning, i varje fall i högre årskurser (Brandell & Backlund, 2011, s. 117), trots att forskning visar på gynnsamma lärandeffekter vid användning av samarbetslärande (se t.ex. Boaler, 2006; Brandell & Backlund, 2011; Dunkels, 1996; Galton, Hargreaves & Pell, 2009; Slavin, 1995; se vidare kap. 2.6). Behovet av ytterligare kunskap om samarbetslärande som arbetsmetod motiveras också av att forskning pekar på hur användningen av metoden hindras av en undervisningstradition i matematik som, liksom i svensk undervisning, i högre årskurser präglas av ämnesuppdelning, förmedlingspedagogik och korta undervisningspass (Sharan, 2003). Forskning pekar på att olikheter i individernas resonemang främjar lärandet (se t.ex. Sfard, 2012) och betonar ett behov av ytterligare forskning för att få klarhet i samspelet mellan effektiv kommunikation och skillnader mellan eleverna under en gruppaktivitet (Nilsson & Ryve, 2010).

För att studera hur individerna kommunicerar matematik med varandra är deltagarnas användning av olika uttrycksformer och matematiska termer centralt (Säljö,

2000; Marton & Tsui, 2004), särskilt då de matematiska objekten är abstrakta. För att en elev ska kunna delta i en matematisk aktivitet med andra individer spelar även det naturliga språket en viktig roll, då den matematiska diskursen är beroende av en användning av flera olika semiotiska register och transformationerna mellan dessa beskrivs med hjälp av det naturliga språket (Winsløw, 2004, s. 85). Den pedagogiska diskursen i klassrummet är komplex då dessa olika semiotiska resurser också måste samverka för deltagarnas meningsskapande i undervisningen (O'Halloran, 2000, 2004). En viktig aspekt för att förstå lärandet i matematik är då att studera hur eleven skapar mening i det myller av matematiska ord och symboler som är en del av den matematiska diskursen, då de möter ett för dem nytt matematiskt begrepp i matematik (Berger, 2004). Det är också angeläget att studera om deltagarna är medvetna om och kan urskilja den pendling mellan användningen av olika register och ett matematiskt och vardagligt språk som krävs i en problemlösningsaktivitet (se t.ex. Duval, 2006; Moschovitch, 1996). Denna pendling är viktig för utvecklingen av elevernas begreppsförståelse (Moschovitch, 1996). I studien riktas därför fokus mot gruppdeltagarnas användning av olika medierande redskap och matematiska termer i relation till utvecklingen av elevernas matematiska diskurs.

Klassrummet är inte bara en arena för mål relaterade till lärande utan också för individernas sociala mål (Ingram, 2008). För att få en fördjupad förståelse av lärandet i den aktuella undervisningssituationen är intresset i denna studie också riktat mot den kommunikation som handlar om vad deltagarna gör eller hur de är. Vi kan till exempel dra oss till minnes hur Lisa i vinjetten med frustration i rösten slog ihop sina matematikböcker och suckade: "Jag kommer aldrig att klara den här matten, jag är så trög i huvudet". Stevensson och Stiegler (1992) visar i en tvärkulturell studie på att skillnader i deltagarnas uppfattningar om lärandets natur och hur de uppfattar sina förutsättningar att lära, förefaller spela en avgörande roll för studieresultat i framförallt i matematik. Internationell forskning har också under det senaste decenniet pekat i samma riktning på hur elevernas identitet, deltagande och lärande i matematik är starkt sammanflätat (t.ex. Boaler, 2002; Boaler & Greeno, 2000; Gee, 2001; Sfard & Prusak, 2005).

I valet av att studera elevernas utveckling av en matematisk diskurs om derivata som objekt, har flera faktorer inverkat. Bergsten (2008, s. 129) framhåller att "skolmatematiken är starkt algebraiserad på gymnasienivå [...] (vilket) motiverar ett intresse att belysa detta matematikens formspråk, både ur matematiska och didaktiska aspekter". Derivatabegreppet är vidare ett centralt begrepp för fortsatta studier i matematik och ska kopplas till exempelvis funktionsbegreppet, kontinuitet, gränsvärden och integraler. Eleverna ställs inför att både hantera begreppsliga och processinritade kopplingar till begreppet (se t.ex. Juter, 2006). Då ett önskemål var att studera elevernas lärande då de möter ett för dem nytt begrepp, är derivatabegreppet lämpligt eftersom det introduceras för svenska elever under gymnasiekursen Matematik C.³

³ I GY 2011 introduceras derivatan i kursen Matematik 3.

Eleverna måste använda sig av grafer, värdetabeller och uttryck presenterade med ett algebraiskt formelspråk.

Sammanfattningsvis är fokus i denna fallstudie att belysa en undervisnings-situation då eleverna arbetar i mindre grupper med matematik och förutsätts kommunicera för att lösa de matematiska problem de ställs inför. Forskningsintresset är dock inte individernas lärande när elevernas arbetar i mindre undervisningsgrupper. Istället är intresset riktat att förstå mer av de faktorer som hindrar eller befrämjar individernas deltagande i och utvecklingen av en matematisk diskurs om det nyligen introducerade matematiska begreppet derivata. Förhoppningen är att denna studie kan ge ett bidrag till att förstå mer av hur elevernas förutsättningar för att kommunicera om matematik tillsammans i smågrupper kan befrämmas.

1.3 Studiens syfte och forskningsfrågor

Studiens övergripande syfte är att bidra till en ökad kunskap om hur lärare och elever kan utveckla kommunikationen om matematik i undervisningen. Termen utveckling används här i bemärkelsen en förändring i diskursen mot den diskurs som eftersträvas (Sfard, 2012). Intresset är riktat mot elevernas deltagande i den matematiska diskursen, det vill säga då eleverna kommunicerar om matematiska objekt eller processer på dessa. Aktiviteten benämns här som att matematisera (Sfard, 2008). Elevernas kommunikation i klassrummet handlar också om deltagarna i gruppen och om hur eleverna värderar varandras sätt att delta i den matematiska diskursen i klassrummet. Denna kommunikation som är tätt sammanflätad med elevernas matematiserande, benämns i denna studie för subjektifiering och antas vara sammankopplad med individens lärande i matematik (Sfard & Heyd-Metzuyanim, 2011).

Studiens fokus är särskilt riktat mot vad som förefaller gynna eller hindra den matematiska diskursens utveckling och elevernas deltagande när de arbetar i smågrupper med ett nyligen introducerat matematiskt begrepp. Intresset är riktat mot deltagarnas olika bidrag till gruppens diskurs och hur dessa påverkar elevernas förutsättningar och deltagande i kommunikationen, utifrån följande forskningsfråga:

- *Hur påverkar de enskilda deltagarnas aktivitet och bidrag till gruppens kommunikation utvecklingen av den matematiska diskursen och elevernas tillfällen till lärande?*

Forskningsfrågorna splittras inför analysen upp i två frågeställningar utifrån innehållet i elevernas kommunikation, dvs. matematiserande respektive subjektifierande yttranden⁴. Utvecklingen av elevernas matematiska diskurs betraktas i ljuset av deltagarnas användning av matematiska ord, visuella medierande redskap (mediatorer), rutiner och

⁴ Se vidare i teoriavsnittet kapitel 4.3 för utförligare beskrivning av begreppen matematisera, subjektifiering, identifiering. Begreppen tänkande, lärande och matematisk diskurs redovisas utförligt i avsnitt 4.1-4.2.

narrativer om de matematiska objekten (Sfard, 2008, 2012; se vidare kapitel 4). Med fokus riktat mot den diskurs som beskriver matematiska objekt, relationer mellan dessa eller operationer på objekten specificeras forskningsfrågan:

- *Hur påverkar användningen av olika medierande redskap (mediatorer) och matematiska ord utvecklingen av elevernas matematiska diskurs och tillfällen till lärande?*

Elevernas matematiska klassrumsdiskurs och deltagande i interaktion med andra, beaktas i ljuset av den diskurs som handlar om deltagarna eller vad de gör, och ger uttryck för känslomässiga reaktioner och värderingar. Det kan vara värderingar både om eleverna själva men också om andra individer i klassrummet. Då identitet här definieras som de berättelser som individerna förmedlar i den rådande diskursen (Sfard & Prusak, 2005; se vidare kapitel 4) bidrar analysen av denna med information om hur eleverna uppfattar sig själva och andra i den interaktion som sker i klassrummet (Heyd-Metzuyanim &, 2012; Sfard & Heyd-Metzuyanim, 2011). För att studera den sammanflätade aktiviteten av elevernas matematiserande, subjektifiering och identifiering (Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012; se vidare kapitel 4) och hur denna förefaller påverka gruppinteraktionen och effektiviteten i den matematiska diskursen, specificeras den andra forskningsfrågan som vägleder analysen:

- *Hur påverkar de subjektifierande yttrandena i diskursen som handlar om deltagarna, vad de gör eller hur de är, utvecklingen av den matematiska diskursen och elevernas tillfällen till lärande?*

1.4 Avhandlingens disposition

Avhandlingen är indelad i nio kapitel där kapitel 1 inleds med en kort introduktion och presentation av fallstudien. I kapitel 1.2 redogörs för bakgrunden till studien och i kapitel 1.3 redogörs för studiens syfte och forskningsfrågorna.

I kapitel 2 redovisas tidigare för studien relevant forskning. Det inleds i 2.1–2.4 med att återspegla den bild som myndigheter och forskning förmedlar rörande svenska elevers kunskapsutveckling i matematik och matematikundervisningens utförande. Därefter presenteras i avsnitt 2.5–2.10 ett urval av främst nationella studier med relevans för denna klassrumsstudie kopplad till medierande aspekter och deltagarnas interaktion när elever arbetar i smågrupper. Vidare redovisas några forskningsresultat som belyser undervisning relaterad till att utveckla elevernas diskurs omkring derivatabegreppet. Kapitlet avslutas med en sammanfattning i 2.11.

Kapitel 3 presenterar mer ingående några centrala begrepp i studien. I kapitel 4 redogörs för studiens teoretiska ramar, och hur det teoretiska ramverket av Anna Sfard (2008) huvudsakligen har använts som teoretisk plattform för att söka svaren på forskningsfrågorna. Här belyses hur valet av det kognitiva ramverket erbjuder

möjlighet att studera både kognitiva, affektiva, sociala och individuella aspekter av lärandet under ett och samma ontologiska paraply (Sfard, 2012).

I kapitel 5 redogörs för metodologi och metodologiska redskap. Inledningsvis redovisas datainsamlingens uppläggning, datainsamlingsmetoder och urvalet av deltagare i studien. Vidare ges utrymme för redovisning av metodologi och metodval vid dataanalysen av det empiriska materialet. Etiska och metodologiska överväganden återfinns i kapitel 6.

Kapitel 7 är avsatt för resultatredovisningen. Den undervisningskontext där datainsamlingen är genomförd och uppgiftens utformning presenteras i avsnitt 7.1–7.2. Avsnitt 7.3 redogör för den struktur som används vid resultatredovisningen. I avsnitten 7.4–7.7 följer resultatredovisningen från diskursen i elevgrupp (A), där problemlösningssekvensen redovisas i sin helhet. I avsnitt 7.8 redovisas och jämförs ett urval av resultaten från de tre övriga inspelade grupperna (B-D).

Sammanfattningen av resultaten och resultatdiskussionen återfinns i kapitel 8 och forskningsfrågorna besvaras. Avhandlingen avslutas med implikationer för undervisningen (kapitel 9).

Kapitel 2 Forskningsöversikt

I detta kapitel redovisas forskning begränsad till ett urval av studier med relevans för fallstudiens fokus och för att stödja resultatdiskussionen. Då forskning pekar på att variationerna inom matematikundervisningen är större mellan än inom länderna (Stiegler & Hiebert, 1999), har i huvudsak svenska studier redovisats i översikten. Trots att elevernas lösningar är kulturbedoende, har dock många problem universell karaktär (Björkqvist, 2003), varför hänvisningar också finns till exempelvis Hatties stora metastudie (2009) om synligt lärande och ett urval internationell forskning inom det matematikdidaktiska fältet med relevans för denna studie. Översikten begränsas vidare främst till svensk klassrumsforskning. Klassrumsforskningen har förändrats från en systematisk kategorisering av genomförda klassrumsobservationer till ett brett forskningsfält i huvudsak med inriktning på att ur ett socialt perspektiv studera lärande, socialisation och undervisning med främst etnografiska studier, samtalsanalyser och komparativa internationella studier (Sahlström, 2008).

Inledningsvis förmedlas i avsnitt 2.1–2.2 några av huvuddragen från den mångfacetterade bilden av orsakerna till den rapporterade nedgången av de svenska elevernas kunskapsutveckling i matematik. Därefter redovisas tematiskt en kortfattad överblick över några klassrumsstudier som till någon del tangerar mitt eget forskningsområde. Här redovisas i delkapitel 2.3 forskning kopplat till effekter av lärobokens roll som aktör i klassrumskommunikationen och svenska läromedels framställning av derivatabegreppet. I avsnitt 2.4 beskrivs några forskningsresultat rörande kommunikationen i ämnet matematik, den matematiska diskursens särdrag och komplexitet. Vidare redovisas i delkapitel 2.4–2.11 forskningsstudier inriktade mot att belysa elevernas möjlighet till deltagande i en matematisk kommunikation och förutsättningar för lärande då eleverna arbetar i mindre grupper. Därefter redogörs i avsnitt 2.12 för forskningsresultat kopplade till studiens matematiska innehåll, det vill säga derivatabegreppet som lärobjekt i undervisningen. Kapitlet avslutas med en sammanfattning.

2.1 Svenska elevers kunskapsutveckling i matematik

Larmrapporterna om svenska elevers allt sämre kunskaper i matematik, även i internationella jämförelser, har avlöst varandra under de senaste decennierna (se t.ex. Skolverket, 2013, 2012a, 2008a, 2008b, 2006, 2004d, 2004e, 2003a, 2001). Den oro väckande bild av svensk matematikundervisning som under de senaste åren lyfts fram av medier, har tydligt signalerat att lärare på fältet, forskare inom matematikdidaktik och huvudmännen för svensk skola under en längre tid har stått inför utmaningen att finna orsaker till varför allt fler av våra elever i allt högre utsträckning misslyckas att nå målen i matematik. I TIMSS-studien 2011 rapporteras att svenska skolelevers kunskaper i matematik i årskurs 8 har den största resultatförsämringen av samtliga deltagande länder sedan 1995 (Skolverket, 2012a, 2012b). Vidare konstateras att de

elever som deltagit både i TIMSS 2007 (som elever i åk 4) och 2011 (som elever i åk 8) har en sämre kunskapsutveckling än elever i andra jämförbara länder (ibid.). Enligt en analys av TIMSS 2007 förefaller de misstag och missuppfattningar som etableras under de lägre årskurserna bestå under längre tid, i värsta fall under hela skoltiden (Skolverket, 2012a, s. 39). Flera alternativa tolkningar redovisas som förklaring till denna bild av kunskapsutvecklingen i matematik hos svenska elever, nämligen brister i undervisningstid, fortbildningsinsatser för lärare, rektors stöd, styrdokumentens och undervisningens utformning. Enligt en tolkning kan det handla om att eleverna inte får tillräckliga grunder att bygga vidare på från grundskolans lägre årskurser, en tolkning som inte utesluter att det kan föreligga brister i undervisningens utformning även under grundskolans senare årskurser (ibid.).

2.2 Undervisningens utförande

Det som jag inte säger är att läraren spelar roll [...] Det som *spelar roll* är om lärare har ett förhållningssätt och en attityd som innebär att de ser det som sin roll att utvärdera sin påverkan på studieresultaten. (Hattie, 2012, s. 34, författarens kursivering)

Hattie lyfter i en omfattande metastudie fram lärarens förmåga att undervisa som den allra viktigaste faktorn för elevernas synliga lärande (Hattie, 2009, 2012). I en rapport utgiven av Skolverket redovisas att lärarens kompetens är sammankopplad med undervisningens utförande och lärarens förhållningssätt. Den centrala framgångsfaktorn är lärarens förmåga att synliggöra lärandeprocessen både för sig själv och för eleverna (Skolverket, 2009). Även lärarens förväntningar på eleverna ses som en framgångsfaktor liksom närvaron av en ömsesidig återkoppling mellan läraren och eleven både vad gäller formativ och summativ bedömning (Hattie, 2008, 2012; Skolverket, 2009). Valen av arbetssätt och arbetsformer i matematikklassrummet, som i andra undervisningsämnen, ska vara relaterade till de kunskapsmål som eftersträvas att eleverna ska uppnå (se t.ex. Ryve, 2006a, s. 7). Med arbetssätt avses här på vilket sätt ämnesinnehållet presenteras, till exempel genom en diskussion eller föreläsning, medan arbetsformen avser hur arbetet organiseras (Backlund & Backlund, 1999).

Under det senaste årtiondet har Skolverket riktat uppmärksamheten mot brister i organisation, val av arbetssätt och metoder i matematikundervisningen, vilket befaras bidra till elevernas bristande förmåga att utveckla sitt matematiska tänkande. Undervisningen kännetecknas av kortare genomgångar av läraren följda av så kallat "eget bänkarbete" som kan ske individuellt, som pararbete eller i mindre grupper (t.ex. Kling Sackerud, 2009; Löwing, 2004; Sahlström, 2008). Istället för en individualisering efter elevernas behov har denna undervisningstradition inneburit en utveckling mot ett individuellt arbete i bemärkelsen att eleverna i allt högre grad lämnas till att arbeta med uppgifterna efter egen förmåga och i ett eget tempo (se t.ex. Skolverket 2003a, 2004a, 2006, 2008a, 2008b; SOU 2004:97). Bilden i dessa rapporter bekräftas av flera svenska forskningsstudier (se t.ex. Bjerneby Häll, 2006; Johansson, 2006; Löwing,

2004; Vinterek, 2006). Kritiken mot detta arbetssätt lyfter fram att denna strävan att individualisera undervisningen har medfört att kunskapsinnehållet har blivit alltmer trivialiserat mot enklare rutinuppgifter, är i avsaknad av tydliga innehållsmål, och har ett individuellt arbetssätt med färre möjligheter för eleverna att kommunicera om matematik (se t.ex. Eriksson, 2009). Skolverket (2006) pekar samtidigt på att elevers oförmåga till matematiskt tänkande, analysförmåga och förmåga att lösa problemuppgifter men större säkerhet vad gäller förmåga att klara enkla rutinuppgifter, kan förklaras av en ökning av dessa individuella arbetsformer. Dessa val av arbetssätt och metoder inom matematikundervisningen kan vara en av förklaringarna till svenska elevers försämrade kunskaper i matematik (t.ex. Eriksson, 2009; Löwing, 2004; Skolverket, 2006). Vid en omfattande granskning av matematikundervisningen i kursen matematik A i gymnasieskolan under läsåret 2008/09 bekräftades att matematikundervisningen fortfarande traditionellt domineras av kortare genomgångar som följs av enskilt arbete. Skolinspektionen beskriver matematikundervisningens utformning och konstaterar i sin slutrapport att gymnasieeleverna inte får möjlighet att utveckla samtliga kursplanemål och att det finns för lite utrymme för gemensamma samtal om matematik i förhållande till ett mekaniskt räknande i läroboken:

Flertalet lektioner innehåller i huvudsak två delar, en gemensam genomgång av ett moment följt av elevernas eget arbete. I en sådan utformning finns inget eller mycket begränsat utrymme för att arbeta med helhet och sammanhang i utbildningen. Eleverna får inte heller möjlighet att träna problemlösning, förmåga att se samband och att resonera, argumentera och uttrycka sig såväl muntligt som skriftligt, med andra ord; att utvecklas mot målen att sträva mot. Många elever uttrycker också att undervisningen i matematik är tråkig och utan variation. Den i tid klart dominerande arbetsformen är enskilt arbete med uppgifter ur läroboken, där läraren går runt och hjälper till. (Skolinspektionen, 2010, s. 16).

2.3 Styrdokumentens presentation av matematikämnet

Vilken bild ger då de svenska styrdokumenterna av matematikämnet och vilket stöd ges till lärare när det gäller hur dessa styrdokument ska tolkas? Innehållet i ämnet matematik har traditionellt presenterats som de moment som ska behandlas inom kursen och olika metoder som eleverna ska kunna använda sig av. Detta kompletteras med en inledande beskrivning av ämnets mål och karaktär i mer generella termer (Niss, 1999). Denna tradition har även kännetecknat tidigare gällande svenska styrdokument (Skolverket, 2000). Denna typ av presentation av ämnet i styrdokumentet riskerar att reducera tydligheten av målen för matematikundervisningen (Niss, 1999). Ytterligare en tänkbar förklaring till att matematiklärare inte förefaller ha tolkat, eller överfört styrdokumentets intention till klassrumspraktiken, kan vara att läroplanen har lyft fram inläringen ur ett konstruktivistiskt perspektiv och läraren tagit till sig läroplanen på "en ytnivå" (Löwing, 2004, s. 249). I den klassrumsstudie som Löwing genomfört anger flera av lärarna som motivering till valet att låta eleverna arbeta enskilt med läroboken med att det ska vara så "för att eleverna konstruerar ju sin kunskap själva".

Ingen av lärarna framhöll dock lärarens ansvar för att exponera hur denna konstruktion av kunskap sker (ibid., s. 247).

Nya reviderade kursplaner i gymnasieskolan utkom i samband med att det nya mål- och kunskapsrelaterade betygssystemet infördes år 2000. I den nya läroplanen finns i kursplanerna för ämnet matematik tydliga spår av den forskning och de dokument som med internationell genomslagskraft beskriver kunskaper i matematik med hjälp av olika kompetenser (Skolverket, 2011a). I det inflytelserika amerikanska dokument som utgivits av NCTM⁵ formuleras fem processmål i undervisningen (NCTM, 2000)⁶. Ramverket *Adding it Up* har också utvecklats som komplement till utgivna styrdokument för att belysa matematisk kunskap i termer av kompetenser eller ”proficiency” (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). I OECD:s undersökning PISA beskrivs och jämförs elevernas kunskaper med hjälp av åtta olika kompetenser (Organisation for Economic Co-operation and Development, 1999), som influerats av det så kallade KOM-projektet (Kompetencer och Matematikläring), där matematisk kompetens beskrivs som medvetenhet om att kunna förstå, använda sig av och ta ställning till matematik och dess verksamhet inom olika områden (se Niss & Højgaard-Jensen, 2002).

Målen i matematik uttrycks i den svenska ämnesplanen som generella förmågor som eleverna ska utveckla och i det centrala innehållet anges vilka begrepp, metoder och sammanhang som eleverna ska möta. Sju förmågor lyfts fram: begrepps-, procedur-, kommunikations-, problemlösnings-, resonemangs-, modellerings- och relevansförmåga (Skolverket 2011b, 2011c). I syfte att tydliggöra vilka matematiska kunskaper elever behöver tillägna sig för att uppnå målen för undervisningen, underlätta för provkonstruktion och andra undervisningsaktiviteter, utgavs en rapport för att konkretisera vad styrdokumenten förmedlar om vad det innebär att ”kunna matematik” (Palm, Bergqvist, Eriksson & Häggström, 2004). Analysen resulterade i ett förtydligande av olika matematiska kompetenser som nu betonas i styrdokumenten, vilka genomsyrar alla ämnesområden (algebra, geometri, statistik etc.) inom respektive kurs. Dessa matematiska kompetenser konstaterades vara centrala för att det övergripande syftet med matematikundervisning ska kunna uppnås (ibid.).

Den nya läroplanen betonar tydligare än tidigare kommunikationens betydelse i matematikundervisningen (kommunikationsförmågan):

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga [...] att kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling. (Skolverket, 2011c, ss. 90-91)

I läroplanen finns nu också i kursplanernas syfte, till skillnad från de tidigare styrdokumenten från år 2000, explicita riktlinjer för undervisningens utformning:

⁵ *Principles and standards for school mathematics* (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), utgiven av den amerikanska matematiklärarorganisationen (NCTM). Organisationen består av både lärare och forskare.

⁶ National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000)

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt [...] Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer (Skolverket, 2011c, s. 90)

Betoningen på variation i arbetsformer och arbetssätt i matematikklassrummet förstärks ytterligare i det av Skolverket utgivna kommentarmaterialet för matematik, där de angivna riktlinjerna för arbetssätt och arbetsformer kommenteras:

Att formuleringar av det här slaget finns med i ämnesplanen utgör en tydlig skillnad mot kursplanen 2000. Tanken är att formuleringarna ska leda till att en ensidig matematikundervisning motverkas. (Skolverket, 2011b, s. 2)

Skolverket bekräftar i en rapport att de nya kursplanerna också har eftersträvat tydlighet i struktur och en ökad konkretisering av det matematiska innehållet. Även tydligare fokus på en tidig begreppsutveckling och utveckling av kommunikations- och resonemangsförmågan har gjorts, i avsikt att bidra till en förbättrad måluppfyllelse hos eleverna (Skolverket, 2012b, s. 16). Styrdokumenten kan därmed konstateras ha utvecklats mot att tillskriva språkets roll för lärandet en allt större betydelse, men det centrala är hur detta sedan omsätts i praktiken i den kommunikation som sker i klassrummet (Kilborn, 2007). Det handlar inte bara om ”att tala matematik” utan det är *hur* denna kommunikation sker som skapar förutsättningar för lärandet (ibid.).

2.4. Lärobokens inflytande och lärarens ansvar för undervisningen

I TIMSS 2007 konstaterades att Sverige tillhör de länder som i störst utsträckning använder läroboken i matematik som huvudsaklig grund för undervisningen (Skolverket, 2008b). I TIMSS 2011 bekräftades återigen att svenska lärare ur ett internationellt perspektiv fortfarande använder läroboken som basmaterial, medan andra länder inom EU/OECD-länderna i högre grad ser den som ett komplement till undervisningen (Skolverket, 2012a, ss. 97-98; 2012b, s. 74).

En senare analys av TIMSS 2007 visar på att högstadielärover i åk 8 upprepade misstag som oftast etablerats under de tidigare skolorn. Undervisningens utformning och innehåll ges som en förklaring. Den procedurinriktade matematikundervisning som bedrivs i Sverige leder till en beräkningsfixering där målet är ”rätt svar”, medan processen blir underordnad. En studie genomförd av NCM i samarbete med forskare i matematikdidaktik visar också på att svenska läromedel i matematik har en betoning på procedurhanteringskompetens (NCM/UFM, 2009). Procedurfixeringen i läromedel och utformningen av undervisningen innebär att konsekvenserna av de misstag eleverna lär in upptäcks först under de senare skolorn (Skolverket, 2012b).

Läroboken beskrivs således i ett flertal forskningsstudier inta en särställning i undervisningen i matematikklassrummet, i jämförelse med hur den används i andra undervisningsämnen i skolan. Det är dessutom ofta upp till eleven att själv avgöra val av uppgifter och i vilken omfattning dessa uppgifter ska genomföras, ofta inom ett för

dem nytt arbetsområde (Jablonka, Johansson & Rohdin, 2010). Läroboken kan konstateras inte bara inneha rollen av redskap, utan kan också betraktas som en talande aktör i klassrummet (Bremner, 2003, s. 12). I en undervisning som i hög grad styrs av läromedlet innebär det att läroplaner, kursplaner och även läraren också får en underordnad roll i undervisningen (Johansson, 2011). Ansvar för lärandet kan således beskrivas till stor del överlämnats till eleverna och läromedlet att förvalta (se t.ex. Johansson, 2006; Kilborn, 1982; Löwing, 2004; Vinterek, 2006). Läroböckernas förklaringar inom ett ämne är dessutom ofta skrivna som lärarmonologer där ett urval av ämnet berättas från början till slut. Avsaknaden av dialogform innebär att vanliga elevfrågor, missuppfattningar, naturlig repetition, kritiskt tänkande och arbete för förståelse i ämnet inte naturligt synliggörs (Lennerstad & Pettersson, 2001, ss. 119-120). Det avgörande är dock framförallt *hur* läroboken används i undervisningen och inte läromedlet i sig. Forskning indikerar att en konsekvens av att läroboken intar en dominerande roll som organisatör av undervisningen medför att lektionsmålen uttrycks som något som ska göras istället för vad eleverna ska lära under lektionerna i matematik (Löwing, 2004, s. 192). Ett exempel är användningen av så kallade uppgiftsbeting (ibid.).

Lärare i matematik förfaller i högre grad än i andra ämnen vara bundna till sitt läromedel både vad gäller innehåll, uppläggning och organisation av undervisningen (Skolverket, 2003a). Vid en granskning av matematikundervisningen tillfrågades lärare *varför* och hur de använder läromedlet i matematik och vad som styr deras val av arbetssätt och metoder i undervisningen (ibid.). Under intervjun bekräftades bilden av lärarnas förhållningssätt till undervisningen. Att lärare utgick från styrdokumentet och kursplanens mål var ovanligt. Istället konstaterades det inte överraskande, att lärarna lämnade över tolkningen av kursplanen och valet av arbetssätt och arbetsmetoder och uppgiftsval till att styras av läromedlet (ibid.). Det är rimligen av stort intresse att rikta ytterligare intresse mot frågor om *varför* det förhåller sig på det viset.

En svensk klassrumsstudie har genomförts i syfte att tydliggöra hur matematiklärare kommunicerar det matematiska innehållet för att stödja elevernas lärande, samt de villkor som ställs på lärandemiljön för denna kommunikation (Löwing, 2004, s. 12). Detta innebär att det är innehållet i den matematiska kommunikationen som är i fokus (ibid.). Löwings forskningsstudie är inriktad mot elevernas möjlighet att kommunicera om matematik relaterat till undervisningens fasta respektive rörliga ramar (ibid., ss. 71-73), dvs. regelsystemet respektive lärarens val av exempelvis material och metoder som ger olika möjligheter att genomföra undervisningen (ibid.). Om valet av arbetssätt och arbetsformer, kopplat till det matematiska innehållet, i de undersökta klassrummen skriver Löwing:

De ramar som valts, såsom grupparbete, konstruktion av egna problem, hastighets-individualisering, gemensam genomgång med mera, levde ofta ett eget liv isolerat från varandra och med mycket lite koppling till det aktuella innehållet eller till elevernas individuella förmåga och behov av hjälp. (Löwing 2004, ss. 263-264)

Att läroplaner och kursplaner med olika teoretiska perspektiv på lärande har avlöst varandra, kan antas bidra till att osäkerhet skapats hos lärarna (Nilsson, 2005, s. 276). Dessa svängningar menar Nilsson bidrar till lärarnas skepsis och osäkerhet mot att förlita sig på styrdokumentet och att de istället väljer att förlita sig på läroböckernas framställning. Skolverket har nyligen föreslagit en utökning av undervisningstiden i matematik och betonar samtidigt vikten av att lärarna ska få hjälp att tolka och omsätta kursplanemålen i undervisningspraktiken. Detta ses som ett led i att bidra till att lärarna ska återta det matematikdidaktiska ansvaret i klassrummet och bli mindre beroende av läromedlet (Skolverket, 2012b, s. 97). Bremner ger i sin forskningsstudie förslaget att det vore önskvärt att flera läromedel används samtidigt i den process då undervisningen planeras utifrån styrdokumentet (Bremner, 2003, s. 109).

En central fråga är om lärares val av arbetsform i matematikundervisningen kan kopplas till att läraren upplever osäkerhet i undervisningspraktiken. Forskning pekar på att lärare i matematik behöver gedigna kunskaper både på djupet och på bredden inom sitt ämne, men också kunskaper inom matematikdidaktik (Mouwitz, 2001). I en granskning av svensk matematikundervisning utförd av Skolverket framförde också matematiklärarna argumentet att en undervisning där läroboken inte används eller har en underordnad roll, kräver att läraren har en mycket lång erfarenhet (Skolverket, 2003a, s. 40). Om läraren väljer att följa en lärobok med typexempel och övningar ställs lägre kunskapskrav på läraren än vid valet av ett undersökande arbetssätt där eleverna erbjuds att kommunicera, ställa frågor och argumentera om matematik (ibid., s. 124). Nilsson (2005, s. 278) hänvisar till en studie av Ma (1999) som framhåller att en viktig aspekt för lärarens profession är en grundläggande djup förståelse av elementär matematik. Läraren kan då ta de tillfällen som bjuds till att använda, knyta ihop och utveckla olika matematiska begrepp och idéer eleverna har stött på tidigare i undervisningen. Att den undervisande läraren har ett gott eget självförtroende i matematik framhålls vara en viktig faktor för hur väl läraren förmår stötta elevernas lärande (Nilsson, 2005, s. 279).

Hattie (2009) lyfter i sin omfattande metastudie *Visible learning*⁷ fram lärarens förmåga att undervisa som den allra viktigaste faktorn för elevernas prestationer (Hattie, 2012, s. 38). Att läraren lyckas synliggöra läroprocessen både för sig själv och för eleverna är en central framgångsfaktor i undervisningen (ibid.). I slutsatserna anges ytterligare fem vägar för att uppnå en hög undervisningskvalitet och främja ett framgångsrikt lärande: synliggöra lärandemålen och hur väl eleverna uppnår dessa kriterier; anpassa och variera olika metoder; ge en meningsfull återkoppling till eleverna för att stödja deras progression. Detta innebär att läraren *måste* ha goda kunskaper inom sitt ämne (ibid., ss. 38-39, min kursivering).

⁷ Mer än 800 metaanalyser har genomförts i 53000 undersökningar med sammanlagt 240 miljoner elever.

2.5 Den matematiska diskursens komplexitet och medieringens betydelse

Möjligheten att ta del av kognitiva budskap och kommunicera i olika kommunikativa och kulturella praktiker har skapats utifrån vår förmåga att kommunicera artificiellt med hjälp av skriftspråket (Säljö, 2000, s. 205). Ämnet matematik kan betraktas inte en särställning då det kännetecknas av en hög grad av abstraktion (se t.ex. Sfard, 2012) och diskursens komplexitet är utförligt beskriven av det matematikdidaktiska forskningsfältet (se t.ex. Duval 2006; O'Halloran, 2000; Sfard 2008). Den franske matematikdidaktikern Duval beskriver matematikens speciella väsen i ett välkänt citat:

We don't have any perspective or instrumental access to mathematical objects, even the most elementary. We cannot see them, study them through a microscope or take a picture of them. The only way of gaining access to them is using signs, words or symbols, expressions or drawings. But, at the same time, mathematical objects must not be confused with the used semiotic representations. This conflicting requirement makes the specific core of mathematical knowledge (Duval, 2000, s. 61).

Duval ser det alltså inte möjligt för en elev att få tillträde till ett matematiskt objekt som exempelvis derivata utan att ta hjälp av exempelvis grafer, värdetabeller eller algebraiska uttryck. Nachlieli och Tabach (2012) beskriver de matematiska objekten som ett autopoietiskt system där objekten inte existerar i sig själva. Istället skapas de och framträder i själva diskursen som "något man talar om" för att sedan existera någonstans mellan dessa symboler (ibid., ss. 10-11). Hoyles har ett liknande synsätt och beskriver att meningen kan fångas upp någonstans i och av det spindelnät som bildas mellan dessa semiotiska teckensystem (Hoyles, 2012, s. 279). Det innebär att det inte räcker att enbart fokusera på det talade ordet, det är också nödvändigt att inkludera deltagarnas sätt att se, agera och använda olika redskap (Gee, 1999). Den matematiska diskursens komplexitet förutsätter en kommunikation med hjälp av flera olika semiotiska resurser; skriftligt och verbalt naturligt språk, formellt matematiskt symbolspråk samt visuella framställningar som grafer och skisser (O'Halloran, 2000, s. 359). Ur ett lingvistiskt perspektiv är den pedagogiska diskursens komplexitet i matematik en följd av denna växelvisa användning av olika semiotiska resurser. Vid en analys av en matematisk diskurs behöver därför bidrag från dessa olika resurser beaktas, liksom den interaktion som sker mellan dem (ibid., s. 360). Dessa icke verbalspråkliga resurser har börjat uppmärksammas i allt högre grad, till exempel inom socialsemiotiken (se t.ex. Kress & van Leeuwen 2006/1996; Kress, 2001). Här utgår man från olika system av tecken som används för vårt meningsskapande i olika sammanhang.

De matematiska objektens abstrakta natur innebär att deltagandet i kommunikationen måste bäras av en medierande process. Detta medför att man då kan tänka på de matematiska objekten som konkreta (Wyndhamn, 1995, s. 7). Forskaren förtydligar:

I varje matematisk kommunikation föreligger ett stort behov av att konkretisera det man överlägger om [...] En medierande process kan grundas på såväl ett

manipulerande som ett verbaliserande. Manipulerandet förutsätter att man faktiskt tänker sig matematiska objekt eller "ting" som objekt vilket kan möjliggöra och innebära ett laborerande med rent fysiska föremål eller ett ritande av bilder på papper eller 'i huvudet' eller med ett metaforiskt hanterande av abstrakta symboler. (Wyndhamn, 1995, s. 7)

Mediering i matematik kan ses utifrån tre olika aspekter. Den första aspekten är de symboliska redskapens betydelse för medieringen. Undervisningens mål kan betraktas som att dessa ska approprieras till inre tankeredskap för eleverna. Den andra aspekten kan ses som själva utformningen av undervisningen som en medierande resurs mellan eleverna och innehållet, där deltagandet främjar elevernas kognitiva utveckling. Den tredje aspekten är att se lärarens roll som resurs för medierande erfarenheter, och inte i rollen som förmedlare av lärarinformation (Kinard, 2012).

För att kunna delta i en matematisk aktivitet med andra individer spelar det naturliga språket en viktig roll. Deltagandet i den matematiska diskursen innebär att eleverna måste använda flera olika semiotiska register när de matematiserar, och transformationerna mellan dessa oftast beskrivs med hjälp av det naturliga språket (Winsløw, 2004, s. 85). I ämnet kan du "tala" matematik genom att direkt läsa av symbolerna eller överföra dem till matematiska ord uttryckt med det naturliga språket (Lemke, 1993, s.159). Matematikundervisning handlar inte bara om att presentera och tydliggöra mängder av matematiska termer och symboler, utan också om att klargöra för eleverna hur dessa är relaterade till varandra i olika kontexter (ibid., 1993) Elever kan ledas framåt genom att träna regelstyrda rutiner som exempelvis deriveringar med hjälp av deriveringsregler, men det är viktigt att det finns "en översättare" för att eleverna ska klara detta (Engström, 2002, s. 16). Användning av datorer i undervisningen ger möjlighet att beskriva exempelvis derivatan som förnimbar för deltagarna i diskursen (ibid., s. 17). Ytterligare forskning med fokus på den multisemiotiska naturen vid lärandet i matematik kan kasta ljus över svårigheter kopplat till lärandet i ämnet, som exempelvis vad gäller förändring av koder vid skiftet mellan olika semiotiska resurser (O'Halloran, 2000, s. 365). En viktig inriktning är att studera hur olika semiotiska system initieras och internaliseras hos den enskilde individen i matematikundervisningen (Winsløw, 2004, s. 81).

Det formella symbolspråket intar en central plats som medierande resurs i matematikundervisningen (Kinard, 2012). När individer arbetar med det matematiska symbolspråket, måste de med säkerhet klara av att både avkoda och tolka symbolerna de möter (Sfard, 2008, s. 156). De symboliska representationerna ställer högre krav på elevernas tolkning jämfört med olika schematiska eller ikoniska representationer (Engström, 2002). Då symbolerna ofta innebär en övergång till ett generellt plan lämnar de inte heller samma utrymme för enskilda tolkningar (ibid.). För att elever i klassrummet ska kunna använda detta redskap för en inre tankeprocess, måste symbolspråket också vara förvandlat till ett eget inre tankeredskap (Kinard, 2012, s. 60). För att elevernas lärandeprocess ska utvecklas måste inte bara symbolspråket tolkas utan de måste också hantera översättningen mellan de olika representationsformerna (Ainsworth, 2006). För deltagande i den matematiska diskursen är det

nödvändigt att eleverna är medvetna om och har förmågan att urskilja den nödvändiga pendlingen mellan olika matematiska register (Duval, 2006). När elever exempelvis beskriver lutningen på en tangent kan de använda ett geometriskt register och rita upp tangenten i ett koordinatsystem, och därefter pendla över till ett algebraiskt register och förklara lutningen med hjälp av att t.ex. använda formeln $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

En svensk klassrumsstudie av Riesbeck (2008) riktar fokus mot diskursen i klassrummet som teoretiskt och didaktiskt begrepp. Med ett sociokulturellt perspektiv studeras kommunikationen, den pågående interaktionen, hur eleverna uppfattar lärarens språk samt hur deltagarna kommunicerar om begrepp sinsemellan i klassrummet (ibid., s. 12). Hon beskriver hur lärande kan ses som att bli delaktig i en diskurs och undervisning som en invit till att bli deltagare i denna matematiska diskurs. Riesbeck ser gränsen mellan elevernas vardagliga och matematiska diskurs som flytande, placerad på en skala med två poler (se fig. 2.1). Eleverna befinner sig på olika ställen beroende på hur långt de har kommit i abstraktionsprocessen, och användningen av den ena diskursen utesluter inte den andra. Samma sak, konstaterar hon, gäller matematiska tecken. Vissa tecken i matematiken förekommer mera allmänt i vardagen än andra, men för att förstå dem måste vi skapa referenser till dem.

Figur 2.1 Gränsen mellan vardaglig och matematisk diskurs

(Bearbetad figur från Riesbeck, 2008, s. 61)

Även i Riesbecks studie belyses i analysen av klassrumskommunikationen hur elever och lärare pendlar mellan olika diskurser, till exempel olika semiotiska system, och då passerar diskursiva gränser. De abstrakta matematiska begreppen kräver att vi måste passera mellan olika register och passera diskursiva gränser. Eleverna har svårt att veta vilken diskurs de befinner sig i när läraren använder olika tecken och pendlar exempelvis mellan en geometrisk och aritmetisk diskurs. Det ger upphov till svårigheter för deltagarna i matematikundervisningen då de inte följer med läraren när hon passerar en sådan diskursiv gräns (ss. 61-63). Riesbeck slår fast:

Det blir ett stort problem för eleverna, om de inte kan samtala och bilda begreppsliga nätverk, som hjälper dem till ett medvetet tänkande. Lärare, lärarstudenter och elever behöver alltså utveckla det matematiska språket i samklang med det vardagliga. (Riesbeck, 2008, s. 63)

Med hänvisning till Wittgensteins tanke att orden får betydelse genom att de används, uppmanar Riesbeck matematiklärarna att skapa undervisningssituationer ”så att ’språk-

bollen' kommer i rullning" (ibid., s. 64). Löwing (2008) betonar betydelsen av att klassrummets samtliga aktörer kan delta i den pågående diskursen, vilket hon observerat inte alltid är fallet under genomförda klassrumsobservationer. En gemensam förståelse och lärarnas medvetenhet om elevernas förkunskaper när de använder ett formellt språk är centralt (ibid., ss. 98-99).

Moschovitch (1996) skildrar i en klassrumsstudie hur elevernas pendlande mellan vardagsspråk och matematiskt språk när de kommunicerar i smågrupper blir en resurs istället för ett hinder för lärandet. Eleverna försöker få grepp om räta linjens grafiska respektive algebraiska representationer med hjälp av alltmer förfinade beskrivningar, där de olika språkliga registren fyller olika syften:

Although the difference between the everyday and mathematical registers may sometimes be an obstacle for describing lines in mathematically precise ways, everyday meaning and metaphors can also be resources for understanding mathematical concepts. Rather than emphasizing the limitations of the everyday register in comparison to the mathematics register, it is more important to understand how the two registers serve different purposes and how everyday meanings can provide resources for conceptual change. (Moschovich, 1996, s. 274)

Samtidigt som ett gemensamt exakt språk krävs när vi talar om matematiska begrepp, innebär det matematiska språket problem för eleverna. Enligt Kilborn (2007) är det viktigt att lärare successivt redan från förskoleåldern hjälper eleverna att utveckla ett matematiskt språk för att förbereda och möjliggöra matematikstudier under senare skolår. Problem med brister i det språk som används i klassrummet, sätter spår som blir allt tydligare under senare skolår. Kilborn framhåller att de problem som eleverna har i gymnasieskolans inledande kurs, och som även kan iakttas hos elever inom lärarutbildningen, kan förklaras med att eleverna inte har utvecklat ett funktionellt matematiskt språk.

Löwing (2004) lyfter i sin klassrumsstudie fram språkets roll som ett av de viktigaste instrumenten för elevernas lärande, men inte heller lärarna i studien kunde beskrivas använda ett precist matematiskt språk med en gemensam tolkning av innebörden av förekommande termer och begrepp. Lärarna kommunicerade ibland i onödan med ett vardagsspråk som riskerade att medföra otydligheter och försvåra för elevernas lärande i matematik. Med ett arbetssätt som domineras av hastighets-individualisering och läroboken som "den talande aktören" finns det, menar Löwing, också skäl att ifrågasätta om eleverna har den språkliga kompetens som efterfrågas för att de ska kunna tillgodogöra sig läroböckernas förklaringar av det matematiska innehållet. När eleverna inte kommunicerar med ett matematiskt språk, varken med läraren eller med andra elever, kan följden bli svårigheter att utveckla ett språk som är nödvändigt för vidare studier i ämnet (ibid., ss. 253-254).

Forskning framhåller vidare att ytterligare en konsekvens av avsaknaden av en tydlig utformning av klassrumsaktiviteter för gemensamma lärandesamtal om matematik, är att eleverna i hög grad själva sätts att både ta ansvar för och initiativ till att kommunicera om matematik både med sina kamrater och med läraren (Jablonka,

Johansson & Rohdin, 2010). Samtidigt konstaterar forskning att läraren har en mycket viktig roll när eleverna kommunicerar om matematik för deras möjlighet att tydliggöra och fördjupa sina tankar för en utveckling mot en matematisk förståelse (Riesbeck, 2000).

Löwing (2004) riktar i sin studie kritik mot den svenska undervisningstraditionen. Användningen av hastighetsindividualisering i undervisningen medför ytterligare negativa konsekvenser för kommunikationen om matematik i klassrummet. Då eleverna med detta val av arbetssätt inte arbetar samtidigt med samma uppgifter, finns inget ämnesinnehåll att samarbeta omkring och eleverna lockas att övergå till att tala om annat (ibid., ss. 255-256). Men även i de fall när eleverna arbetar med ett och samma problem tillsammans, visade forskaren på problem. Eleverna reflekterar inte över de resultat de gemensamt kommer fram till, utan övergår direkt till nästa uppgift för att bli färdiga före andra elevgrupper. Läraren kontrollerar inte heller elevernas resultat (ibid.).

2.6 Forskning med fokus på samarbetslärandets villkor

De danska forskarna Alrø och Skovsmose (2004, ss. 39-62) lyfter fram dialogen som undervisningsform istället för den undervisningstradition som tidigare har dominerat i matematikklassrummet, där kommunikationen handlar om att läraren frågar och eleverna svarar på lärarens frågor, vilket inte ger möjligheter för eleverna att ta ansvar för sitt eget lärande och skapa en klassrumskommunikation av god kvalitet:

We characterize dialogue as a form of communication requiring specific conditions: it is associated with a process of inquiry, includes risk-taking, and maintains equality [...] A dialogue includes risk-taking in terms of unpredictability [...] there is a risk of losing control or steering into a dead end. But at the same time, it is possible to address one's tacit knowledge or to come to see things in new and different ways. It is possible to learn! (Alrø & Skovsmose, 2004, s. 41)

I kontrast till den i Sverige traditionella undervisningsform där eleverna tillåts arbeta individuellt under ett tyst bänkarbete och i hög grad ta ansvaret för sitt eget lärande, innebär samarbetslärande att eleverna får ett gemensamt ansvar för gruppens lärande (Brandell & Backlund, 2011). De svenska termerna lärande i samverkan⁸ respektive samarbetslärande⁹ har delvis olika innebörd. Samarbetslärande beskrivs som en gruppaktivitet som tydligare är strukturerad av läraren, medan lärande i samverkan i högre grad lämnar över kontrollen över både processen och resultatet till eleverna. I denna studies empiriska del är det samarbetslärande som är i fokus. Läraren har här en handledande roll i gruppens arbete, och tar vidare ansvar för att vara behjälplig för att eleverna ska kunna samarbeta och för att målen med lärandesituationen ska kunna uppnås. Brandell och Backlund förtydligar:

⁸ Eng. collaborative learning

⁹ Eng. co-operative learning

Målen för samarbetslärande är kognitiva, metakognitiva och sociala, dvs. syftar till lärande i olika tankeprocesser, att eleven utvecklar förmågan att reflektera kring sitt eget lärande och att eleven tränar sina sociala förmågor. (Brandell & Backlund, 2011, s. 117)

Bristen på publikationer om samarbetslärande i Sverige kan tyda på att denna metod inte har någon större utbredning inom svensk matematikundervisning (Brandell & Backlund, 2011, s. 116), trots det stöd den ges i internationell forskning. Hattie slår i sin omfattande metastudie fast att "samarbetsinriktat lärande är verkligen en kraftfull intervention" (Hattie, 2012, s. 111). Forskning pekar på att alla elever, oavsett var de själva befinner sig i lärandeprocessen gynnas av samarbetslärande. Elever lär sig under interaktion med andra elever lika mycket i rollen att vara den som handleder andra, i jämförelse med att vara den som blir handledd av andra¹⁰ (ibid.). Resultat från den genomförda metastudien visar på att samarbetsinriktat lärande överträffar andra alternativ då samarbetslärande/ samarbetsinriktat lärande jämförs med heterogena grupper ($d=0.41$)¹¹, individuellt lärande ($d=0.59$) samt tävlingsinriktat lärande ($d=0.54$) (ibid., ss. 110-111). Forskaren uppmanar lärare att använda den effekt som finns i kamratrelationer positivt för att utveckla inläringen (ibid., s. 111).

För att lärande ska komma till stånd räcker det inte att bara sätta eleverna att arbeta tillsammans (Hattie, 2009, s. 95). Arbete i mindre grupper visar på en signifikant bättre effekt när det finns gemensamma strategier för samarbetslärande ($d=0,5$; ibid., s. 95) samt ett arbetsklimat där eleverna har möjlighet att ta kontroll över och reglera sitt eget lärande, vilket innebär att nödvändiga steg också måste tas för att eleverna ska tränas för att bli sina egna lärare (Carlgren, 2005).

Vidare framhåller Brandell och Backlund, med hänvisning till Roger et. al (2001) samt Johnsson och Johnsson (1999), vikten av att eleverna strävar mot ett gemensamt mål och tillsammans tar ansvar för gruppens arbete mot den form av lärande som avses. En social kompetens för att kommunicera och interagera med varandra måste utvecklas, liksom att grupprocesserna förstås och utvärderas av gruppens deltagare. Uppgiftens utformning måste vidare vara anpassad för lärande i smågrupper (Brandell & Backlund, 2011, ss. 117-118). Även Sfard och Kieran (2001) betonar vikten av gemensamma strategier när eleverna kommunicerar om matematik. Det är inte bara väsentligt att de erbjuds att kommunicera, utan också att deltagarna lär sig att kommunicera effektivt om matematik med varandra:

Thus, based on theoretical arguments and ample evidence from other research, we still believe in the didactic potential of talking mathematics. The only reasonable conclusion of our analysis is that if conversation is to be effective and conducive for learning, the art of communicating *has to be taught*. (Sfard & Kieran, 2001, s. 71)

¹⁰ $d=0,54$

¹¹ Den genomsnittliga effekten av metaanalyserna var $d=0.40$. I Hatties tolkning av referensvärdena betecknas $d<0,20$ som liten effekt, $0.3-0.6$ är medelstor och $>0,6$ är stor effekt (Hattie, 2012, s. 29).

I en norsk forskningsstudie av elever som arbetar med problemlösning i smågrupper konstaterar Carlsen (2008) att gymnasieelevernas resonemang och lärande i gruppen medieras av olika redskap (se t.ex. Säljö, 2005, s. 152 ff.) och att eleverna förbättrar sin förmåga att explicit använda matematiska redskap när de arbetar tillsammans. Det är, menar Carlsen, inte det viktiga att bara konstatera att eleverna använder medierande redskap, utan att studera vad som kännetecknar hur de gör det och vilken roll redskapen har i approprieringsprocessen (Carlsen, 2008, s. 85). Eleverna använder olika skriftliga inskriptioner som diagram, för att överbrygga "det gap" som bildas mellan det problem eleverna ska lösa och det nödvändiga matematiserandet (ibid., s. 84). Vidare fungerar inskriptionerna som ett stöd för att eleverna explicit ska kunna tydliggöra sitt tänkande för andra, vilket kan bidra väsentligt till elevernas möjlighet att tillägna sig dessa redskap. Carlsen betonar i studiens implikationer för undervisningen vikten av tid för att eleverna ska hantera och appropriera olika matematisk redskap:

Students need to work extensively through collaborative problem solving to experience and appropriate how mathematical tools may be utilized in different contexts. The process of appropriating mathematical tools *per se* never ends. (Carlsen, 2008, s. 94)

De norska eleverna kunde konstateras att under problemlösningsaktiviteten i allt högre omfattning öka sin förmåga att använda en matematisk terminologi kopplad till de matematiska begreppen (ibid., s. 81). Carlsen beskriver vidare hur eleverna tar olika roller under gruppaktiviteterna och hur dessa bidrar till gruppens uthållighet under problemlösningsprocessen (ibid., s. 85). Den elev som iklär sig rollen av den ivriga *frågaren* bidrar till att de övriga eleverna förklarar för varandra och på så sätt delar med sig av sitt vetande. Genom att ställa frågor, öppnar *frågaren* upp för diskussioner och "ett gemensamt tänkande". En annan viktig roll i gruppen har den som tar på sig att vara *förklararen*. Detta rolltagande i gruppen bidrar till ett kumulativt samtal mellan gruppmedlemmarna (ibid., s. 84).

Hur beskrivs då ur elevernas perspektiv upplevelser av att matematisera tillsammans i smågrupper? I en svensk studie där gymnasieelever i åk 3 utvärderar sin matematikundervisning, anges arbete i smågrupper vara av stor betydelse. Elever med svagare kunskaper säger sig ha upplevt stöd från elever med goda förkunskaper, medan de starkare eleverna upplever sig ha utvecklat sin begreppsuppfattning genom att de har förklarat för kamrater (Persson, 2005, ss. 64-65). Ytterligare en svensk forskningsstudie har genomförts med fokus på hur lärarstudenter reflekterade över sitt eget lärande då de genomförde geometrilaborationer och därefter arbetat med problemlösning i smågrupper (Nilsson, 2005, s. 135). Studenterna beskriver hur engagemang skapas i diskussioner med variation, kommunikation och åskådlighet som viktiga komponenter (ibid., s. 292). I studien konstateras att många av lärarstudenterna beskriver sitt lärande som en känslomässig resa. Vissa av dem gav i frågor som ställdes före och efter kursen uttryck för en kognitiv konflikt där de uttrycker känslor som kännetecknades av förvirring och frustration (ibid., s. 293). Hos de studenter som ökat sin svars kvalitet tydligt under kursen återfinns de som uttrycker att de upplevt en kognitiv

konflikt, medan det hos den grupp som inte förändrat sin svars kvalitet alls inte finns en enda student som uttrycker en kognitiv konflikt. Kognitiv konflikt beskrivs här som att studenterna känner förvirring och uttrycker att "de har förstått på ett nytt sätt" (ibid., s. 230). Nilson menar att det tyder på att undvikande av förvirring och kognitiv konflikt kan vara en nackdel för lärandet i matematik och pekar på de resultat som TIMSS videoundersökning (Stigler & Hiebert, 1999) redovisade i en jämförelse mellan japanska, tyska och amerikanska elever. Japanska lärare valde ofta att erbjuda eleverna utmanande problem, där de fick en liten ledtråd för att komma vidare i sina lösningar när de stötte på motstånd. De japanska eleverna fick använda sina egna lösningsmetoder och dessa metoder belystes i en efterföljande diskussion (ibid., ss. 39-41). Amerikanska lärare däremot tenderade att känna ansvar för att dela upp undervisningens innehåll i mindre områden, och såg det som ett misslyckande om eleverna upplevde frustration eller förvirring:

Teachers act as if confusion and frustration are signs that they have not done their job. When they notice confusion, they quickly assist students by providing whatever information it takes to get the students back on track. (Stigler & Hiebert 1999, s. 92).

Berry och Sahlberg (2006) har undersökt finska och brittiska lärares uppfattningar om användningen av smågruppsarbete i matematikundervisningen. De har vidare studerat vilka faktorer som stödjer eller motverkar lärarnas prioritering av samarbete i smågrupper framför individuellt arbete under lektionerna. Lärarna uppgav under intervjuerna att användningen av smågrupper är bäst lämpat för att introducera, diskutera och lösa matematiska problem tillsammans. Få lärare valde grupparbete när eleverna förväntades möta ett nytt matematiskt innehåll eller vid arbete med rutinuppgifter. Studien visar också på att lärarna betraktar smågruppsarbete i matematik i första hand gynnsamt som en väg för att gynna samarbetsförmåga och ett ökat deltagande under matematiklektionen, medan få lärare angav smågruppsarbete som gynnsamt för lärandet. Detta, framhåller Berry och Sahlberg, står i kontrast till att forskningen pekar på positiva resultat kopplat till andra lärandesituationer i matematik (ibid.). Studien indikerar vidare på att flertalet av matematiklärarna ser en ökad andel externa tester, som exempelvis nationella prov, som en anledning att inte använda sig av undervisning i mindre grupper då det leder till tidsbrist. De anger även tidsbrist som ett hinder för att förbereda smågruppsarbetet i matematik. Även föräldrarnas attityd till vad de förväntar sig vara matematikundervisning anges som en orsak till att inte använda sig av smågruppslärande. Storbritanniens matematikundervisning har utvecklats mot att i allt högre grad använda sig av extern kontroll av elevernas kunskaper, medan Finland i betydligt lägre grad använder sig av sådana tester. I Sverige har utvecklingen också gått mot en ökad extern kontroll av elevernas kunskaper då de nationella proven i matematik nu är obligatoriska även i lägre årskurser i matematik.

2.7 Lärande kopplat till interpersonella faktorer och känslor

För att få svar på frågor rörande elevernas matematiska aktivitet i undervisningen har forskningen alltmer vänt blicken mot frågor kopplade till samband mellan matematisk aktivitet, identitet och lärande (se t.ex. Boaler, 2002; Boaler & Greeno, 2000; Hannula, 2005; Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012; Sfard & Prusak, 2005). Heyd-Metzuyanim och Sfard (2012) har iakttagit hur smågrupper inte alltid kan betraktas som en produktiv lärandemiljö i matematikundervisning. De observerade att eleverna kunde välja en mindre kompetent ledare för gruppen framför en elev som verkligen kunde leda den matematiska diskursen i rätt riktning. Detta menar forskarna pekar på vikten av att ytterligare belysa interpersonella och affektiva faktorerers inverkan vid gruppaktiviteter i matematik (ibid., s. 143). Wood (2008) konstaterar att få studier är genomförda som kopplar samman dessa aspekter. I en amerikansk klassrumsstudie fokuserar forskaren på hur diskursen utvecklas när eleverna arbetar i små elevgrupper. Forskningen syftar till att bidra till en ökad insikt om hur produktiva grupperingar ska skapas i matematikundervisningen och på så sätt gynna utvecklingen mot en effektivare matematikundervisning (ibid., s. 7). I studien är fokus riktat på skillnader i mellanstadieelevers deltagande under ett smågruppsarbete matematik och utvecklingen av den matematiska diskurs som är i fokus för lärandet. Studien visar på interaktionens betydelse för att det önskvärda lärandet ska ha förutsättningar att inträffa under smågruppsarbete. Wood betonar styrkan i användningen av smågrupper för att gynna lärande och att elevernas engagemang i de matematiska idéerna är viktigt under smågruppsarbetet. Två olika förhållningssätt till lärande hos eleverna när de arbetar i grupper lyfts fram, "directed learning" och "engaged learning". Elever som använder "directed learning" kännetecknas av att ha fokus riktat mot fysisk aktivitet och de olika processer som sker under matematiserandet. Eleven matematiserar i begränsad omfattning och identifierar sig som en elev som har behov av att någon annan ska tala om vad han/hon ska göra. De elever som istället beskrivs använda sig av "engaged learning" kännetecknas av att de talar om matematiska idéer och bidrar till gruppens kommunikation om matematik: de både matematiserar och kommer med egna idéer men använder också andras matematiska diskurs. De ser sig själva som att vara kapabla att förstå och lära sig matematik. Wood drar vidare slutsatsen att skillnader i elevernas matematiserande och hur de identifierar sig som deltagare i matematikklassrummet är kopplat till skillnader i det önskvärda matematiska lärandet (ibid.).

Boaler och Greeno (2000) har studerat hur elever identifierar sig som "math people or not math people" beroende på hur de uppfattar sin egen roll under aktiviteterna i matematikklassrummet. I en svensk studie av hur studenter i inledningen av universitetsstudierna hanterar och uppfattar gränsvärdesbegreppet, fann Juter (2006, s. 38) en koppling mellan bra självförtroende i matematik och prestation i problemlösningssituationer.

En finsk etnografisk studie har genomförts med fokus på socioemotionella problem när högstadieelever arbetar med problemlösning i mindre grupper (Hannula, 2005). Studien riktar intresset mot den kommunikation som sker när eleverna arbetar

med matematik i smågrupper och den sociala koordineringen vid problemlösandet. Detta, framhåller Hannula, är ett område som inte är tillräckligt utforskat då forskning om problemlösning främst har riktat intresset mot kognitiva processer (ibid., s. 25). I studien beskrivs tre olika typer av känslor som antas ha betydelse för elevernas samarbete under en problemlösningssituation: kopplade till interpersonella relationer som exempelvis att bli inkluderad eller exkluderad i gruppen; relaterade till individuella behov och mål, som en elevs frustration över att inte nå sina individuella mål eller känslor som rör ilska eller frustration mot kamrater i gruppen; kopplade till känslornas betydelse för hur handlingar koordineras inom gruppen utifrån elevernas individuella mål. Dessa tre känslotyper utesluter inte varandra. När eleverna har olika idéer om eller hur de ska fortsätta med ett matematiskt problem spelar känslor en viktig roll för den sociala koordinationen av vilka handlingar gruppen kommer att genomföra (ibid., s. 27). Hannula beskriver en situation som uppstår i elevgrupper som han benämner ”kognitiv intimitet”:

Speciellt erbjuder den en insyn i en gemensam kognitiv intimitet, som ibland upplevdes av elever som tillsammans konstruerade en lösning till ett problem. Den gemensamma kognitiva intimiteten är ett exempel på en situation, där eleverna samtidigt kan fylla både sina kognitiva och sina sociala behov. (Hannula, 2005, s. 41).

Sammanfattningsvis har forskning visat att kognitiva, emotionella och interpersonella faktorer samspelar för elevers framgång vid lärande i matematik (Sfard & Heyd-Metzuyanim, 2011).

2.8 Skillnader i elevernas deltagande och interaktion

Flera svenska studier har under det senaste årtiondet bidragit till den forskning som syftar till att belysa hur elevers deltagande i gruppaktiviteter främjar utvecklingen av en effektiv kommunikation i matematikklassrummet (se t.ex. Ryve, 2004, 2006b; Nilsson & Ryve, 2010; Ryve, Larsson & Nilsson, 2013; Ryve, Nilsson & Pettersson, 2013).

Sfard och Kieran (Sfard, 2001; Kieran, 2001; Sfard & Kieran, 2001) har utvecklat ett metodologiskt ramverk ”The communicational approach to cognition”, för att studera den matematiska diskursen och interaktionen mellan eleverna under gruppaktiviteter i matematik. I ramverket presenteras en metod för att studera kommunikationen i den matematiska diskursen med hjälp av flödesscheman över interaktionen mellan gruppens olika aktörer. Ryve (2006b) har presenterat ett kompletterande ramverk genom att utveckla de interaktiva flödesschemana¹² i strävan att uppnå en möjlighet att mer explicit kommunicera graden av effektivitet i gruppens matematiska diskurs. Kontextualisering¹³ innebär här att elevernas intentioner studeras och om ett yttrande är riktat

¹² En. interactive flowcharts (Sfard & Kieran, 2001)

¹³ En. contextualization (Ryve, 2006b)

mot de andra deltagarna, mot dem själva samt om de initierar en ny diskurs eller bidrar till en redan pågående diskurs (ibid., s. 207). Ytterligare en analys, fokusanalysen¹⁴, syftar till att möjliggöra att skilja mellan olika matematiska diskurser och explicit redogöra för dessa (ibid.). I studien observerades fyra grupper svenska ingenjersstudenter, då de arbetade tillsammans med uppgiften att tillverka en begreppskarta i linjär algebra, för att kunna belysa den matematiska diskursens produktivitet (ibid.). Tre förhållningssätt beskrivs hos studenterna som har betydelse för engagemanget i gruppens diskurs, liksom för den matematiska kvalitén och studenternas bidrag till diskursen:

- Att så snabbt som möjligt fullfölja syftet med uppgiften och därigenom bli klar med uppgiften
- Att vara villiga att diskutera relationer mellan begrepp
- Att ta rollen av att agera ”skrivare” och fysiskt genomföra uppgiften genom att ta instruktioner från de andra gruppmedlemmarna, men däremot själv i mindre grad delta i den matematiska diskursen. (ibid., ss. 197-198)

De enskilda elevernas personliga mål för att delta i gruppaktiviteten var inte alltid förenliga, vilket då kan motverka möjligheten att skapa en gemensam plattform för att diskutera matematik i elevgruppen (Ryve, 2006b; Nilsson & Ryve, 2010). Ytterligare en iakttagelse var att studenter som ställde många frågor som ”But, what is a standard base?” (Ryve, 2006b, s. 204) presterade bättre vid den efterföljande examinationen. Ryve konstaterar att studenternas kontextualisering av uppgifter kan kopplas till vad de tror matematik innebär och rekommenderar användning av begreppskartor i matematikundervisningen för att diskutera och vid behov ändra de diskursiva reglerna i undervisningspraktiken (ibid., s. 206). I en efterföljande studie där elever i åk 6 som arbetar i grupp med ett tärningsspel, utvecklar Nilsson och Ryve (2010) dessa analytiska redskap. Ett resultat från studien visar att om eleverna har olika mål för att delta i gruppaktiviteten, påverkar detta effektiviteten i gruppens kommunikation.

I en annan svensk studie (Ryve, Larsson & Nilsson, 2013) används variationsteori (Marton & Tsui, 2004) för att studera det matematiska objekt som är föremålet för lärandet som det är presenterat i den interaktion som sker i klassrummet. För att möjliggöra att diskutera betydelsen av de olika dimensioner av variationer av matematiska objekt som studeras har detta kompletterats med ett kompetensramverk (Kilpatrick et al., 2001). Forskarna studerade 13-14 åringars deltagande i den matematiska diskursen under en problemlösningsaktivitet med fokus på hur det matematiska innehållet representerats. En slutsats är att läraren tydligt synliggör procedurer och begrepp och olika medierande redskap, men att aspekter kopplade till själva problemlösningsförmågan inte är lika tydliga (ibid., s. 112). För att tala om varför och hur kommunikationen kan beskrivas som effektiv är dessa medierande redskap och matematiska termer¹⁵ centrala inom forskningen.

¹⁴ Focal events/ project and contextualization (se t.ex. Ryve, Nilsson, & Pettersson, 2011, s. 2)

¹⁵ Sfard (2008) använder ”keywords”. I denna studie används matematiska ord.

2.9 Problemlösningssuppgiften och aktivitetens utformning

Att arbeta med problemlösning syftar inte bara till att utveckla problemlösningss-förmågan i matematik, utan ses också som ett medel för att eleverna ska utveckla andra matematiska förmågor och betraktas som en del av det centrala innehållet i ämnet matematik. Eleverna får under problemlösningssaktiviteten möjlighet att hantera de konflikter som uppstår när lärandet sker på en metanivå för att utveckla sin egen problemlösningssförmåga. De får en möjlighet att sätta ord på och diskutera sina tankar med varandra och värdera lösningar, metoder och strategier (Skolverket, 2011b). Vad som kännetecknar ett matematiskt problem och vilka krav som bör ställas på en problemlösningssaktivitet behöver i detta sammanhang klargöras.

Att definiera ett matematiskt problem nära den vardagliga definitionen av "problem" förefaller vanligt idag, och en individrelaterad definition innebär då att det är en uppgift som ska lösas där individen inte från början har klart för sig vilka lösningsmetoder som ska användas (Björkqvist, 2003, s. 118; se även Bergsten, 2006). För att en uppgift ska bedömas som ett matematiskt problem anger Lester (1983) ytterligare villkoren att eleverna måste vilja eller behöva finna en lösning och att de måste aktivt vilja anstränga sig för att finna lösningen på problemet.

Då elever ska arbeta i mindre grupper med problemlösning i matematik ställs således krav på uppgiftens utformning för att aktiviteten ska stötta elevernas lärande (Berry, & Sahlberg 2006; Sahlberg & Berry, 2003). Tre kriterier behöver då tas i beaktande: alla deltagare ska ha en anledning att delta, uppgiften ska utformas så att alla får tillfälle och möjlighet att delta i samtal och gruppmedlemmarna ska behöva göra val och fatta beslut (ibid.). Jablonka (2013) lyfter fram en paradox som kan uppfattas när en så kallad steg-för-steg lösningsmall används när eleverna arbetar med problemlösning. I ett försök att visa på olika faser i problemlösningen menar hon att det kan vara olyckligt att förenkla problemlösning till klart uttalade steg, då problemet inte längre är öppet utan kopplas till en viss teknik eller metod.

Synen på problemlösningen i svensk undervisning har förändrats hand i hand med den utveckling som har skett inom det internationella matematikdidaktiska fältet (Bergsten, 2006). Forskningen om problemlösning har, från att under 1980-talet betona kunskaper, processer och uppfattningar, genom ett ökat inflytande från det sociokulturella perspektivets aspekter inneburit en förskjutning med fokus mot analys av situationella och diskursiva element (ibid., s. 165). Under de senaste åren har ett ökat forskningsintresse riktats mot olika semiotiska uttrycksformer och dess betydelse för lärande och kunnande har både kognitiva och sociokulturella drag (ibid., s. 166). Denna syn på förskjutningen av forskningens fokus delas av Nickson (2000) i hennes sammanställning av klassrumsforskningens inriktning.

2.10 Studier kopplade till begreppet derivata

I detta avsnitt presenteras några studier med relevans för studiens matematiska innehåll derivatabegreppet. Då få studier är genomförda i Sverige med koppling till introduktion av begreppet derivata i gymnasiet, presenteras här även en del internationell forskning.

Ur perspektivet att läroboken konstaterats vara en talande aktör att räkna med i det svenska klassrummet har en forskningsstudie genomförts av Bremler (2003) med fokus på presentationen av derivatabegreppet. Forskaren redogör för hur derivata som begrepp har introducerats och behandlats i svenska läromedel utgivna under åren 1967-2002. I granskningen konstateras att syftet med att lära sig derivata inte är tydligt uttalat i läromedlen, förutom att det är nödvändigt för högre studier i matematik (ibid., s. 105). Genuina problem som inte handlar om att eleverna ska kopiera mönster blir alltmer sällsynta i läroböckerna. Cirka 90 % av uppgifterna är av den typ som finns lösta som typexempel, vilket Bremler inte ser som matematiskt utvecklande:

Det faktum att arbetssättet 'memorera - reproducera' fungerar för eleverna riskerar att invagga dem i en falsk trygghet som får dem att tro att de står väl rustade inför matematisk problemlösning. (Bremler, 2003, s 106)

Studien visar vidare på att de formella bevisen kopplade till härledning av deriveringsreglerna helt har försvunnit från läromedlen. Andelen böcker där bevis varken har nämnts eller utförts har nästan fördubblats från perioden 1967-1993 jämfört med 1994-2002. Härledningar nämns i ca 40 % av läromedlen från 1994-2002 men nämns inte alls i de senare läromedlen. Genomförande av dessa bevis förekommer inte alls längre, jämfört med i närmare 25 % av läromedel som utgavs under åren 1967-2002 (ibid., ss. 82-83).

Då en läsare erbjuds att tolka ett matematiskt begrepp med hjälp av bilden som didaktiskt verktyg kan både narrativa och konceptuella bilder användas. De förra är dynamiska och beskriver en förändring med hjälp av bildserier eller pilar, medan konceptuella bilder är "statiska" och en förändring beskrivs i text utanför bilden (Kress & van Leeuwen, 1996, s. 56). För en geometrisk tolkning av derivatan används bilden som det främsta didaktiska verktyget. Bremler konstaterar att de narrativa bilderna endast visar på en svag ökning i läroböckerna över tid. Derivatans förändring beskrivs med statiska bilder i en bildserie eller med flera sekanter i samma bild, kompletterat med en förklarande text. När eleven hänvisas till dessa "statiska" stillbilder kan det vara problematiskt att förklara derivatan grafiskt med hjälp av att låta en sekant övergå till en tangent. Det kan då finnas risk för att eleverna endast väljer att ta till sig den mer lättillgängliga "statiska" bilden, vilket kan leda till att eleven ser derivatan som en ändringskvot (Bremler, 2003, s. 106).

En genomförd finsk intervjustudie har fokus på olika representationers betydelse för hur elever (under skolor 11) uppfattar derivatan när de möter detta begrepp i matematiken (Hähkiöniemi, 2006a, 2006b). För att elevernas begreppsförståelse och kompetens att hantera olika representationer inte ska påverkas negativt, understryks i

studien betydelsen av att läraren använder olika representationer i undervisningen. Särskilt betonas vikten av användningen av grafiska representationer vilket konstaterats ha en viktig positiv effekt på elevernas lärande av derivatabegreppet (ibid., s. 33). Begreppsförståelse innebär att eleverna inte bara måste kunna hantera olika procedurer för att arbeta med ekvationer och grafer, utan de måste också koppla ihop grafiska och algebraiska representationer (Moschkovitch, 1996, s. 242). Eleverna använder sig av tangentens lutning inte bara vid beräkningar med hjälp av algoritmer, utan korregerar också felberäkningar gjorda med deriveringsregler med hjälp av dessa visuella representationer (Hähkiöniemi, 2006a). Flera tidigare forskningsstudier har pekat i samma riktning (se t.ex. Moschkovitch, 1996).

Enligt Tall (2003) är en värdefull början för att förstå derivata att peka på "local straightness" och användning av ett "förstoringsglas" på grafen kan ge ett kraftfullt visuellt stöd. Även om det finns stora fördelar att använda sig av en perceptuell aktivitet visar forskning också på att denna aktivitet bör kopplas till användningen av matematiska symboler (ibid.). Visualisering med hjälp av till exempel en hand eller en penna för att följa grafens lutning kan fylla samma funktion som att använda sig av ett datorprogram för att följa en uppritad graf (Gray & Tall, 2001, s. 77). Hähkiöniemi betonar att hans studie stödjer argument som betonar gesternas betydelse för elevernas lärande: "gestures are important for thinking and part of expressing, communicating and reorganizing one's thinking" (Hähkiöniemi, 2006a, 2006b). Enligt Roth och Welzels (2001) fungerar gester som en hjälp att synliggöra och "konkretisera" de abstrakta objekten och de konstaterar:

Our research provided evidence that gestures may take an intermediate position between material activities and the representation of these 'activities in discourse' (Roth & Welzels, 2001, s. 106)

Hähkiöniemi observerar också att eleverna inledningsvis tenderar att använda exempelvis grafen som ett fysiskt objekt, och fokuserar mer på representationerna som redskap än på det objekt de ska se (Hähkiöniemi, 2006a, 2006b). Lärandet sker också när eleverna hanterar objektet och möter dess egenskaper, som exempelvis när de ger derivatan tecken och storlek (ibid.). Detta står i kontrast till teorier som framhåller att lärandet går från en process- till en objektnivå, som Sfards reifikationsteori (Sfard, 1991).

Flera intervjustudier med elever har genomförts som visar på vanligt förekommande svårigheter som individer uppvisar när det gäller förståelsen av derivatabegreppet. Orton (1983a) genomförde en studie där 110 elever i åldrarna 16-22 år intervjuades om sin förståelse av derivata. De största svårigheter som redovisades var kopplade till brister i algebraiska färdigheter, hanteringen av proportionalitet och förhållanden, tolkningen av grafer och problem rörande gränsvärdesbegreppet (Orton, 1983a, 1983b). Närmare hälften av deltagarna visade problem med att uppfatta en tangent som ett gränsvärde av en mängd sekanter som närmar sig denna. Lärare i matematik rekommenderas därför att lägga tid på att studera grafer och förändringshastigheter. En annan intervjustudie pekar på att det är vanligt att elever tolkar grafen

fel, som att exempelvis ett stort funktionsvärde tolkas som att förändringshastigheten också är större (Hauger, 1997, s. 22), något som ligger i linje med studien av Häkhiöniemi (2006a, 2006b).

2.11 Sammanfattning

I detta avsnitt sammanfattas det som ses som mest centralt för denna avhandling från den ovan presenterade forskningsöversikten. För referenser hänvisas till avsnitten 2.1-2.11.

Svenska elever redovisar betydande resultatförsämrings i matematik både i internationella och nationella jämförelser. Många av de förklaringar som presenteras till elevernas allt svagare kunskapsutveckling, kan kopplas till hur lärarna väljer undervisningsmetoder anpassat till det matematiska innehåll som är föremål för lärandet. I TIMSS undersökningar (2007, 2012) bekräftas att lärare i Sverige använder läroboken som den huvudsakliga utgångspunkten för undervisningen i matematik, medan andra länder inom EU/OECD-länderna däremot i högre grad ser läromedlet som ett komplement till matematikundervisningen. Procedurfixeringen i läromedel kopplat till en hög andel individuellt arbete i läroboken under lektionerna, antas bidra till att konsekvenserna av elevernas misstag inte upptäcks i tid¹⁶.

Lärarens ämneskompetens och förmåga att synliggöra lärprocessen för sig själv och eleverna lyfts i forskning fram som två centrala framgångsfaktorer för att gynna elevernas lärande. Här betonas också den positiva kraften i ett samarbetsinriktat lärande, till exempel när eleverna ska möta ett för dem nytt matematiskt objekt eller arbeta med uppgifter av rutinkaraktär. Trots detta pekar studier på att lärare tenderar att avstå från samarbetslärande. Orsaker som anges är bland annat en upplevd tidspress för ”att hinna med kursen”.

Vikten av gemensamma strategier när eleverna kommunicerar om matematik i smågrupper betonas i ett flertal forskningsstudier. Betydelsen av att skapa ett effektivt lärandeklimat handlar om att synliggöra matematiska objekt och processer, men också att välja ut lämpliga uppgifter och aktiviteter till eleverna.

Återkoppling redovisas i forskning som den enskilt största faktorn för att öka elevernas prestationer, vilket innebär att bedömning och utvärdering av eleverna är kopplat till ett effektivt lärande. I en svensk forskningsstudie med fokus på kommunikation och bedömning, konstateras att en bedömning av elevernas tillämpning av matematiska begrepp och metoder erbjuder eleverna rika möjligheter till lärande och kritisk reflektion i matematikundervisningen. Men när eleverna arbetar med matematik i klassrummet är det inte bara läraren som ger återkoppling i form av utvärdering och beröm, utan även eleverna bedömer och värderar varandras deltagande i matematiserandet. För att få svar på frågor om skillnader i elevernas lärande har ett ökat intresset riktats mot frågor rörande kopplingar mellan matematisk aktivitet, identitet och lärande. De diskursiva aktiviteterna som pågår i klassrummet kan beskrivas som

två tätt sammanflätade aktiviteter, den kommunikation som handlar om matematiska objekt och den som handlar om deltagarna i diskursen. Ett flertal studier har under det senaste årtiondet bidragit till den forskning som syftar till att få en ökad insikt i elevernas deltagande i gruppaktiviteter för att främja utvecklingen av en effektiv matematisk kommunikation i klassrummet. I forskningsstudier konstateras att elevernas olika förhållningssätt i gruppens diskurs, bidrar till den matematiska diskursens kvalitet och effektivitet. Möjligheten att delta i den matematiska diskursen motverkas då gruppmedlemmars individuella mål inte är förenliga med målen för gruppaktiviteten.

Matematikämnets höga abstraktionsgrad och komplexitet är utförligt beskriven inom forskningsfältet. De matematiska objekten är inte synliga för våra ögon och användningen av olika semiotiska hjälpmedel som grafer, matematiska symboler och skisser ska kopplas samman med den verbala diskursen. Det formella symbolspråket intar därför en central plats som medierande resurs i undervisningen. Eleverna måste medvetandegöras om den ständiga pendling mellan olika register som erfordras, en pendling som annars kan leda till svårigheter för eleverna att passera dessa diskursiva gränser. När eleverna arbetar i gruppaktiviteter kan pendlingen mellan vardagsspråket och det matematiska språket bli till en resurs istället för ett hinder för eleverna när de ställs inför att pendla mellan till exempel en geometrisk och aritmetisk diskurs. Forskning visar att elever gärna använder sig av exempelvis diagram och grafer som stöd för matematiserandet. Gester och grafiska representationer lyfts fram som särskilt betydelsefulla för lärandet (visualisering). I detta sammanhang betonas i en finsk studie betydelsen av att läraren använder sig av olika representationer i undervisningen för att stödja elevernas utveckling av begreppet derivata.

Kapitel 3 Centrala teoretiska begrepp

I detta kapitel belyses epistemologiska överväganden när det gäller lärande och kunskap som är centrala för det valda teoretiska perspektivet. Här redogörs också för hur språket ur ett dialogiskt diskursperspektiv ses spela en central roll för lärande och individens meningsskapande.

3.1 Tänkande, lärande och utveckling ur ett sociokulturellt perspektiv

Studien tar sitt fäste i ett socialt perspektiv på lärande, där klassrumsklimatet förändras och formas av den rådande kulturen, av de sociala krafter och den integration som pågår i interaktionen mellan klassrummets olika interaktörer (Hoyle, 2001, s. 274). Lärandet och socialisationen formas i samspel med andra individer (se t.ex. Rogoff, 2003; Sfard, 2008; Säljö 2001, 2005; Wertsch, 1991, 1998) och betraktas som en förändring i individernas deltagande i sociala praktiker (Lave, 1993; Lave & Wenger, 1991; Rogoff, 2003). Studiens teoretiska utgångspunkt är huvudsakligen Sfards teoretiska kognitiva ramverk, som utgår från Vygotskys tankar till grund för synen på lärande (Sfard, 2008). Detta valda sociokulturella lärandeperspektiv, där lärandet ses kopplat till kulturella, sociala och situationella aspekter med rötter i Vygotskys teorier, har blivit allt vanligare inom matematikdidaktisk forskning (Kieran, Forman & Sfard 2001, s. 5; Lerman, 2001).

Med detta perspektiv betonas språkets och kommunikationens centrala betydelse för elevernas lärande (t.ex. Alrø & Johnsen-Høines, 2010; Lerman, 2000, 2001; Riesbeck, 2000; Sfard, 2008). Här har den syn på lärarrollen som innebär att eleverna betraktas som "tomma" behållare som ska fyllas upp med innehåll (Sfard, 1998) övergivits, till förmån för att istället betrakta läraren som en resurs för ett guidat lärande (Kinard & Kozulin, 2012). Intresset är riktat mot hur eleverna förmår återskapa och utnyttja kognitiva och fysiska kollektiva resurser i matematikundervisningen (Säljö, 2000).

Vygotsky beskriver hur barnet inte kan skapa mening i världen oberoende av den sociala världen. Istället skapas meningen av ett ord och hur det ska användas i den sociala och historiskt sanktionerade diskurs där barnet befinner sig:

Adults, through their verbal communication with the child, are able to predetermine the path of the development of generalizations and its final point- a fully formed concept (Vygotsky, 1986, s. 120)

Redan det lilla barnet lär sig kommunicera med sig självt på samma sätt som andra kommunicerar med det, och visar på människans unika förmåga att tänka (Sfard, 2008). Eller, som Säljö uttrycker det: "kommunikation föregår tänkande och att lära

sig ett språk är att lära sig tänka inom ramen för en kultur och en viss samhällelig gemenskap” (Säljö, 2000, s. 67). Säljö drar slutsatsen:

Detta innebär att barnet tänker *med* och *genom* de intellektuella redskap i form av språkliga uttryck som det stött på och tagit till sig i samspel med andra. Eller, annorlunda uttryckt, människor lever på kunskaper och insikter som de lånat av andra. (Säljö, 2000, s. 67)

Sfard (2008) definierar, med hänvisning till Vygotsky, tänkandet som den individualiserade formen av mänsklig kommunikation som växer inuti människan. Hon slår fast:

Cognitive processes and interpersonal communication processes are thus but different manifestations of basically the same phenomenon (Sfard, 2008, s. 83)

Människans tänkande ses här som en viktig länk mellan den enskilde individen och omvärlden, men tänkandet är dock situerat och kan inte frigöras från sociohistoriska sammanhang och redskap, vilket innebär att analysenheten är individernas agerande i deras sociala praktik (Säljö, 2000, s. 18). Språket ses inte en central roll och föregår lärandet i matematik (Vygotsky, 1978, 1986).

3.2 Medierings- och individualisationsprocessen och lärandet

Människan använder språket och olika externa artefakter som ett stöd för sina meningsbärande processer. Språket fungerar inte bara som resurser för kommunikationen med andra individer i denna ständiga pendlingsprocess, utan det fungerar också som ett förråd för våra tankar (Carlsen, 2008). Tänkandet och lärandet kan således beskrivas som en process sammanflätad med användningen av olika slags kulturella redskap. Lärandet sker genom att individen använder verktyg och redskap¹⁷, såväl språkliga, intellektuella och fysiska resurser, för att tolka omvärlden och agera (Säljö, 2001, s. 20). Individen befinner sig under ständig utveckling och kan inom sin närmaste utvecklingszon (ZPD)¹⁸ använda dessa verktyg och redskap för sitt tänkande i olika samspelssituationer, med stöd av mer erfarna individer (Vygotsky, 1978). Om man betraktar lärande och utveckling som appropriering och en utökad användning av kulturella redskap, språkliga som fysiska, kan man med tiden ”se” omvärlden, med alltmer komplexa redskap (Säljö, 2005, ss. 228-229). Det innebär att det finns en skillnad mellan vad olika individer klarar på egen hand i exempelvis en problemlösningssituation i matematik och den nivå hon når i samarbete med andra individer som är mer kapabla att hantera den aktuella matematiska diskursen (Vygotsky, 1978, s. 86). För den process som resulterar i elevens förmåga att kunna agera på egen hand i en aktivitet som en individ tidigare bara kunde genomföra med andra använder Sfard (2008, s. 299) termen ”individualization”¹⁹. Andra forskare använder en annan termi-

¹⁷ Eng. tools, här i betydelsen ”resurser”.

¹⁸ ZPD står för Zone of Proximal Development

¹⁹ Eng. individualization

nologi för att beskriva denna typ av process. Säljö (2005, s. 230) använder i linje med Bakhtin²⁰ och Leontev termen *appropriering*, medan Vygotsky själv använder termen *internalisering*²¹ (Sfard, 2008, s. 79). Även Wertsch använder *appropriering* som en metafor för lärandet: "the process is one of taking something that belongs to others and making it one's own" (Wertsch, 1998, s. 53) för att beskriva den individuella process för hur andras ord integreras i den egna diskursen.

Lärande betraktas här som att individen i allt högre grad blir delaktig i en viss diskurs (t.ex. Lave & Wenger, 1991; Säljö 2000; Kieran et al., 2001; Sfard & Kieran, 2001; Sfard, 2008) och att en lärande elev i matematikklassrummet i allt större utsträckning deltar i de klassrumsaktiviteter och i den kommunikation som pågår om matematik, utan att behöva stöd av andra elever eller av läraren. Utifrån denna syn på lärande och utveckling, betonas betydelsen av att erbjuda elever att interagera med andra mer erfarna individer i undervisningen:

Med litet handledning eller assistens i omgivningen kan vi ofta lösa problem som vi skulle ha svårt att klara av på egen hand. Stödet kan bestå i att vi får hjälp att klara ut vad som frågas efter eller att någon bidrar med att stycka upp ett komplicerat problem i mindre och välbekanta delar. (Säljö, 2000, s. 120)

Vygotsky (1978) satte upp sin grundläggande triangulära relation mellan subjekt, objekt och mediator för att beskriva individers strävan att uppfylla ett mål med stöd av verktyg eller artefakter. Begrepp som *mediering* och *stödstrukturer*²² används här för att beskriva hur elevernas förutsättningar för lärande medieras genom andra människor, symboliska redskap och speciella aktiviteter i klassrummet (Kinard & Kozulin, 2012). Begreppet *mediering* används alltså här i betydelsen att eleverna använder olika medierande redskap som stöd för att kunna skapa mening och tolka det de ser och handla på ett visst sätt (Säljö, 2005, s. 27). De medierande redskapen är en länk för oss för att uppleva världen men också "tecken eller symboler som gör att vi inte bara reagerar på signaler, utan de innebär att vi kan tolka omvärlden, ta ställning till den och handla på olika sätt" (ibid., ss. 26-27).

Traditionellt har de medierande verktygen delats in i språkliga verktyg och fysiska verktyg (artefakter), vilket inte är helt oproblematiskt då dessa inte enkelt kan skiljas från varandra (ibid., ss. 33-34). Ett exempel från matematikklassrummet kan vara att när en elev använder en grafritande räknare är denna en fysisk artefakt, men själva användningen av denna förutsätter språkliga, symboliska och intellektuella aspekter. När eleverna ritar upp en värdetabell i sitt räknehäfte kan denna ses som en fysisk artefakt, men också som ett tankeredskap som eleven använder för att förstå en funktion. Språket, "redskapens redskap", är i detta perspektiv vår viktigaste resurs för vår förmåga att kategorisera omvärlden (ibid., s. 227). Den process där en individ i allt högre grad använder ett redskap och "gör det till sitt" i en viss aktivitet kan illustreras med hjälp av en spiral som beskriver "förvärvandet av förtrogenhet med kulturella

²⁰ Bakhtins ryska term "prisvoenie" översatt till engelskans "appropriation of"

²¹ Eng. internalization

²² Eng. scaffolding

redskap på individnivå” (ibid., s. 229) i stegen initial kontakt – systematisk prövning – appropriering – naturalisering. I matematikklassrummet kan elever inledningsvis vara beroende av andra deltagare för att använda ett medierande redskap som exempelvis ett koordinatsystem eller en grafritande räknare. Men allteftersom tiden går blir de allt mer förtroga med hur det fungerar och kan till sist använda det medierande redskapet alltmer självständigt. Med tiden kan eleven förhoppningsvis förklara hur ett redskap används för en nybörjare och slutligen blir redskapet transparent, ”självklat” för användaren. Ur pedagogisk synvinkel är denna sista fas intressant, då det kan vara svårt för en van användare att upptäcka dessa ”självkla” redskap och förstå vilka svårigheter en nybörjarelev kan ha med dessa (ibid., ss. 230-231). Elevernas försök till meningsskapande i matematik kan så betraktas som en ständig rörelse mellan tänkandet och deras förråd av olika externa symboliska redskap (Carlsen, 2008).

När lärandet betraktas som ett deltagande i olika praktikgemenskaper²³ befinner sig individen i dessa, och medieringen sker då där med hjälp av mer eller mindre specialiserade språkliga och fysiska redskap (Lave & Wenger, 1991; Wenger 1998). Med detta perspektiv förskjuts intresset mot att studera den medierande verksamhet som sker i klassrummet och elevernas interaktion i denna praktikgemenskap (Sfard & McClain, 2002, s. 155). Fokus för analysen inom sociokulturell forskning blir då förändringen i interaktion mellan individer, oavsett om man talar om lärande i termer av diskurs, aktivitet, kultur eller praktik (Kieran, Forman, & Sfard, 2001, s. 7). Med ett sociokulturellt perspektiv finns inte begreppen hos objekten eller härleds ur våra hjärnor, utan kan istället betraktas som ett uttryck för vissa kommunikativa mönster som utvecklats under en lång tid med hjälp av språket som medierande redskap (Säljö, 2005, s. 45; s. 208). Att lära kan ses som att en individ blir delaktig i hur mening skapas inom olika diskurser och praktiker (ibid., s. 45).

Det kognitiva ramverk som valts i denna avhandling för att studera den matematiska diskursen i klassrummet erbjuder möjligheten att studera utvecklingen av den matematiska diskursen i ljuset av den diskurs som handlar om deltagarnas sociala interaktion och individernas och emotionella och affektiva faktorer (Wood, 2008; Sfard, 2008, 2012). Här betraktas elevernas utveckling av den matematiska diskursen som den naturliga enheten för att studera förutsättningar för lärande.

3.3 Diskursbegreppet

I detta delkapitel redovisas några olika perspektiv på diskurs och därefter fokuseras på det dialogiska diskursbegrepp som är av intresse för denna studie. Begreppet ”diskurs” används med olika innebörder i skilda sammanhang, både i vetenskapliga och mer allmänna kontexter. Olika definitioner av diskursbegreppet ligger till grund för sättet att tänka på diskurs och inverkar både på teoretiska perspektiv och metodologiska ställningstaganden (Wood & Kroger, 2000, s. 3). Att använda diskursanalys är alltså en ”paketlösning” och det handlar inte bara om att använda diskursanalys som analys-

²³ Eng. legitimate peripheral participation

metod (Winter et al., 2000, s. 10). Det handlar också om filosofiska och ontologiska antaganden om hur man ser på språkets roll som social konstruktör, om teoretiska modeller, om metodologiska riktlinjer för hur man angriper sitt forskningsområde och även om val av analysmetoder (ibid., s. 10).

3.3.1 Språket ur ett strukturellt respektive funktionellt perspektiv

I följande avsnitt redogörs kortfattat för några olika variationer på perspektiv och tolkningar av diskursbegreppet. Därefter redovisas det diskursbegrepp som används i det kognitiva ramverk och i denna studie (Sfard, 2008). Sfard har i sitt teoretiska ramverk hämtat inspiration från Bakhtin, Wittgenstein och Vygotskys syn på lärandets uppkomst i det sociala samspelet. Den diskursiva psykologi, som den presenteras av Harré och Gillett (1994) och Sfards tidigare introducerade diskursiva forskning, "discursive approach" (Kieran, Forman, & Sfard, 2001) och "communication or communicational" (Sfard & Kieran, 2001; Sfard, 2008, 2012).

Definitionen av begreppet diskurs (eng. discourse) kan ses som tvådelad utifrån om den betraktas som en språklig enhet eller språket i användning med fokus på dess olika funktioner (Schiffrin, 1994, s. 20). Den första aspekten innebär att man har en formalistisk syn på språket och även om språket har kognitiva och sociala funktioner påverkar det inte dess inneboende egenskaper, utan språket ses som "meningar" i ett lingvistiskt system. Det andra funktionalistiska diskursperspektivet innebär att språket ses primärt som ett socialt fenomen, "ett språk i användning" (ibid., s. 22). Ordet "diskurs" kan då mer generellt beskrivas stå för att språket betraktas strukturerat på olika sätt inom olika områden inom människans sociala liv, som exempelvis en medicinsk eller pedagogisk diskurs. Begreppet diskurs kan då beskrivas som "*ett bestämt sätt att tala om och förstå världen (eller ett utsnitt av världen)*" (Winther Jørgensen & Phillips, 2008, s. 7, författarens kursivering).

Hallidays systemiska funktionella lingvistik²⁴ (Halliday, 1985/1994) skiljer sig i flera avseenden från traditionell grammatik. Den traditionella grammatiken utgår från enskilda satser och ordböjningar för att på så sätt uppnå språkriktighet, medan Hallidays språkteoretiska resonemang ser språket som ett meningskapande verktyg för att överföra budskap till mottagaren i olika kontexter (Hedeböe & Polias, 2008). Grammatiskt arbete går ut på att beskriva texter i konkreta kontexter och fokuserar således på språkbruket för att uttrycka mänskliga erfarenheter (ibid., s. 199). Hallidays språkteori betonar språkets sociala betydelse i de mellanmänskliga processerna, och kan därför betraktas som både en semiotisk och en sociologisk teori (Christie, 2002). Språket ses som ett system av valmöjligheter som under historiens gång utvecklats av människan för att skapa mening i tillvaron (ibid.). Vårt språk, eller valet av språk, påverkas av situationen, mottagaren och samtalsämnet. Språket är inblandat i det som händer utanför själva språket, i de sociala processer i vilka vi deltar, och dess expansiva förmåga kan göra det vagt och nästintill obestämt (Halliday & Matthiessen, 2004,

²⁴ Systemic Functional Linguistics, SFL

s. 23). Halliday (1985/1994) presenterar sin teori om hur språkets funktion utvecklats under generation efter generation till det komplexa system det idag har:

It is functional in the sense that it is designed to account for how the language is used. Every text - that is, everything that is said or written – unfolds in some context of use; furthermore it is the uses of language that, over tens of thousands of generations, have shaped the system. Language has evolved to satisfy human needs; and the way it is organized is functional with respect to these needs. It is not arbitrary. A functional grammar is essentially a ‘natural’ grammar, in the sense that everything in it can be explained, ultimately, by reference to how language is used. (Halliday, 1985/1994, s. xiii)

Hallidays teori betraktar språket som ett socialt fenomen i relation till olika kontexter och språkanvändningen anses ha stor betydelse för språkutvecklingen (Halliday, 1985/1994). Begreppet systemisk innebär att det är en teori om hur man skapar mening genom att göra olika språkval, i de flesta fall omedvetna, på de olika nivåerna i språkssystemet (Fig. 3.1). Språkanvändningen eller de val av språk vi gör, kommer att påverkas av frågor som styrs av samtalets kontext, vem man talar med, vilken situation man befinner sig i och om vad man talar. Teorin erbjuder möjlighet att analysera både muntlig och skriftlig kommunikation.

Figur 3.1 Metafunktioner i språket (Bearbetning efter figur från Halliday, 1979, s. 57)

Under själva talakten gör vi kontinuerligt val mellan tre ständigt närvarande metafunktioner i alla språk; den ideationella (innehållsmässiga), den interpersonella (interaktionella) samt den textuella (textorganiserande) funktionen i texten (Halliday, 1994; Halliday & Matthiessen, 2004). De tre metafunktionerna återfinns i alla naturliga språk och är kopplade till att bygga mening mellan satser och inte direkt inom satserna (Christie, 2002, s. 12; Halliday, 1985/1994).

Den textuella metafunktionen är kopplad till de olika medel vi använder för att forma och konstruera språket. Funktionen refererar till språkliga aspekter som hör ihop

med hur språket organiseras till ett budskap, till exempel relaterat till information, sammanhang och tema (Christie, 2002, s. 12). I denna studie undersöks diskursen om matematiska objekt och kopplas till hur deltagarna kommunicerar det matematiska språket med mer perifera deltagare i lärandesituationen.

Den interpersonella funktionen rör de sociala relationerna mellan deltagarna. Den uttrycker hur vi interagerar med varandra, hur sociala roller, värderingar och relationer skapas mellan talaktens medlemmar. Holmberg och Karlsson (2006) kallar detta utbyte för olika talarroller. Funktionen refererar således till de grammatiska resurser där vi förstår de olika deltagarnas förhållande till varandra, humör, stämningar och omdömen. I varje text, muntlig som skriftlig, intar vi sociala roller och skapar relationer med andra (Christie, 2002, s. 13).

Den ideationella metafunktionen tar hand om hur språket representerar verkligheten och de erfarenheter vi hämtar från denna, hur ämnesinnehållet uttrycks och aktualiseras med hjälp av språket. Den kan betraktas som underordnad de övriga två metafunktionerna (Holmberg & Karlsson, 2006, s. 18). Funktionen handlar de erfarenheter vi erhåller från den yttre verkligheten, men också de reflektioner och föreställningar som är skapade inom individen.

Hallidays språkliga metafunktioner har tidigare använts i ett flertal matematikdidaktiska studier (se t.ex. Björklund Boistrup, 2010; Nachlieli & Tabach, 2012). I denna studie kan två av Hallidays funktioner, den interpersonella och den ideationella (innehållsmässiga) funktionen, ses korrespondera direkt till de två forskningsfrågorna, medan den tredje textorienterade funktionen är ständigt närvarande som en stödfunktion för att bidra till språkets funktion som ett medierande redskap för att begripliggöra innehållet för deltagarna i diskursen.

3.3.2 Diskursens funktion i en given kontext - en social eller diskursiv praktik

Norman Fairclough, ett känt namn inom kritisk diskursanalys, har som övergripande syfte försökt foga samman lingvistiska och sociala analyser (Wood & Kroger, 2000, s. 206). Faircloughs huvudsakliga referens för textanalys är Hallidays ovan nämnda lingvistiska teori. Han beskriver hur diskursen bidrar till att skapa vår sociala värld (Winter Jørgensen & Phillips, 2000, s. 13) och ser språket som bundet till någon form av social praktik. Termen "discourse" förknippas då inte med en individuell handling, utan ses istället kopplad till en interaktion mellan individer i världen, och ett dialektiskt förhållande finns mellan den sociala världen och diskursen (Fairclough, 1992, s. 63). Fairclough ser förutom språkets funktion till den givna kontexten ytterligare två funktioner i diskursen; funktionen att konstruera individers sociala identitet och sociala relationer och kunskaps- och betydelsesystem (ibid., ss. 63-64). Diskurs definieras som språkbruk inom en social praktik, och kan vara det som sägs eller skrivs, men kan också beskrivas som ett sätt att tala (ibid.). Diskurserna bidrar till att skapa de sociala relationerna i grupperna, och påverka de enskilda gruppmedlemmarnas identitet. Fairclough beskriver tre olika aspekter som diskursen bidrar med: "ideational",

”identity” och ”relational function”. Den första nivån, den innehållsmässiga²⁵ funktionen beskriver hur information presenteras (Fairclough, ss. 64-65) och tar hand om frågor som exempelvis en lingvistisk analys av organisationen av det talade och skrivna språket samt konversationsanalys (Wood & Kroger, 2000, s. 206). Fairclough delar upp Hallidays interpersonella²⁶ funktion i två metafunktioner som benämns ”identity and relational function”.

Fairclough beskriver liksom Gee (2005) hur små diskurser tillsammans bygger upp de stora. Här urskiljs två olika diskurser (diskurser med litet d) som beskriver språket i användning, och stora Diskurser (med stort D) som då är ett vidare begrepp vilket omfattar hur vi använder språket, hur vi värderar eller agerar som medlemmar i ett socialt nätverk eller en grupp (Fairclough, 1992). Diskursen formar och låter sig formas av sociala strukturer på alla nivåer som samhällsklasser, normer och sociala relationer mellan individer. Dessa diskursiva praktiker formar och utmanar, upprätthåller och begränsar (ibid.). En diskursiv praktik kan till exempel vara sättet att uttrycka sig i skrift inom en fakultet på universitet eller inom lärarkollegiet på grundskolan. Det kan handla både om användningen av begrepp eller sättet att uttrycka sig i tal eller skrift. Dessa grupper bildar sedan större system för kunskaper och betydelser i världen.

3.3.3 Diskurspsykologin

Många forskare har tagit steget att inte längre skilja på en diskursiv och en social praktik utan att istället se alla praktiker som diskursiva (Winther Jørgensen & Phillips., 1999/2000). Det innebär att steget tagits från den traditionella synen att betrakta diskurs som tal *och* handling, till en syn på diskurs som tal *som* handling (Wood & Kroger, 2000, s. 4). Enligt Potter och Wetherell, forskare inom socialpsykologins diskursanalys (diskurspsykologin), definieras diskurs som text och språk i en social praktik och språket ses som ett socialt medium för den interaktion som sker mellan människorna i den sociala praktiken (Potter & Wetherell, 1987, s. 146). Språket betraktas här som en social praktik, som ett sätt ”att göra saker”, och inte bara som ett medel för kommunikation och beskrivningar (Wood & Kroger, 2000, s. 4). Här ses enligt Edward och Potter (1992) texter och språk som konstruktioner av världen, och inte som avbildningar av en yttre värld eller som produkter av underliggande mentala representationer (Winther Jørgensen & Phillips, 1999/2000). Den sociala diskurspsykologin ifrågasätter den kognitiva psykologin och inriktar sig på ”den sociala kognitionen uppfattad som den mentala bearbetningen av informationen om den sociala världen” (ibid., s. 98).

3.3.4 Subjektet skapas i diskursen

För samhällsvetare är Foucault ett namn som ofta förknippas med begreppet diskurs (Börjesson & Palmblad, 2007, s. 12). Han har bidragit till diskursanalysens uppfatt-

²⁵ Eng. ideational

²⁶ Eng. interpersonal

ning att subjektet skapas i själva diskursen, snarare än att jaget använder språket för att uttrycka sig själv. Jaget fungerar då likt ett medium mellan kulturen och språket (Winther Jørgensen & Phillips, 2000, s. 21). Foucault har också lyft fram begreppet 'diskursernas sanningseffekter'. Olika slags diskursiva formuleringar hjälper oss inte bara att se vad som sägs i ett sammanhang, utan också att förstå om det är tänkbart och möjligt att säga det (ibid., s. 34). Diskursen sammanför, begränsar eller utesluter. Det är med hjälp av vårt språk vi har möjlighet att skapa olika sociala relationer (Foucault, 1971/1993). Dessa ger upphov till institutioner där makten inbäddas i den sociala praktiken, vilken i sin tur är starkt sammankopplad med kunskap (Neuman, 2003, s. 35).

3.4 Från ett monologiskt till ett dialogiskt perspektiv

I denna studie har ett dialogiskt perspektiv valts där interaktionen mellan individer är central för förståelse och lärande och att eleverna bör erbjudas att lyssna till flera röster. Ur ett monologiskt diskursperspektiv spelar kontext, relationer och interaktioner en underordnad betydelse och det är den enskilde individen som ses som enheten för analysen (Linell, 2009). Individernas yttranden blir ur detta monologiska perspektiv endast beroende av den enskilde individen och dennes språkliga förutsättningar (Linell, 2009, s. 36; Sfard 2008, s. 66). Linell förtydligar:

So, if groups and societies are nothing but ensembles of individuals, the only authoritative meaning-makers are of course the individual subjects, supported by an objectified language and culture. Cognition takes place in individuals, who are autonomous sense making systems. (Linell, 2009, s. 44)

I början av 1960-talet lade den ryske språkteoretikern Bakhtin fram sina tankar om en ny vetenskap om "ordet" eller "diskursen" (Neuman, 2003). Bakhtin definierade diskursen som "språket i sin levande och konkreta helhet" (ibid., s. 19) och menade att vi behöver en vetenskap som han kallade de dialogiska relationerna mellan ord, texter och människor (ibid., ss. 18-20). Han betraktade allt språk, skriftligt som verbalt, som dialogiskt då det alltid är adresserat till någon (Zack & Graves, 2001, s. 231). Han använder begreppet dialog som att det genomsyrar alla yttranden, ett perspektiv som på senare tid benämns som dialogicitet (Igland & Dysthe, 2003). En viktig aspekt hos Bakhtin är motsättningen mellan dialogen och monologen, där han betonar dialogiska diskursers betydelse. Förståelse och meningsskapande är nyckelord för yttranden, och meningen i kommunikationen skapas och återskapas av deltagarna i den aktuella kontexten (ibid., ss. 100-101). Som mänskliga individer definierar vi oss ur detta perspektiv således i förhållande dels till andra, men också i förhållande till hur andra individer definierar oss. Den andre blir nödvändig för vår förståelse av oss själva och för hur vi får kunskap om världen.

Ur ett undervisningsperspektiv har Bakhtins tänkande betydelse för hur man betraktar vikten av interaktion för elevernas meningsskapande och lärande i klassrummet. Ett känt namn inom svensk pedagogik, Olga Dysthe, utgår från Bakhtins

tankar om dialogens betydelse för undervisningen, och menar att läraren oavsett ämne bör betrakta skrivandet och dialogen som viktiga redskap i undervisningen. I ett klassrum där eleverna är socialt integrerade, konstruerar eleverna sin egen förståelse genom att interagera med varandra, och individernas eget ställningstagande, "det inre övertygande ordet", får styra dialogen (Dysthe, 1997, ss. 61-73). Dysthe lyfter fram tre aspekter på dialogen som kan urskiljas hos Bakhtin: förståelse kopplad till aktivitet och socialt samspel, vilket hon ser som grundläggande för lärande; betydelsen och upplevelsen av den andre, något som ska tolkas som att eleverna bör erbjudas att få lyssna till många olika röster. Dysthe kallar detta för "flerstämmighet" och ser även denna flerstämmighet av stor vikt för lärandet, (se *ibid.*, ss. 61-71), och en bestämd syn på vad det vill säga att vara människa samt hur vi upplever oss själva genom andra (Dysthe, 2003, ss. 97-98). Igland och Dysthe (2003) belyser vidare hur Bakhtins uppfattning om vikten av ett jag och ett du spelar en avgörande roll genom hur man uppfattar både sig själv ("the I") och sedan sin relation till den andre ("the other"). Hur exempelvis eleverna i klassrummet definierar sig beror alltså både på hur de definierar sig själva, men också på hur de definierar sig i förhållande till andra. Detta är i linje med hur Sfard och Prusak (2005) definierar identitet (se vidare avsnitt 4.3.2).

3.4.1 Det dialogiska perspektivet, kontexten och språket

I det dialogiska perspektivet är interaktionen med andra individer central, liksom betydelsen av kontexten och innebörden av den semiotiska medieringens roll för ett gemensamt begripliggörande: "a dialogical theory is therefore about *interactive sense-making in context*" (Linell, 2009, s. 432, författarens kursivering). Ur det dialogiska perspektivet framhålls ett ömsesidigt beroende mellan diskursen och den rådande strukturen. Vårt tillträde till verkligheten går genom språket och det är via språket vi skapar representationer av denna. Dessa representationer speglar inte bara verkligheten, utan hjälper oss också att skapa och ge betydelse åt vår fysiska verklighet (Winther Jørgensen & Phillips, 2000, s. 15). I samma ögonblick som vi använder språket skapas sammanhang, och en verklighet har producerats. Denna "språkliga vändning" får konsekvensen att vi inte kan hävda att det finns en objektiv värld. Det innebär att

diskurser avgränsar och utesluter, men ger oss samtidigt raster med vars hjälp vi kan urskilja vad som är sant, relevant, rimligt och möjligt [...] språket 'gör' något med världen; det frammanar eller konstituerar vår verklighet (Börjesson & Palmblad, 2007, s. 10).

Detta innebär att en individ alltså inte kan ses som agent eller företrädare för en tanke om hon först inte har interagerat med andra individer (Linell, 2009 s. 44). Som individer måste vi förhålla oss till den sociala interaktion som är ett centralt fenomen för oss som mänskliga varelser, men vi måste också förhålla oss till att vi föds in i en social och fysisk verklighet som är föränderlig.

Med ett vidgat fokus på interaktionen till att omfatta inte bara det talade språket, utan hela den kommunikativa handlingen, kan interaktionen mellan individer betraktas

som en form av kommunikativt projekt (Linell, 2009, ss. 188-189). Tänkande och lärande ses ur ett dialogiskt perspektiv tydligare sammankopplade än ur ett monologiskt perspektiv (ibid., s. 41). Användningen av olika artefakter är tätt sammanflätad med tänkande och kognition för vårt meningsskapande i och av världen (Sfard, 2008; Wertsch, 1997).

Med ett dialogiskt perspektiv kan fyra antaganden ses som centrala för kommunikationen (Linell, 2009, ss. 39-40). För det första måste deltagarna förstå varandra tillräckligt väl för att fortsätta kommunicera med varandra, vilket innebär att de exempelvis ställer frågor, upprepar, följer upp eller förhandlar om mening. För det andra förnekas att ett yttrande alltid har en förutbestämd mening, då yttrandet kan förstås på skiftande sätt av olika samtalspartner, och även för att talare inte själva kan bestämma alla aspekter av hur deras yttranden tolkas. Det tredje antagandet innebär att man inte ser någon fix länk mellan ett uttryck och hur detta kodas. En talare kan använda ett uttryck kopplat till en kontext för att vägleda lyssnare, eller sig själv, mot en bestämd tolkning. Det fjärde antagandet innebär att kommunikation och språk och kognition är ömsesidigt beroende av varandra. Tankar som inte verbaliserats är inte desamma som när någon "teoretiserat" dem med hjälp av språket till en kommunikativ och kulturell konstruktion av världen (ibid., s. 40). Det innebär exempelvis att när eleverna arbetar i en mindre grupp är det mellan dessa individer i denna rådande kontext som elevernas interaktion förhandlas. Interaktionen ses således inte som ett utbyte av yttranden mellan individer, utan istället som en dialog mellan olika partner och kontexter (Linell, 1998).

Diskursbegreppet kan, som i denna studie, användas i en vidare mening. Detta innebär att alla kommunikativa aktiviteter i klassrummet innefattas, både verbala och icke verbala. Kommunikationen kan pågå, ej hörbar, inne i individen eller tillsammans med andra individer. Den kan vara samtidig, ansikte mot ansikte, eller vara en icke synkronisk kommunikation som när läroboksförfattaren talar till eleven med hjälp av ett läroboksexempel (Ben-Yehuda, Lavy, Linchevski & Sfard, 2005, s. 141).

Kapitel 4 Teoretisk utgångspunkt – det kommognitiva ramverket

I detta kapitel presenteras det teoretiska kommognitiva ramverket²⁷ av Anna Sfard (2008), där kognition och tänkande beskrivs som socialt situerade. Inledningsvis beskrivs i kapitlet lärande i matematik utifrån det valda teoretiska perspektivet, och hur ramverket används som vägledning för att förstå mer av elevernas förutsättningar för lärande när de arbetar tillsammans i smågrupper. Att förstå lärande är en grundläggande fråga och naturligt en nyckelfråga i skolans värld. Med den i studien valda sociokulturella forskningsansatsen sker lärande genom att individen i allt högre grad blir en fullvärdig deltagare i den diskurs som pågår (Sfard, 2008). Eleven matematik-klassrummet kan då i större utsträckning delta i kommunikationen om det matematiska objekt som är föremålet för lärandet. Diskursen ses här som den naturliga analys-enheten och den diskursiva forskningsansatsen innebär att lärande ses som en förändring i hur deltagarna kommunicerar med varandra. Lärande i matematik beskrivs som en förändring i elevernas kommunikation mot en matematisk diskurs som i allt högre grad liknar den diskurs som eftersträvas (Sfard, 2008; 2012, s. 2).

4.1 Tänkande, lärande och deltagande i en matematisk diskurs

Valet av det kommognitiva teoretiska ramverket²⁸ ger möjlighet att förstå mer av sambanden mellan elevernas lärande och identitet, kopplat till strategier för deltagande i kommunikationen om matematik i klassrummet. Denna teoretiska plattform erbjuder möjlighet att studera både kognitiva, affektiva, sociala och individuella aspekter av lärandet under samma ontologiska paraply (Sfard, 2012). Ur ett deltagarperspektiv ses lärandet kopplat till elevernas interaktion i den klassrumskontext där de befinner sig. Sfards ramverk har sin utgångspunkt i Vygotskys syn på att individens utveckling föregås av en kollektiv aktivitet (Vygotsky, 1978, 1987) och att språket är centralt för lärandet (Sfard, 2008, s. 79). Vidare tar teorin sitt fäste i den grundsats där lärandet ses som deltagande i en kollektiv praktik²⁹ (Lave & Wenger 1991; Wenger, 1998). Sfard (2012, s. 2) anger sig också vara inspirerad av Wittgensteins tankar och Harré och Gilletts diskursiva psykologi (Harre & Gillett, 1994). Den kommognitiva teorin beskrivs av Sfard (2012, s. 2) som tidigare introducerad som ”discursive” (Kieran, Forman, & Sfard, 2001) eller ”communicational” (Sfard & Kieran, 2001).

Ett deltagarperspektiv på lärandet möjliggör fokus på *hur* en ömsesidig förståelse växer fram mellan eleverna i klassrummet (Sfard, 2001, s. 24). Elevernas interaktion med andra individer i klassrummet ses, om inte avgöra, så i varje fall i hög grad

²⁷ The Commognitive Framework

²⁸ Eng. commognitive theory

²⁹ Eng. community of practice

påverka möjligheterna för lärande i matematik. Här betonas den sociala kollektiva aktivitetens betydelse, framför de biologiska förutsättningar eleverna har med sig till matematiklektionen (Sfard, 2008).

Den kommognitiva teorin utgår från att kommunikation och tänkande är två mycket närliggande fenomen, karakteristiska för all mänsklig aktivitet. Det nybildade ordet kommognition³⁰ vill just påminna om att kognition och kommunikation ses som två mycket närliggande processer. Tänkandet ses som den individualiserade formen av den mänskliga kommunikation som växer inuti människan:

According to the commognitive assumption, uniquely human form of thinking appears when a child becomes able to communicate with herself the way others communicate with her. The word commognition, a combination of cognition and communication, was coined to epitomize this claim, that is, to always remind us that human thinking develops, both historically and ontogenetically, through individualization of interpersonal communication. This communication does not have to be verbal or audible. Within commognitive perspective, therefore, cognitive processes and processes of inter-personal communicating are but different manifestations of basically the same phenomenon. (Ben-Zvi & Sfard, 2007, s. 119)

Om vi ser tänkandet som en kollektivt strukturerad aktivitet inom individen, kommunicerar hon med sig själv på samma sätt som andra kommunicerar med henne (Sfard 2008, s. 80; Sfard & Ben-Zvi, 2007, s. 125). Utifrån detta teoretiska antagande betraktas en elevs tänkande i matematik som den kommunikation som eleven självständigt³¹, utan stöd av andra, kan föra inom sig (Sfard, 2008). Matematiskt tänkande kan då ses som ett speciellt slags kommunikation, en matematisk diskurs. Människans förmåga att kommunicera med andra, innebär att hon kan delta i flera olika diskurser, men också uteslutas ur denna kommunikation:

Different types of communication set apart by their objects, the kinds of mediators used, and the rules followed by participants and thus defining different communities of communicating actors we call discourses (Sfard, 2008, s. 93)

Elevens lärande i matematik kan då beskrivas som en förändring i elevernas kommunikation mot en matematisk diskurs som i allt högre grad liknar den diskurs som eftersträvas (Sfard, 2008). Skillnader i lärandet kan betraktas som en skillnad i elevernas engagemang och deltagande i den matematiska diskursen tillsammans med andra elever eller lärare (Wood, 2008).

Liksom all typ av kommunikation, kännetecknas den matematiska diskursen av sina speciella särdrag. Denna kommunikation kan vara verbal eller icke verbal, synkronisk eller pågå oberoende av tiden (Sfard, 2012). Människans förmåga att kommunicera både med talat och skrivet språk, medger att exempelvis läroboken kan vara den "talande aktören" i klassrumskommunikationen. Människan har också utvecklat för-

³⁰ Den engelska nybildningen *commognition* är skapad av orden *communication* och *cognition* (Sfard, 2008).

³¹ Eng. *autonomous* (Sfard, 2008)

mågan att kommunicera på distans och om abstrakta fenomen med hjälp av alltmer avancerad teknik, vilket också har öppnat nya möjligheter inom matematikundervisningen såsom till exempel datoranvändning för visuella framställningar.

Mänsklig aktivitet kännetecknas av individens förmåga till individualisation³², som definieras som den process en individ måste genomgå för att kunna utföra en handling ensam som tidigare endast kunde utföras tillsammans med andra (Vygotsky, 1978, 1986). Individualisation resulterar i en individuell version av en kollektiv aktivitet som att exempelvis lösa ett matematiskt problem. Individualisation av de kollektiva aktiviteterna innebär en gradvis förskjutning från att vara en mindre aktiv gruppdeltagare i en kollektiv verksamhet till att bli en fullvärdig medlem, för att med tiden kunna utföra aktiviteten på egen hand (fig. 4.1)³³. En elev kan exempelvis finna sin egen väg för att lösa ett matematiskt problem. De kollektiva aktiviteterna fungerar som en förebild för hur den enskilde eleven agerar, men en individs agerande påverkar också hela kollektivet, varför dessa processer är reflexivt relaterade till varandra (Sfard, 2007, s. 571; 2008, s. 116).

4.2 Utvecklingen av en matematisk diskurs – två vägar för lärande

Ur ett kognitivt perspektiv betraktas lärande som en utveckling av den matematiska diskursen i riktning mot den historiskt etablerade diskursen. Med utveckling menas här en förändring av kommunikationen, hörbar för andra eller inom individen (Sfard, 2008). Denna utveckling ses då på två olika nivåer; ett lärande på en objektnivå där den befintliga diskursen utvidgas och de diskursiva objekten utvecklas ”från insidan” (Sfard, 2012, s. 3). Här är eleverna redan ganska bekanta med de matematiska objekten i diskursen och deras mål är att ytterligare bekanta sig med denna, och erhålla förklaringar med hjälp av redan kända metaregler (Sfard & Ben-Zvi, 2007, s. 126).

Ett lärande på metanivå³⁴ innebär att den diskurs som pågår handlar om den matematiska diskursen. Lärandet på denna nivå handlar om själva deltagandet och är berättelser om den matematiska diskursen, hur förklaringar görs och hur ord används (se översikt i fig. 4.4). Detta lärande sker däremot inte lika enkelt som lärandet på en objektnivå, då det nu handlar om att eleverna möter för dem okända objekt eller okända metaregler. Diskursen handlar om den process där nybörjare i diskursen stötts av mer erfarna deltagare, medan de efter hand blir alltmer rutinerade medlemmar (Sfard & Ben-Zvi, ss. 126-127). Förklaringar eller anvisningar hur eleven ska arbeta är ett exempel på narrativer på denna metanivå: ”När du ska beräkna $f(x) = x^2$ för $(x+h)$ måste du tänka på parentesen och använda kvadreringsregeln”. Med tiden kommer nybörjareleven i diskursen i allt högre grad ha ett minskat behov av stöttning och

³² Eng. individualization

³³ The processes of individualization and communalization (Sfard, 2007)

³⁴ Meta-level – noun: the level of discourse about discourse; adj.: concerning discourse about discourse

vägledning för att gradvis ta till sig den nya diskursen. Diskursen blir då till elevens egen och eleven lär på objektnivå (ibid., s. 127).

Lärandet på en metanivå handlar således hela tiden om reflektioner runt den rådande matematiska diskursen och denna kan expandera och förändras på två olika sätt, vertikalt eller horisontellt (Sfard 2012, s. 3). Den vertikala diskursen handlar om hur deltagarna försöker sammanföra och kombinera den existerande diskursen med sin egen metadiskurs, vilket bildligt kan beskrivas som att eleverna når till en högre nivå (ibid.). Den andra typen av förändring, den horisontella expansionen av diskursen på denna metanivå, handlar istället om hur individerna när de möter ett nytt begrepp, förväntas kombinera och sammanföra ett antal diskurser, som hittills har varit separerade från varandra, till en enda. Dessa införlivas i den nya diskursen som befolkas av nya typer av matematiska objekt. I denna studie möter eleverna diskursen om det matematiska objektet derivatan, och denna ska exempelvis fogas till diskursen om andragsgradsfunktionen och räta linjens funktion.

4.3 Lärande, matematiserande, subjektifiering och identitet

Som lärare vet vi att deltagande kan definieras på många sätt, inte minst i skolans värld. Att delta, kan för en elev innebära att "bara finnas där" likt en blomma i fönstret eller som den sporadiska gäst som dyker upp då och då i den pågående undervisningen. Det kan handla om att skriva av kompisens lösning eller facit, men också om att aktivt tillsammans med andra elever resonera om lösningen av ett matematiskt problem. I denna studie benämns den aktivitet då individerna deltar i den matematiska diskursen och talar om matematiska objekt eller processer på dessa, som att matematisera³⁵ (Sfard, 2008).

Elevernas kommunikation i klassrummet handlar också om deltagarna i den matematiska diskursen, om hur de värderar varandras sätt att tänka och lösa problem. Läraren ger också eleverna uppmuntrande kommentarer eller kanske bedömer den enskilda elevens prestationer. Denna aktivitet, som är tätt sammanflätad med elevernas matematiserande, kallas i denna studie för subjektifiering, och antas vara sammankopplad med individens lärande i matematik (Sfard & Heyd-Metzuyanim, 2011; Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012). Vi kan erinra oss mötet med Lisa och Kim i vinjetten till denna avhandling, då Lisa utbrister: "Jag kommer *aldrig* att klara den här matten, jag är så trög i huvudet". Det blottar förställningen om att hon identifierar sig som en elev som helt enkelt inte klarar av att lära sig matematik. På samma sätt skickar Kim en signal till gruppen när han säger: "Det är lugnt!" och samtidigt med hjälp av kroppsspråket utstrålar självsäkerhet i ämnet. Man kan anta att Kim uppfattar sig själv som "en elev som kan fixa matten", vilket han förmedlar inte bara till eleverna, utan också till läraren. En dialogisk forskningsmetod innebär att diskursen erbjuder många olika versioner, eftersom vi lyssnar till mänskliga berättare (Sfard, 2008, s. 67). För att förstå mer av hur förutsättningar skapas för att gynna den mate-

³⁵ Eng. mathematizing; denna innebörd av termen skiljer sig från t.ex. Freudenthal (1991).

matiska diskursen, och därmed förutsättningarna för ett lärande i matematik, studeras klassrumsaktiviteten och dialogen mellan de individer som deltar i undervisningen.

4.3.1 Matematiserande och subjektifiering - två sammanflätade processer

Det kognitiva ramverket erbjuder möjligheten att studera samband mellan elevernas sociala interaktion, emotionella processer, matematiska aktivitet och lärande i matematik (se t.ex. Sfard, 2012; Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2011; Sfard, 2008). Då lärande betraktas som en social aktivitet är det då inte bara elevernas matematiserande som formar och bestämmer förutsättningarna för lärande, utan även deras sociala roller i gruppen (Wood & Kalinec, 2012, s. 110).

Olika praktikgemenskaper³⁶, som till exempel klassrummet, är en plats där eleverna delger varandra kunskaper så att den på så sätt kan föras vidare till de som tidigare inte varit deltagande. Individer befinner sig i olika praktiker och medieringen sker i var och en av dessa med hjälp av mer eller mindre specialiserade språkliga och fysiska redskap (Lave & Wenger, 1991; Wenger 1998). Eleverna bidrar i olika hög grad i denna praktikgemenskap, till en början kanske som iakttagande deltagare i "ett legitimt perifert lärande"³⁷. Men allteftersom tiden går kan de från att endast ha deltagit som åhörare till andra elever som är mer bevandrade i den matematiska diskursen, i allt högre grad bidra till gruppens matematiserande genom att komma med egna förslag och argumentera för en lösning på ett matematiskt problem.

Hur eleverna ser på sig själva och andra gruppmedlemmar, ses också påverka individernas delaktighet i diskursen (Wood, 2008). Lärande i matematik är därför ett ständigt pågående växelspel mellan två inbördes relaterade aktiviteter, den aktivitet där individen kommunicerar om matematiska objekt och den kommunikation som handlar om andra deltagare i den matematiska diskursen (se fig. 4.1). Subjektifieringen³⁸ är den kommunikation som handlar om vad deltagarna gör eller har gjort (Wood & Kalinec, 2012). Denna är tätt sammanvävd med elevernas deltagande i den matematiska aktiviteten och är av intresse för att förstå mer av vad som påverkar elevernas lärande (Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012). Individernas matematiserande betraktas i studien i ljuset av dessa processer som ständigt pågår och kan avlyssnas i klassrumsdiskursen (ibid., s. 129). Här iaktas de fenomen som hos andra forskare beskrivs som affektiva, interpersonella och sociala faktorer (ibid.).

³⁶ Eng. community of practice

³⁷ Eng. legitimate peripheral participants

³⁸ Eng. subjectifying

Figur 4.1. Diskursen i matematikklassrummet; matematiserande och subjektifierande yttranden

För att illustrera hur dessa matematiserande och subjektifierande aktiviteter är tätt sammanflätade med varandra återges nedan en kort sekvens från denna studie när eleverna arbetar med härledning av deriveringsregler och har problem med kvadreringsreglerna (tabell 4.1). I den vänstra kolumnen är elevernas matematiserande markerat och i den högra den aktivitet som här benämns subjektifiering.

	Matematiserande	Subjektifiering
Freddy	$h \times h$ (pekar under symbolerna)	$h \times h$ (pekar under symbolerna)
Petra	är lika med h^2	är lika med h^2
Freddy	Jag är taskig på den här i huvudet så jag ställer upp dom så här i stället. Det går lika bra (<i>stryker under regeln</i>)	Jag är taskig på den här i huvudet så jag ställer upp dom så här i stället. Det går lika bra (<i>stryker under regeln</i>)
Petra	Det gick vi igenom nån gång förra året	Det gick vi igenom nån gång förra året
Freddy	Jaa. Det går lika bra så de/ jag kan inte det här i huvudet så att de / och jag räknar <u>ju fel</u> .	Jaa. Det går lika bra så de/ jag kan inte det här i huvudet så att de/ och jag räknar ju fel .
Moa	Och sen så ska du ha den där gånger två . Nu har du räknat ut det där men du har ju gånger två framför	Och sen så ska du ha den där gånger två. Nu har du räknat ut det där men du har ju gånger två framför
Petra	Du hänger inte riktigt mä? Vi skriver f av x är lika med 3 x upphöjt till två plus x plus 3 va? Plus 2.	Du hänger inte riktigt mä? Vi skriver f av x är lika med 3 x upphöjt till två plus x plus 3 va? Plus 2.

Tabell 4.1 Utdrag hämtat från en spontan gruppaktivitet när eleverna arbetar med derivatans definition (De olika aktiviteterna är markerade i fet stil i respektive spalt)

I det valda exemplet i tabell 4.1 urskiljs tydligt hur den subjektifierande aktiviteten är tydligt sammanvävd med elevernas matematiserande. Det behöver inte vara verbala uttalanden, utan det kan också vara en gest eller en annan signal som eleven förmedlar

med hjälp av kroppsspråket. Heyd-Metzuyanim och Sfard (2012) pekar på att tre olika nivåer kan urskiljas i dessa subjektifierande aktiviteter. När Moa säger: "Nu har du räknat ut det där men du har ju [...]" är det den första nivån av subjektifiering kopplad till en speciell händelse som beskrivs ha skett i förfluten tid. Den andra nivån av en subjektifierande aktivitet kan urskiljas då en individ direkt uttalar sig om en prestation som när Petra frågar: "*Du hänger inte riktigt må?*" eller Freddy förklarar sig: "*Jag räknar ju fel*". Den tredje nivån är ett direkt uttalande om en individs egenskaper som då Freddy förkunnar hur han ser på sin kapacitet i matematik: "*Jag är taskig på den här i huvet...*" och senare återupprepar "*jag kan inte det här i huvet*". Han upprepar flera gånger att det handlar om vad han är utrustad med "i huvudet".

4.3.2 Identitet och lärande som följeslagare

Den nivå som kan antas mest påverka lärandet är när deltagarna talar om elevernas egenskaper, dvs. "hur de är" istället för att tala om det de gör. Denna aktivitet benämns här som identifiering (Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012). Individernas identitet ses kopplad till deras deltagande i gruppen, oavsett om de betraktas som nybörjare eller de-som-vet-mer i gruppen. Varje individ motiveras att delta och lära sig de värden och den praktik som pågår i gruppen för att kunna behålla sin identitet som gruppmedlem (Lave & Wenger, 1991; Wenger, 1998). Elevernas matematiska aktivitet under en lektion kommer på så sätt att bekräfta eller förändra de identiteter de uppfattar sig ha, kopplat till det egna lärandet i matematik. Den bild eleverna har av sig själva som deltagare i matematikundervisningen kan då antas följa dem vidare till nästa lektion och på så sätt förstärka eller motverka deras aktivitet och lärande i matematik identitet, deltagande och lärande är tätt sammanflätade (fig. 4.2).

Figur 4.2 Lärande i matematik - ett samspel mellan matematiserande och identifiering
Figuren baserad på Heyd-Metzuyanim och Sfard (2012).

Elevernas identitet i matematik betraktas inte som ett fast tillstånd, utan i studien används Sfard och Prusaks definition:

In concert with the vision of identifying as a discursive activity, we suggest that identities may be defined as collections of stories about persons or, more specifically, as those narratives about individuals that are reifying, endorsable, and significant. The reifying quality comes with the use of verbs such as be, have or can rather than do, and with the adverbs always, never, usually, and so forth, that stress repetitiveness of actions. A story about a person counts as endorsable if the identity-builder, when asked, would say that it faithfully reflects the state of affairs in the world. A narrative is regarded as affect the storyteller's feelings about the identified person. The most significant stories are often those that imply one's memberships in, or exclusions from, various communities. (Sfard & Prusak, 2005, ss. 16-17)

Här definieras identitet som de berättelser (narrativer) som berättas i den rådande diskursen. Dels kan handla om yttranden som eleven gör om sig själv eller sina handlingar, men det kan också vara berättelser som läraren eller andra elever i klassrumsdiskursen förmedlar om eleven (Sfard & Prusak, 2005).

Begreppet reifikation³⁹ används här i betydelsen att en talare förtingligar en individs handlande och tilldelar henne denna egenskap (Sfard, 2008). Det kan till exempel vara att en elev räknar fel på en uppgift och då utbrister: "jag *är* korkad i matte". Denna högsta nivå av identifiering kan göras i första person då individens uttalande handlar om honom/henne själv, men sker också i andra och tredje person: "Du (han) har ju ingen koll!". Yttranden av denna typ beskrivs här som direkta, och känns ofta igen på att olika böjningsformer av verben ha eller bli används som beskrivning av en individ (Heyd- Metzuyanin & Sfard, 2012, s. 131). Om uttalandena beskriver handlingar är istället ofta ord som aldrig eller alltid vanligt förekommande i yttranden som exempelvis: "Jag kan aldrig klara av att lösa ekvationer" eller "Han har alltid svårt för att lösa uppgifterna". Dessa identifierande uttalanden kan yttras direkt men kan också skönjas indirekt i mer förtäckta ordalag i klassrumsdiskursen. En elev kan till exempel återkommande upprepa "Jag fattar inte" när hon arbetar med matematik eller ange sin egen roll i gruppen genom att indirekt positionera sig genom att säga: "Hur kan ni få det där konstiga svaret?".

³⁹ Eng. reification

Figur 4.3 Identifierande berättelser i diskursen – reifikation. Figuren är bearbetad och översatt från Heyd-Metzuyanim och Sfard (2012, s. 131).

I klassrummet pågår inte bara verbala processer som kan betraktas bidra till hur eleverna identifierar sig i matematikundervisningen. Man kan då och då se hur en elev skiner upp av lycka för varje avklarad uppgift, eller hur en annan elev hänger med huvudet. Förutom kroppsspråket förekommer det att en och annan tung suck markerar uppgivenhet eller att en bok slås igen med en smäll. I en analys som bygger på den kommognitiva teorin beaktas både hörbar och synlig kommunikation (Sfard, 2008, s. 276).

4.4 Den matematiska diskursens speciella särdrag

Sfard betonar matematikämnets särställning som ett autopoietiskt system, vilket innebär att de abstrakta matematiska begreppen oftast växer fram i diskursen. Den matematiska diskursen sätter en exceptionell tilltro till symboliska artefakter som mediatorer för den matematiska kommunikationen (Sfard, 2012, s. 276). Liksom alla andra diskurser kännetecknas den matematiska diskursen av sina traditionella ord, narrativer och särskilda rutiner (Sfard, 2012, s. 2). Med hjälp av olika mediatorer konkretiseras de abstrakta begreppen. Det kan ske med hjälp av talat eller skrivet naturligt språk, men också med hjälp av matematiskt symbolspråk och olika visuella framställningar (Nachlieli & Tabach, 2012, s. 10; se fig. 4.4). Det är därför inte orimligt att anta att eleverna i högre grad än i många andra ämnen behöver stöd från

mer förtrogna deltagare, som kan beskriva dessa diskursiva konstruktioner som bara finns om vi talar om dem.

Orden i den matematiska klassrumsdiskursen förknippas ofta med matematiska objekt som exempelvis kub, diagram, formel, uttryck och medelvärde. Ord som beskriver former (ex. rund, oval) och kvantiteter som exempelvis flera och färre är också vanligt förekommande. Eleverna möter begrepp och uttryck de kanske aldrig tidigare har använt och som är unika för den matematiska diskursen (Sfard, 2007). Exempel på sådana ord i denna studie är tangent, gränsvärde och derivata. Ibland har orden i denna matematiska diskurs en ny innebörd jämfört med de ord eleverna tidigare har mött i en vardaglig diskurs, ord som exempelvis negativ, båge och funktion. De matematiska objektens abstrakta natur medför att ordanvändningen blir extra viktig då orden kan skapa hinder för den matematiska kommunikationen (Ben-Yehuda et al., 2005). I denna studie möter eleverna ord⁴⁰ som derivata, funktionsvärde och riktningskoefficient.

Medieringens roll, det vill säga användningen av olika externa redskap för att förstå och uppfatta världen omkring sig (Säljö, 2005), är central i den matematiska diskursen. Då deltagarna i matematikklassrummet ska kommunicera med varandra om ett matematiskt objekt är de olika visuella mediatorerna⁴¹ ett nödvändigt stöd för att diskursen ska utvecklas. Mediatorerna kan vara siffror, matematiskt symbolspråk eller kanske grafer (Sfard, 2008), olika fysiska och språkliga redskap som bidrar till att vi kan föra vidare kunskaper och färdigheter inom vår kultur (Riesbeck, 2008). De fysiska artefakternas användning kan vi iaktta när en elev på lågstadiet använder fingrar eller konkreta föremål för att summera. På högstadiet använder sig kanske läraren av en graf för att illustrera en funktion eller tar fram en räknare för att visualisera den nedtecknade räkneoperationen i displayen när han förklarar. Fenomenet att ta stöd av andra språkliga resurser visar sig också när en individ inte kan "hålla en tanke i huvudet" när hon ska räkna eller komma ihåg ett telefonnummer. Hon byter mediator från verbalt språk till ett visuellt symbolspråk då hon skriver ner siffrorna på ett papper. Dessa mediatorer existerar oftast inte i matematiken, utan är artefakter skapade just för själva kommunikationen (Sfard, 2007, s. 571).

För att tala om derivatan använder deltagarna olika mediatorer, vilket innebär att också olika representationer av det matematiska symbolspråket synliggörs (se fig. 4.4). Deltagarna i diskursen använder exempelvis det nedskrivna talspråket med symboler (bokstäver), och det formella matematiska symbolspråket som exempelvis $f'(x)$ eller $\frac{dy}{dx}$. För att visualisera funktionen och dess derivata väljer kanske läraren att kommunicera genom att rita upp ett koordinatsystem och skissa funktionens graf och dess derivata för ett givet funktionsvärde. Läraren använder sig då av ikoniska symboler (bilder) för att begreppsliggöra och förmedla till eleverna. Som ikoniska symboler räknar vi förutom grafer även exempelvis diagram, skisser och tabeller (Sfard, 2008, s. 148). Det är med hjälp av dessa mediatorer deltagarna bygger upp sin kommunikation

⁴⁰ Eng. keywords

⁴¹ Eng. visual mediators (Sfard, 2008)

för att identifiera de olika objekten i den matematiska diskursen (Sfard & Lavie, 2005). Vygotsky (1978) skriver om fysiska artefakter som resurser skapade av människan för att handla och lösa problem.

Figur 4.4 Mediatorer i den matematiska diskursen. Bearbetning av Sfard (2008, s. 155)

Narrativer (berättelser) är all språklig kommunikation, skriven som talad, vars syfte är att beskriva de matematiska objekten, och relationer eller processer mellan dessa. Dessa narrativer är oftast bekräftade⁴² av deltagarna i "det matematiska kollektivet". Rutiner och narrativer som förekommer i den matematiska diskursen godkänns av deltagarna. Det kan exempelvis vara bevis, teorem eller beräkningsregler och rutiner för hur dessa ska utföras (Sfard, 2008, 2012). Sfard definierar narrativer:

Any sequence of utterances framed as a description of objects, of relations between objects, or of processes with or by objects, that is subject to *endorsement* or rejection with the help of discourse-specific substantiation procedures. (Sfard, 2008, s. 134, originalet kursiverat)

I den matematiska kommunikationen finns beteckningar för de betydelsebärande objekteten⁴³, "de objekt vi talar om" som är föremål för kommunikationen. Det kan till exempel vara andragsgradsfunktionen beskriven med matematiskt formelspråk $f(x) = x^2$, framställd i grafisk form eller kanske realiserad med hjälp av en värdetabell. Sfard får definiera det betydelsebärande objektet:

A signifier is a primary object used in communication, that is, one for which there exist realization procedures (Sfard, 2008, s. 302)

Ett matematiskt objekt definieras som beteckningen för det ett betydelsebärande objektet⁴⁴ tillsammans med någon eller några av sina realisationer. Alla de olika realisationer som skapas för att beskriva dessa matematiska objekt, kan metaforiskt beskrivas bilda ett rikt förgrenat träd där realisationerna växer ut som trädets grenar.

⁴² Eng. endorsed narratives

⁴³ I det kognitiva ramverket benämns detta *signifier*

⁴⁴ Eng. signifier

Varje realisation har sina egna betydelsebärande objekt, som i sin tur kan realiseras. På så sätt bildas vad Sfard (2008, s. 165) kallar ett realisationsträd⁴⁵ (se fig. 4.5). Ett matematiskt objekt och dess realisationsträd definieras:

[...] a mathematical object can be defined as a mathematical signifier together with its realization tree, where the realization tree is a hierarchically organized set of all the realizations of the given signifier, together with the realizations of these realizations, as well as the realizations of these latter realizations, and so forth (Sfard, 2012, s. 5)

Det kan exempelvis vara funktionens derivata presenterad med hjälp av olika realisationer med ett matematiskt symbolspråk som $f'(x) = 2x$, en graf eller en värdetabell. Den matematiska diskursen kännetecknas av dess riklighet på olika realisationer för att kunna kommunicera om dessa oftast abstrakta objekt (se fig. 4.5). För att en beteckning (signifier) ska räknas som en realisation av en annan finns det en sluten mängd påståenden där de bägge betydelsebärarna kan vara utbytbara (Sfard, 2012, s. 4). En beteckning kan vara andragsgradsfunktionen angiven med ett algebraiskt formelspråk exempelvis $f(x) = x^2 + 1$, visualiserad med hjälp av en graf i ett koordinatsystem eller genom funktionsvärden angivna i en värdetabell. Ett speciellt särdrag i denna diskurs är att eleverna ofta inte bara måste hantera var och en av dessa representationer, utan också förstå hur de förhåller sig till varandra (Sfard, 2008, 2012).

Figur 4.5 Del av ett realisationsträd för det betydelsebärande objektet (signifier) för $f(x)=2x+1$ (Detta är en del av ett realisationsträd, då varje realisation i sin tur är betydelsebärande objekt för andra realisationer; fritt efter Sfard, 2008, s. 165)

⁴⁵ Eng. realization tree

När ett nytt matematiskt objekt ska presenteras för eleverna ska de medvetandegöras om bruket av metaforer och beskrivningar för att förklara det matematiska objektet. Metaforen används för att ett ord ska införlivas, ”transplanteras” från en diskurs till en annan, och metaforer kan därför betraktas som ett slags transfer för lärandet (Sfard, 2008). Den har rollen att likt en katalysator hjälpa individen att möta en ny diskurs genom att med metaforens hjälp ta stöd av en familjär diskurs för att genomföra de erforderliga diskursiva förändringarna (ibid., ss. 40-41). Nachlieli och Tabach framhåller att oavsett om läraren väljer att presentera ett objekt genom att ge olika exempel kommer detta att ske med hjälp av olika realisationer, som exempelvis grafer eller ett annat symbolspråk. Förståelse, menar forskarna, har förutsättningar att växa fram genom att definiera det abstrakta objektet:

[...] if not coupled with defining, is unlikely to work. It is through defining the learner may begin to understand that no mathematical object exist “in between” symbols rather than in any one of them. (Nachlieli & Tabach, 2012, s. 11)

Rutiner⁴⁶ är karateristiska mönster i diskursen. De kan vara den matematiska diskursens sätt att kategorisera, att knyta till verkligheten, att studera likheter och skillnader och utföra beräkningar. Det kan också handla om användningen av ord och mediatorer samt stödjande berättelser för att exempelvis beskriva en funktion och dess derivata. Rutiner kan på så sätt beskrivas omfatta de övriga tre kategorierna (Sfard, 2007).

4.5 Den kognitiva konflikten och lärande

Den kognitiva konflikten är definierad som ett fenomen som framträder när liknande berättelser som kommer från olika diskurser möts och skiljer sig exempelvis i form av ordval (Sfard, 2007). Enligt Sfards teori ses den kognitiva konflikten som en källa för att förändra sin matematiska diskurs och därmed en källa för lärande. Denna diskursförändring innebär således för eleverna att det som tidigare har varit vanligt ersätts med något som de till att börja med måste uppleva som nytt och främmande. Den kognitiva konflikten är optimal för en pedagogisk framflyttning, vilken kan uppfattas när eleverna visar på en begreppsförvirring (Sfard, 2008).

Metanivån kan skönjas när den existerande diskursen expanderar för det nya objektet derivata, när eleverna konfronteras med nya ord och nya rutiner för att beräkna riktningskoefficienten för ett givet x -värde med hjälp av derivatan. På denna nivå används metareglerna på olika sätt av individerna i diskursen, förklaringarna varierar och diskursen kan förefalla motsägande och oförenlig. Här kan eleverna i klassrummet använda samma ord på olika sätt och för skilda betydelser, och eleverna är inte ännu bekanta med objekten och metareglerna (Sfard & Ben-Zvi, 2007, s. 126). Att förvärva matematiken som ämne är inte oproblemiskt på denna metanivå, eftersom matematiska objekt i sig själva, enligt detta teoretiska perspektiv, är abstrakta begrepp konstruerade i diskursen (Sfard, 2008).

⁴⁶ Eng. routines

Kapitel 5 Metodologi och metoder

I detta kapitel redogörs för val av metodologi och hur de teoretiska antagandena och forskningsfrågorna varit vägledande för studiens design. Vidare redogörs för studiens datainsamlingsmetoder samt urvalet av deltagare. Här redovisas också valet av analysredskap och hur dessa har använts i analysen. I de inledande avsnitten 5.1 och 5.2 presenteras en överblick över studiens design och motiveringen till att använda fallstudien som forskningsmetod. I kapitel 5.3 motiveras valet av derivata som studieobjekt och därefter redogörs i kapitel 5.4 för tekniska hjälpmedel vid datainsamlingen. Avsnitten 5.5 och 5.6 är avsatta för redogörelsen av datainsamlingsprocedurer och urvalet av deltagare i studien. I avsnitt 5.7 och 5.8 redogörs för förlorad data och min roll som forskare i gruppen. I 5.9 redovisas metoder vid den förberedande analysen av det empiriska materialet och val av metoder vid analysen av det empiriska materialet efter klassrumsstudiens genomförande. Det gäller datareduktionen, transkriberingen av det insamlade datamaterialet och val av metodologi för att kategorisera den del av diskursen som är av intresse för studiens syfte. I kapitlets sista avsnitt 5.10 redovisas utförligt de metoder som använts vid diskursanalysen av det transkriberade materialet.

5.1 Valet av en fallstudie och diskursanalys

Fokus är riktat mot att studera elevernas interaktion, hinder och möjligheter att delta i den matematiska kommunikationen. Studien överensstämmer med den forskning Lincoln och Guba (1985) benämner "naturalistic inquiry approach" och får betraktas inspirerad av den etnografiska forskningstraditionen (Bryman, 2002, s. 277). Då jag under en längre tid deltar i den pågående undervisningen i matematik får min roll enligt Golds klassifikationsschema betraktas som "en deltagare som observatör" i klassrumslivet (ibid., s. 286). Syftet med att observera deltagarna under en längre tid och ta del av den pågående matematikundervisningen var dels en strävan att få en ökad insikt och förståelse inför den förestående analysen, men dels också att eleverna skulle få möjlighet att vänja sig vid min närvaro för att påverkas i så liten grad som möjligt vid genomförandet av datainsamlingen.

För att ur ett mikroperspektiv studera elevernas interaktion och kommunikation under smågruppsarbete, är deltagarnas diskurs en naturlig analysenhet. En fallstudie är ett lämpligt val när man som i denna studie vill få en fördjupad förståelse av ett fenomen i dess naturliga kontext där flera faktorer samverkar och är av intresse (Yin, 2009, s. 18). Vidare är fallstudien lämplig som metod då datainsamlingen och analysen i denna studie vägleds av en tidigare utvecklad teori (ibid., s. 18). Valet att använda den kognitiva teorin innebär att både verbal och icke verbal kommunikation beaktas vid datainsamling och efterföljande analys (Sfard & Ben-Zvi, 2007, s. 125). Olika former av kroppsspråk dokumenteras och analyseras. En multimodal forskningsansats (Selander & Kress, 2010) har eftersträvat både vid datainsamlingen och i den

efterföljande analysen. En strävan har varit att så långt som möjligt dokumentera deltagarnas kommunikation såsom den kunde uppfattas av gruppmedlemmarna, och att fånga in den verbala och icke verbala kommunikationen synkroniserad med den skriftliga produktion som pågår i gruppen.

Då diskursanalys är både arbets- och tidskrävande är urvalet av deltagare och valet av vilken klassrumsdiskurs som ska dokumenteras viktiga beslut som har fattats utifrån studiens frågeställningar (Wood & Kroger, 2000, s. 80). För att kunna genomföra planeringen av datainsamlingen är det angeläget att i förväg föreställa sig i vilka situationer aktiviteter kopplade till studiens frågeställningar kan förväntas dyka upp (ibid., s. 65). Under några lektioner, innan elevgruppen påbörjat arbetsområdet derivata, utnyttjades därför tid både till att vänja eleverna vid min närvaro som forskare genom att genomföra provinspelningar, observera undervisningen och att förbereda mig för den kommande datainsamlingen.

Vid naturliga klassrumsstudier med video- och ljudupptagning som metod vid insamlingen av data, har jag som forskare vare sig kontroll över den diskurs som kommit att spelas in eller de undervisningsmiljöer som har skapats. Det är därför viktigt att ha beredskap för att datainsamlingen ibland kan kompliceras både etiskt och tekniskt (ibid., s. 69). Valet att följa naturliga inspelningssituationer innebar också mycket riktigt att de inspelade lektionerna kom att innehålla inslag av överraskningar och improvisationer.

5.2 Studiens design

Ett antal faktorer och önskemål har varit vägledande för utformningen av studiens design. För att möjliggöra att observera elevernas kommunikation när lärandet sker på en metanivå (Sfard, 2008) var ett önskemål att empirisk data skulle insamlas när eleverna nyligen introducerats inför ett nytt matematiskt begrepp. Valet föll på begreppet derivata vilket motiveras i avsnitt 5.3. Datainsamlingen genomfördes vid ett tillfälle när läraren valde att låta eleverna arbeta tillsammans i smågrupper för att lösa ett matematiskt problem kopplat till derivatabegreppet. För att underlätta analysen av elevernas arbete i smågrupper bedömdes det av värde att få möjlighet att dokumentera den matematiska kommunikation som föregått den lektion då inspelningen av elevernas arbete i smågrupper skulle komma att genomföras. Klassrumsstudien kan översiktligt beskrivas indelad i två delar⁴⁷:

- En inledande del där jag deltog som observatör av elevernas och lärarens klassrumsarbete under sammanlagt sex lektioner. Den lärarledda kommunikationen i helklass inspelades.

⁴⁷ En efterföljande intervju på individnivå med tio av de elever som tidigare deltagit och dokumenterats under smågruppens arbete genomfördes också. Eleverna fick då genomföra uppgiften på egen hand i nära anslutning till den observerade smågruppsgruppsaktiviteten. Analysen av dessa data har av utrymmesskäl inte tagits med i denna avhandling.

- Datainsamling av elevernas arbete under en smågruppsaktivitet med en problemuppgift kopplad till derivatabegreppet. Datainsamlingen genomfördes i fyra elevgrupper under två på varandra följande lektioner.

En strävan var att i minsta möjliga mån påverka det naturliga klassrumsarbetet. Detta innebar att studiens datainsamling kom att pågå tills läraren valde att låta eleverna arbeta i smågrupper tillsammans. Lärarens uppläggning av kursen innebar att kursmoment som inte var kopplade till derivatabegreppet vävdes in under vissa lektioner, vilket innebar att observationerna kom att sträckas ut över tid. Under de nio veckor som föregick den lektion där elevernas arbete i smågrupper spelades in, deltog jag i klassrumslivet varje lektion när läraren i förväg meddelade att lektionen på något sätt berörde elevernas utveckling av det för dem nya matematiska begreppet derivata. Detta i syfte att få en någorlunda sammantagen bild av matematikundervisningens innehåll och kunna dokumentera den matematiska diskurs som föregick gruppaktiviteten till stöd för analysen av elevernas arbete i smågrupper. Elevobservationerna har visserligen pågått utsträckta över tid, men då den kommande innehållsanalysen inte inbegriper jämförande innehållsanalyser under en längre tidsperiod kan den inte betraktas som en longitudinell studie (Bryman, 2002). Under de lektioner klassen följdes kunde fyra olika klassrumsaktiviteter urskiljas (fig. 5.1):

Figur 5.1 Olika aktiviteter under de observerade lektionerna

(Inspelade tillfällen är skuggade)

För att undvika att fokusera på jämförelser och behålla ett mer öppet angreppssätt analyserades inledningsvis en elevgrupp i samtliga steg (Bryman, 2002, ss. 71-72). Därefter jämfördes resultaten från denna analys med de övriga inspelade grupperna i avseende på likheter och skillnader i utvecklingen av elevernas matematiska diskurs. Även om det bara handlar om två olika fall, innebär det att man har större möjlighet att dra analytiska slutsatser än när man utgår från ett enda fall, då man då har lagt "alla äggen i en korg" (Yin, 2007, s. 76; 2009, s. 61). En flerfallstudie medger möjligheten att genomföra en komparativ analys av elevernas hinder och utveckling mot den önskade diskursen om derivatan.

5.3 Valet av derivata som studieobjekt

I valet av att följa när det matematiska objektet derivata introduceras i klassrumsstudien har flera faktorer inverkat. Derivata introduceras som matematiskt begrepp i kursen matematik C⁴⁸ och kan därför antas vara ett nytt begrepp för den observerade elevgruppen. Derivatabegreppet är även centralt för mer avancerade studier i matematik och är ett abstrakt begrepp som kan vara en utmaning för många elever. Detta medför att ”arbetsområdet derivatan” erbjuder möjligheten att studera den metadiskurs, då eleverna ännu inte är förtrogna med begreppet och lärandet sker på en metanivå (Sfard, 2012). Då begreppet derivata och dess tillämpningar är ett centralt innehåll i kursen, medger det möjligheten att genomföra datainsamlingen under en längre tid. Eleverna kunde därigenom vänja sig vid min närvaro och det medgav också möjligheten studera begreppsutvecklingen av ett matematiskt objekt utsträckt över tid.

”Arbetsområdet derivatan” innebär ett möte med ett komplext begrepp med ett omfattande realisationsträd som förutsätter att eleverna är väl förtrogna med det tidigare introducerade funktionsbegreppet. Eleverna möter funktioner i olika skepnader som olika polynomfunktioner och exponentialfunktionen. En mängd för dem nya matematiska ord och begrepp introduceras, som exempelvis gränsvärde, tangent, sekant och ändringskvot, lokala maximi- och minimipunkter samt största och minsta värde. Nya matematiska symboler införs som $f''(x)$, $f'(x)$, y' och eleverna förutsätts kunna hantera algebraiska uttryck. Arbetsområdet innehåller definitioner och rutiner som exempelvis förenklingar, ekvationslösningar och användning av räkneregler. Här förväntas också att eleverna ska hantera och tolka olika mediatorer för att representera det abstrakta matematiska begreppet derivata, som exempelvis grafer, tabeller och formler. Eleverna ska arbeta med problem kopplade till derivatan både presenterade med algebraiska uttryck och i grafisk form. De måste vidare också skilja på ett funktionsvärde och derivatan i en punkt, till exempel $f(3) = 2$ och $f'(3) = 6$. Derivatans värde ska enligt kursmålen bestämmas både algebraiskt och grafiskt för både polynom-, exponential- och potensfunktioner. Vidare förväntas eleverna härleda och använda deriveringsregler, förstå samband mellan funktionens graf och dess första- och andraderivata samt genomföra teckenstudier. Inom detta arbetsområde måste eleverna också hantera logaritmer och stifta bekantskap med talet e vid problemlösning där exponentialfunktionens derivata används (Skolverket, 2011c).

För att sammanfatta innebär elevernas möte med det nya objektet derivata ett lärande på metanivå, då eleverna introduceras inför ett nytt matematiskt begrepp (Sfard, 2008). Eleverna måste knyta det nya objektet till den tidigare (förhoppningsvis) erövrade diskursen om funktioner. Diskursen om funktioner har ur ett historiskt perspektiv vuxit fram ur geometriska respektive algebraiska symboler (Nachlieli, & Tabach, 2012). Det nya objektet derivata ska nu kopplas till diskursen om funktioner och dess komplexa realisationsträd där både algebraiska och geometriska register ska

⁴⁸ I läroplanen gy 11 i kurs 3

hanteras. Det är också rimligt att anta att elevernas realisationsträd för funktioner ser olika ut då dessa är individuella konstruktioner (ibid.).

5.4 Tekniska hjälpmedel vid datainsamlingen

Ett multimodalt perspektiv (Selander & Kress, 2010) har använts i studien och deltagarnas tal, skrift och gester eftersträvades att dokumenteras så noggrant som möjligt. Användning av modern teknologi ger möjlighet att ”frysa ner” och bevara den kommunikation som pågår i klassrummet och sedan kunna genomlyssna denna om och om igen från olika perspektiv. Genom att utnyttja flera olika tekniska hjälpmedel och synkronisera dessa, har det möjliggjort att sekvenser med ”svårfångad” kommunikation kunnat uppfattas.

Datainsamlingen har genomförts med audio- och videoupptagningar samt audiovisuella pennor, så kallade ”smart pens”, för samtidig upptagning av verbal och skriftlig kommunikation i grupperna. Ljudupptagningen har även kompletterats med bordsmikrofoner när eleverna arbetade tillsammans i smågrupper.

Videoinspelningen genomfördes med två kameror riktade mot elevgruppen, varav en av dem delvis användes som handkamera vid behov att ”krypa närmare” eleverna. De audiovisuella pennorna med tillhörande skrivhäften medger möjligheten att med hjälp av dator synkronisera upptagningen av elevernas kommunikation med den i samma ögonblick pågående skriftliga kommunikationen⁴⁹. Då eleverna skriver i blocken fungerar den audiovisuella pennan som en vanlig kulspetspenna, men spelar samtidigt in den verbala kommunikationen i det ögonblick eleverna skriver med pennan. När inspelningen från de audiovisuella pennorna sedan överförs till datafiler kan elevernas kommunikation följas genom att markera det eleverna skriver just vid det tillfälle när gruppens kommunikation önskas avlyssnas (se fig. 5.2).

⁴⁹ Se <http://www.livescribe.com/en-us/smartpen/> för information och demonstration av den audiovisuella pennan.

Figur 5.2 Elevdokumentationen med audiovisuell penna i elevskrivhäfte överförd till en datafil.

Förutom inspelningen med hjälp av de audiovisuella pennorna och videokameror användes stationär ljudinspelning med mikrofoner utplacerade på elevgruppernas bord. Dessa mikrofoner medgav 360 graders ljudupptagning och fungerade som ett komplement vid de tillfällen ljudkvaliteten var dålig under någon inspelad sekvens. Observationerna har kompletterats med fältanteckningar som stöd för transkriberingsarbetet. Denna multimodala forskningsansats medger en noggrann insamling av deltagarnas verbala och ickeverbala kommunikation i grupperna.

5.5 Datainsamlingsprocedurer och genomförande

Datainsamlingen till studien genomfördes utsträckt över drygt två månader. Samtliga lärarledda helklassgenomgångar observerades och inspelningar genomfördes vid de lektioner då jag under samtal med läraren bedömde att det ämnesstoff som läraren planerade att undervisa om på något sätt kunde vara kopplat till elevernas lärande om begreppet derivata. Lärarens uppläggning av kursen innebar att kursmoment med ett matematiskt innehåll som inte var kopplat till derivata vävdes in i undervisningen, vilket innebar att observationerna kom att sträckas ut över tid.

När läraren för andra gången planerade att låta eleverna arbeta tillsammans i smågrupper genomfördes datainsamlingen. Problemlösningsuppgiften genomfördes under två på varandra följande halvklasslektioner, vilket medförde en bättre ljudmiljö och möjliggjorde datainsamling i fyra av klassens sju grupper.

5.5.1 Datainsamling under helklassgenomgångar

I syfte att dokumentera den matematiska kommunikation som föregått problemlösningsaktiviteten genomfördes datainsamling av samtliga helklasslektioner fram tills

läraren valde att låta eleverna arbeta tillsammans i smågrupper. Inspelningar genomfördes endast när det matematiska innehållet bedömdes vara kopplat till funktioner och derivatabegreppet.

Inspelningen av lärarens kommunikation med eleverna inför hela klassen har dokumenterats med en kamera riktad mot läraren. Detta för att möjliggöra en dokumentation av den verbala kommunikationen kopplad till den skriftliga och icke verbala kommunikationen. Vid de tillfällen då salen tillät det riktades den andra kameran mot hela elevgruppen. Då läraren nästan uteslutande använde sig av PowerPoint presentationer, lagrades även detta material. Totalt inspelades sex lärarledda genomgångar på vardera 15-45 minuter. Fyra elever som slumpmässigt tilldelades de audiovisuella pennorna (s.k. smart pens) använde dessa under hela matematiklektionerna, vilket medger möjligheten att notera vad eleverna antecknade i sina böcker under de observerade lektionerna.⁵⁰

5.5.2 Datainsamling av elevernas arbete i smågrupper

Datainsamling av elevernas arbete i smågrupper med uppgifter kopplade till begreppet derivata genomfördes vid två lektionstillfällen när läraren i förväg meddelade att eleverna skulle arbeta tillsammans i smågrupper med uppgifter. Vid det första tillfället genomfördes inspelningen dels i syfte att vänja eleverna vid en inspelning under en gruppaktivitet, dels för att själv få möjlighet att genomföra inspelningen i en autentisk situation och dra nytta av erfarenheter från denna inför genomförandet av studien nästa lektionstillfälle då eleverna erbjöds smågruppsarbete.

Vid det andra tillfälle då läraren informerade mig om att eleverna nästkommande lektion skulle arbeta i smågrupper med en uppgift kopplad till derivatabegreppet, genomfördes fallstudien. Läraren erbjöd sig då att låta eleverna arbeta med uppgiften vid olika tillfällen under två på varandra följande grupptimmar för att bidra till att skapa en bättre inspelningsmiljö. Detta erbjudande medgav också möjligheten för mig att genomföra en flerfallsstudie då jag kunde spela in flera smågrupper, vilket var ett erbjudande som skulle ge mig större möjligheter att dra analytiska slutsatser än vid en enfallsstudie (Yin, 2009, ss. 60-61). Totalt genomfördes inspelningar av fyra olika elevgrupper när de arbetade med samma uppgift. Eleverna hade ingen möjlighet att diskutera uppgiften med andra elevgrupper under dessa två arbetspass.

Vid gruppobservationerna har två videokameror använts för att fånga in både verbal och icke verbal kommunikation. En kamera har placerats fast riktad mot elevgruppen sedd framifrån och den andra kameran har följt gruppens kommunikation med strävan att fånga in så mycket som möjligt av den pågående kommunikationen i gruppen. En kompletterande audioinspelning gjordes genom att placera en mikrofon med 360° ljudupptagningsförmåga i mitten av gruppernas bord för att fånga upp den verbala kommunikationen. Vid inspelningar av gruppaktiviteter har minst en elev i

⁵⁰ Inom ramen av denna avhandling används endast de lärarledda genomgångarna som stöd för analysen av elevernas diskurs under smågruppsarbetet.

varje grupp använt en audiovisuell penna för att möjliggöra en synkronisering av den muntliga och skriftliga kommunikationen i respektive grupp.

5.5.3 Dokumentation med hjälp av loggbok och insamling av skriftligt material

Under inspelningarna och vid kontakt med deltagare i studien gjordes anteckningar i en loggbok. Den har också fungerat som stöd för minnet om något speciellt inträffat under inspelningarna som eventuellt hade kunnat påverka en senare analys. Anteckningarna skrevs för hand av praktiska skäl och överfördes kontinuerligt till dataskrivnen text. Det skriftliga material som deltagarna använde under lektionen samlades in och elevernas skriftliga produktion speglades med hjälp av de fyra fokuselevernans användning av de audiovisuella pennorna. Även lärarens Power Point presentationer arkiverades.

5.6 Urval av deltagare

De ställningstaganden som har gjorts inför urvalet av deltagare är relaterat till studiens syfte och forskningsfrågor. Potter och Wertherell (1987, s. 161) lyfter fram att då intresset är riktat mot att som i denna studie observera diskursens utveckling under olika betingelser, mer än att observera de enskilda deltagarna, är enheten för analysen snarare texten än enskilda elever. I studien finns inte heller behov av att identifiera eleverna eller läraren i sig, utan endast att identifiera deltagarna inom gruppen i olika lärsituationer. Det som eftersträfvats är en datainsamling som rättvisande avspeglar klassrumsdiskurs i specifika lärsituationer och ett mindre antal deltagare i en studie där diskursanalys används, behöver inte ursäktas (Wood & Kroger, 2000, s. 81). Användningen av "mikroskopiska studier" där data är hämtad från små grupper kan avslöja mer än studier där deltagarantalet är högt (Sfard & Kieran, 2001).

5.6.1. Val av undervisningsgrupp för studien

Under en inledande studie intervjuades tolv lärare i semistrukturerade intervjuer (Bryman, 2002, s. 127) om sin uppfattning om elevernas kommunikation om matematik i klassrummet. Denna intervju genomfördes i två syften, dels att få en uppfattning av vilka faktorer gymnasielärare betonade påverkade utvecklingen av kommunikationen om matematik i klassrummet⁵¹ och dels i syfte att etablera en första kontakt med lärare för att få tillträde att genomföra den planerade klassrumstudien.

I det första skedet valdes tre geografiskt närliggande kommuner, varför ett geografiskt bekvämlighetsurval gjordes. Därefter valdes fyra slumpvis valda gymnasieskolor och samtliga matematiklärare på dessa skolor tillfrågades om de ville delta i en intervju. Sammanlagt tolv lärare intervjuades i semistrukturerade intervjuer om deras uppfattning om hur de såg på sin undervisningspraktik med fokus på deltagarnas möjligheter att kommunicera matematik. Fem av lärarna som särskilt betonade vikten

⁵¹ Inom ramen av denna avhandling redovisas inte resultat från denna intervjustudie.

av muntlig kommunikation och gruppaktiviteter för att gynna elevernas lärande i matematik tillfrågades om de kunde tänka sig att delta i en klassrumsstudie med fokus på elevernas kommunikation om matematik när begreppet derivata introducerades. Två lärare kunde inte delta på grund av arbetssituationen under kommande läsår. Tre av lärarna samtyckte till att delta, och i detta skede valdes den lärare som tidsmässigt först kom att undervisa i kursen matematik C. Valet av undervisningsgrupp och lärare kom därför i detta skede att styras av tjänstefördelningen på respektive skola och urvalet av undervisningsgrupp kan därför i detta skede betraktas som slumpmässigt.

Studien genomfördes i en gymnasieklass på samhällsvetenskapliga programmet i kursen matematik C då eleverna var 17-19 år gamla. Undervisningsgruppen består av 14 flickor och 10 pojkar och beskrivs av lärare som har undervisat elevgruppen som ”en typiskt vanlig klass” på det samhällsvetenskapliga programmet. Kursen är valbar för alla utom sex stycken av eleverna i gruppen. Två av eleverna har inte svenska som sitt modersmål och två av eleverna hade vid inspelningstillfället inte godkänt från den föregående kursen matematik B. Samtliga elever, förutom tre, har läst matematik tillsammans under minst ett läsår tidigare.

5.6.2 Val av helklassgenomgångar för datainsamling

Under mer informella samtal med läraren i anslutning till lektionerna informerade läraren om vilket matematiskt innehåll som skulle tas upp under nästkommande lektion. Läraren ombads om möjligt att i förväg berätta när en organiserad muntlig aktivitet var tänkt att genomföras för att underlätta datainsamlingen. Vid de två tillfällen då inspelningar av smågruppsaktiviteter planerades, genomfördes också en kortare intervju med läraren i anslutning till den planerade gruppaktiviteten.

5.6.3 Valet av fokuselever och deltagande smågrupper

Då datainsamlingen har genomförts av mig ensam var det både av tidsskäl och praktiska skäl nödvändigt att avgränsa klassrumsstudien till att redovisa en gruppaktivitet som läraren hade planerat i förväg. Det empiriska materialet hämtades från två efter varandra följande lektioner (lektion 7-8) då eleverna arbetade i smågrupper med en av läraren organiserad gruppaktivitet. Under dessa bägge halvklasslektioner tilldelades samtliga elevgrupper ett och samma matematiska problem kopplat till förståelsen av begreppet derivata. Vid den observerade gruppaktiviteten delade läraren in eleverna i smågrupper, vilka uppmanades att arbeta med uppgiften vid olika tillfällen under halvklasslektionerna. Detta medgav möjligheten att genomföra en flerfallsstudie och då observera fyra olika elevgrupper som arbetade med samma matematiska problem.

Urvalet av de elever som senare i något högre grad skulle komma att delta i studien gjordes med hjälp av att fyra elever slumpvis tilldelades audiovisuella pennor, så kallade ”smart pens”. Eleverna togs slumpmässigt ut med hjälp av en kortlek och samtliga elever erbjöds att delta i en lottning. Alla elever informerades i förväg om att om de drog ett kort och tackade ja fick de en mer framträdande roll i forsknings-

projektet. Ungefär 90 % av eleverna valde att dra ett kort. Fyra reserver togs också ut i samband med lottningen. Då urvalet av elever genomfördes inför hela klassen under lektionen behöver ingen elev uppleva att något annat än slumpen avgjorde i vilken grad eleverna kom att få delta i video- och audioinspelningarna. Detta är viktigt för att eleverna inte ska känna sig bortvalda eller utvalda för att de inte presterar samma nivå i matematik (Cotton & Hardy, 2004).

Eleverna gruppindelades slumpmässigt av läraren med hjälp av en klasslista under den lektion som föregick inspelningstillfället. När datainsamlingen genomfördes kom två grupper att slå samman på grund av att flera elever var frånvarande. Valet av i vilka av de sju smågrupperna datainsamlingen skulle genomföras gjordes utifrån i vilka grupper de elever hamnade som i denna tidigare lottnings hade tilldelats de audiovisuella pennorna. Två elever som hade tilldelats audiovisuella pennor hamnade i samma grupp, varför en grupp valdes där en ”reservelev”⁵² använde den audiovisuella pennan.

Samtliga elever som använde audiovisuella pennor hade använt dessa tidigare och samtliga elever i undervisningsgruppen hade deltagit i ”provfilmningar” innan själva studien påbörjades. Detta för att minska effekten av att eleverna deltog i en forskningsstudie. Vid datainsamlingens genomförande upplevde jag ingen skillnad i elevernas sätt att agera i undervisningsgruppen. De föreföll inte ta någon notis om att inspelning pågick.

När samtliga inspelade grupper var transkriberade innebar det att ett urval var nödvändigt inför redovisningen av det empiriska materialet. Här valdes det mest informationsrika fallet för att besvara forskningsfrågorna (Bryman, 2002, ss. 67-68), Elevgrupp A bedömdes vara den grupp som var mest informationsrik. Urvalet av kortare episoder från de övriga tre elevgrupperna B-D valdes utifrån principen att de innehöll informationsrika sekvenser som inte hade observerats i grupp A eller visade på skillnader eller likheter mellan de inspelade grupperna.

5.7 Förlorade data

Handvideokameran fungerade ofta bäst för att samtidigt fånga upp både skriftlig kommunikation, handgester och den verbala kommunikationen. Den medgav också en större möjlighet att krypa närmare vid inspelningarna. Jag fick då ofta ge avkall på att fånga in elevernas ansiktsuttryck, eftersom jag bedömde att kameran då hade stört elevernas naturliga arbetssituation. Eleverna kommunicerade i hög grad med sina ansikten nedböjda mot skrivhäftet under gruppaktiviteten, troligen för att de på grund av placeringen vid borden inte kunde få ögonkontakt med varandra. Ansiktsmimiken var därför ofta inte möjlig att observera, vare sig för andra deltagare i klassrummet eller för mig som observatör.

⁵² Vid utlottningen av de audiovisuella pennorna valdes reservelever som använde pennan om någon av de elever som tilldelats pennorna var frånvarande.

Under inspelningarna av gruppaktiviteterna bröts inspelningen vid ett tillfälle i en grupp på grund av att en sladd drogs ur och en annan lärare kom in i rummet. Av den orsaken gick en kortare sekvens av videoinspelningen av en grupp förlorad och medförde att enbart ljudinspelning genomfördes under några minuter.

5.8 Rollen som forskare i gruppen

Under den studie som var utsträckt under en längre tid var mitt deltagande i gruppens glädjeämnen och vedermödor påtaglig. Eftersom jag vistades i gruppen varje vecka blev jag med tiden ett naturligt inslag i matematikundervisningen. Min roll blev något som mer liknade en deltagande observatör i gruppen än en utomstående betraktare. Eleverna föreföll inte påverkas av min närvaro, eller om de videoinspelades eller inte. Flera tecken tyder på att klassrumslivet verkade gå sin gilla gång, och att eleverna föreföll opåverkade av min närvaro. En iakttagelse var exempelvis att klassens ljudnivå var högre och koncentrationen lägre när de inspelades på fredagseftermiddagarna än när inspelning skedde under dagens första lektioner. Det hände dock då och då att en elev kommenterade inspelningsutrustningen under lektionen när de tyckte att något i tekniken inte verkade fungera. Eleverna var mycket hjälpsamma om de kunde bidra med teknisk assistans eller utrymme för mig och mina kamerastativ. De elever som använde en audiovisuell penna hämtade oftast dessa hos mig när lektionen började utan att bli påmind. Eftersom det var enklare för dem att skriva i samma skrivhäfte fick de använda pennan, även när dokumentation inte gjordes. Om jag avstod från att spela in eller inte deltog under en lektion frågade de ofta varför. De föreföll betrakta mig som ett naturligt inslag under lektionerna trots min passiva roll. Eleverna insåg ganska snart att jag inte var någon att räkna med att de kunde be om hjälp, då jag var fullt sysselsatt med att betrakta verksamheten genom videokameran. Vid presentationen av forskningsstudien hade jag också förklarat för eleverna att det inte fungerade att filma och observera aktiviteterna i klassrummet, om jag samtidigt skulle ha rollen som en extra lärare. Eleverna gjorde dock sina tappra försök att använda mig som resurs, vilket jag också tolkar som att de inte stördes påtagligt av min närvaro. De flyttade hjälpsamt på sig för att bereda plats för mig och på så sätt underlätta videoinspelningen när jag använde handkameran. Vid presentationen av studien för lärare och elever uppgav jag att syftet i huvudsak var att lära av dem.

Flertalet av lärarna som intervjuades uppgav att de deltog i studien dels för att bidra till utvecklingen av matematikundervisningen i skolan och/eller att själva lära och reflektera kring sin egen undervisningspraktik.

5.9 Förberedande analys och transkription

För att erhålla en nödvändig överblick av det empiriska materialet från samtliga inspelade gruppaktiviteter gjordes en första genomlysning av all insamlad data från den genomförda klassrumsstudien. Denna inledande genomlysning är nödvändig i ett omfattande datamaterial inför transkriptionerna och den förestående analysen (Wood & Kroger, 2000, s. 87).

Det tidsödande arbetet att sammanföra data från flera videokameror, audiovisuella pennor och audioinspelningar, underlättades genom samtidig användning av tre datorer. Minnesanteckningar som fördes i en loggbok under eller i anslutning till de observerade lektionerna visade sig vara till god hjälp för att underlätta denna fas i databearbetningen. Ytterligare en genomlysning genomfördes när samtliga transkriptioner var genomförda för att inte relevant data skulle riskera att gå förlorad (ibid.).

Genom att utnyttja modern teknik finns goda möjligheter att fånga den flyktiga kommunikation som pågår (Norrby, 2004, s. 89). Denna datainsamling med hjälp av videoinspelningar, ljudinspelningar och användning av audiovisuella pennor för synkronisering av ljud och skrift har beskrivits tidigare i kapitlet. Då de data som är av intresse för att besvara forskningsfrågorna är själva klassrumsdiskursen, är denna diskurs också själva analysenheten. Vid transkriptionen av samtliga de fyra grupperna har alla dessa källor för ljud- och bildupptagning använts parallellt vid varje sekvens.

Oavsett strävan i rollen som forskare att transkribera all data finns det alltid begränsningar i transkriberingen. Transkriptionerna är inte datamaterialet, utan det är fortfarande de genomförda inspelningarna (Wood & Kroger, 2000, s. 82). De genomförda transkriptionerna har därför betraktats som en del av analysen (Norrby, 2004, s. 93). Transkriptionerna har också genomförts som en möjlighet att frysa elevernas matematiska diskurs för att möjliggöra för en tilltänkt läsare att ta del av elevernas matematiserande under gruppaktiviteterna. Det inspelade materialet har genomlysnats intensivt gång på gång fram och tillbaka med stöd av transkriptionerna.

Wood och Kroger (2000, s. 82) framhåller tre viktiga anledningar till transkribering av data. För det första medger det möjligheten att under analysen minnas mer av diskursen. Vidare saktas diskursens hastighet av så att detaljerna kan urskiljas. Den tredje anledningen är att det ska finnas tillgängligt för andra forskare och kunna återanalyseras. De upprepade genomlysningarna under själva transkriptionsarbetet har för mig fungerat som en memorering och förenklat arbetet att hitta sekvenser som är intressanta att analysera. Transkriptionerna har genomförts som ett ensamarbete, vilket därmed kan betraktas som ett första steg i den förestående analysen (ibid., 2000).

Inför presentationen av forskningen är valet av transkriptionens utformning en viktig del, liksom hur väl transkriptionen fungerar vid analys av diskursen (ibid., s. 82). I det kognitiva ramverket ses all kommunikation, verbal som icke verbal, som bidrag till den matematiska diskursen (Sfard, 2008). Med denna vidgade syn på diskursbegreppet har hela den kommunikativa handlingen studerats och analyseras och transkriptionerna har gjorts av både verbal och icke verbal data. Elevernas verbala och skriftliga kommunikation har noterats, medan möjligheten att med videoinspel-

ningarna fånga upp elevernas kroppsspråk inriktats mot att i första hand notera handrörelser.

Valet av transkriptionsmetod för verbal data innebär en avvägning mellan att få en så hög kvalitet som möjligt och att få en transkription med en godtagbar läsbarhet även för läsare som inte är väl förtrogna med fonologiskt återgiven kommunikation. En ortografiskt återgiven transkription valdes framför den fonologiska, men en kompromiss görs när talaren avviker från gängse språkbruk då en fonetisk transkription nedtecknades.

Det ortografiska tillvägagångssättet återger således här den verbala diskursen med vanlig stavning, medan till exempel skratt återges ((skratt)) medan det markeras *skratt* om talaren har ”skratt i rösten”. Transkriptionsmodellen erbjuder möjlighet att markera exempelvis pauseringar, förändrad talhastighet, tonläge, betoningar och andra verbala ljud som exempelvis harklingar. Den transkriptionsmodell som användes i det första steget av den verbala diskursen i studien är en förenklad version av den modell som idag används inom konversationsanalys (Linell, 2009, s. 465). För en utförligare beskrivning hänvisas till Appendix G.

När all verbal data transkriberats, bearbetades all data i ytterligare ett steg för att synkronisera denna med den icke verbala kommunikationen. Här användes den data som insamlats med hjälp av de audiovisuella pennorna, det vill säga den skriftliga kommunikationen synkroniserad med ljudupptagningen. De yttranden som bestod av olika slag av gester har noterats inom parenteser i anslutning till de verbala yttrandena.

Totalt transkriberades ca 70 minuter inspelat material där eleverna arbetade i gruppaktiviteter⁵³ och ca 4 timmar lärargenomgångar med vissa inslag av elevinteraktion genomlyssnades noggrant. Detta material, frusna videoklipp, samt utdragen från elevernas anteckningar, har sedan fungerat som en viktig källa för analysen. Videofilmerna användes dock oftast parallellt med läsningen av transkriptionerna, vilket visade sig vara ett effektivt stöd för analysen. Det är alltså fortfarande videofilmerna som betraktas som rådata för analysen. Transkriptionerna har efter datareduktionen gjorts i sin helhet och hög noggrannhet både vad gäller verbal och icke verbal kommunikation har eftersträfvats, för att undvika felciteringar och vaghet i transkriptionerna.

I transkriptionen har talspråksanpassningen använts för att få med alla småord som förekommer i talspråket, men normalt inte återges i normalt skriftspråk. Här har välbekanta talspråksformer som exempelvis mej och sej (för mig och sig) skrivits ut Anpassning medför att transkriptionerna mer liknar den talsituation som transkriberats. Om en utskriven talspråksvariant för exempelvis ordet ja istället för jag inneburit risk för innehållsmässiga missuppfattningar eller grammatiska förändringar, har transkriptionerna skrivits ut i den skriftspråkliga varianten enligt rekommendation av Norrby (2004).

Det gamla talesättet ”tystnaden talar” är berättigat i klassrumsdiskursen. Tystnad kan metaforiskt liknas vid talet noll i matematikens värld, och har olika betydelse i

⁵³ Grupp A 23 min, grupp B 22 min, grupp C 14 min, grupp D 11 min

skilda sammanhang. Pauser markeras med en tidsangivelse inom parentes t.ex (4s). Om en kort paus under två sekunder noteras, markeras det i transkriptionen enbart med ett lämpligt skiljetecken. Detta val att markera tystnaden är grundat i önskan att presentera transkriptionerna så läsvänliga som möjligt, då transkriptionerna är det enda sätt en presumtiv läsare erbjuds möjlighet att ta del av studiens empiriska datainsamling. All diskurs markeras i transkriptionerna, till exempel noteras om en elev ritar i luften som en anmärkning. Den icke verbala kommunikationen presenteras inom hakparenteser direkt i anslutning till de verbala yttrandena för att underlätta läsbarheten i transkriptionerna.

5.10 Diskursanalys av gruppernas kommunikation

Detta kapitel inleds med en kort sammanfattning av de teoretiska antaganden som ligger till grund för det första steget i diskursanalysen av elevernas kommunikation när de arbetar i smågrupper. Därefter presenteras använda analysmetoder detaljerat i avsnitt 5.10.2 - 5.10.5. Var och en av dessa analyser ger sitt bidrag för att förstå mer av gruppens interaktion och vad som förefaller bidra till eller motverka utvecklingen av den matematiska diskursen när eleverna arbetar tillsammans i smågrupper.

5.10.1 Utgångspunkter för val av analysmetoder

I analysens första steg har en metod använts presenterad av Wood och Kalinec (2012) för att studera elevernas deltagande med avseende på skillnader i innehållet i deltagarnas yttranden. Genom kategorisering av varje yttrande i gruppens diskurs med avseende på innehåll, kan varje elevs bidrag till utvecklingen och den önskade framflyttningen av den matematiska diskursen studeras. Med yttranden avses både verbal och icke verbal kommunikation (se vidare avsnitt 5.10.2).

I det andra steget av analysen kombineras Wood och Kalinecs metod med användningen av flödesscheman för att studera interaktionsflödet mellan deltagarna i gruppen, en metod presenterad av Sfard och Kieran (2001)⁵⁴ (se vidare avsnitt 5.10.3). I det ursprungliga metodologiska ramverket av Sfard och Kieran erbjuder analysen med hjälp av flödesschemat endast möjlighet att se skillnad på om yttrandena har en matematisk karaktär eller ej (se Ryve, 2004, 2006b), men säger inget om innehållet i den matematiska diskursen. Genom att kombinera Sfard och Kierans analysmetod för att studera interaktionsflödet med Wood och Kalinecs metod (2012) för att urskilja skillnader avseende innehållet i individernas yttranden, erbjuds möjligheten att förstå mer av skillnader i elevernas deltagande och interaktion under problemlösningsaktiviteten i smågrupper.

I ett avslutande analyssteg studeras de yttranden som klassificerats matematiserande [M] respektive subjektifierande [AOS]/[IOS] var för sig. För att ytterligare

⁵⁴ The communicational approach to cognition

studera förekomsten av och nivån av de subjektifierande yttranden har en metod använts presenterad av Heyd-Metzuyanim och Sfard (2012) (se avsnitt 5.10.5).

Utifrån den teoretiska utgångspunkt där lärande och social interaktion ses som tätt sammanflätade, är det avslutningsvis viktigt att betona att denna kategorisering av enskilda yttranden i gruppens diskurs endast genomförs i syfte att fungera som ett stöd i analysen. Kategoriseringen används för att växla perspektiv mellan deltagarnas subjektifierande respektive matematiserande i den kommunikativa aktiviteten, och dessa betraktas fortfarande som två oskiljaktiga aktiviteter. Förhoppningen är att metodvalet ska bidra till att kunna belysa och förstå mer av sambanden mellan deltagarnas interaktion, effektiviteten i gruppens diskurs om matematik och elevernas förutsättningar för lärande i den aktuella undervisningssituationen.

5.10.2 Utgångspunkter för analys av innehållet i deltagarnas yttranden

Metoden för att klassificera elevernas kommunikation med avseende på innehållet i gruppernas diskurs förklaras nedan. För en sammanställning av kategoriseringen av samtliga yttranden hänvisas till tabell 5.1. Kategoriseringen av varje yttrande i gruppen följer huvudsakligen Wood och Kalinecs metodologi (2012) och enskilda yttranden kategoriseras enligt följande:

Yttranden som klassificeras som att matematisera handlar om matematiska objekt eller processer på dessa. Dessa yttranden kodas då [onM] om de handlar om den uppgift eleverna arbetar med. Om denna kommunikation inte kan kopplas till uppgiften, kodas de [offM].

De subjektifierande yttrandena handlar om deltagarna i gruppen eller vad de gör (subjektifiering) och kategoriseras som aktionsorienterad subjektifiering [AOS] eller identitetsorienterad subjektifiering [IOS]. Aktionsorienterad subjektifiering⁵⁵ [AOS] används för att klassificera yttranden som inte direkt handlar om ett matematiskt objekt utan istället har fokus på deltagarna i diskursen och vad de gör. Även om dessa aktionsorienterade yttranden inte direkt handlar om en kommunikation om matematiska objekt, förefaller det rimligt att anta att de kan ge värdefulla bidrag till gruppens matematiserande (ibid., 2012). Genom att studera dessa yttranden kan det bidra till att förstå mer av förutsättningar för elevernas deltagande och lärande när eleverna arbetar med matematik i mindre grupper (ibid., 2012). Dessa aktionsinriktade yttranden kodas [onAOS] om kommunikationen kan knytas till den uppgift eleverna arbetar med och [offAOS] om så inte är fallet. (För exempel av kodningen [onM] och [onAOS] se tabell 5.1)

Som identitetsorienterad subjektifiering [IOS] benämns de yttranden som handlar om deltagarnas egenskaper, attityder eller roll i gruppen och dessa kodas [onIOS] eller [offIOS] beroende på om de kan kopplas till elevernas matematiserande med uppgiften eller ej (Wood & Kalinec, 2012). Här erinrar vi oss studiens teoretiska utgångspunkt där individens identitet definieras som en samling berättelser om en person (Sfard & Prusak, 2005, s. 14). Elevers identitet i gruppen definieras alltså här

⁵⁵ Eng. actionoriented subjectifying [AOS]

som de berättelser, verbala som icke verbala, som förmedlas i den rådande diskursen. Ett antagande är att elevernas identitet kan förändras om eleven deltar i en annan grupp, eller arbetar tillsammans med samma elever i ett annat ämne. Den typ av subjektifierande yttranden som bedömer elevernas prestationer i matematik innehåller ofta någon form av verben bliva eller hava (Wood & Kalinec, 2012). Det kan vara uttalanden som exempelvis: ”Jag är helt lost!” eller ”Det är ju sånt här jag har svårt med!” som belyser yttranden där elever bedömer sin egen eller andras prestation i ämnet. (För exempel på yttranden klassificerade [IOS] se utdrag 5.2)

Klassificering av övriga yttranden som inte faller in under ovanstående kategorier. De yttranden som kan kopplas till elevernas matematiserande med uppgiften, men inte klassificeras som vare sig [onAOS] eller [onM], kodas [onN]. Som [onN] kodas exempelvis respons som till exempel ”mm” och upprepningar av ett tidigare yttrande. På liknande sätt kodas de yttranden som inte är kopplade till uppgiften som [offN], om de inte kan kategoriseras som [offAOS] eller [offM]. Malplacerade eller svårtolkade yttranden kodas som [offC] och hit har också yttranden förts som svärord som inte bedömdes ha någon koppling till gruppens matematiska aktivitet. Se tabell 5.1 för en översikt av kategoriseringen.

Då de tätt sammanvävda subjektifierande och matematiserande yttrandena ska särskiljas i analysen redovisas dessa med samma tidsangivelse om det är en och samma individ som uttalar dessa, utan att någon annan individ replikerar med ett yttrande emellan dessa.

Utdrag 5.1 Exempel på klassificering och kodning [onM], [onN] eller [onAOS]

Lydia	x är större än ett eller mindre än 2. ((Tittar på uppgiftspapperet med olikheten $1 \leq x \leq 2$))	onM
Joe	Större eller lika med, är det till och med.	onM
Lydia	Ja okey. Vart ser du det?	onN onAOS
Joe	Strecket under.	onM
Lydia	Det är ju ett o annat, båda är det?	onAOS
Joe	Det är större än eller mindre än och lika med.	onM

Utdrag 5.2 Exempel på klassificering och kodning [onIOS]

André	Mind fucked! Derivatan är k-värdet det vill säga lutningen. Är det här som är lutningen då? ((Pekar på $1 \leq f'(x) \leq 2$))	onIOS onM onAOS
Moa	Mm	onN
Lisa	Och det där det man bygger på eller?	onAOS
André	Alltså, jag är helt lost!	onIOS
Lisa	Man ser ju inte dom här talen dom vanliga lektionerna. *suckar*. Det är ju sånt här jag har svårt med	onN onIOS

Uttalanden som är kopplade till den uppgiften/ det problem individen arbetar med					
	Mate- matiserande		Kod	Beskrivning	Exempel från studien
			[onM]	Alla yttranden som handlar om matematiska objekt	[2.20] Moa: När x är mellan här och här blir det någonstans mellan där. Men grejen är ju att det här i slutet är ju inte deriverat
	Subjektifiering	Aktions- orienterad	[onAOS]	Yttranden där fokus är riktat mot hur eller varför en individ gör något, kopplat till uppgiften men inte direkt handlar om objektet	[2.17] André: Hur ska man veta det då?
		Identifiering	[onIOS]	Yttranden där fokus är riktat mot hur en individ är eller vad hon har för karaktärsdrag	[6.13] André: Deriverar man den så åker 2:an iväg och det blir noll. <i>Jag fattar inte!</i> [14.19] André: Mind fuck! [14.51] André: Alltså, jag är helt lost!
	Inget av ovanstående		[onN]	Uttalande som är riktade mot uppgiften, men inte faller in i ovanstående kategorier	[8.55] André: *gäspar* Det är för tidigt för det här!
Skällsord, malplacerat yttrande		[onC]	Skällsord, malplacerat yttrande uttalat när eleven arbetar med uppgiften	(Finns ej representerat i datan)	

Tabell 5.1 Använda koder vid analys av innehållet i diskursen (utgår från Wood & Kalinec, 2012, s. 113, med egna exempel från studien).

Uttalanden som inte är kopplade till uppgiften	Subjektifiering	Aktionsorienterad Subjektifiering	[offAOS]	Ett yttrande som fokuserar på individens handlingar som inte är kopplade till uppgiften och inte direkt riktade mot ett matematiskt objekt	[14.01] Läraren: Vad sa du, Moa?
		Identifiering	[offIOS]	Yttranden som är kopplade till individens karaktärsdrag eller kännetecken som [offC]	A: Jag fattar aldrig matten!
	Inget av ovanstående		[offN]	Ett uttalande som inte handlar om uppgiften och inte kodas [offB] eller [offC]	E: Det är brandlarmet! ((brandlarmet ljuder))
	Skällsord, svärord		[offC]	Språkbruk som inte hör hemma i diskursen och inte kan kopplas till uppgiften t.ex. svärord	(förekommer inte i insamlade datan)

Tabell 5.2 Använda koder vid analys av elevernas diskurs ej kopplad till uppgiften

(Källa: Wood& Kalinec, 2012, s. 113; egna exempel från studien)

5.10.2 Interaktiva flödesscheman för gruppernas diskurs

I detta andra steg av analysen används en metod för att studera interaktionen mellan gruppdeltagarna med hjälp av flödesscheman, utvecklad i ett ramverk av Sfard och Kieran (2001)⁵⁶. Innehållet i varje enskild individs bidrag till gruppens diskurs kategoriseras då även i flödesschemat enligt Wood och Kalinecs (2012) analysmetod. Yttrandena markeras således som matematiska [M], aktionsinriktade [AOS] eller subjektifierande yttranden om deltagarna i gruppen [IOS] samt övriga yttranden [N]. Om ett yttrande kan delas in i flera kategorier markeras dessa yttranden efter varandra med samma tidsangivelse i flödesschemat (se t.ex tabell 5.3, vid tiden [6.13]).

I flödesschemat av Sfard och Kieran (2001) kombinerat med Wood och Kalinecs metod tydliggörs således deltagarnas interaktion med varandra (och ibland med sig själva) kopplat till innehållet i yttrandena under den observerade gruppaktiviteten. Genom användningen av bägge analysmetoderna möjliggörs att studera hur och om eleverna knyter an till varandras yttranden eller om de initierar en ny diskurs. Tabell

⁵⁶ The communicational approach to cognition

5.3 nedan visar analysens schemat utseende under detta andra steg i analysen. Om någon deltagare inte är närvarande har markeringen för närvaro [o] tagits bort vid den aktuella tidpunkten. I interaktionsschemat visar pilarnas start vem som yttrar sig under den aktuella tidpunkten. Pilens mål visar vem eller vilka gruppmedlemmar som kan vara avsedd som mottagare för yttrandet. Om det inte går att avgöra vem yttrandet riktas till markeras samtliga gruppmedlemmar som teoretiskt sett kan ses som mottagare av yttrandet (se förklaring till pilarnas utseende beroende på kodning till höger i tabell 5.3). Kodningen för varje yttrande är också utskrivet i den högra kolumnen i tabellen. Under några sekvenser visar analysen att en elev förefaller tala till sig själv och inte verkar interagera med någon annan i gruppen. I flödesschemat har pilarna vid dessa yttranden riktats tillbaka mot sändarens tidigare replik (se t.ex. Appendix A utdrag 7.3b, [10.14]-[12.10]). För att öka läsbarheten i avhandlingen är flödesschemana för respektive sekvens huvudsakligen placerade i Appendix A.

Tid	Andre	Moa	Lisa	Lärare	Kod	Pilmarkeringar och kodning
[6.13]	o	o	o	o	on M	→ [M]
[6.13]	o	o	o	o	on IOS	→ [AOS]
[6.13]	o	o	o	o	onAOS	→ [N]
[7.28]	o	o	o	o	onN	→ [IOS]

Tabell 5.3 Förklaring till interaktionsschemats koppling till kategoriseringen av olika yttranden.

Flödesschemat för gruppen redovisas i sin helhet för att skapa överblick (se Appendix A för flödesscheman för respektive utdrag). Tidsangivelserna från transkriptionen använts i interaktionsschemat för att snabbt kunna finna innehållet i ett uttalande.

5.10.4 Analys med fokus på utvecklingen av den matematiska diskursen

Under detta steg av analysen fokuseras på de subjektifierande respektive matematiserande yttrandena var och en för sig. I detta avsnitt redogörs för den fördjupade analysen av den diskurs som kategoriserats som matematiserande och i följande avsnitt 5.10.5 förklaras den fördjupade analysen av de subjektifierande yttrandena.

För att ur ett mikroperspektiv analysera faktorer som förefaller gynna utvecklingen av den matematiska diskursen i grupperna, fokuseras här främst på förändringar i den diskurs som tidigare kategoriserats som [onM] respektive [offM]. Då deltagarnas användning av olika språkliga mediatorer ses om en nyckel till den mänskliga kommunikationen och därmed också för lärandet (Sfard, 2008; Säljö, 2000), är fokus här på deltagarnas val, användning och växlingar mellan olika mediatorer och matematiska ord för att representera de matematiska objekten eller processer på dessa (Sfard, 2008).

Detta i strävan att tydliggöra om och hur dessa mediatorer och ordval påverkar gruppens matematiska diskurs och främjar eller hindrar diskursiva framflyttningar mot den önskade diskursen.

När eleverna arbetar med den uppgift de tilldelats i denna studie möter de olika visuella representationer presenterade med ett matematiskt symbolspråk, grafer eller värdetabeller, ofta med stöd av verbal kommunikation. Under analysarbetet har användningen av olika mediatorer noterats vid varje yttrande kategoriserat [onM]. Om en individ förutom verbal kommunikation väljer att växla över till att också använda sig av naturligt skriftspråk, som att exempelvis skriva ner en frågeställning, markeras detta [sk]. Om skriftspråket också innefattar användning av matematiskt symbolspråk markeras växlingen av mediator i interaktionsschemat som [sy]. Vidare markeras när en graf används som visuell mediator som stöd för kommunikationen [gr], koordinatsystem [ko] och värdetabell [vt]. (För att underlätta läsningen av gruppernas diskurs presenteras inte detta steg i analysen i utdragen. För en utförligare översikt över använda koder, se Appendix B).

Under denna fas av analysen studeras också hur deltagarna använder förekommande matematiska ord⁵⁷. Vidare studeras tillämpningen av matematiska begrepp under gruppinteraktionen, vilket Sfard (2008) kallar "conceptual countability". Här iakttas olika aspekter som att deltagarna använder samma ord för olika objekt, olika ord för att referera till samma objekt och i vilken omfattning och noggrannhet olika begrepp beskrivs med matematiska ord⁵⁸ (se t.ex. Ryve, Larsson & Nilsson, 2013).

5.10.5 Detaljerad analys av deltagarnas subjektifierande yttranden

För att förstå mer av de subjektifierande yttrandenas funktion i gruppernas kommunikation har även dessa yttranden ytterligare granskats och kodats under denna fas av analysen. Heyd-Metzuyanim och Sfard (2012, ss. 129-130) presenterar en klassificeringsmetod för att urskilja tre olika nivåer av identifiering, vilken har använts i detta skede av analysen. De betonar vikten av att studera hur generellt dessa uttalanden förekommer i den studerade kommunikationen. Som den svagaste nivån av identifiering betraktas de uttalanden som handlar om vad en individ presterar och hennes handlingar. Det kan vara yttranden som: "Hänger du med hur jag tänker?", "Det där måste du gå igenom, jag fatta inte mycket av det där alltså.", "Du har helt rätt där!". Den andra nivån är när en individ genom sitt yttrande framhåller att någon annan (eller hon själv) ofta handlar eller regelbundet uppträder på ett bestämt sätt. Ett exempel hämtat från denna studie är: "Det är ju sånt här jag har svårt med!". När en deltagare uttalar sig i presens om en annan person eller sig själv kan dessa uttalanden oftast hänföras till denna nivå av subjektifiering och kodas som den lägsta nivån av identifiering om den förekommer vid enstaka tillfällen, men som den andra högre

⁵⁷ Eng. keywords (Sfard, 2008)

⁵⁸ I denna studie används begreppet matematiska ord (keywords) (Sfard, 2008). Ryve, Larsson och Nilsson (2013) använder termen technical terms för de ord som har en speciell betydelse i den matematiska diskursen.

nivån om den är frekvent förekommande. Som den starkaste tredje nivån av identifiering betraktas de uttalanden som beskriver en individs egenskaper som om de vore medfödda. Ett yttrande som klassificeras som [onIOS] är exempelvis är när en elev utbrister: ”Jag är trög i huvudet i matte!”. Sfard och Prusak (2005) understryker vikten av att notera vem som är sändare, objekt och mottagare för ett subjektifierande yttrande (Sändare^{Objekt} Mottagare). I analysen har noteringar gjorts vid yttranden kategoriserade [IOS] för att tydliggöra olika nivåer av identifierande yttranden och vem som är sändare respektive mottagare. I tabell 5.4 nedan redovisas en sammanställning av kategoriseringen och använda koder vid de subjektifierande yttrandena som klassificeras som identifiering [onIOS].

Sändare ^{Objekt} Mottagare	Exempel	Uttalandet riktat mot person	Nivå av subjektifiering ⁵⁹	Beskrivning av nivå
Läraren ^{Moa} Moa	Vad sa du, Moa?	2:a person	AOS 1:a	Uttalanden kopplade till en speciell händelse i förfluten tid
Joanna ^{Joanna} Alla	Alltså jag hade rätt!	1:a person	AOS 1:a	
John ^{Alla} Alla	Vi har inte fått rätt svar i alla fall	1:a-3:e person	AOS 2:a	
André ^{André} Alla	Jag fattar inte!	1:a person	IOS 2:a	Uttalanden i presens kopplade till en händelse
Lisa ^{Lisa} Alla	Det är ju sånt här jag har svårt med	1:a person	IOS 2:a	
André ^{André} Alla	Jag är dum i matte!	1:a person	IOS 3:e	Övergår från uttalanden om en individs handlingar till dennes egenskaper
John ^{John} Alla	Det är som alltid, jag är pajas.	1:a person	IOS 3:e	

Tabell 5.4 Exempel på subjektifierande yttrande för att urskilja sändare, objekt och mottagare, samt nivå av subjektifiering (Ombearbetad från Heyd-Metzuyanin & Sfard, 2012; Sfard & Prusak, 2005; Wood & Kalinec, 2012; Eget exempel)

⁵⁹ I utdragen redovisas [onAOS] alternativt [offAOS] beroende på om det subjektifierande yttrandet är kopplat till den uppgift eleverna förutsätts arbeta med eller ej. I denna studie är i stort sett 100 % av de observerade gruppernas yttranden klassificerade som [onAOS]/[onIOS]

Kapitel 6 Etiska och metodologiska överväganden

Vetenskapsrådet betonar fyra huvudkrav kopplade till etiska frågor som forskning måste uppfylla: informations-, samtyckes-, konfidentialitets- och nyttjandekravet (Vetenskapsrådet, 2002, s. 6). Bryman lyfter fram de grundläggande etiska frågorna som rör deltagarnas frivillighet i forskningsprojektet: integritetskravet, konfidentialitet och anonymitet (Bryman, 2002, s. 440ff.). Han betonar fyra centrala frågeställningar, framtagna av Diener och Crandall (1978) som brott mot etiska principer kretsar runt: Finns brist på samtycke? Kan deltagarna lida skada? Inkräktar man på någons privatliv? Finns någon form av bedrägeri eller undanhållande av information? I det inledande delkapitlet 6.1 redogörs för forskningsstudiens etiska överväganden.

Vid utvärderingen av en kvalitativ studie föreslår Lincoln och Guba (1985) att forskningsstudiens trovärdighet och äkthet kan användas vid utvärderingen. I avsnitt 6.2 redovisas studiens metodologiska överväganden. Här redogörs för den genomförda studiens styrkor, begränsningar och svagheter på vägen till en ”slutprodukt” med utgångspunkt från fyra kriterier för utvärdering och kritisk granskning av en kvalitativ studie: tillförlitlighet⁶⁰, överförbarhet⁶¹, pålitlighet⁶² och konfirmerbarhet⁶³ (Bryman, 2002, s. 258; Lincoln & Guba, 1985).

6.1 Etiska överväganden

6.1.1 Informations- och samtyckeskravet

Enligt Vetenskapsrådet (2002, s. 7) skall forskaren ”informera de av forskningen berörda om den aktuella forskningsuppgiftens syfte.” Informationskravet innebär också att deltagarna i studien ska vara informerade om frivilligheten i att medverka samt att de när de själva vill alltid har rätt att avbryta sin medverkan (ibid.). Deltagarna ska vidare informeras om undersökningens syfte, studiens uppläggning i stora drag samt på vilket sätt deras medverkan kan bidra till forskningen.

Vetenskapsrådet sammanfattar samtyckeskravet i regeln: ”Deltagare i en undersökning har rätt att själva bestämma över sin medverkan.” (ibid., s. 9). Detta innebär att deltagarna i studien ska ge sitt samtycke till att delta. I de fall då deltagarna är under 15 år och undersökningen är av etiskt känslig karaktär ska samtycke hämtas även från vårdnadstagare. Forskaren skall inhämta uppgiftslämnarens och undersökningsdeltagares samtycke. Deltagarna ska kunna medverka i den grad de själva vill, på

⁶⁰ Eng. credibility

⁶¹ Eng. transferability

⁶² Eng. dependability

⁶³ Eng. confirmability

sina egna villkor. De ska när som helst, utan att det innebär några negativa konsekvenser för dem, kunna avbryta sitt deltagande (ibid.).

Några veckor före studiens början besökte jag undervisningsgruppen och berättade om mitt önskemål att genomföra ett forskningsprojekt i klassen. I detta skede informerade jag deltagarna om att studiens syfte var att förstå mer av hur eleverna kommunicerar om matematik när de arbetar i grupper. För att eleverna inte skulle uppleva sig som "försöksobjekt" betonades att jag och den andra matematikläraren fick möjlighet att förstå mer av elevernas lärande i matematik när de arbetar tillsammans i smågrupper. Vidare förklarade jag för dem, att jag som forskande lärare fick en chans att iaktta och förstå mer av vad som hände under lektionerna än jag hade någon möjlighet till som undervisande lärare. Samtliga elever och föräldrar till omyndiga elever fick också skriftlig information om projektet efter det första informationstillfället. Eleverna ombads att i lugn och ro tänka över om de kunde tänka sig att delta och därefter lämna in ett skriftligt godkännande. Eleverna fick också muntlig information om de etiska regler som gäller, och jag betonade att de när som helst kunde avbryta sin medverkan i studien. När datainsamlingen var genomförd fick eleverna, som då samtliga hade uppnått myndig ålder, återigen möjligheten att aktivt ta ställning till om de fortfarande kunde tänka sig att delta i studien genom att skriftligt godkänna sitt deltagande i studien. Samtliga elever i gruppen svarade att de kunde tänka sig att delta vid bägge dessa tillfällen. De lärare som var inblandade i studien var tillfrågade i förväg och fick information om och uppmärksammades på de etiska regler som gäller.

Under den tid som forskningen pågick har min känsla varit att både elever och lärare visat intresse för min forskning och varit mycket hjälpsamma i situationer när jag behövt någon form av assistans. Eftersom datainsamlingen har pågått under en längre tidsperiod, har eleverna haft möjlighet att vänja sig vid min närvaro och även ställa frågor om forskningen om de undrat över något. Datainsamlingen har präglats av öppenhet och förtrolighet mellan mig och deltagarna i studien.

När forskningen var avslutad kontaktades enligt Vetenskapsrådets rekommendationer de elever som varit delaktiga i inspelningar som bedömdes innehålla etiskt känsliga sekvenser eller tolkningar innan studien publicerades. Vidare tillfrågades de deltagare som varit delaktiga i studien om de var intresserade av att få veta hur forskningsresultaten skulle publiceras och om de ville få en sammanfattning av resultaten, enligt Vetenskapsrådets rekommendationer (ibid., s. 15).

6.1.2 Konfidentialitets- och nyttjandekravet

Konfidentialitetskravet innebär att personuppgifter för personer som ingår i ett projekt förvaras så att obehöriga inte kan ta del av dessa (Vetenskapsrådet, 2002, s. 12). All personal som deltar i ett projekt där etiskt känsliga uppgifter förekommer om individer bör underteckna en tystnadsplikt. Uppgifter och anteckningar ska lagras så att enskilda individer kan identifieras och att man ska verka för att försvåra identifieringen, speciellt för utsatta individer och grupper (ibid., ss. 12-13). För att skydda elevernas identitet och integritet gavs eleverna slumpmässigt ett nytt namn utifrån en i förväg framtagen lista vid transkriberingens början. Namngivningen genomfördes således utan hänsyn till vare sig kön, etnicitet, etnisk identitet eller kultur.

Redan under analysens inledande fas när materialet genomlyssnades för första gången möttes jag av etiska dilemman när eleverna talade om något som inte alls var relaterat till matematikundervisningen, eftersom innehållet vid några tillfällen uppfattades som att det kunde kopplas till elevernas identitet. Därför transkriberades inte dessa sekvenser av personligt samtal mellan eleverna. Dessa hade lika gärna kunnat utspela sig någon annanstans. Borttagna sekvenser noterades dock i det transkriberade materialet.

Vid två tillfällen, då det empiriska materialet visserligen var av intresse för forskningens syfte, men konfidentialitetskravet inte kunde uppfyllas, beslutade jag att inte använda några av dessa inspelade sekvenser av etiska hänsyn till enskilda elever. Ett kortare avsnitt från en i studien analyserad gruppaktivitet ansågs nödvändigt att ta bort av anonymitetsskäl, men detta bedöms inte ha påverkat resultatenalysen.

Allt forskningsmaterial har förvarats på ett säkert sätt, inspelningarna har förvarats inlåsta och inget inspelat material har heller varit möjligt att nå via internet. Data använt till konferensbidrag och artiklar har avidentifierats. Inga foton på ansikten eller andra bilder har använts där deltagarnas identitet har kunnat röjas.

Nyttjandekravet innebär att det insamlade datamaterialet endast används för det redovisade forskningssyftet (ibid., s. 14). Materialet har och ska inte användas för något annat syfte än för denna fallstudie.

6.2 Metodologiska överväganden i studien

Bryman (2002) föreslår att trovärdighet⁶⁴ och äkthet⁶⁵ kan användas vid utvärderingen av kvalitativa studier för att diskutera studiens validitet och reliabilitet (Bryman, 2002, s. 258; Lincoln & Guba, 1985; Kvale, 1997, s. 217) framhåller att validering handlar om att välja mellan olika konkurrerande tolkningar och att argumentera för dess trovärdighet. Mason (1996, s. 171) har ett närliggande synsätt på den kvalitativa forskningsstudiens validitet och ser tolkningsprocessen och hur denna redovisas ända fram till slutprodukten som central. Mason förtydligar:

⁶⁴ Eng. trustworthiness

⁶⁵ Eng. authenticity

This means that you should be able to, and be prepared to, trace the route by which you came to your interpretation. ... The basic principle here is that you are never taking it as self-evident that a particular interpretation can be made of your data but instead that you are continually and assiduously charting and justifying the steps through which your interpretations were made. (Mason, 1996, s. 150)

Fyra kriterier lyfts fram som intressanta för att utvärdera och kritiskt granska trovärdigheten hos kvalitativa studier: tillförlitlighet, överförbarhet, pålitlighet och konfirmerbarhet (Bryman 2002, s. 257; Lincoln & Guba, 1985). Med utgångspunkt från dessa fyra kriterier redogörs i avsnitt 6.2.1–6.2.4 för studiens styrkor, begränsningar och svagheter och hur kriterierna för studiens trovärdighet har uppfyllts.

6.2.1 Studiens tillförlitlighet

Eftersom en social verklighet kan beskrivas på många olika sätt, handlar det som forskare om att förmedla tillförlitlighet för att övertyga läsaren om rapportens trovärdighet (Bryman, 2002, s. 258). Inom den kvantitativa forskningen motsvaras tillförlitligheten av den interna validiteten (ibid., s. 258). Det innebär att en god överensstämmelse ska finnas mellan observationerna och de begrepp och teoretiska idéer som utvecklas (ibid., s. 257). I en fallstudie måste datainsamlingen betraktas som central för tillförlitligheten, då det är utifrån det empiriska frusna materialet jag som forskare sedan ska försöka förstå mer av elevens förutsättningar för deltagande och lärande i matematik. En styrka i fallstudien ser jag i att denna är genomförd efter det att jag under två månader regelbundet varje vecka deltagit i klassrumslivet som observatör. Eleverna eller läraren var inte längre märkbart påverkade av min närvaro ”utan klassrumslivet föreföll gå sin gilla gång”. Vidare genomfördes datainsamlingen också vid det andra tillfället när läraren anordnade en gruppaktivitet för att eleverna skulle ha mött en liknande inspelningssituation tidigare (se kapitel 5.5.2). Inget försök gjordes för att påverka undervisningens didaktiska eller pedagogiska innehåll. Elevernas kommunikation i smågrupperna transkriberades i sin helhet.

För att skapa tillförlitlighet handlar det också om att säkerställa att forskningen har genomförts enligt gällande regler men även att resultaten redovisats för individer som är en del av den sociala verklighet man beskriver, så kallad respondensvalidering (Bryman, 2002, s. 258). När analysen och resultatredovisningen var genomförd och ett preliminärt utkast låg färdigt, delgavs den undervisande läraren resultatet och fick möjlighet att kommentera detta urval. De elever som i högre grad kommit att delta i resultatredovisningen ombads inte särskilt ta del av rapporten för att skydda deras och andra elevers identitet.

Triangulering innebär att man använder sig av mer än en metod eller datakälla vid studier av sociala företeelser för att öka tillförlitligheten (ibid., s. 260). En metodologisk triangulering har genomförts i studien för att öka förutsättningarna att bättre förstå elevernas möjlighet och hinder för att delta i gruppens kommunikation. I den genomförda flerfallstudien arbetar eleverna tillsammans i smågrupper med samma uppgift, och läraren bistår de olika elevgrupperna med likadana i förväg framtagna skriftliga ”ledtrådar”. Studien får därför betraktas som en flerfallsstudie där data-

insamlingen genomförts i flera grupper med liknande förutsättningar. Flera olika komplementära metoder har också används i datainsamlingen som stöd för den förestående analysen för att förstå mer av elevernas deltagande och möjligheter att skapa förutsättningar för lärande: intervjuer med läraren före och efter fallstudiens genomförande, videoinspelade observationer samt fältanteckningar.⁶⁶

I fallstudier när deltagarna är medvetna om att de deltar i ett forskningsprojekt måste den så kallade Hawthorne-effekten tas i beaktande, vilket innebär att deltagarnas beteende kan påverkas av min närvaro (Robson, 2002, s. 548). För att minska risken att som observatör påverka eleverna rekommenderas två strategier; minimal interaktion med gruppen och att vänja eleverna vid observatörens närvaro (ibid., s. 328). För att minimera risken att deltagarna ska påverkas av min närvaro har jag deltagit som observatör vid minst ett lektionstillfälle i varje vecka under knappt två månader innan fallstudien genomfördes. Vid de lektionstillfällen när eleverna inte arbetade i grupper genomfördes inga inspelningar, men kamerorna stod alltid kvar under lektionen efter det att inspelningen av lärares genomgång var genomförd. Provinspelningar genomfördes regelbundet och eleverna vände sig successivt vid att inspelningar genomfördes då och då. Efter några veckor föreföll eleverna inte vara medvetna om att inspelningar hade genomförts, då de då och då frågade efter lektionen om jag hade spelat in eller inte. Min egen upplevelse var att min närvaro togs alltmer förgiven, och att eleverna accepterade min roll som en "icke hjälpsam observatör", vilket enligt Robson är en indikator på att jag som observatör inte påverkar gruppen (ibid., s. 328). Hawthorne-effektens påverkan på elevernas deltagande kan därför antas vara låg. Läraren uttryckte under inspelningens gång att det var positivt och stimulerande att delta i ett forskningsprojekt och att få reflektera och kommentera den egna undervisningen. Inte heller läraren verkade synbart påverkad av min närvaro.

6.2.2 Överförbarhet

Det är ett oundvikligt faktum att varje undervisningssituation är unik. Förutom att deltagarna befinner sig i en för studien unik undervisningskontext är det oräkneliga faktorer som gör varje fallstudie ensam i sitt slag. Det kan till exempel handla om elevernas sociala relationer, elevernas förkunskaper eller lärarens pedagogiska val. Den valda fallstudien beskriver just den undervisningssituation som är föremål för observationen. Genom att ta hjälp av film- och ljudinspelningar och "frysa" denna undervisningssituation bjuds läsaren in till att i lugn och ro ta del av denna, och förhoppningsvis få ytterligare en "lins" för att förstå och kanske förbättra den egna undervisningspraktiken. På samma sätt finns möjligheten för en forskare att med hjälp av egna inspelningar och det använda analysverktyget genomföra samma analys.

⁶⁶ Intervjuer med ett slumpvis antal av eleverna genomfördes inom några dagar efter den genomförda gruppaktiviteten. Eleverna fick då genomföra en liknande uppgift på egen hand. Resultatet från dessa intervjuer redovisas inte i denna avhandling.

Generaliserbarhet inte kan appliceras på ett enskilt fall då generaliseringar handlar om påståenden som är varaktiga och kontextfria till sin natur. Själva värdet med generaliserbarhet är just att finna kontroll och förutsägbarhet (Lincoln & Guba, 1985, s. 110). Forskarna ställer sig vidare frågan hur en arbetshypotes från en kontext kan överföras till en annan. De ser svaret som empiriskt och att graden av transferabilitet är en direkt funktion av likheterna mellan de två kontexterna (ibid., s. 124). Liksom Bryman ser de överförbarhetens parallell i den externa validiteten (Bryman, 2002, s. 258). Genom att använda LeComte och Goetz definition innebär det hur resultaten ska kunna generaliseras till att gälla i en annan situation, vilket forskarna ser som problematiskt vid användningen av fallstudie (ibid., s. 258). Bryman samtycker med Lincoln och Guba (1985, s. 125) om att i kvalitativ forskning använda det de kallar en tät beskrivning som hjälper läsaren att bedöma studiens överförbarhet till en annan situation, tidpunkt och kontext. Lincoln och Guba summerar sin syn på överförbarhet i kvalitativ forskning:

It is, in summary, *not* the naturalist's task to provide an *index* of transferability; it *is* his or her responsibility to provide the *data base* that makes transferability judgments possible on the part of potential appliers. (Lincoln & Guba, 1985, s. 316, författarens kursivering)

Varje har varje steg i processen redovisats så tydligt som möjligt både vad gäller för den undervisningskontext där inspelningarna genomfördes, och användningen av datainsamlings- och analysmetoder.

6.2.3 Studiens pålitlighet

Pålitlighet motsvarar reliabiliteten i kvantitativa forskningsstudier, vilket innebär att en annan forskare ska kunna följa och kritiskt granska alla faser i forskningsprocessen (Bryman, 2002, s. 260). För att skapa denna trovärdighet hos läsaren krävs noggrannhet vid redovisningen av studiens uppläggning (Bryman, 2002, s. 261; Lincoln & Guba, 1985, s. 125). Min strävan har varit att så transparent och tydligt som möjligt redovisa hela forskningsprocessen som problemformulering, urvalet av deltagare, intervjuutskrifter, elevredovisningar, transkriptioner samt metoder för datainsamling och analys. Handedarna och forskarkollegor har fungerat som kritiska granskare under arbetets gång. Transkriptionerna har återgivits i sin helhet i avhandlingen för att ge läsaren en fullständig överblick över gruppernas kommunikation, och även i syfte att möjliggöra en analys utifrån de redovisade transkriptionerna med hjälp av ett annat analysverktyg.

6.2.4 Konfirmerbarhet

Konfirmerbarhet handlar enligt Bryman om att forskaren inte låtit egna teorier eller värderingar påverka undersökningens resultat, då samhällsvetenskaplig forskning aldrig kan vara helt objektiv (Bryman, 2002, s. 261).

Vid valet av metoder har objektivitet och genomskinlighet eftersträvat i varje steg av analysen och resultatredovisningen.Handledarna har fungerat som behjälpliga i granskningen av de preliminära utkasterna och då haft tillgång till transkriptionerna av elevgrupperna diskurs i sin helhet, vilket Bryman (ibid. s. 261) med hänvisning till (Lincoln & Guba, 1985) ser som viktigt för objektiviteten. De har också varit behjälpliga i granskningen av analysen och slutsatserna, vilket är en viktig uppgift för handledaren vid granskningen av en forskningsstudie (Bryman, 2002). En strävan har också varit att under hela studien vara vaksam mot att inte min yrkesroll som lärare ska ha påverkat datainsamlingen och den efterföljande analysen och resultatredovisningen.

Kapitel 7 Resultatredovisning av fallstudien

7.1 Förutsättningar inför lektionen – undervisningens design

Fallstudien är genomförd under en av läraren förberedd gruppaktivitet inom arbetsområdet "derivatan" tidigt under kursen Matematik C. När lektionens innehåll presenterades informerade läraren eleverna om att de skulle arbeta i grupper för att försöka lösa ett matematiskt problem de inte tidigare hade mött, och att de under tidigare matematiklektioner hade arbetat med moment som skulle hjälpa dem på vägen. Vidare betonade läraren att eleverna så långt som möjligt förväntades samarbeta och resonera med varandra, då de inte skulle få använda "den snabba vägen" att direkt be läraren om hjälp om de "körde fast".

Vid en kort intervju före lektionens början förklarade läraren att samtliga elevgrupper skulle komma att tilldelas samma matematiska problem att lösa. Läraren förklarade vidare att han hade förberett skriftliga ledtrådar till eleverna i förväg. Om eleverna inte klarar av att lösa uppgiften tillsammans utan hjälp, får de möjlighet att "köpa" dessa skriftliga ledtrådar från en-som-vet-mer, i detta fall läraren. När en elevgrupp ber om en ledtråd, väljer läraren en ledtråd som han bedömer kan stötta gruppens matematiska diskurs för att de ska komma vidare i gruppens kommunikation för att lösa det matematiska problemet. Läraren förklarar vidare att för varje gång eleverna ber om hjälp, förbrukar de en av sammanlagt tio ledtrådar. En tävlingsliknande aktivitet anordnas, där maximal poäng är tio och varje "köpt" ledtråd ger ett poängavdrag. Läraren förklarar sin intention med den kommande gruppaktiviteten:

Jag har slumpvis tagit ut grupper med tre i varje. Tre tycker jag är en ganska dynamisk grupp utan att någon kommer utanför [...] Funktionen (med ledtrådar, min kommentar) är ju att helst få ett läge att bita ihop lite grann. Det finns ju grupper som säger fort att 'det här kan inte vi', och sen ska de ha hjälp. Man är rätt ivrig i en stor grupp att hjälpa till och man vill inte ha oron när flera kör fast. Kostar det då lite i prestige att fråga kanske man anstränger sig lite mer. Det brukar ofta utvecklas till en slags kamp. Framför allt är det bromsen jag är ute efter. Att fundera för att få hjälp [...] Om man då får uppgifter där proceduren kommer i skymundan och de ska försöka tackla nån slags förståelse, då känner många att de är ute på hal is. Man är inte van, 'jag förstår inte det här'. Det är ju också ett högre betygs-kriterium. Många har ju nöjt sig med att klara en procedur. (intervju med läraren dagen före lektionens början)

Själva uppgiften och alla "ledtrådar" eleverna behöver presenteras i skriftlig form av läraren med hjälp av naturligt skriftspråk eller med ett formaliserat matematiskt symbolspråk. Vid den observerade lektionen är eleverna indelade i halvklass, varför tre grupper med 3-4 elever i varje genomför gruppaktiviteten samtidigt. Eleverna placeras i grupper vid runda bord och får uppgiften på en lapp av läraren. Ingen av gruppledmedlemmarna har i förväg tilldelats rollen att anteckna, men eleverna har

informerats om att de förväntas redovisa både muntligt och skriftligt inför läraren, och varje grupp har även fått ett block och en audiovisuell penna.

Läraren roterar under gruppaktiviteten mellan grupperna, lyssnar till eleverna, men bidrar bara med en och annan uppmuntrande kommentar. Lärarens deltagande i den matematiska diskursen under gruppövningen sker istället i huvudsak via de ledtrådar eleverna får när de ber om dem. Om eleverna själva har kommit ”förbi” en ledtråd delar läraren ut den ledtråd de inte behövt utnyttja som en bekräftelse på att de är på rätt väg. Eleverna förefaller under observationen vara införstådda med att det finns ett tävlingsinslag, att gruppen ska använda så få poäng som möjligt, då de rådfrågar varandra innan de ber om en ledtråd (se t.ex. [2.55]). Detta är också tydligt synliggjort för eleverna genom att alla grupper symboliskt har tilldelats tio enkronor på bänken att ”handla” ledtrådar för vid behov.

Eleverna är vana vid detta arbetssätt med att få stöd av läraren i form av ledtrådar när de arbetar i smågrupper. Under den tid datainsamlingen pågick i studien observerades en likande gruppaktivitet. Elevgrupperna hade då tillgång till samtliga ledtrådar för att vid behov själva kunna läsa dem i turordning om de inte kunde komma vidare i problemlösningssituationen.

7.2 Den skriftliga uppgiften och lärarens bidrag i form av ”ledtrådar”

Uppgiften presenteras för eleverna med ett matematiskt symbolspråk:

För en funktion $f(x)$ gäller att $f(3) = 2$. Vidare gäller att för funktionen är $1 \leq f'(x) \leq 2$ då $3 \leq x \leq 5$. Bestäm det högsta värde $f(5)$ kan anta.

Eleverna ställs inför att verbalt tolka det formaliserade skriftliga matematiska symbolspråket för funktionsvärdet $f(3) = 2$. Problemet kräver att eleven kan tolka vad som är x - respektive y -värde. Vidare måste de också verbalt tolka symbolen $f'(x)$ och kommunicera om vad det innebär att derivatan är 2. De ska sedan använda en valfri rutin för att beräkna det största värdet som $f(5)$ kan anta. Funktionens definitionsmängd måste vidare kunna tolkas, vilken är presenterad som ett intervall med hjälp av de formella matematiska relationssymbolerna större än eller lika med ($\geq$) och mindre än eller lika med ($\leq$).

Uppgiftens utformning innebär också att eleverna måste finna ett funktionsvärde att utgå ifrån med hjälp av den erhållna informationen. Vidare krävs att eleverna måste välja det största värde derivatan kan anta för att i ett sista steg beräkna det största värde funktionen kan anta då $x = 5$. Läraren informerade eleverna om att uppgiften är hämtat

från ett nationellt prov i Matematik C.⁶⁷ I kursplanen (2000) i Matematik C kan uppgiften kopplas till flera av kunskapsmålen:

kunna förklara, åskådliggöra och använda begreppen ändringskvot och derivata för en funktion samt använda dessa för att beskriva egenskaper hos funktionen och dess graf,

kunna dra slutsatser om en funktions derivata och uppskatta derivatans värde numeriskt då funktionen är given genom sin graf,

kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafitande hjälpmedel. (Skolverket, 2000)

7.2.1 Elevernas förkunskaper och förutsättningar

Samtliga elever i gruppen har i två föregående kurser (matematik A och B) stött på och förväntats kunna hantera det formaliserade symbolspråket för att ange ett funktionsvärde som exempelvis $f(3) = 2$, både för polynom- och exponentialfunktioner, även om funktionsvärden oftare har presenterats som en punkt i ett koordinatsystem (3,2) eller i en värdetabell. Eleverna har under den föregående gymnasiekursen matematik B även arbetat med att uttrycka och tolka intervall och tolka olikhetstecknet. De har i samma kurs mött begreppen riktningskoefficient och ändringskvot när de arbetat med linjära funktioner. Eleverna har också mött visuella presentationer av funktioner i koordinatsystem då de beräknat ändringskvoten för linjära funktioner. Rutiner för att markera funktionsvärden i ett koordinatsystem samt beräkna riktningskoefficienter för linjära funktioner, kan förutsättas vara individualiserat hos eleverna, då det är ett centralt moment i föregående kurs de läst. De beräknade då riktningskoefficienten för linjära funktioner med en grafisk metod, som i undervisningen benämns trappstegsmetoden. De har också mött rutiner för att studera ändringskvoten genom att beräkna riktningskoefficienten för linjära funktioner med hjälp av formlerna $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ respektive

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Eleverna har således mött ett flertal av de olika realisationerna för det betydelsebärande objektet (se fig. 4.5) under tidigare lektionspass. Under en av de observerade lektioner som föregick denna arbetade eleverna efter en gemensam lärarledd genomgång i smågrupper på liknande sätt som under denna aktivitet. Övriga lektioner inledes med lärarledda helklassgenomgångar och därefter hade eleverna så kallat eget arbete med rutinuppgifter läraren valde ut⁶⁸. Dessa uppgifter var oftast framställda av läraren men ibland hänvisades till utvalda uppgifter ur läroboken. Det matematiska

⁶⁷ Uppgiften är i stort sett formulerad som uppgift 14 i kursprovet VT 2002 (ej under sekretess). Uppgiften bedömdes då ligga på nivån väl godkänd (2 VG-poäng) och formulerades: Funktionen f uppfyller följande två villkor

$f(2) = 5 \quad -1 \leq f'(x) \leq 2$

Vilka värden kan $f(10)$ anta? (Bedömd 0 G poäng och 2 VG poäng)

⁶⁸ Gäller de observerade lektionerna inom arbetet med derivata.

innehåll eleverna mötte under dessa tidigare lektioner var repetition av räta linjens funktion och metoder för att beräkna riktnintingskoefficienten (derivatan), beräkning av funktionsvärden i uppgifter presenterade med enbart matematiskt formelspråk, men också med stöd av grafisk mediering. Vidare introducerades eleverna för gränsvärdesbegreppet och det för dem nya matematiska begreppet derivata. Eleverna övade då främst rutiner för att derivera olika polynomfunktioner och härledning av polynomfunktioner av första och andra graden. Symbolen $f'(x)$ har däremot introducerats för eleverna i samband med lärarens helklassgenomgångar på tavlan under fyra av de föregående lektionspassen i kursen. Eleverna har också hanterat symbolen $f'(x)$ när gruppen arbetat med rutiner för derivering av funktioner med hjälp av deriveringsregler och när de övat rutiner för beräkningar av lokala maximi- och minimipunkter för polynomfunktioner (se vidare Appendix C). Sammanfattningsvis innebär uppgiften att eleverna möts av ett formellt matematiskt symbolspråk där flertalet av eleverna ännu inte till fullo är förtrogna med denna algebraiska diskurs. Begreppet derivata har nyligen introducerats och i uppgiften ställs eleverna inför att tolka symbolspråket för funktionens definitions- och värdemängd samt ha tillägnat sig den matematiska diskurs om begreppet derivata som innebär att eleverna kan lösa uppgiften. Då eleverna också måste tolka och översätta symbolspråket till verbalt språk för att kommunicera med varandra, innebär det att vi rimligen kan förutsätta att ett eventuellt lärande då pågår på en metanivå⁶⁹. Lärande på en metanivå innebär här att eleverna är beroende av att ta hjälp av dem som är mer förtrogna med den matematiska diskursen, ”de-som-vet-mer”, snarare än att de här enbart ska kunna förlita sig på sina egna idéer (Sfard & Ben-Zvi, 2007, s. 130, s. 133). I detta fall handlar det om att bli allt mer förtrogen med den matematiska diskursen om derivatan, att kunna tolka, använda och se samband mellan olika representationsformer för att realisera detta abstrakta objekt. Lärarens bidrag, som en fullfjädrad medlem i denna diskurs, är här de skriftliga ledtrådar som ges till eleverna när de ber om hjälp.

7.2.2 Ledtrådarna - lärarens bidrag till elevernas matematiserande

De tre skriftliga ledtrådar som läraren hade förberett beskrivs här:

Ledtråd 1: ”Rita ett koordinatsystem”

Denna första ledtråd uppmanar eleverna att använda koordinatsystemet. Indirekt uppmanas eleverna därmed att byta representationsform från ett formaliserat matematiskt symbolspråk till en grafisk representation av de angivna funktionsvärdena i ett koordinatsystem.

Ledtråd 2: ”Pricka ut punkten (3,2) i koordinatsystemet”

Genom att läraren nu riktar uppmärksamheten mot punkten (3,2), får eleverna möjlighet att associera till att sammanlänka det i uppgiften angivna funktionsvärdet $f(3) = 2$ med punkten (3,2). Detta stärker elevernas möjlighet att se kopplingarna mellan två

⁶⁹ Eng. meta-level learning

alternativa sätt att markera en punkt i koordinatsystemet med ett formellt matematiskt symbolspråk; som punkten $(3,2)$ och som ett funktionsvärde $f(3) = 2$.

Ledtråd 3: "Derivata är k-värdet dvs. lutningen"

Den tredje ledtråden kopplar begreppet derivata till ett för eleverna tidigare känt begrepp k-värde (ändringskvoten). Eleverna har under tidigare lektioner använt det matematiska ordet k-värde när de beräknat ändringskvoten för linjära funktioner. Läraren knyter här det formella skriftliga symbolspråket för derivatan till ett tidigare begrepp riktningskoefficient (k-värde) som eleverna kan förutsättas vara väl förtrogna med när de arbetat med linjära funktioner i föregående kurs, Matematik B.

7.3 Struktur vid redovisningen av empiriska data

För att kunna följa elevernas resonemang i sin helhet när de steg för steg löser uppgiften, delvis med hjälp av lärarens "ledtrådar", har valet gjorts att låta läsaren få tillgång till hela gruppens diskurs när de arbetar med uppgiften. Då den uppgift eleverna arbetar med under lektionen naturligt kan indelas i episoder utifrån vilken matematisk information eleverna har att tillgå ("ledtrådar"), har resultatredovisningen också indelats utifrån dessa. Varje episod inleds med en kort introduktion av den information eleverna har att tillgå och därefter presenteras en transkription av gruppens kommunikation. Därefter följer resultatanalysen som redovisas utifrån forskningsfrågorna; i ett första steg med fokus riktat på interaktionen i gruppens diskurs, i ett andra steg på elevernas matematiserande och i ett tredje steg med fokus inriktat mot de yttranden som här kategoriseras som subjektifieringsprocesser (se fig. 7.1).

Figur 7.1 Översikt av strukturen vid redovisning av resultaten

Forskningsfrågorna leder resultatredovisningen som redovisas i flera steg. Med fokus på elevernas matematiserande studeras elevernas deltagande, användning av matematiska ord och mediatorer, berättelser och rutiner som förefaller främja (eller ibland motverka) effektiviteten och en framflyttning mot den önskade matematiska diskursen. Med ett kognitivt perspektiv på lärande är elevernas möjlighet och förmåga till deltagande i en kommunikation om matematiska objekt tätt sammanflätat med det deltagande som här benämns subjektifiering (Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012). Denna subjektifiering indelas, som tidigare redovisats, i två huvudkategorier, den handlingsorienterade subjektifieringen [AOS] och uttalanden som beskriver en individs egenskaper eller karaktär [IOS] (Wood & Kalinec, 2012).

I diskursanalysen är inte bara verbala uttalanden i fokus utan även röstläge, intonation, pausering och mediering med hjälp av gester. Att även beakta det som eleven inte gör och inte säger antas här vara betydelsefullt, ibland kanske avgörande, för elevernas interaktion och hur den matematiska diskursen utvecklas i gruppen. Det kan då till exempel handla om vägran att delta eller ett nekat tillträde till delaktighet i gruppens matematiserande. De olika roller eleverna väljer att ta förutsätts vara av betydelse för elevernas interaktion och möjlighet att matematisera tillsammans i gruppen för att nå de önskvärda framflyttningarna i den matematiska diskursen.

7.4 Episod 1: Gruppens inledande matematiska diskurs

Grupp A består av de tre eleverna André, Moa och Lisa. När de kommer in i klassrummet blir de ombudda att slå sig ner vid ett runt bord ($d \approx 1,5$ m). André sätter sig på Moas högra sida och Lisa placerar sig bredvid Moa (namnen är fingerade). Moa för anteckningar för gruppen, André tar fram sitt eget block och en penna, medan Lisa inte för några egna anteckningar. Läraren roterar mellan grupperna som alla arbetar samtidigt med uppgiften. Lisa lämnar klassrummet just när gruppaktiviteten inleds och deltar därför inte under de första tre minuterna. Ingen i gruppen kommenterar när hon går ut och inte heller när hon kommer tillbaka. I utdrag 7.1 nedan redovisas gruppens inledande kommunikation under den första episoden. I utdrag 7.1a placerat i Appendix A återfinns ett flödesschema för gruppens kommunikation⁷⁰ som använts som stöd för analysen av gruppinteraktionen.

⁷⁰ När någon gruppmedlem inte närvarar i aktiviteten är markeringen för deras position släckt i interaktionsschemat för episoden (se interaktionschema 7.1a i Appendix A). Läraren roterar i klassrummet och hans närvaro är markerad i flödesschemat endast då han befinner sig vid den aktuella gruppens bord även om läraren kan förutsättas i varje fall delvis ändå uppfatta gruppens kommunikation.

Utdrag 7.1 Episod 1: Elevernas inledande kommunikation när de tilldelas uppgiften presenterad med ett matematiskt symbolspråk (Grupp A)

[2.08]	M:	Ha. Jag tror att vi måste veta att den här inte blir större än 1 eller 2 eller lika med. Det blir någonstans mellan 1 och 2 eller lika med. [Pekar på $1 \leq f'(x) \leq 2$ i uppgiften]	onIOS onM
[2.17]	A:	Hur ska man veta det då? [Tittar upp på Moa]	onAOS
[2.20]	M:	När x är .. är mellan här och här blir det någonstans mellan där. Men grejen är ju att det här i slutet är ju inte deriverat [drar pennan fram och tillbaka under intervallet för x, pekar sedan på $f'(x)$]	onM
[2.55]	A:	Ska vi köra, ska vi ta en? ((avser en ledtråd från läraren))	onN
[3.32]	M:	Men om vi skulle derivera någonting? För det finns inga x på andra sidan. Det kommer och bli 0. [pekar med fingret på $1 \leq f'(x) \leq 2$]	onM
[3.40]	A:	Ja, fortsätter inte 2 ned dit?	onM
[3.45]	M:	Mm *frånvarande röstläge*	onN
[3.54]	A:	Det blir ju 0	onM
[3.55]	M:	För vi sa ju om x blir 3. [pekar samtidigt på $1 \leq f'(x) \leq 2$]	onM
[3.59]	A:	Jaa. *Bekräftande röstläge*	onN
[4.00]	M:	Då blir det där 2, då blir ju det där det högsta som det kan va. Men om x är 5 då kan det ju ändå inte öka då kan det bli 2 också. *tankfullt röstläge* Vi kanske kan ta ledtråd?	onM onN
[4.16]	A:	Jaa. Lärare! [Ropar vänd mot läraren]	onN

7.4.1 Kommunikationsflödet i gruppen

I detta avsnitt kan observeras hur de matematiserande och subjektifierande yttranden är tätt sammanlänkade i gruppens kommunikation. Här belyses hur dessa yttranden förefaller påverka utvecklingen och effektiviteten av gruppens matematiserande (kodade [OnM] eller [OffM]).

Moa inleder med att ta initiativet till att överföra symbolspråket för de två intervallen till verbalt språk. André ber direkt Moa förtydliga hur hon tolkar symbolspråket [2.17] då han ställer en fråga om *hur* Moa vet detta. Denna aktionsinriktade fråga ([AOS]) leder direkt till ett fortsatt matematiserande. I denna inledande sekvens kan vi iaktta hur André efter samtliga av Moas yttranden replikerar med antingen ett aktionsinriktat yttrande eller ett yttrande som bekräftar att han lyssnar t.ex. ”jaa” [3.59]. Dessa yttranden kodas [onN] eller [offN] och är kopplade till elevernas arbete men kan inte kodas som matematiserande eller subjektifierande yttranden.

I sekvensen [3.55]-[4.00] kan vi iaktta att Moas röstläge förändras och hur hennes yttrande visserligen uttalas högt men hur hon matematiserar med sig själv utan att visa intresse för någon av de andra gruppmedlemmarnas deltagande. I interaktionsschemat tydliggörs denna intrapersonella kommunikation med lodräta pilar (Appendix A, utdrag 7.1a). I denna första korta sekvens kan vi också iaktta hur Moa direkt tar initiativet att leda gruppens arbete. Det är hon som håller i pennan och tar initiativet i gruppens matematiserande. Vi kan exempelvis notera att Moa innehar ledarrollen när

André [2.55] föreslår att de ska begära en ledtråd, och då inte får någon respons av Moa som istället bara fortsätter sitt matematiserande. När Moa [4.00] däremot föreslår att de ska begära en ny ledtråd, ropar André direkt på läraren [4.16] för att be om den.

7.4.2 Elevernas matematiserande yttranden

När denna grupp för första gången möter uppgiften kan vi konstatera att ingen av eleverna ha erövrat den diskurs som krävs för att tolka det formella matematiska symbolspråket i den utsträckning som erfordras för att de ska kunna lösa uppgiften. Som vi såg inleder Moa med att ta initiativet till att överföra symbolspråket för de två intervallen till verbalt språk, något André förefaller vara helt överens med henne om att det är ett första nödvändigt steg [2.08] - [2.20]. Moa förstärker det verbala språket genom att också använda gester som mediator för att förtydliga kopplingen och överföringen mellan det formella symbolspråket och ett verbalt språk. När hon ska beskriva att det handlar om ett intervall säger hon: "... den här inte blir i större än 1 eller 2 eller lika med. Det blir någonstans mellan 1 och 2 eller lika med" [2.08]. Samtidigt väljer hon här att gå från att endast använda symbolspråklig presentation för ett intervall, till att med hjälp av pennrörelser visualisera att det handlar om ett intervall. När André sedan ber Moa om hjälp att tolka symbolspråket för intervallet [2.17], säger hon: "När x är, är mellan *här* och *här* blir *det* någonstans mellan *där*..." [2.20], samtidigt som hon återigen använder sig av pennrörelser för att näst intill bildligt visualisera detta intervall. Moa drar pennan fram och tillbaka under det angivna intervallen $3 \leq x \leq 5$, för att därefter göra på samma sätt under intervallet för derivatan $1 \leq f'(x) \leq 2$ för att markera för de andra deltagarna att det handlar om ett intervall [2.20].

André har uppenbara svårigheter att hantera beskrivningen av hur intervallen för derivatan och x -värdena anges med hjälp av olikhetstecken. Men vad verkar då vara elevernas problem när de ska tolka symbolspråket till verbalt språk? Moa tolkar olikhetstecknen "mindre och större än eller lika med" ($\leq$, $\geq$) i stort sett korrekt, men kan inte förmedla detta verbalt med en vedertagen matematisk diskurs. Hon säger: "Jag tror att vi måste veta att den här inte blir större än 1 eller 2 eller lika med. Det blir någonstans mellan 1 och 2 eller lika med" [2.08]. Hennes problem förefaller snarare vara att hantera den förändrade ordföljden vid överföringen från symbolspråket till ett vedertaget, eller i varje fall ett acceptabelt matematiskt verbalt språk. Eleverna har också här svårigheter att hantera symbolen för olikhetstecknet. Ingen av eleverna i gruppen förefaller heller vid första anblicken klara av att tyda det matematiska symbolspråket för beteckningen av derivatan $f'(x)$ och inte heller tolka att det är ett intervall som beskrivs med $3 \leq x \leq 5$. Moa tar visserligen i inledningen av gruppens arbete initiativ till att tolka det formaliserade symbolspråket för beteckningen av intervallet, men använder inte ett matematiskt ordval. Symbolen för derivatan benämns i vaga ordalag med pronomen som "*den här*" och "*det*", samtidigt som hon pekar på symbolen $f'(x)$ [2.08]. Hon använder även ett oprecist, svävande ordval "*här och här*" för siffersymbolerna 3 och 5 [2.20], matematiska ord som eleverna kan förutsättas ha erövrat sedan många år tillbaka.

Men när vi närmare iakttar Moas matematiska diskurs kopplar Moa begreppet derivera till symbolen $f'(x)$ då hon säger: ”*det här i slutet är ju inte derivat*” [2.20] och sedan strax därefter ”derivar” hon det angivna intervallet för derivatan och förkunnar: ”*För det finns inga x på andra sidan. Det kommer och bli 0*” [3.32]. Strax därefter konstaterar Moa att hon är på fel spår då hon med eftertänksamt röstläge säger fundersamt som för sig själv: ”*För vi sa ju om x blir 3 [...] Då blir det där 2, då blir ju det där det högsta som det kan va. Men om x är 5 då kan det ju ändå inte öka då kan det bli 2 också*” ([3.55], [4.00]). Hon uttrycker att hon ser en motsägelse i att de har fått $f'(x) = 0$ och att de ska finna ett största värde funktionen kan anta. I detta läge saknar gruppen någon som kan leda diskursen framåt och Moa håller nu med André om att de behöver be om hjälp från en-som-vet-mer och de får den första skriftliga ledtråden av läraren [4.00].

7.4.3 Subjektifierande yttranden i gruppen

Vi byter nu lins och fokuserar på den kommunikation som här benämns subjektifiering och är inriktad mot deltagarnas egenskaper eller vad de gör.

Moa tar redan i inledningen av arbetet initiativet att leda gruppens matematiserande. Hon markerar redan i episodens första yttrande att hon ser sig själv som ”en-som-vet” i gruppen då hon förkunnar: ”*Ha. Jag tror att vi måste veta att den här inte blir i större än 1 eller 2 eller lika med*” [2.08]. Vid första anblicken kan detta uttalande till synes enbart beskrivas som matematiserande och då klassificeras som [onM] då hon tolkar det formella symbolspråket verbalt. Men om skärpan riktas mot inledningen av repliken hör vi Moa säga så mycket mer. Hon talar om att hon inte är helt säker då hon säger ”jag tror” men samtidigt med det lilla expressiva uttalandet ”ha” ger hon de andra en signal att hon tycker sig kunna klara av att tolka olikheten. Moas uttalande värderar inte direkt en persons egenskaper, men är ett exempel på ett subjektifierande yttrande, där fokus är riktat mot hur en individ gör något, det vill säga hur hon ska klara uppgiften. I analysen kodas detta uttalande som identifiering, [onIOS]. Moa uttrycker att hon ser sig som en person som vet något de andra också ”måste veta” och det är det första uttalande som görs i gruppen. Det kan uppfattas som att hon inte förväntar sig att någon annan av gruppens medlemmar kan leda gruppens matematiserande. Detta antagande stärks då Moa, trots att hon ännu inte till fullo erövrat den matematiska diskurs som krävs för att tolka symbolspråket i uppgiften, tar initiativ till att övergå till att matematisera [onM] direkt därefter. När André vänder sig till Moa och säger: ”Hur ska man veta det då?” [2.17], innebär det att André med denna aktionsinriktade fråga indirekt talar om för Moa att han ser henne som den i gruppen som är mest förtrogen med den matematiska diskursen.

Därefter följer en sekvens [2.17]-[4.00] då Moa står för den kommunikation som ses som matematiserande [onM], medan André i stort sett enbart ställer frågor om varför Moa matematiserar som hon gör [onAOS]. I detta skede förefaller ingen av de tre eleverna, inte heller Moa, kunna bidra till att den matematiska diskursen flyttas fram. Det som nu följer, när eleverna inte har någon som kan leda diskursen, är att två av gruppmedlemmarna övergår till uttalanden som här definieras som handlings-

orienterad subjektifiering [AOS]. Den tredje eleven, Lisa, sitter fortfarande tyst, en tystnad som skulle kunna tolkas som att hon inte tycker sig ha något att tillföra gruppen. Det är då lika rimligt att anta att Lisa ännu inte har kommit in i gruppens arbete med uppgiften. André föreslår gruppen att de ska ta hjälp för att komma vidare [2.55], och ger de andra i gruppen en tydlig signal på att han inte anser sig kunna bidra till gruppens matematiserande. Moa ansluter sig strax därefter till André's uppfattning att gruppen behöver stöd från en mer erfaren deltagare, i det här fallet läraren. Hon bekräftar nu att hon inte heller ser sig eller någon annan i gruppen kunna bidra till att gruppen ska komma vidare utan att ta hjälp genom att hon föreslår att de ska ta hjälp av en-som-vet-mer [4.00]. André vänder sig då direkt mot läraren och ropar hans namn för att påkalla uppmärksamhet för att gruppen ska få en ledtråd [4.16].

7.5 Episod 2: Gruppens diskurs efter tilldelning av den första ledtråden

När eleverna ber läraren om sin första ledtråd får de en lapp med instruktionen: "Rita ett koordinatsystem" [5.00]. Därigenom uppmanas de indirekt att byta representationsform från det formella symboliska formelspråket till att använda en grafisk representation för funktionen. Koordinatsystemet är tidigare känt för eleverna då de använt detta ikoniska symbolspråk för att markera punkter (funktionsvärden) och studera grafer för första - och andragsgradsfunktioner.

Utdrag 7.2 Episod 2: Eleverna erhåller den första ledtråden "Rita ett koordinatsystem"⁷¹ (Grupp A)

	A:	*fnyser* Rita ett koordinatsystem *skrattar till*.	onN
[5.00]		[Läser lappen med ledtråden högt med ett besviket tonläge] Okey, det hjälpte. Var det inte $f(x)$ som blir y ?	onIOS onAOS
[5.09]	M:	Mm	onN
[5.14]	A:	Ja, då blir y 3.	onM
[5.15]	M:	Va?	onN
[5.16]	A:	Är det inte det?	onAOS
[5.18]	M:	Nä, x är 3	onM
[5.20]	A:	Är x 3? Okey. Kollar du på den här, den första? [Pekar på $f(x)$ i "För en funktion $f(x)$ gäller.."]	onN onAOS
[5.23]	M:	Mm	onN
[5.35]	A:	Ser faan *gäspar i talet* ut som vi måste räkna	onN
[5.38]	M:	Då blir det att y är 2	onM
[5.41]	A:	Men var det inte $f(x)$ som blir y ?	onAOS
[5.46]	M:	Jo, alltså själva den här, den man pluggar in här [Ringar in $f(x)$ och pekar sen på x i "För en funktion $f(x)$ gäller	onM

⁷¹ Flödesschemat 8.2a redovisas i Appendix A.

	att ...”]	
[5.48]	A: Mm *bekräftande tonläge*	onN
[5.49]	M: Där ligger $f(x)$ [Pekar på punkten i koordinatsystemet]	onM
[5.51]	A: Ja *bekräftande tonläge*	onN
	Så hela det här är y ? [Pekar på $f(x)$]	onAOS
[5.54]	M: Ja, det är y *bekräftande tonläge* (2 s)	onM
	så f av 3 är lika med 2, °då måste ju y bli 2 eftersom f av 3°	onM
	tankfullt röstläge	

7.5.1 Kommunikationsflödet i grupp A under andra episoden

Under denna episod kan vi konstatera att det fortfarande bara är två av eleverna som deltar i gruppens verbala kommunikation. Lisa sitter vid bordet och förefaller lyssna och vare sig hon eller någon av de två övriga gruppmedlemmarna verkar reagera på detta. Under denna episod är det Moa som står för yttranden i gruppen som klassificeras som matematiserande ([5.18], [5.23], [5.46], [5.49]). Om man närmare studerar de aktionsorienterade yttrandena, har André nu tagit en aktiv roll i gruppen som en nyfiken som ställer frågor till Moa om varför eller hur hon matematiserar i stort sett i anslutning till varje matematiserande yttrande Moa gör (se t.ex. [5.20], [5.41], [5.51]). Dessa frågor, det vill säga de yttranden som här kategoriseras som aktionsorienterad subjektifiering [AOS], leder till att gruppens matematiska diskurs förtydligas på en metanivå, vilket kan antas erbjuda tillfällen till lärande för övriga elever i gruppen. Dessa förtydliganden innebär också att eleverna använder ytterligare mediatorer (se vidare avsnitt 7.5.2). Även i denna episod dyker en sekvens upp när Moa sänker röstläget och förefaller övergå till att tala högt för sig själv som för att bekräfta för sig själv det hon strax tidigare förmedlat till André [5.54].

7.5.2 Elevernas matematiserande under den andra episoden

När eleverna får ledtråden ”Rita ett koordinatsystem!” uttrycker Andrés röst besvikelse, medan Moa direkt påbörjar arbetet med att rita upp koordinatsystemet i sitt block. André förefaller associera det matematiska ordet ”koordinatsystem” till funktionens y - och x -värden, då han återigen vänder sig till Moa och frågar: ”Var det inte $f(x)$ som blir y ?” [5.00]. Denna fråga kommer att ändra inriktningen i elevernas i matematiserande från att ha tolkat de angivna intervallen till att markera funktionsvärden som punkter i koordinatsystemet.

Ledtråden eleverna erhåller innebär att gruppens matematiska diskurs leds framåt. Bytet av representationsform från ett algebraiskt till ett grafiskt (ikoniskt) symbolspråk innebär en framflyttning av den matematiska diskursen, trots att eleverna inte har erhållit någon annan information än denna ledtråd. Den innebär att eleverna uppmanas att använda koordinatsystemet, men också indirekt uppmanas att använda sig av en grafisk presentation av funktionen. Eleverna ger sig nu i kast med att tolka symbolen $f(3) = 2$ och kan nu överföra detta funktionsvärde från ett algebraiskt till ett geometriskt register då de markerar punkten (3,2) i koordinatsystemet. Eleverna har i den tidigare episoden främst brottats med att tolka den information de erhållit angiven med

ett matematiskt formellt symbolspråk. Ingen i gruppen kunde tidigare koppla samman symbolspråket för funktionsvärdet $f(3) = 2$ med symbolspråket för punkten (3,2). Inte heller förde någon av dem på tal att de skulle kunna använda en grafisk representation som stöd för matematiserandet. Det är nödvändigt för eleverna att finna ett funktionsvärde att utgå från för att sedan kunna beräkna det största värde som $f(5)$ kan anta, det vill säga för att lösa problemet.

När eleverna nu använder sig av koordinatsystemet innebär det att de nu tolkar x-respektive y-värde i $f(3) = 2$ för att markera punkten (3,2). I sekvensen [5.38]-[5.54] när eleverna ska tolka det matematiska symbolspråket $f(3) = 2$ uppstår en situation då eleverna är oense om den gällande matematiska diskursen. Det bidrar till att André med stöd av Moa får en för honom nödvändig hjälp att tolka vad som är x- respektive y-värde, och därmed komma vidare i sitt matematiserande. Båda eleverna använder då ytterligare visuella mediatorer för att förstärka vad de talar om i form av gester med hjälp av att peka och stryka under symboler med en penna ([5.20], [5.46]). Två oförenliga diskurser möts här och bidrar till en diskursiv framflyttning. Dessa situationer när eleverna inte är överens om den rådande diskursen, benämner Sfard (2008) som kom-mognitiva konflikter och beskriver som en förutsättning för diskursiva framflyttningar och lärande. Då Moa tolkar symbolspråket $f(3) = 2$ verbalt genom att förkunna att ”då blir det att y är lika med 2” [5.38], uttrycker André tydligt att han är förbryllad när han frågar: ”Men var det inte $f(x)$ som blir y?” [5.41]. Om vi uppmärksam lyssnar till Andrés fråga kan vi ana oss till att han har samma problem att avläsa symbolen för likhetstecknet som eleverna uppvisade tidigare när de skulle tolka olikhetstecknet (se [3.32]). Detta ställer återigen till hinder för hans tolkning av symbolspråket $f(3) = 2$ för funktionsvärdet, då han ser likhetstecknet som en process. Moa besvarar Andrés fråga om ”vad som blir y” genom att ringa in hela $f(x)$ med pennan och sedan peka på x-värdet och säga: ”Jo, alltså själva *den här*, den man pluggar in här” [5.46]. Därefter använder Moa sig av ett byte av visuell mediator för att förklara och pekar på punkten (3,2) i koordinatsystemet [5.49]. André förefaller återigen behöva bekräftelse på att han har uppfattat rätt då han pekar på symbolen $f(x)$ och säger: ”Ja. Så *hela det här är* y?” [5.51]. Moa bekräftar direkt: ”Ja, det *är* y...” [5.54].

7.5.3 Subjektifieringsprocesser under den andra episoden

I denna sekvens är Moa den elev som tydligt har rollen som ”den-som-vet-mest” och hon står också för flertalet av de yttranden som här klassas som matematiserande [onM] (se utdrag 7.2). Andrés uttalanden är däremot, till skillnad från Moas, huvudsakligen inriktade på att ställa frågor till Moa om varför hon gör något eller hur hon vet det [AOS]. Moa tar tydligt rollen som den elev som är mest förtrogen med den matematiska diskursen då André felaktigt påstår att ”... y blir 3” [5.14] genom att direkt rätta honom med att säga: ”Nä, x är 3” [5.18]. Här visar sedan André genom sina frågor att Moa är den elev i gruppen han förlitar sig på, då han nu ber Moa förklara hur hon tolkar symbolspråket [5.20] och samtidigt pekar på symbolen $f(x)$ och $f(3) = 2$ för att visa vad han inte förstår. Moa rättar André genom att slå fast: ”Då blir det att y är 2” [5.38]. André nöjer sig inte bara med att acceptera Moas förklaring utan

visar en nyfikenhet och vilja att förstå varför och *hur* Moa motiverar att han har fel genom att fråga Moa om det som förbryllar honom: "Men var det inte $f(x)$ som blir y ?" [5.41]. Detta leder till att Moa tar rollen som den-som-vet-mest och motiverar för André hur hon tolkar vad som är x - respektive y -värde när hon tolkar det matematiska symbolspråket $f(3) = 2$.

Den kommunikation som kan antas i högsta grad påverka elevens deltagande i matematikundervisningen och därmed också lärandet, är de yttranden som handlar om individen och inte vad hon gör ([onIOS] / [offIOS]). I grupp A ser vi flera exempel på icke verbal kommunikation som definieras som identifiering, en kommunikation som kan vara mycket svår att uppfatta om man inte är deltagare i gruppen. I inledningen av denna episod ger André en signal till de andra då han fnyser till och dessutom förstärker det han vill förmedla med ett paralingvistiskt uttrycksmedel då han med ironi i rösten säger: "Okey, det hjälpte" [5.00]. Fnysningen som föregår uttalandet och det korta skrattet bidrar till att understryka för de andra vad han vill förmedla; att han inte ser sig som en elev de andra ska räkna med har något att bidra med.

Den tredje eleven i gruppen, Lisa, har suttit tyst under inledningen av arbetet, men förefaller lyssna. Lisa signalerar därmed indirekt till de andra att hon inte är någon som de ska förvänta sig kunna bidra till gruppens matematiserande. De andra eleverna i gruppen tar i detta initiala läge inte någon notis om henne, och förefaller inte heller förvänta sig att hon ska delta då de inte tilltalar henne. Vi kan inte förutsätta att Lisa inte lyssnar till de andra eleverna, men då hon inte deltar i någon för de andra deltagarna förnimbar kommunikation, innebär det att hon vare sig bidrar till den matematiska kommunikationen eller påverkar dess innehåll.

7.6 Episod 3: Gruppens diskurs då eleverna fått den andra ledtråden

Under denna sekvens kommer eleverna att få tillgång till sin andra ledtråd där de uppmanas: "*Pricka ut punkten (3,2) i koordinatsystemet*". Denna rutinuppgift att markera punkter och funktionsvärden i koordinatsystem har eleverna arbetat med under tidigare gymnasiekurser. I och med att de får denna ledtråd får de också indirekt möjligheten att koppla ihop det i uppgiften angivna funktionsvärdet $f(3) = 2$ med den angivna punkten (3,2). Denna grupp kommer inte, i motsats till de flesta andra elevgrupperna, behöva be läraren om denna ledtråd. Grupp A klarar under Moas ledning på egen hand av att överföra symbolspråket $f(3) = 2$ till en punkt (3,2) i koordinatsystemet [7.28].⁷²

⁷² Flödesschemat för episoden återfinns i Appendix A.

Utdrag 7.3 Episod 3: Markerar punkten $f(3) = 2$ utan att begära ledtråden (Grupp A)

[6.13]	A:	Sen har vi 1 är mindre än f prim x som är större än 2, y eh. (4s) Deriverar man den så åker 2:an iväg och det blir noll. [Pekar på intervallet $f'(x)$] (7s) Jag fattar inte! (34s) Vad gör du nu? [André sneglar på Moa som markerar punkter i koordinatsystemet, läraren kommer fram till gruppen]	onM onIOS onAOS
[7.28]	M:	Ja ska se [Sätter ut punkterna (3,2) och (5,2) i koordinatsystemet]	onN
[7.37]	Lä:	Nu slapp ni i varje fall köpa nästa ledtråd! [Läraren passerar, sneglar ner på det Moa skrivit i blocket]	onN
[7.39]	M:	Jaa. (60s) ((Alla sitter tysta, förefaller tänka))	onN
[8.35]	L:	Har alla dom här värdena nånting med det vi ska ta fram och göra? [Sveper med handen över uppgiftslappen]	onAOS
[8.40]	M:	Ja, det är klart, för det bestämmer ju det högsta värdet som f av 5 kan få och y	onIOS onM
[8.46]	L:	Mm, men är det inte den 5:an vi ska utgå ifrån, eller? [Pekar på uppgiftstexten: "Bestäm det högsta värde $f(5)$ kan anta"]	onAOS
[8.52]	M:	Kanske, jag vet inte	onIOS
[8.55]	A:	*gäspar* Det är för tidigt för det här!	offN
[9.20]	M:	Nu vet vi att den här kommer. Det där är f 3 är 2 Det är den här [Sveper med pennan över 1:a kvadranten, markerar (3,2)]	onM
[9.26]	A:	Mm, y sen? (3 s) . För gör man så blir det väl så, det blir 0 eller x ? (4 s)	onAOS onM
[9.42]	M:	Jaa, då blir det att x är 2 och y är 0. (2 s)	onM
[9.45]	A:	Mm	on N
[9.46]	M:	Då blir x där (9s) [Markerar (2,0) sammanbinder dem]	onM
[9.57]	A:	Sen hade vi en sista	onN
[10.02]	M:	x är mellan 3 och 5	onM
[10.04]	A:	Jaa	onN
[10.08]	L:	4	onM
[10.09]	M:	*fnyser svagt* jaa men hm/	onIOS
[10.11]	L:	tror jag är en enkel lösning	onN
[10.14]	M:	Men det kan ju också va 3 eller 5 för det är lika med eller större, hm	onM
[10.29]	A:	(4s) Jaha	onN
[10.37]	M:	Det lär inte va en förstgradsekvation.	onM
[10.41]	A:	Jaa	onN
[10.42]	M:	Det lär vara en andragradsekvation	onM
[10.46]	A:	Jaa	onN
[10.48]	M:	med en böj så det lär ju bli/ [Ritar i koordinatsystemet]	onM
[10.51]	A:	Mm (7 s)	onN
[11.48]	M:	Är y , y prim 1 är lika med 1 eller större än 2, eller alltså 1 det är 1 eller 2 nästan mellan det	onM
[11.57]	A:	Mm	onN
[11.59]	M:	om x är 0. Så då borde den va här nästan	onM
[12.02]	A:	Jaa	onN
[12.10]	M:	Men om/ o sen vet vi ju att om $x = 5$ eller x är 3 är y 2, då har vi den här	onM

[Pekar i koordinatsystemet]		
[12.21]	A: Jaa, o då måste y vara 2	onM
[12.23]	M: Ja, där är y 2	onM
[12.25]	A: Jaa (5s). Man ska inte ta ner den hit då för o veta? (10s) [Sveper med pennan från $f(3)$ till intervallet för $f'(x)$]	onAOS
[12.39]	Lä: Det där är vad ni har kommit på. [Läraren lägger ledtråden "Pricka ut punkten (3,2) i koordinatsystemet" på gruppens bord]	onN
[12.45]	M: (3s) Mm, det har vi gjort (3,2). (21s) [Eleverna tittar ner på blocket] ((förefaller tänka under tystad))	onN

7.6.1 Elevernas interaktion under den tredje episoden

Under denna episod kommer Lisa under några kortare sekvenser delta i gruppens diskurs. Första gången hon yttrar sig befinner sig läraren tillfälligt vid gruppens bord [8.46]. Lisa ställer då en fråga riktad till gruppen om hur de ska använda den information de tillhandahållit presenterad med ett matematiskt formelspråk. Moa besvarar då Lisas yttrande med ett subjektifierande yttrande och en värdering av Lisa (se vidare kapitel 8.6.3).

Under denna episod fortsätter det interaktiva kommunikationsmönster som tidigare beskrivits, men Andrés roll har förändrats till att bli en mer passiv deltagare. I de tidigare episoderna ställde han många aktionsinriktade frågor om hur och varför [onAOS], medan han nu allt oftare istället ger respons genom yttranden av typen [onN] med ord som "mm" och "jaa" [9.42]-[10.04], ord som bekräftar att han lyssnar. I den sekvens som därefter följer är det svårt att avgöra om Moas kommunikation är intrapersonell, det vill säga om hon överhuvudtaget kommunicerar med de övriga gruppmedlemmarna ([10.04]-[12.21]). Efter drygt två minuter har denna sekvens åter markerats som interpersonell, då André återigen ger Moa en tydligare respons på hennes matematiserande [12.21].

7.6.2 Deltagarnas klassrumsdiskurs med fokus på elevernas matematiserande

I denna episod tar André initiativet att bidra till gruppens matematiserande [onM] då han försöker tolka det formella matematiska symbolspråket ($1 \leq f'(x) \leq 2$) för derivatans intervall: "Sen har vi 1 är mindre än f' prim x som är större än 2 y [...] Deriverar man den så åker 2:an iväg och det blir noll" [6.13]. Elevers svårigheter att hantera läsriktningen när han ska överföra det skriftliga symbolspråket till en acceptabel verbal diskurs är uppenbar [6.13]. Han har liknande svårigheter som Moa påvisade med läsriktningen [2.08], men han tolkar och uttrycker verbalt symbolerna "mindre än", "större än" och " f' prim x ". Men trots att André visar att han kan tolka olikhetstecknet, innebär de problem han har med att hantera den avvikande syntaxen som används i formelspråket jämfört med skriftspråket, att han verbalt kommunicerar en felaktig tolkning av intervallet [6.13]. Detta kan jämföras med Moas vaga ordval, men ändå i stort sett "korrekta" tolkning av ett intervall några minuter tidigare då hon beskriver intervallet högt: "När x är (2s) är mellan här och här blir *det någonstans mellan där*" [2.20]. Som stöd för sin kommunikation använder hon istället visualisering av

intervallet med hjälp av pennan. Moa talar också om att visualiseringar fungerar som stöd för sitt matematiserande på Andrés fråga vad hon gör [6.13].

Då Moa redan tidigare under denna episod har överfört det matematiska symbolspråket $f(3) = 2$ till en punkt i koordinatsystemet [5.49] behöver inte gruppen få sin andra ledtråd av läraren med texten ”Pricka ut punkten (3,2) i koordinatsystemet”. När Moa under tystnad markerar punkter i koordinatsystemet frågar André vad hon gör och hon motiverar sitt val av att använda sig av koordinatsystemet för att studera punkter: ”Jag ska se” [7.28]. Moa uttrycker verbalt att hon kompletterar symbolspråket för att ”se”. Läraren passerar i detta läge eleverna och observerar att de har markerat punkten (3,2) i blocket. Han bekräftar då att eleverna är på rätt spår med att säga: ”Nu slapp ni i varje fall köpa nästa ledtråd” [7.37]. Vad läraren inte uppfattar är att Moa också har markerat punkten (5,2) (se fig.7.2).

Figur 7.2. Elevernas redovisning på Moas arbetsblad vid tiden [8.42]
(den svagt synliga grå skriften är ännu ej skriven av eleven)

I denna sekvens kommer gruppen inte längre att ha någon som leder matematiserandet framåt, och eleverna hamnar bildligt sagt i en återvändsgränd. Gruppen kommer in på fel spår då André återigen tolkar olikheten felaktigt när han bidrar till matematiserandet [onM] genom att ”derivera” det angivna intervallet för derivatan: ”Sen har vi 1 är mindre än $f'(x)$ som är större än 2 [...] Deriverar man den så åker 2:an iväg och det blir noll” Moa markerar nu punkten (3,2) och (5,2) i koordinatsystemet [7.28] (se fig. 7.2). Det förefaller som om hon lyssnar på Andrés förslag att derivatan är 0 och y-värdet därför blir oförändrat. Ett alternativ är att hon felaktigt har tolkat derivatans största värde ($f'(x) \leq 2$) som det högsta värdet som $f(x)$ kan anta. Men gruppens fortsatta matematiserande ger oss svaret när André, som har suttit tyst några minuter, nu återigen med ett vagt ordval fortsätter spinna på det förslag han presenterade tidigare [6.13]. André deltar nu inte i gruppens kommunikation under några minuter utan fortsätter arbeta med den felaktiga tankegång han påbörjade vid tiden [6.13]. Han skriver först i sitt block att $1 \leq f'(x) \leq 2$ och sedan ”deriverar” han 2:an efter olikhets-

tecknet och skriver $1 \leq f'(2) \leq 0$. Han behandlar således symbolspråket $f'(x) \leq$ och olikhetstecknet som om han *ska* derivera en funktion. Moa tolkar då något förvånande ”den deriverade” 2:an som att denna ”derivata” nu är funktionens y-värde. Moa har också nyligen uttryckt tydligt att hon inte förstår [8.52], vilket innebär att den elev som tidigare tog rollen som den-som-vet-mest, nu inte har något mer att tillföra gruppen. I detta läge kan vi bara konstatera att ingen av eleverna i gruppen förmår att föra den matematiska diskursen framåt.

7.6.3 Subjektifierande yttranden under den tredje episoden

Den kommunikation som definieras som subjektivering, tar sig olika uttryck i elevernas kommunikation. Vi har sett exempel på hur elever kommunicerar, nästintill fördolt, med hjälp av paralingvistiska signaler och därigenom förmedlar till andra elever hur de ser på sig själva och sina kamraters matematiserande under lektionerna [onIOS]. I nedanstående sekvens kan vi återigen se ett exempel på hur dessa subjektiveringsprocesser som ständigt pågår är tätt sammanvävda med elevernas matematiserande.

Lisa, som suttit helt tyst under gruppdiskussionen riktar under denna episod för första gången en fråga till gruppen. Med den analytiska linsen riktad mot de subjektifierande yttrandena studerar vi nu en kort sekvens ur gruppens diskurs. Lisa pekar med hela handen på uppgiftspapperet och säger: ”Har alla dom här värdena nånting med det vi ska ta fram och göra?” [8.35]. När Lisa ställer en aktionsinriktad fråga [onAOS] kopplad till uppgiften till Moa [8.35], replikerar Moa: ”Ja, det är klart, för det bestämmer ju det högsta värdet som f av 5 kan få och y ” [8.40]. Moa besvarar visserligen Lisas fråga men vid en närmare betraktelse av det första inledande yttrandet ser vi att då Moa använder ordet ”klart” som sedan följs av ”ju” förmedlar hon samtidigt att det är något som Lisa borde begripa och Moa själv ser som självklart. Detta yttrande innebär en tydlig subjektivering (Moa ^{Lisa} Alla)⁷³ då Moa indirekt värderar Lisas bidrag till diskursen som något som redan är självklart. Signalen till Lisa blir att hon ingenting har att tillföra gruppen. Hennes uttalande kan också ses som en värdering av Lisas grupptillhörighet.

I denna sekvens sätts en kedja av uttalanden igång som domineras av aktions- och identitetsorienterad subjektivering. Lisa ger gruppen ett förslag på en väg att gå vidare [8.46]. Moa reagerar med att direkt replikera med att hon inte vet hur hon ska gå vidare genom att identifiera sig själv som en-som-inte-vet [AOS] [8.52]. André fäller i nästa replik kommentaren: ”Det är för tidigt för det här” [8.55], med vilken även han uttrycker att han inte har något att tillföra gruppens matematiserande [AOS].

Men det är långt ifrån alltid det är nödvändigt att behöva ”läsa mellan raderna” för att studera hur denna subjektivering som pågår i gruppens diskurs i högsta grad kan antas påverka elevernas deltagande och därmed också lärandet. I elevernas matematiska aktivitet behöver vi inte lyssna länge förrän vi hör andra yttranden av detta slag,

⁷³ Moa ^{Lisa} Alla: Utläses som att Moa är sändaren, objektet för yttrandet är Lisa och mottagare är alla i gruppen.

yttranden som lärare och elever säkerligen känner igen från matematikklassrummet. I inledningen av denna sekvens värderar André sin egen förmåga till matematiserande när han utbrister: "Jag fattar inte!" [6.13]. Denna typ av uttalande klassificeras som identitetsorienterad subjektifiering [onIOS]. Yttrandet är ett exempel på hur eleven i sin kommunikation med andra i gruppmedlemmar identifierar sig som en-som-inte-fattar direkt kopplat till den matematiska aktiviteten.

Vi kan också lägga märke till Lisas signaler till gruppen då hon nu för första gången deltar i den matematiska diskursen, från att tidigare endast agerat som en betraktare. Om en elev inte deltar i en gruppaktivitet kan detta tolkas av andra som att hon ser sig som en elev som inte uppfattar sig som delaktig eller inte har legitimitet att delta. Några minuter senare försöker Lisa återigen delta i gruppens matematiserande. Moa uttrycker då med en lätt, nästan inte hörbar fnysning att hon inte ser Lisas bidrag som något av värde [10.09]. Detta innebär återigen en värdering av Lisas bidrag till gruppens matematiserande och en markering som kan tolkas som att hon inte ser Lisa som en fullvärdig medlem i gruppen. Men Moa behåller ändå rollen som den som tar ansvar för gruppens matematiserande då hon direkt därefter förklarar för Lisa varför hon har fel [10.14].

7.7 Episod 4: Eleverna erhåller den tredje ledtråden

I denna sekvens tar gruppen återigen hjälp av läraren när de inte kan komma vidare i sitt matematiserande. De får nu en lapp med ytterligare en skriftlig ledtråd (den tredje): "Derivata är k-värdet dvs. lutningen". Eleverna kan förutsättas vara väl förtrogna med begreppet riktningskoefficient för den räta linjens funktion, då detta ingått som ett centralt moment i föregående gymnasiekurs Matematik B. När eleverna erhåller denna ledtråd kopplar de ihop det matematiska ordet derivata, det i uppgiften tidigare presenterade formella matematiskt symbolspråket $f'(x)$ och det matematiska ordet k-värde (riktningskoefficient). Elevernas matematiserande kommer nu att ändra fokus. Vi kan studera om den matematiska diskursen utvecklas i önskvärd riktning tätt sammanvävd med den subjektifierande diskursen som belyser elevernas sociala interaktion.

Gruppens kommunikation under episoden redovisas i sin helhet⁷⁴, i utdrag 7.4 och flödesschemat 7.4a är placerat i Appendix A. Resultaten presenteras som tidigare inledningsvis med fokus på interaktionen, därefter elevernas matematiserande och slutligen de subjektifierande yttrandena i diskursen.

⁷⁴ När inspelningen hade stängts av inspelades ytterligare ett yttrande i elevernas audiovissuella penna. André ber då Moa att förklara allt långsamt ytterligare en gång.

Utdrag 7.4 Episod 4: Får ledtråden ”Derivatans k-värde dvs. lutningen”⁷⁵ (Grupp A)

[13.17]	M:	Högsta värdet 5 kan anta, högsta värdet 5 kan/(5s) [Moa ritar en linje $x=5$, och $y=5$] ((se fig. 7.3))	onM
[13.30]	A:	Är 2 är? (10s) [Läraren passerar och lägger ledtråd 3 på bordet]	onM
[13.47]	A:	Men alltså derivatan är k-värdet det vill säga lutningen [Tar papperet med ledtråden och läser högt]	onN
[13.53]	M:	mm. Så k-värdet är nånstans mellan 1 och 2 eller lika med [Tittar på papperet och på $1 \leq f'(x) \leq 2$]	onM
[13.54]	A:	Jaa	onN
[13.55]	M:	Då kommer den gå uppåt	onM
[13.59]	A:	Jaa, då får vi testa	onN
[14.01]	Lä:	Vad sa du, Moa? ((läraren uppfattar ett yttrande på avstånd))	onN
[14.03]	M:	Vad sa du?	onN
[14.06]	Lä:	Vad sa du? Säg en gång till! [Läraren passerar]	onN
[14.10]	M:	Derivatans k-värde	onM
[14.12]	Lä:	Vad sa du sen?	onN
[14.13]	M:	Mellan eller lika med nått mellan 1 eller lika med 1 eller 2.	onM
[14.16]	Lä:	Jaa, okey	onN
[14.17]	M:	Eller? Jag vet inte om det stämmer, men?	onIOS
[14.19]	L:	Mind fuck!	onIOS
[14.20]	Lä:	De e bra	onIOS
[14.22]	A:	Derivatans k-värde det vill säga lutningen. [läser från uppgiftspapperet] Är det här som är lutningen då? [Pekar på samtidigt på $1 \leq f'(x) \leq 2$]	onN onAOS
[14.32]	M:	Mm	onN
[14.38]	L:	Och det där det man bygger på. Eller? [Pekar på intervallet för x]	onM onAOS
[14.51]	A:	Alltså, jag är helt lost!	onIOS
[14.56]	L:	Man ser ju inte dom här talen dom vanliga lektionerna. Det är ju sånt här jag har svårt med (suckar)	onN onIOS
[15.12]	A:	Men hur ska vi gå vidare då för jag menar /	onAOS
[15.36]	A:	Vi ska lösa det här, ja vet inte ens hur vi ska gå vidare från det	onIOS
[15.41]	L:	Kan vi inte testa, testa olika lösningar?	onAOS
[15.56]	L:	Kan man säga att nånting när, nej, men alltså kan man använda 1, komma nånting y? [läraren återkommer till gruppen]	onM
[15.59]	Lä:	Det där det där strecket där, det markerar?	onAOS
[16.05]	M:	Det markerar?	onN
[16.08]	Lä:	Vad markerar det strecket? [Läraren pekar på $y=1$]	onAOS
[16.10]	M:	Det högsta värdet f 5 kan anta	onM
[16.13]	Lä:	När x är va 5? Ja okey, det är bra.	onAOS on IOS

⁷⁵ Av utrymmesskal används förkortningar av deltagarnas namn i detta utdrag. M står för Moa, A för André, L för Lisa och Lä för Läraren.

	Vad markerar det strecket? [Pekar på linjen $y=5$ som är ritad i koordinatsystemet]	onAOS
[16.20]	M: Nää. Jag vet inte vad y var *skrattar* men det kan ju va högre också	onAOS onM
[16.28]	Lä: Det ser väldigt bra ut.	onIOS
[16.32]	L: Sweet love. Men den här skulle man inte kunna ((ord faller bort))	onIOS
[16.45]	M: Men den är inte så stor. Man kan ju säga att det inte är så stor chans eftersom alla y är heltal. Men det skulle ju kunna va 1,5.	onN onM
16.49	L: Det är fortfarande x , y vi inte vet vad det liksom är	onM
[17.00]	M: (4s) När kolla nu! K-värdet blir alltså nånting, nånstans 1 eller 2, nånstans mellan där [pekar på intervallen för x och $f'(x)$]	onN onM
[17.06]	A: Mm	onN
[17.07]	M: När x är mellan 3 eller å 5.	onM
[17.11]	A: Mm	onN
[17.14]	M: Så när x är mellan 3, 3 x har vi ju 3 här [pekar i koordinatsystemet]	onM
[17.16]	A: Mm	onN
[17.17]	M: mellan 3 och 5. När x är mellan 3 och 5! [Följer med pennan längs y -axeln] Lärare!	onM onN
[17.24]	A: Mm	onN
[17.26]	M: Då kommer k -värdet antingen och va nånstans mellan 1 och 2. Det högsta är 2. Så det högsta värdet x kan ha måste ju va att den stiger med <i>två gånger på varje</i> [pekar i uppgiften på derivatans värden och därefter i koordinatsystemet]	onM
[17.36]	A: Mm	onN
[17.37]	M: Så, då stiger den lite på första, två [ritar grafen samtidigt som hon talar] (se fig. 7.4)	onM
[17.39]	A: Mm	onN
[17.42]	M: och så stiger den dit upp på andra för o få 5.	onM
[17.44]	A: Mm	onN
[17.45]	M: Där [visar i grafen]	onM
[17.47]	A: Mm	onN
[17.50]	M: typ nånting	onN
[17.52]	A: Mm	onN
[17.54]	M: kan anta är 1,2,3,4,5,6,7. [Räknar, följer samtidigt med pennan efter y -axeln] Lärare ⁷⁶ ! Stämmer det här eller?	onM onN
[18.06]	M: Är det att det högsta värdet som $f(5)$ kan anta är 7	onM
[18.10]	Lä: Jaa, det är det va? Vänta nu, 7?	onN onM
[18.14]	M: För om k värdet är nånstans mellan 1 och 2 i intervallet mellan 3 och 5.	onM
[18.17]	Lä: Mm	onN

⁷⁶ Eleven kallar läraren vid förnamn.

[18.18]	M:	Då måste man ju utgå från det högsta	onM
[18.21]	Lä:	Ja det är rätt tänkt	onAOS
[18.24]	M:	Innebär det på 3 och går upp på 2 gånger?	onM
[18.28]	Lä:	Naa, jag förstår hur du tänker.	onN
		Eh. Du tänker helt rätt.	on IOS
		Men det är bara ett litet, litet tankefel här, på slutet.	onN
		För det är precis som du säger, att den går upp 4 steg.	onM
		Du har helt rätt där.	onIOS
[18.49]	M:	Ja men, om det högsta är.. ä värdet är 5 det kan anta? (5s) För det här är ju f av 5, 5:an är ju f av 5	onM
[19.06]	Lä:	Va?	onN
[19.07]	M:	Femman måste ju va f av 5 här. För då kan vi inte utgå därifrån [pekar i grafen på linjen $y=5$]	onM
[19.10]	Lä:	Nej, nej, du utgår från den där punkten precis som du säger. Men vad är x i den punkten?	onM onAOS
[19.18]	M:	3	onM
[19.20]	Lä:	Och y är?	onAOS
[19.22]	M:	2. (2 s) Ja det blir 6.	onM
[19.25]	Lä:	Tack	onN
[19.29]	M:	(2s) Det var mitt koordinatsystem som va lite ja/ Så vi har klarat det nu?	onN onAOS
[19.30]	Lä:	Jepp	onN

7.7.1 Gruppdeltagarnas interaktion under den fjärde episoden

I denna avslutande episod kommer gruppen att begära sin tredje ledtråd av läraren vilket leder till att denna elevgrupp finner en lösning på uppgiften och därefter avslutar sitt arbete. Läraren går tidigt under episoden in i gruppen efter att han hört ett uttalande från Moa. Han vänder sig då direkt till henne för att få henne att upprepa uttalandet: ”Då kommer den gå uppåt” [13.55], vilket inte lyckas [14.01]-[14.17]. Läraren lämnar gruppen, och det förefaller utlösa en sekvens präglad av subjektifierande yttranden då både André och Moa uttrycker att de inte vet hur de ska lösa uppgiften ([14.19], [14.51], [14.56],[15.36]. De subjektifierande processerna diskuteras ytterligare i kapitel 7.7.3.

Läraren kan antas uppfatta elevernas frustration då han strax därefter återvänder till gruppen. Han ställer då ett antal frågor direkt riktade till Moa ([15.59]-[16.49]). Därefter förefaller en fråga från Lisa angående derivatans värde som Moa besvarar felaktigt innebära att hon plötsligt inser hur problemet ska lösas (se vidare kapitel 7.7.3).

I sekvensen [17.17]-[17.54] kan vi lyssna till hur Moa förklarar för de andra eleverna. Samtidigt som hon talar verkar hon ”tänka högt” i den bemärkelsen att hon samtidigt kontrollerar sitt eget resonemang. I flödesschemat är denna intrapersonella kommunikation markerad med en lodrät pil. Eftersom André efter varje yttrande bekräftar att han lyssnar genom att upprepa ”mm” ([17.06], [17.11], [17.16], [17.24], [17.36], [17.39], [17.44], [17.47], [17.52]) kan vi förutsätta att i varje fall André uppfattar att Moa kommunicerar med honom. Lisa sitter helt tyst under denna sekvens.

När eleverna avslutat uppgiften dröjer de sig kvar en stund vid bordet efter det att videokamerorna stängts av. Innan eleverna hade stängt av den audiovisuella pennan kom en episod att audioinspelas då André talar om för Moa att han inte alls hängde med hennes redovisning för läraren. Intressant är att notera att vi då får bestyrkt att Andrés alla bekräftande ”mm” enbart kan tolkas som en bekräftelse på att han lyssnade till henne eller ville ”hålla skenet uppe” då läraren var närvarande.

7.7.2 Gruppdeltagarnas matematiska diskurs i fokus

Vid inledningen av denna sekvens har eleverna på egen hand, utan stöd av den ledtråd flertalet av de övriga observerade grupperna behövde be om, markerat punkten (3,2) som ett funktionsvärde i koordinatsystemet. De har således växlat mellan två representationsformer, från en algebraisk representation $f(3) = 2$ för funktionsvärdet till en geometrisk representation för att markera punkten (3,2) i koordinatsystemet.

Moa förefaller tänka högt för sig själv då hon med frånvarande röst upprepar: ”Högsta värdet 5 kan anta, högsta värdet 5 kan” [13.17], och sedan ritar hon upp två räta linjer $y = 5$ och $x = 5$ i koordinatsystemet utan att kommentera detta ytterligare (se fig. 7.3). Moa uttalar inte högt vad hon tänker i detta skede men repeterar om och om igen som för att ”fånga in texten på uppgiftspapperet”. I detta läge passerar läraren och eleverna får en ny ledtråd av läraren. Den nya skriftliga ledtråden, ”Derivatans är k-värdet dvs. lutningen”, innebär att eleverna vägleds av läraren att koppla samman riktningskoefficienten för den räta linjens funktion med derivatan för funktionen [13.30]. I den kommande sekvensen kan vi studera hur elevernas matematiserande utvecklas och återigen leder till en diskursiv framflyttning.

Figur 7.3 Moa markerar de två räta linjerna $x = 5$ och $y = 5$ vid tiden 13.30.
(De svagare linjerna är ännu inte ritade av eleven)

När Moa får tillgång till ledtråden övergår hon direkt till att matematisera [onM] när hon säger: ”mm, så k-värdet är någonstans mellan 1 och 2 eller lika med” [13.53]. Moa

kopplar direkt ihop k -värdet med det formella symbolspråket för derivatans värden ($1 \leq f'(x) \leq 2$). Moa lägger samtidigt till att det "är mellan 1 och 2" och drar sedan slutsatsen: "Då kommer den gå uppåt" [13.55]. När gruppen får ledtråden att derivatan är lutningen kopplar Moa ihop symbolen $f'(x)$ med en positiv lutning i en grafisk representation. Det innebär en framflyttning av gruppens matematiska diskurs och eleverna är nu bara några minuter från att finna lösningen på problemet.

7.7.3 Elevernas subjektifieringsprocesser

André som nu inte förefaller följa med i Moas matematiserande uttrycker detta genom att frustrerat utbrista: "Mind fuck" [14.19]. Han nöjer sig dock inte utan läser ledtråden en gång till som för att försöka förstå vad Moa säger. André uttrycker sedan en gång till att han inte förstår genom att peka på intervallet $1 \leq f'(x) \leq 2$ och återigen läsa och därefter fråga: "Är det det här som är lutningen då?" [13.55]. Hans inledande markering klassificeras som en identifiering, då han med ett uttryck som används frekvent i gruppen talar om för Moa att han *är* förvirrad, men samtidigt ställer en fråga till den-som-vet-mer i gruppen [onAOS]. Identifieringen kan här ses fungera som ett sätt för honom att förstärka det han vill säga och att Moa ska uppfatta att han vill och behöver hennes hjälp för att kunna delta i matematiserandet. André markerar också något senare att han känner tillhörighet i gruppen och trots att han ännu inte har erövrat den förväntade matematiska diskursen ser sig som en elev som tror sig kunna bidra till gruppens matematiserande när han uppmuntrande säger: "Vi *ska lösa* det här. Jag vet inte ens hur vi ska gå vidare från det. Kan vi inte testa, testa olika lösningar?" [15.36]. På samma sätt bidrar André uppmuntrande och bekräftar att han är en intresserad lyssnare genom att upprepa "mm" efter varje uttalande Moa gör när hon sätter ord på hur hon tänker då hon tror sig ha löst uppgiften (se utdrag 7.4: [17.06]-[17.52]). Moa behåller rollen av den-som-vet-mest i gruppen och påkallar lärarens uppmärksamhet för att redovisa gruppens lösning [17.17]. Hon har då gjort ett mindre tankefel, men förefaller säker på att hon har förstått uppgiften, då hon i sekvensen korrigerar sitt eget misstag ([18.49]-[19.22]). Även lärarens aktionsorienterade yttranden fungerar som ett stöd för att driva diskursen framåt. När läraren nu passerar gruppen och upptäcker att Moa har ritat upp linjerna $y = 6$ och $x = 5$ ställer han två frågor i rad om vad "strecken" betyder [onAOS] ([16.20], [16.13]). Moa svarar först att hon inte vet [16.20], men frågorna förefaller stödja utvecklingen av den matematiska diskursen mot att koppla ihop k -värdet, derivatan och hur y -värdet kan förändras i det angivna intervallet [17.00]. André läser nu återigen ledtråden högt: "Derivatan är k -värdet det vill säga lutningen" och frågar sedan Moa om $f'(x)$ är lutningen [14.22]. Lisa ställer samtidigt en fråga till gruppen om det är det man bygger på [14.38] och pekar samtidigt på intervallet för x -värdena. Moa svarar nu att det är det högsta värdet på derivatan som ska väljas för att funktionens största värde ska erhållas då $x=5$ [17.26]. Moa tar stöd av koordinatsystemet och grafen som mediatorer när hon förklarar för de andra deltagarna i elevgruppen (se fig. 7.4).

Figur 7.4 Moa förklarar hur funktionens y-värde ändras [17.13]-[17.45]

Moa tar med handuppräckning initiativ till att påkalla lärarens uppmärksamhet för att få bekräftelse på att hennes tankegång är riktig. Läraren bekräftar att hon tänker rätt, men konstaterar att hon begått ett mindre fel då hon förväxlat x- och y-värdet när hon tolkar det formella symbolspråket $f(3) = 2$. Moa upptäcker böjd över sitt uppritade koordinatsystem och korregerar sitt eget misstag [19.22].

7.8 Jämförelse av ett urval av resultat från de övriga elevgrupperna

Inom ramen för denna avhandling finns inte utrymme för att i sin helhet redovisa den empiriska datainsamling som har genomförts i de övriga tre smågrupperna under den observerade lektionen. I detta delavsnitt redovisas därför några utvalda sekvenser av kommunikationen från dessa grupper. Urvalet i redovisningen har gjorts i syfte att visa på likheter och skillnader i elevgruppernas diskurs.

Inledningsvis fokuseras i avsnitt 7.8.1 på de hinder eleverna i grupp B brottas med kopplat till elevernas matematiserande, främst i samband med användningen av det matematiska formelspråket och byte av mediatorer. I avsnitt 7.8.2 riktas fokus mot att belysa de subjektifierande yttrandena i grupp C och D och hur dessa är tätt sammanflätande med den matematiska diskursen och förefaller påverka utvecklingen av denna. Avsnitt 7.8.3 belyser skillnader avseende innehållet i yttrandena både mellan enskilda elever i respektive grupp, men också mellan de fyra observerade smågrupperna.

7.8.1 Matematiserande i grupp B – hinder för att utnyttja det formella symbolspråket som mediator

Elevgrupp B består av tre elever, Emil, Maria och Sam (fingerade namn), som arbetar tillsammans med den uppgift samtliga elevgrupper i klassen har tilldelats. Grupp B har valts för att ytterligare belysa elevernas problem i grupperna med att tolka det matematiska formelspråket och att överföra detta till en grafisk representation av funktionen i ett koordinatsystem. Denna sekvens belyser också skrivarens viktiga roll i gruppen. Eleverna sitter placerade vid ett runt bord. Maria har Emil på sin högra och Sam på sin vänstra sida och har tagit rollen som den som antecknar.

Svårigheter att växla från matematiskt symbolspråk till verbalt matematiskt språk

När eleverna i grupp B har tilldelats uppgiften inleder de liksom deltagarna i grupp A arbetet med att tillsammans komma fram till en gemensam verbalspråklig tolkning av det matematiska algebraiska symbolspråket. Vi lyssnar till elevgruppens resonemang i de inledande yttrandena:

Utdrag 7.5 Grupp B: Elevernas inledande kommunikation när de erhåller uppgiften

Tid	Aktör	Vad som sägs och vad som görs	Kod yttrande/ mediator
[0.30]	Maria	Vad har den med den och göra?	onAOS
[0.49]	Emil	Det känns ju som man måste göra/ Vänta, vänta! Det är ju olika <u>steg</u> man kan inte ta allt på en gång.	onAOS onN onAOS
[0.58]	Maria	Jag tror att det är- Vi skriver upp den [pekar på: $f(3) = 2$]. Är det inte så att den funktionen ska sättas in i den? [pekar på: $3 \leq x \leq 5$]	onIOS onAOS onM
[1.07]	Sam	Den är ju deriverad. [pekar på intervallet för derivatans värde]	onM,
[1.10]	Maria	Det är därför vi måste derivera den först innan vi gör nånting.	onM
[1.13]	Sam	Hur gör man då då?	onAOS
[1.15]	Maria	Fast det går ju inte för det här är ju är en konstant så den kommer o försvinna	onM

Till att börja med kan konstateras att eleverna i grupp B, liksom eleverna i grupp A, har svårigheter att hantera det algebraiska formelspråket. Även i denna grupp inriktar sig eleverna på att översätta symbolspråket till verbalt språk för att överhuvudtaget kunna kommunicera med varandra om det problem de har ställts inför. Maria använder ett oprecist matematiskt språk när hon ska tolka det matematiska symbolspråket. Exempelvis använder hon begreppet "funktionen" både för funktionsvärdet och för

intervallet för funktionens definitionsmängd ([0.58]), vilket indikerar att hon ännu inte på egen hand objektifierat diskursen om funktioner (se vidare Nachlieli & Tabach, 2012). Vare sig Marias felaktiga tolkning av $f(3) = 2$ som en funktion [0.58] eller Sams tolkning av att intervallet för derivatan är en deriverad funktion [1.07], leder matematiserandet framåt. Eleverna förefaller snarare tala högt för sig själva och förbi varandra än ta del av varandras matematiserande och resonera med varandra, vilket rimligen kan antas bidra till försämrade förutsättningar för eleverna att komma vidare i problemlösningen. Vi kan konstatera att ingen elev i grupp B förefaller kunna ta rollen som den-som-vet-mer för att leda gruppens matematiserande framåt mot den matematiska diskurs som förväntas.

Olikhetstecknet och symbolen $f'(x)$ tolkas som att en process ska genomföras

I utdrag 7.5 har både Sam och Maria fokus på att de ska finna en funktion att derivera. Maria beskriver det angivna funktionsvärdet $f(3) = 2$ som något som ska sättas in i olikheten $3 \leq x \leq 5$ [0.58]. Ingen av de andra eleverna kommenterar att hon tolkar symbolerna felaktigt. Eleverna har under tidigare lektioner främst arbetat med rutiner för att härleda derivatan och därefter övat på att derivera givna funktioner med hjälp av dessa deriveringsregler (se Appendix C). När eleverna ger sig i kast med att tolka $1 \leq f'(x) \leq 2$ konstaterar Sam direkt ”Den är ju deriverad” [1.07], samtidigt som han pekar på olikheten med symbolen $f'(x)$. Sam kopplar uppenbarligen ihop $f'(x)$ med det matematiska ordet ”derivera”. Maria replikerar att det är därför den måste deriveras först, vilket tyder på att de, liksom eleverna i grupp A, uppfattar olikhetstecknet som en process om ska utföras, alternativt tolkar symbolen $f'(x)$ som att en deriveringsprocess ska genomföras [1.10]. Detta antagande förstärks i nästa yttrande då Maria konstaterar att derivatan är en konstant som försvinner [1.15], vilket indikerar att hon uppenbarligen då också har genomfört deriveringsrutinen tyst för sig själv.

Sam pekar på uppgiftspapperet och uppmanar därefter Maria: ”Skriv upp dom här en gång till så man ser dom här sambanden!” [2.20]. I elevernas skrivhäfte kan vi då läsa:

$$\begin{array}{l}
 f(x) \\
 f(3) = 2 \\
 1 < f'(x) < 2 \qquad 3 \leq x \leq 5 \\
 f'(3) = 2 = 0
 \end{array}$$

Figur 7.5 Grupp B: Maria skriver upp sambanden och deriverar $f'(x) = 0$ [2.17]

I skrivhäftet bekräftas att i varje fall Maria, som håller i pennan, antar att $f(3) = 2$ är den funktion som ska deriveras (fig. 7.5). Hon har utfört ”deriveringen”, vilket verifieras då hon antecknas $f'(3) = 2 = 0$ i blocket. Detta är rimligt att tolka som att

hon ”deriverat konstanten”, det vill säga derivatans största värde i intervallet. Varken Sam eller någon annan i gruppen tar i detta läge något ytterligare initiativ till att leda gruppens matematiserande framåt.

Hanteringen av ordföljden försvårar elevernas tolkning av olikhetstecknet

I utdraget nedan följer vi den sekvens då elevgruppen ger sig i kast med att tolka funktionens definitions mängd, angiven med olikhetstecken ($3 \leq x \leq 5$). Eleverna har här, liksom eleverna i grupp A, uppenbara problem att tolka olikhetstecknet korrekt och att hantera läsriktningen när de ska läsa av intervallet:

Utdrag 7.6 Grupp B: Läsriktningen skapar problem att läsa av olikhetstecknet

Tid	Aktör	Vad som sägs och vad som sker	Kod
[1.22]	Emil	Men det här då? I intervallet? (3s) 3 är mindre än x, och x är större än 5, är x är. [Pekar på uppgiften och stryker under intervallet $3 \leq x \leq 5$]	onAOS onM
[1.24]	Sam	Mindre än	onM
[1.30]	Emil	Mindre än 5, 3 är större än x, [följer samtidigt med pennan under olikheten]	onM
[1.34]	Sam	nä mindre än x	onM
[1.42]	Emil	än x, °ja just det va samma håll°	onM
[1.45]	Maria	men x mindre än 5.	onM
[1.48]	Sam	Mm	onN
[1.53]	Maria	Okey	onN

Eleverna i grupp B har, liksom deltagarna i grupp A, liknande svårigheter att hantera ordföljden när de ska överföra symbolspråket för olikheten till ett verbalt språk. Deltagarnas pendling mellan dessa två medierande redskap och överföringen till ett verbalt språk måste ses som en förutsättning för möjligheten att tillsammans kommunicera och samverka i gruppen.

Emil använder sig av det svenska skriftspråkets läsriktning från vänster till höger och han tolkar intervallet: ”3 är mindre än x o x är större än 5” [1.22]. Han vilseleds av att han inte kan tolka olikhetstecknet korrekt efter x-symbolen. Sam rättar Emil, som sedan försöker följa Sams råd. Han korrigerar sig, men tolkar då istället olikhetstecknet framför x-symbolen felaktigt [1.30].

Figur 7.6 Grupp B: Emil stryker under olikheterna och använder normalskriftens läsriktning [1. 22]

Emils felaktiga tolkning av det andra olikhetstecknet skulle kunna förklaras av att han vid översättningen till normalt verbalspråk uppfattar att detta tecken är omvänt i förhållande till x-symbolen och därför läser av dem olika. Antagandet styrks av att han med lägre röst säger: ”ja just det va samma håll” [1.42]. Eleverna lämnar sedan olikheten därhän utan att gruppen egentligen har enats om en gemensam korrekt tolkning av olikhetstecknet och det angivna intervallet.

Byte av mediator befrämjar diskursens utveckling

Alla tre elever i grupp B har under episoden [1.22]-[1.53] varit inriktade på att tyda det matematiska formelspråket. I den nedan återgivna sekvensen har gruppmedlemmarna nyligen begärt sin första ledtråd av läraren. Detta efter att de i konsensus har kommit överens om att de inte kan komma vidare tillsammans utan att ta hjälp av någon-somvet-mer, i detta fall med hjälp av lärarens ledtrådar. När vi möter eleverna är de just i färd med att läsa den första ledtråden och får då rådet att rita ett koordinatsystem [4.45]. Denna indirekta uppmaning att byta till en grafisk representation innebär att den matematiska diskursen förändras till riktning och innehåll. Som på en given signal börjar eleverna, liksom eleverna i grupp A gjorde när de fick ledtråden att rita ett koordinatsystem, inrikta sig på att finna ett funktionsvärde för att sätta ut punkter i koordinatsystemet. Nu kan vi iaktta hur eleverna direkt tar itu med att tolka det algebraiska formelspråket för funktionsvärdet $f(3) = 2$ och försöker överföra det till det geometriska formelspråket för en punkt (3,2). Vi lyssnar vidare på elevernas kommunikation i gruppen:

Utdrag 7.7 Grupp B: Elevernas svårigheter att hantera det algebraiska symbolspråket

Tid	Aktör	Vad som sägs och vad som sker	Kod
[4.45]	Emil	Rita ett koordinatsystem. [läser den första ledtråden högt]	onN
[4.55]	Maria	Okey. Måste rita upp den där. [ritar och graderar samtidigt koordinataxlarna, de andra tittar på] (20s)	onN onM
[5.28]	Emil	Men det här är liksom när x är 3 är y 2 eller? [prickar på $f(3) = 2$ med pennan] Det kanske är det här är väl? [snirklar med pennan runt $f(3)=2$ och sedan på $3 \leq x \leq 5$ på papperet, tittar därefter på Maria]	onM onAOS
[5.34]	Maria	°När y° /	onM
[5.35]	Sam	När y är 3	onM
[5.36]	Maria	Men då är det konstigt att det inte står nått x där? [pekar på $f(3) = 2$] Men det kanske dom menar då? Så när y är 3, 1, 2, 3, så är x 2? [räknar och pekar åter på $f(3) = 2$ och sedan på $3 \leq x \leq 5$]	onM onAOS onM
[5.45]	Emil	Det kanske inte finns något k -värde?	onM
[5.48]	Maria	Ritar jag fel nu?	onIOS
[5.52]	Sofia	Det vet ja inte. (5s)	onIOS
[5.57]	Emil	Men eftersom det inte finns nått x här.	onM
[6.00]	Maria	Nää	onN
[6.02]	Emil	Nää. Finns det nått k värde då? Eller är det så (2s) eh att det finns det nån gränspunkt?	onAOS
[6.08]	Maria	När y är 3/	onM
[6.10]	Sam	ehh. *skratt* (skrattar åt en kommentar från en person som tittar in i klassrummet)	offN
[6.26]	Maria	(7s) Ska vi säga då att när y är 3 så är x 2 även fast det inte står x ?	onM

Om vi nu lämnar elevernas felaktiga tolkning av formelspråket därhän och istället studerar elevernas fokus i den matematiska diskurs där eleverna använder koordinatsystemet som en artefakt, kan vi konstatera att elevernas matematiserande förändrats till innehåll. Redan i inledningen lyssnar vi till Marias yttrande: ”Måste rita upp den där” [4.55]. Även om Maria samtidigt ritar ett koordinatsystem är det rimligt att anta att hon syftar på att rita en grafisk representation av funktionen när hon använder n -genus och ”den” som pronomina. Eleverna kopplar således ihop koordinatsystemet som artefakt med en grafisk representation av funktionen. Övergången från det matematiska formelspråkets algebraiska register till ett geometriskt register för formelspråket (se t.ex. Duval, 2006) innebär att elevgruppens fokus i matematiserandet förändras. De kommer nu att övergå till att finna flera funktionsvärden (punkter) att markera i koordinatsystem, för att beskriva funktionen [5.28], och elevernas matematiserande tar ny fart i riktning mot den diskurs som eftersträvas. Emil använder plötsligt också för första gången begreppet ” k -värde” [5.45] i samband med att eleverna

diskuterar hur de ska finna punkter. Vi kan iaktta hur Emil kopplat ihop försöken att finna punkter i koordinatsystemet med en tidigare erövrad diskurs om den rätta linjens funktion och riktningskoefficienten, vilket leder till att elevernas matematiska diskurs utvecklas i önskvärd riktning. Emil använder dessutom ordet ”gränspunkt” i samband med att eleverna letar efter funktionsvärden att pricka in i koordinatsystemet. Detta kan ses som ett försök av Emil att använda ett matematiskt ord för det högsta funktionsvärde som kan antas i det angivna intervallet för x .

Elevernas svårigheter att växla mellan olika semiotiska register hindrar diskursen

Eleverna i grupp B har större problem än eleverna i grupp A att hantera växlingen mellan de två semiotiska register som krävs när de ska växla mediator i den matematiska diskursen. Växlingen från det algebraiska registret där funktionens egenskaper presenteras med sitt speciella matematiska formelspråk, över till att använda koordinatsystemet och ett geometriskt register skapar inledningsvis tydliga hinder för eleverna. Eleverna visar sig inte kunna hantera dessa semiotiska register och får då givetvis också problem att kunna växla mellan dem. Svårigheterna för eleverna är uppenbara, då eleverna inte behärskar vad som är x - respektive y -värdet för funktionsvärdet $f(3) = 2$. I gruppen finns ingen som kan leda diskursen framåt mot den önskvärda matematiska diskursen när eleverna felaktigt tolkar funktionsvärdet $f(3) = 2$ som punkten $(2,3)$ [5.36]. Läraren roterar omkring i klassrummet och passerar några minuter senare elevgruppen och uppfattar elevernas misstag:

Utdrag 7.8 Grupp B: Läraren stöttar elevernas förflyttning mellan olika semiotiska register

Tid	Aktör	Vad som sägs och vad som görs	Kod
[8.47]	Läraren	Det är tvärt om. [läraren har just kommit fram till gruppens bord]	onM
[8.48]	Maria	x är 3.	onM
[8.51]	Läraren	x är 3 ja.	onN
[8.53]	Sam	Jamen det står ju att x är 3.	onN
[8.54]	Maria	Aj då! Ja just det.	onN
[8.55]	Sam	Det är det som du sa. ((riktar sig mot Emil)) Bra Emil!	onIOS
[8.59]	Johanna	3 där. Okey	onM onN

När vi följer gruppens fortsatta matematiserande kan vi konstatera att eleverna fortfarande har behov av ”någon-som-vet-mer” då deras problem att tolka det matematiska symbolspråket och hantera växlingen mellan olika semiotiska register kvarstår. Elevgruppen kommer nu att under Emils ledning fram till att k -värdet är 2, kopplar detta till hur funktionen förändras och en diskursiv framflyttning sker [17.12]. Vi lyssnar till Emils yttrande, men inser också varför eleverna strax därefter genomför en felaktig beräkning av $f(5)$:

Utdrag 7.9 Grupp B: Elevers svårighet att växla mellan olika register i formelspråket

Tid	Aktör	Vad som sägs och vad som sker	Kod
[17.12]	Emil	Men kolla!	onN
		Alltså $f(5)$ är det där ska man bara utgå från den punkten	onM
		då? Så! eller om k -värdet är 2.	
		Då får vi ju - vänta!	onN
		[Pekar på $f(5)$ och flyttar den snabbt över till $(3,2)$. Förflyttar pennspetsen två steg i y -led för varje x med ”trappstegsmetoden”]	onM
[17.47]	Maria	1. 2. 3. 4. 5 [följer positiva x -axeln från origo]	onM

Figur 7.7 Grupp B: Emil visualiserar den verbala kommunikationen med ”trappstegsmetoden” [17.12]

Emil utgår från det angivna funktionsvärdet $f(3) = 2$ markerad som punkten $(3,2)$ i det uppritade koordinatsystemet. Han visualiserar sitt tänkande med hjälp av att peka på punkten $(3,2)$ i koordinatsystemet i blocket och sedan föra sin egen kulspetspenna ett steg i positiv riktning på x -axeln och därefter två steg i positivt y -led, för att sedan upprepa denna så kallades trappstegsmetod ytterligare en gång (fig.7.7).

Maria, som skriver, kan nu inte följa med i Emils resonemang då det har visat sig att hon är mycket osäker på att tolka symbolspråket $f(5)$ och vad som är x - respektive y -värde. Hon avslöjar dock inte att hon inte följer med och kommer därigenom att bidra till att leda gruppens matematiska diskurs in på ett villospår. Maria markerar först punkten $(5,4)$ istället för $(4,4)$ i koordinatsystemet, vilket får antas bero på hennes osäkerhet att tolka symbolen $f(5)$ korrekt [17.47]. Hon tolkar troligen $f(5)$ som att $y = 5$, vilket bekräftas av att hon strax därefter skriver $f(4) = 5$ i blocket under koordinatsystemet, samtidigt som hon har markerat punkten $(5,4)$. Maria, som håller i pennan, kan konstateras ha stora problem att förflytta sig mellan symbolspråkets algebraiska och geometriska register. Vi kan nu studera vad Maria skrivit i blocket i fig. 7.8.

Figur 7.8 Grupp B: Elevernas markeringar i koordinatsystemet i blocket [18. 48]

Marias osäkerhet att hantera symbolspråket och uppenbara kunskapsbrister från tidigare kurs, innebär ett hinder för elevernas vidare matematiserande. Att hon är skrivare i gruppen bidrar till att ingen av de övriga två eleverna här har lagt märke till Marias felaktiga beräkningar och förväxlingar av x- respektive y-värdet. Det bekräftas då Sam [18.20] upprepar att $f(5) = 4$. Detta synliggör de problem som kan uppstå när gruppen inte har någon som kan fungera som den-som-vet-mer och för anteckningar ensam. Vi lyssnar återigen till gruppens kommunikation i detta skede:

Utdrag 7.10 Grupp B: Skrivande elevens misstag skapar hinder för matematiserandet

Tid	Aktör	Vad som sägs och vad som görs	Kod
[18.02]	Maria	Och då är k värdet 2, fast vi har ju inget. (2s)	onM
		Säger man då att det? –	onAOS
18.10]	Sam	Det högsta värdet f 5 kan anta. (2s)	onM
		[Läser högt från uppgiften]	
[18.14]	Maria	Om man säger att-. Om man ska skriva som det var här då? Då är det ju f –	onAOS
		[följer med pennan längs positiva y-axeln från origo och markerar fyra steg]	onM
[18.20]	Sam	av 5 är lika med 4	onM
[18.26]	Emil	I intervallet, då är det är liksom, det blir ju 4	onM
[18.28]	Maria	Ja, då är ju -	onN
[18.30]	Sam	f av 5 lika med 4	onM
[18.33]	Maria	då ä ju den större [skriver samtidigt två olikheter] ((se fig. 7.9 nedan))	onM

Gruppen övergår [18.26] till att tolka olikheten för x, och har även där stora problem med det formella symbolspråket. I varje fall Maria som håller i pennan förefaller tolka ”det största värdet som $f(5)$ kan anta” som att de ska ta reda på det största värde x antar

om $y = 5$ i det angivna x-intervallet. Denna tolkning förstärks av Marias försök att skriva ner "det största värdet $f(5)$ kan anta" efter att ha föreslagit de andra att de ska svara på samma sätt som intervallet för x presenterats [18.33]. Hon skriver därefter en felaktig notering under det angivna intervallet för definitionsmängden (fig. 7.9).

Figur 7.9 Maria anger felaktigt funktionens största värde som en olikhet [18.33]

Det är bara att konstatera att ingen av eleverna kan leda gruppens matematiserande i rätt riktning för att lösa problemet då de inte kan hantera det formella matematiska formelspråket. I detta läge när eleverna famlar i blindo initierar Emil en ny riktning för gruppens matematiserande då han återigen riktar sitt fokus på att k -värdet är 2:

Utdrag 7.11 Emil initierar ett nytt fokus för den matematiska diskursen

Tid	Aktör	Vad som sägs och vad som görs	Kod
[19.24]	Emil	Om vi skulle ta k -värdet. Om den har högsta k -värdet 2?	onM onM
[19.32]	Maria	Så alltså. Den här, den här lutningen kan inte stiga mer än 4. Så här stannar den. [skissar en linje i luften ovanför koordinatsystemet från punkten (3,2) mot (4,4)]	onN onM onM
[19.40]	Sam	Jo, men den kan väl stiga mer, men punkten kan väl inte $-/(5s)$	onM
[19.47]	Maria	Nej, just vid fem nä. (2s)	onM
[19.52]	Sam	För den kan väl stiga mer [gör en gest med handen snett upp till höger i 1:a kvadranten]	onM
[19.58]	Maria	för då kommer den ju bli 6 på den här [räknar 6 uppåt i y -led, pekar med pennan på x -axeln vid 6 samtidigt som hon talar]	onM
[20.00]	Sam	Det är just den punkten	onM
[20.05]	Emil	Det högsta vä/ ja, nej 5 kan anta, så det är liksom den Fast jag vet inte vad vi ska göra mer om, jag vet inte	onM onIOS
[20.14]	Sam	Neej, inte jag heller.	onIOS

Maria förefaller vara inne på att funktionen stiger fyra steg [19.58] men har problem att tolka det största värdet $f(5)$ kan anta. När hon säger ”Den här, den här lutningen kan inte stiga mer än 4” [19.32], syftar hon troligen på den tidigare genomförda beräkningen att $f(5) = 4$. Maria brottas fortfarande med sina svårigheter att hantera formelspråket och med osäkerheten att avgöra vad som är x- respektive y-värdet [19.58]. Gruppen beslutar sig nu för att ta hjälp, då ingen av dem säger sig veta vad de ska göra [20.05]-[20.14].

Läraren tar ledarrollen över matematiserandet

När läraren kommer till gruppen ber han eleverna förklara hur de resonerar. Vi lyssnar på elevernas kommunikation och hur svårigheterna att hantera och växla mellan olika symboliska register ställer till problem för Maria och hela gruppen:

Utdrag 7.12 Elevernas problem att växla mellan olika semiotiska register

Tid	Aktör	Vad som sägs och vad som görs	Kod
[20.51]	Maria	f av 5 har vi här där lutningen är 2, då går vi upp 5 då ligger den på 4. Vi/	onM
[21.03]	Emil	Fast det är det om man tar, man får gå ett snäpp, 1. 2 och så ett snäpp och så e 1. 2 ett snäpp och så 1. 2. Fattar du?	onM onIOS
[21.12]	Maria	Mm	onN
[21.13]	Läraren	Jag tycker ni tänker rätt. Men jag förstår inte hur ni hamnar på 4?	onIOS onAOS

Emil besvarar nu lärarens fråga genom att redovisa uppgiften korrekt för läraren. Maria lämnar lektionen tillsammans med resten av gruppmedlemmarna, utan att avslöja att hon inte kan tolka formelspråket i uppgiften. I elevernas anteckningsblock (fig. 7.10) kan vi se elevernas skriftliga redovisning:

Figur 7.10 Grupp B: Elevernas avslutande markering i koordinatsystemet

7.8.2 Elevernas subjektifierande processer i grupp C och grupp D

Subjektifierande yttranden konstituerar elevernas roller i grupperna

Då lärandet i denna studie betraktas som en social aktivitet är det inte bara elevernas matematiserande som formar och bestämmer förutsättningarna för lärande, utan även det sociala samspel som pågår i elevgruppen och mellan läraren och eleverna i klassrummet (Sfard, 2008, 2012). I grupperna kan vi konstatera att eleverna mer eller mindre tydligt ”gör upp om” sina respektive roller och vad de kunde förvänta sig av varandra redan under inledningen av gruppens arbete (se t.ex. kap. 7.4.3, grupp A). Vi ska nedan lyssna närmare på de första minuterna när eleverna i grupp C påbörjar sitt samarbete. Detta utdrag är valt då det i denna grupp återfinns frekvent förekommande yttranden där eleverna klargör uppfattningar och förväntningar både om sina egna och även andras möjligheter att bidra till gruppens matematiserande, det vill säga identifierande yttranden [onIOS/ offIOS]

I grupp C möter vi endast två elever, Theo och Joan, då en av gruppens elever är frånvarande från lektionen. När de bägge eleverna sätter sig vid bordet och upptäcker att de bara blir två, förkunnar de till läraren att de ”inte har en chans att klara det” redan innan de ens har fått tillgång till uppgiften. Joan är den elev som tar rollen att skriva och eleverna har slagit sig ner bredvid varandra. I utdraget nedan lyssnar vi på gruppens diskurs under de första inledande minuterna då eleverna har fått uppgiftspapperet och förväntas ta itu med det matematiska problemet:

Utdrag 7.13 Grupp C: Exempel på subjektifierande processer i inledningen av arbetet

Tid	Aktör	Vad som sägs och vad som görs	Kod
[0.28]	Joan	°Vi gör så här. Vi gör så här, vänta.° °Vi kan göra en värdetabell.° [skriver samtidigt i blocket] (se fig. 7.12 – 7.13)	onN onM
[0.31]	Theo	Ja, vi gör det.	onN
[0.33]	Joan	°Hur gör man då?° °Jag kommer inte ihåg.°	onAOS onIOS
[0.36]	Theo	°Ne, men°/ *frustrerat röstläge*	onN
[0.43]	Joan	Jo, det gör jag visst det.	onN
[0.47]	Joan	°Gör man inte så här typ, eller?°	onAOS
[0.50]	Theo	°Du får göra en tabell först°.	offN
[0.53]	Joan	Vi börjar på noll [skriver $f(0) =$ och tittar upp på Theo och ler] *fnissar*	onM
[0.54]	Theo	Jaa det gör vi *fnissar* ((fnissar tillsammans åt den gemensamma upptäckten av ”skämtet” i föregående yttrande)) (4s)	onIOS
[1.00]	Joan	° Gör man så där? Gör man det?° ((låga viskningar, ohörbara för andra))	onAOS
[1.02]	Theo	°Va? Det ser jättebra ut.° [Joan skriver funktionsvärden, Kim tittar]	onIOS

[1.19]	Joan	*fnissar* Vi skulle inte gått till skolan idag. (fnissar ihop åt skämtet)) Vad ska vi göra?	off IOS onAOS
[1.27]	Theo	Vi gör så här. [skriver funktionsvärden i blocket] ((se bild 14))	onM
[1.36]	Joan	Vaa?	onN
[1.40]	Theo	Så [fortsätter skriva] *fnissar*	onN
[1.44]	Joan	Ja, kul om vi hade haft någon matematisk hjärna i våran grupp.	offIOS
[1.49]	Theo	Ja det hade faan vart bra, alltså.	offIOS
[1.51]	Joan	Man kan inte ens tänka matte.	offIOS
[1.56]	Theo	Vi har ju tio spänn. Vi kan ju köpa ju. Vi har ju casch!	onN
[2.01]	Joan	Sms lån *fnissar* då har vi 25 000.	offN
[2.05]	Theo	Varför gjorde jag så där för?	onAOS
[2.06]	Joan	Va?	onN
[2.07]	Theo	Varför gjorde jag så där?	onAOS
[2.08]	Joan	Ja	onN
[2.08]	Theo	det är lika med 2. [skriver $f(3) = 2$ i den påbörjade tabellen] Ja gör det.	onM onN
[2.12]	Joan	mm, då måste vi bara komma fram till vad de andra gjorde då	onN
[2.18]	Theo	mm *skrattar till*	onN
[2.20]	Joan	°Vi chansar°	onIOS

Figur 7.11 Grupp C: Från elevernas block [1.27]

Figur 7.12 Grupp C: Elevernas notering i blocket [2.08]

Denna korta inledande episod i gruppen innehåller mycket få yttranden som kan kategoriseras som matematiserande [onM]. En logisk följd av detta är att de aktionsorienterande yttrandena [AOS] då också förekommer i mindre omfattning. När elevernas matematiserande är mindre frekvent i en episod finns heller inte något skäl för eleverna att ställa frågor till varandra kopplade till hur eller varför en elev matematiserar som hon gör. Under hela gruppaktiviteten är detta den grupp som har den lägsta andelen yttranden som klassificeras som [onM], 27 % jämfört med mellan 33-43 % i övriga grupper (se fig. 7.13).

Figur 7.13 Grupp C: Fördelning av olika kategorier av yttranden

I grupp C är 18 % av gruppens diskurs kategoriserad som identitetsorienterad subjektifiering, vilket är mer än dubbelt så hög andel som i övriga grupper. I tabell 7.15 kan man konstatera att det också är mycket små skillnader vad gäller andelen olika yttranden, kategoriserade utifrån innehållet, vad gäller elevernas bidrag till gruppens kommunikation. I denna grupp finns inte någon tydlig ledare för matematiserandet. Det är också i denna grupp och i denna sekvens vi finner de enda uttalanden som inte kan kopplas till den problemuppgift eleverna är satta att lösa. För ytterligare jämförelse mellan grupperna hänvisas till avsnitt 7.8.3.

Identifiering - yttranden som speglar och formar elevernas identitet i den rådande kontexten

När vi lyssnar till kommunikationen i grupp C ser vi hur yttranden som handlar om deltagarnas handlingar eller egenskaper är ett regelbundet inslag i de bägge elevernas diskurs under gruppaktiviteten. Elevernas yttranden övergår till att beskriva egenskaper och inte handlingar när Joan säger: ”Ja, kul om vi hade haft någon matematisk hjärna i vår grupp” [1.44]. Joan signalerar här tydligt att han ser både sig själv och sin samarbetspartner som två elever som inte har något att bidra med i matematik. Hans uttalande kan beskrivas som ett exempel på den starkaste nivån av identifiering då det inte beskriver handlingar som utförs i gruppen utan istället elevernas personliga egenskaper (Wood & Kalinec, 2012). Dessa narrativer antas påverka lärandet (Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012). Både Theo och Joan står för dessa yttranden, men Joan är den som initierar dessa i diskursen ([1.44], [1.51], [2.20]).

Figur 7.14 Jämförelser mellan eleverna i grupp C avseende olika kategorier av yttranden i diskursen

Eleverna väljer aktivt vad läraren och andra elever ska höra av gruppens diskurs

Redan när de bägge eleverna i grupp C kommer in i klassrummet, och inte ens hunnit få uppgiften av läraren, uttalar eleverna högt i klassrummet att de inte tror sig kunna klara av lösa uppgiften tillsammans. Dessa yttranden kunde omöjligen gå någon av klasskamraterna förbi, inte heller läraren. Joan var den elev som initierade dessa identifierande yttranden. Om vi lyssnar uppmärksamt till elevernas val av ljudnivå, kan man iakta hur de väljer att ömsom viska till varandra och tala så högt att alla i klassrummet kan ha möjlighet att urskilja gruppens kommunikation (se utdrag 7.13; låg ljudnivå markeras i transkriptionen med ringar, °yttrande°). Vid en närmare betraktelse av dessa subjektifierande yttrandena i gruppen kan vi alltså konstatera att eleverna, mer eller mindre medvetet, aktivt varierar sin röststyrka för att bestämma vilka deltagare i klassrummet som ska ha möjlighet att uppfatta vad av det som sägs. Det går inte att undvika att lägga märke till den delvis skämtsamma jargong eleverna har under de första minuterna av arbetet tillsammans i gruppen. Tonläget förefaller i första anblicken vara lättsamt, näst intill oseriöst (se t.ex. sekvenserna [1.44]-[2.01], [2.12]-[2.20]). Dessa yttranden är i stort sett samtliga kategoriserade som identifiering [IOS] och är ett av de mycket få tillfällen under lektionen när någon grupp observerats kommunicera om annat än den uppgift de är satta att lösa. Vid en närmare betraktelse ser vi att eleverna sänker röstläget när yttrandena har klassificerats som aktionsinriktade [AOS] eller matematiserande [onM] men att de i övrigt använder ett högre röstläge även när yttrandena är klassificerade som identifiering [IOS].

Subjektifierande yttranden påkallar lärarens uppmärksamhet och stöd

De signaler eleverna skickar ut i klassrummet på att de inte tror sig klara av problemet innebär att läraren uppfattar det som att eleverna behöver hjälp, trots att de egentligen knappast påbörjat matematiserandet. När eleverna begär sin andra ledtråd "k-värdet är lutningen" dröjer sig läraren kvar hos gruppen. Lärarens deltagande i gruppens mate-

matiserande kommer att innebära att dessa två elever ett par minuter senare kommer att avsluta uppgiften med lärarens stöd och då sammanlagt endast presterat 14 stycken yttranden som kan kategoriseras som matematiserande. Vi lyssnar till interaktionen mellan läraren och de två eleverna:

Utdrag 7.14 Grupp C: Elevernas subjektifierande yttranden påkallar lärarens stöd

Tid	Aktör	Vad som sägs och vad som görs	Kod
[11.20]	Läraren	Var befinner vi oss nu då? Var startar vi nånstans?	onAOS
[11.25]	Theo	Där [pekar på punkten (3,2) i blocket]	onM
[11.28]	Läraren	Vi startar där ja.	onM
[11.33]	Theo	Så är det bara att försöka	onN
[11.34]	Joan	Rita linje.	onM
[11.35]	Läraren	Mm.	onN
[11.38]	Theo	Jaa, men ta den där lutningen o hoppa vidare så kommer väl en ny punkt till slut.	onM
[11.43]	Joan	Hoppa upp, vänta nu. Vi är på 3:an va o hoppa upp	onM
[11.50]	Läraren	Vi är där på?	onN
[11.52]	Theo	(3,2)	onM
[11.53]	Läraren	(3, ja 2) och sen går vi ett steg framåt till 4.	onM
[11.55]	Joan	Och sen hoppa till 5:an	onM
[11.57]	Läraren	Var ska vi? Hur mycket uppåt ska vi gå på det steget då? Ett steg framåt och hur mycket uppåt ska vi gå då?	onAOS
[12.07]	Joan	Jaa	onN
[12.08]	Theo	2	onM
[12.09]	Läraren	2 ja. För vi har lutningen 2 så vi kommer till 4:an och så hoppar vi 2 steg uppåt så blir det 4 på y axeln också	onN onM
[12.10]	Theo	Mm	onN
[12.11]	Joan	Jaa	onN
[12.12]	Läraren	Okey	onN
[12.13]	Joan	Vänta ska vi. Där va?	onAOS
[12.19]	Läraren	mm. Ett steg framåt och två steg uppåt	onM
[12.21]	Joan	Jaa	onN
[12.22]	Läraren	Då har vi hunnit till f(4)	onM
[12.24]	Juan	Ja o så ett till	onN
[12.27]	Läraren	Då tar vi ett steg framåt till då. (4 s)	onM
[12.34]	Joan	Där va? (2 s) O då har vi fått ut värdet	onAOS
[12.37]	Läraren	Vad blir det då?	onAOS
[12.38]	Joan	6	onM
[12.39]	Läraren	6 ja. Visst	onIOS

Vi kan iaktta hur läraren här går in och tar en aktiv roll i gruppens matematiserande. I utdraget ovan kan vi tydligt se hur läraren leder eleverna framåt mot lösningen genom att använda sig av en rutin kallad lotsning (se vidare Lundgren, 1979). Vi kan till

exempel lägga märke till hur läraren använder ordet framåt [11.53] och ställer frågan: ”Hur mycket uppåt ska vi gå på det steget då?” [11.57]. I fältanteckningen noterades att både eleverna och läraren förefaller nöjda med att gruppen har kommit fram till ett korrekt svar och de bägge eleverna lämnar klassrummet.

Subjektifierande yttranden uppfattas kränkande

I grupp D möter vi de tre eleverna Viktor, Kim och Bea. Eleverna är placerade bredvid varandra och Kim är den som sitter i mitten och skriver. I denna sekvens ska vi återigen studera hur de subjektifierande yttrandena är tätt sammanfogade med den matematiska aktiviteten. Viktor är den elev i grupp D som inte ser sig som en elev som förmår delta i och bidra till gruppens matematiserande. Han står för de flesta yttranden som klassificeras som identitetsorienterade. I den korta sekvens som återges nedan kan vi iaktta hur Kim med både verbalt och icke verbalt språk signalerar till Viktor att han tror att han inte ”hänger med” [9.20]. Viktor markerar i denna sekvens att han uppfattar Kims signaler som något negativt [9.25]:

Utdrag 7.15 Grupp B: En elev markerar att han uppfattar ett identifierande icke verbalt yttrande

[9.11]	Kim	Yes och om vi då hoppar 2 steg från 3 till 5? Med lutningen 2. Vad får vi?	[onM] [onAOS]
[9.18]	Viktor	Du sa ju det	[onN]
[9.20]	Kim	Ja ? *krävande* [lägger samtidigt ner pennan på bordet]	[onN] [onIOS]
[9.21]	Viktor	7, 6 menar ja.	[onM]
[9.22]	Kim	6	[onM]
[9.25]	Viktor	*Fnissar* Kul att du lägger ner pennan och verkligen visar att/ *fnissar* ("kul" tolkas här som ironiskt)	[onIOS]
[9.29]	Kim	Ah	[onN]
[9.33]	Bea	Var det nått mer vi skulle få fram eller?	[onAOS]
[9.36]	Viktor	Ojojoj *suckar*	[onIOS]
[9.39]	Kim	Värde, f parentes 5, 6 [Skriver ner svaret i blocket]. Läger ner pennan och markerar att det är klart]	[onM]

Viktor suckar uppgivet för sig själv och ojar sig [9.36] inför gruppen, vilket han också gjorde när eleverna tilldelades uppgiften. När de andra eleverna är på väg att lämna bordet säger Viktor: ”Men gå igenom det en gång till så jag hänger med” [10.25], vilket bekräftar den tidigare tolkningen av att han sänt ut signaler att han inte har deltagit i gruppens matematiserande.

7.8.3 Jämförelse av innehållsfokus i yttranden mellan enskilda elever och mellan de olika grupperna

I detta kapitel är resultatredovisningens fokus riktat mot att studera de olika roller eleverna tar när de arbetar i smågrupper i matematik. Här granskas gruppmedlemmarnas deltagande i gruppens diskurs avseende innehållet i elevernas yttranden och skillnader och likheter i gruppernas interaktionsmönster, och hur dessa förefaller påverka elevernas deltagande och utvecklingen av gruppmedlemmarnas matematiserande. I Appendix D presenteras en utförlig sammanställning av förekomsten av olika yttranden i fyra observerade grupper, kategoriserade enligt metoden presenterad av Wood och Kalinec (2012). Fyra kategorier har använts vid redovisningen: matematiserande [onM], aktionsorienterad subjektifiering [onAOS] identitetsorienterad subjektifiering [onIOS] och övriga yttranden [onN] (se avsnitt 5.10.1).

Vi har tidigare konstaterat i resultatredovisningen att trots att eleverna arbetar med samma problem varierar innehållet i elevernas yttranden både mellan och inom olika elevgrupper. I detta avsnitt presenteras ett urval av dessa data med hjälp av cirkel- och stapeldiagram. Här redovisas skillnader som framträder när elevernas yttranden kategoriserats utifrån innehållsfokus. Jämförelserna är gjorda både avseende skillnader som framträder vid jämförelse mellan individerna inom grupperna, men också mellan de olika grupperna. Resultatredovisning har sammanställts med hjälp av underrubriker för att underlätta läsningen.

Endast några enstaka yttranden, mindre än 1 % av gruppernas kommunikation, kunde kategoriseras som att inte vara kopplade till den uppgift eleverna är satta att lösa⁷⁷. Valet gjordes därför att inte skilja på om yttrandena var kopplade till uppgiften eller ej (on/off) under denna analysredovisning på grupp- och individnivå. Elevernas kommunikation kan konstateras effektiv i bemärkelsen att den i stort nästan till 100 % kan iakttas vara kopplad till den uppgift elevgrupperna arbetar med.

Jämförelse av likheter och skillnader i interaktionsmönster och innehållet i gruppernas yttranden

Vid en första jämförelse av innehållet i elevernas yttranden i respektive grupp, visar cirkeldiagrammen att andelen yttranden av respektive kategori är relativt lika fördelade i de observerade grupperna (se fig. 7.16). Av särskilt intresse i studien är att belysa i vilken mån innehållet i elevernas diskurs skiljer sig vad gäller andelen yttranden som direkt har förutsättningar att bidra till gruppens matematiserande. Elevernas matematiserande [onM] är själva förutsättningen för att vi ska tala om en matematisk diskurs och en matematisk aktivitet i grupperna. Vid en närmare granskning av i vilken grad de olika eleverna aktivt deltar i matematiserandet, kan vi dock iakttä dels skillnader både vad gäller interaktionsmönstren mellan de olika grupperna, dels också stora skillnader mellan enskilda individers bidrag inom respektive grupp. I de fyra grupperna

⁷⁷ Förutom tre yttranden är samtliga uttalanden som ej kunde hänföras till uppgiften (klassificerade [offM]/[offIOS]/[offN]). Dessa uttalade återfinns i grupp C och är transkriberade i utdrag 7.13.

varierar de yttranden som betecknas som matematiserande mellan 27 % och 43 %. Enskilda elevers bidrag till respektive grupps matematiserande varierar desto mer, då enskilda individer bidrar med mellan 2 % och 70 % till respektive grupps matematiserande (se Appendix D). Dessa yttranden bidrar direkt till den matematiska diskursen, men säger dock inget om kvalitén i denna. Kvantiteten har inte visat sig vara en avgörande faktor för elevernas lärande, utan det är kvalitén i matematiserandet som i tidigare forskningsstudier visat sig ha större betydelse (Sfard, 2012). Även om långt ifrån alla yttranden i diskursen kategoriseras direkt som matematiserande, finns det ändå möjligheter till tillfällen för lärande i samtliga observerade grupper.

Figur 7.16 Jämförelse av innehållet i elevernas yttrande i respektive grupp

Förutom andelen yttranden kategoriserade som matematiserande är också de aktionsorienterade frågorna av intresse för att studiens syfte. I de fyra grupperna står dessa två kategorier ([onM] och [on AOS]) tillsammans för mellan 42 % och 57 % av samtliga yttranden i respektive grupp under problemlösningssituationen (se figur 7.16). Det innebär att ungefär hälften av elevernas yttranden under lektionen i varje fall kan anses ha förutsättningar för att bidra till att elevernas kommunikation handlar om matematik. Andelen yttranden som klassificerats som aktionsinriktade frågor är mycket lika i de fyra grupperna och varierar mellan 13 % och 16 %, medan variationen på individuell nivå är mycket stor och varierar mellan 7 % och 44 % av respektive grupps totala andel aktionsinriktade yttranden (se Appendix D). Dessa aktionsinriktade frågor inbjuder andra elever i gruppen att matematisera genom att gruppdeltagarna då utmanas till att besvara frågor om varför och hur de matematiserar som de gör [AOS].

Det innebär då att elevgruppens matematiserande [onM] ökar. I grupp A kan vi iaktta att mer än hälften av de aktionsinriktade frågorna direkt efterföljs av ett yttrande kategoriserat som [onM], det vill säga bidrar till att eleverna replikerar med att matematisera. I grupp A kan vi iaktta hur André genom att ställa aktionsinriktade frågorna bidrar till Moas matematiserande men också till att han får stöttning av en-som-vet-mer i gruppen.

Vid jämförelse mellan grupperna avseende andelen yttranden som i någon mån direkt bidrar till den matematiska aktivitetens innehållsfokus i yttrandena kan vi konstatera att de fyra gruppernas bidrag till den matematiska diskursen skiljer sig åt.

Interaktionen i grupp B – när läraren tar en aktiv roll i gruppens matematiserande

Vid en närmare granskning kan man konstatera att grupp B har en betydligt högre andel yttranden som kategoriseras som matematiserande [onM] än de övriga grupperna (figur 7.16). I grupp B är Maria, som håller i pennan, den elev som står för ca 40 % av samtliga yttranden oavsett innehåll (se diagram 7.17 och 7.18 nedan). Maria är aktiv i gruppens kommunikation och bidrar både till yttranden kategoriserade som matematiserande och ställer aktionsorienterade frågor till andra elever om hur och varför de matematiserar som de gör. Trots att Maria är den som står för flertalet yttranden, har hon inte rollen av den-som-vet-mest i gruppen. Då Maria håller i pennan, och ingen av de andra två eleverna kontrollerar vad hon skriver, kommer det att innebära att Marias felaktiga tolkning av det matematiska formelspråket hindrar elevgruppens möjlighet att utveckla diskursen i rätt riktning. Denna avsaknad av en elev som leder gruppens matematiserande för elevernas diskurs in i en återvändsgränd. När elevernas problem att tolka symbolspråket inneburit att de redovisar en felaktig lösning går läraren in aktivt i gruppens arbete (se utdrag 7.14). Vid en första betraktelse av andelen matematiserande yttranden i grupperna är det grupp B som står för den högsta men vid en närmare granskning är det läraren som står för en fjärdedel av dessa yttranden (se fig. 7.17). Under denna episod är flertalet av lärarens frågor till eleverna annars sådana som handlar om varför de gör som de gör, det vill säga aktionsorienterade frågor. Lärarens höga andel av identifierande yttranden i gruppen är yttranden kopplade till respons på elevernas svar som: "Jag tycker ni tänker rätt" [21.13] (se kapitel 7.8.1).

Figur 7.17 Grupp B: Fördelningen av olika yttranden med avseende på innehåll.

Figur 7.18 Grupp B: Fördelningen av totala andelen yttranden per deltagare

Figur 7.19 Grupp A: Elevernas andel av samtliga yttranden

När vi iakttar fördelningen av elevernas matematiserande yttranden [onM], kan vi konstatera att det är de elever som via lottnings tilldelats rollen att hålla i pennan också är de som står för huvuddelen av det totala antalet yttranden i samtliga grupper. Dessa skrivande elever står även för den högsta andelen yttranden som kategoriseras som matematiserande [onM] (se Appendix D).

I samtliga grupper är det de individer som har den lägsta andelen av gruppens matematiserande yttranden [onM] som också är de elever som står för den minsta andelen aktionsorienterad subjektifiering [onAOS] (se Appendix D). Detta innebär att de elever som inte förmår eller väljer att delta i gruppens matematiserande, inte heller ställer de frågor till andra i gruppen som ger svar på varför eller hur någon i gruppen matematiserar som de gör.

Vid jämförelsen av andelen yttranden kategoriserade [onAOS] kopplat till elevernas matematiserande [onM] kan också konstateras att de elever som tar rollen av den-som-vet-mer står för den lägsta andelen av dessa aktionssubjektifierande yttranden.

Det innebär, inte oväntat, att dessa elever som leder huvuddelen av gruppens matematiserande också ställer minst antal frågor kopplade till hur och varför en annan gruppdeltagare matematiserar som den gör. De elever som står för huvuddelen av matematiserandet är i alla grupper också de elever som slutligen verbalt uttrycker att de har en lösning på problemet.

De aktionssubjektifierande yttrandenas betydelse för att driva den matematiska diskursen framåt i grupp A

I grupp A står Moa för 78 % av de yttranden som kategoriseras som matematiserande. Moa är också den elev som håller i pennan. Av de andra två eleverna står Lisa för 7 %, André för 12 % och läraren för 7 % av resterande yttranden i denna kategori (se figur 8.20 nedan). Detta kan inte tolkas på annat sätt än att Moa har rollen av den-som-vetmer och en central roll i gruppens matematiserande. Moa har dock liksom de andra eleverna till att börja med inte klart för sig hur hon ska tackla det problem gruppen har att lösa [4.00].

Figur 7.20 Grupp A: Fördelning av yttranden på individnivå med avseende på dess innehåll

För att tydliggöra elevernas olika roller i grupp A vänder vi nu för ett ögonblick blicken mot deltagarnas kommunikativa aktivitet utan hänsyn till innehåll i yttrandena (se fig. 7.19). Vi kan konstatera att Moa då står för 43 % av samtliga yttranden i gruppen och att närmare 80 % av hennes yttranden klassificeras som matematiserande. Här kan noteras att Moas kommunikation är effektiv i bemärkelsen att hon inte ägnar sig åt mycket annat än att just matematisera. Av samtliga yttranden i grupp A är 26 % klassificerade som subjektifierande ([AOS] eller [IOS]), vilket innebär att det är yttranden som kan kopplas till vad deltagarna gör eller deras egenskaper (se Appendix D). Om man sedan närmare studerar André's deltagande i gruppens diskurs, står han för 44 % av gruppens aktionssubjektifierande yttranden [onAOS]. André tar således en aktiv roll i gruppens kommunikation, och hans bidrag handlar huvudsakligen om att ställa frågor om varför eller hur Moa matematiserar som hon gör. Frågorna fyller dels funktionen att Moa förtydligar sitt matematiserande för de andra deltagarna, dels också

att André får bekräftelse på att det han själv tänker eller gör är korrekt. Dessa yttranden besvaras ofta med matematiserande [onM] eller en bekräftelse som svar (se Appendix A för flödesschemat för respektive episod 7.1b-7.4b). Vidare kan vi notera att drygt hälften av Andrés samtliga yttranden är kategoriserade [onN]. Dessa yttranden är alltså kopplade till uppgiften, men är inte kategoriserade som subjektifierande eller matematiserande. En närmare granskning av innehållet i dessa yttranden visar att dessa huvudsakligen är små bekräftande ord ("mm, jaa") där André signalerar att han lyssnar till Moas matematiserande. André tar en aktiv roll som en nyfiken elev och signalerar att han har förtroende för Moa som den-som-vet-mest och som ledare för gruppens matematiserande.

Elevernas deltagande i den matematiska aktiviteten i gruppen antas vara sammankopplat med hur individerna ser på sig själva och på varandra (Wood & Kalinec, 2012, s. 110; Sfard, 2008, 2012). Här finns det skäl att observera Lisas roll i grupp A. Då eleverna påbörjade problemlösningen lämnade hon gruppen de första minuterna, utan att vare sig hon eller någon av de andra gruppmedlemmarna kommenterade detta. En rimlig tolkning är att vare sig Lisa själv eller någon av de andra gruppdeltagarna förväntade sig något annat. Lisa står för endast 7 % av gruppens totala antal yttranden och 7 % av gruppens matematiserande [onM]. Hennes bidrag till gruppens matematiserande är procentuellt sett inte så mycket lägre än Andrés, men hennes yttranden bidrar inte till den matematiska diskursens framflyttning.

Jämförelse av olika ledarrollers betydelse för interaktionen i grupp A och D

Valet att närmare jämföra dessa två grupper har gjorts utifrån att bägge grupperna består av tre elever, där en av eleverna i de bägge grupperna tydligt tar rollen att fungera som ledare för den matematiska diskursen [onM]. I båda grupperna har också dessa två elever rollen som den som för anteckningar.

I Appendix F redovisas andelen yttranden inom respektive kategori i grupp A respektive D. Andelen yttranden som kategoriseras som matematiserande är i grupp A 37 % och i grupp D 33 %. I grupp A tar Moa 78 % av dessa yttranden och i grupp D står Kim för 70 % av gruppens matematiserande yttranden [onM]. I bägge grupperna är det alltså en elev som i huvudsak bidrar till matematiserandet. Det är också dessa elever som håller i pennan. I denna första jämförelse förefaller det som de bägge eleverna tar en liknande ledarroll i gruppernas diskurs men en närmare betraktelse visar att så inte är fallet. I utdrag 7.16 är flödesschemat placerat till vänster om transkriptionen för att underlätta för läsaren att följa med i kommunikationsflödet i gruppen. Utdraget är hämtat från grupp D som består av Kim, Bea och Viktor. Det är Kim som antecknar. Eleverna har nyligen fått ledtråden "Derivatan är k-värdet". Vi observerar nedan en minut av interaktionen mellan Kim, som har rollen som den-som-vet-mest, och de övriga gruppmedlemmarna. Kim säger sig just ha funnit en lösning på problemet [8.26] och delger det till de övriga.

Utdrag 7.16 Grupp D: Eleverna finner derivatan och diskursen drivs framåt⁷⁸

Tid	Bea	Kim	Viktor	Läraren	Vad som sägs och vad som görs
[8.26]	c		o		Jaa. Då ska vi bestämma det högsta värdet 5 kan anta. O då/ om/ [Pekar på lappen med derivatan med pennan]
[8.26]					Jo, jo, nu vet jag.
[8.26]					Kolla! Jag har det!
[8.26]					Om vid punkten 3/
[8.35]					Mm
[8.37]					Mm
[8.39]					Så är det 2. (3, 2) [Prickar in punkten i koordinatsystemet]
[8.42]					Ja den har vi där ((bekräftar, pekar inte))
[8.46]					(2s). Om den har lutningen 2 och om vi går 2 steg uppåt.
[8.46]					Vad blir den då? (2s)
[8.49]					5
[8.50]					Nää
[8.52]					6 *skrattar ihop*
[8.54]	c				Ja
[8.56]				o	Kolla här!
[8.57]				o	Jag hörde inte?
[8.59]				o	Jo men koll/. Jag har redan svaret, jag har svaret.
[8.59]				o	Alltså om vi har punkten, den här punkten vet vi, den här finns, den är fast [pekar i uppgiften på f(3)=2]
[9.06]				o	Ja, (3,2)
[9.07]				o	Den högsta lutningen den kan ha är ju?
[9.08]				o	2
[9.11]				o	Yes och om vi då hoppar 2 steg från 3 till 5? Med lutningen 2.

⁷⁸ Förklaring till flödesschemat återfinns i kapitel 5.10.2

[9.11]	o		o	o	Vad får vi? (2s)
[9.18]		o	o	o	Du har redan/ du sa ju de?
[9.20]	o		o		Ja? [lägger ner pennan]
[9.21]		o	o	o	7, 6 menar ja
[9.23]	o		o	o	6
	o	o	o	

Vi jämför denna episod i grupp D med den sekvens då Moa förmedlar nyckeln till problemet för de övriga gruppmedlemmarna i grupp A. Motsvarande episod för grupp A återfinns under tiden [17.00]-[19.30] (se utdrag 7.17). I denna sekvens tydliggörs skillnader både vad gäller hur de elever tar ledarrollen som den-som-vet-mest, men också skillnader i de andra deltagarnas olika roller i respektive grupp. Flödesschemat för grupp A (utdrag 7.17) visar tydligt hur Moa förefaller tala till sig själv, utan att ta notis av de övriga⁷⁹. I detta skede när Moa som har rollen av den-som-vet-mest i grupp A och delger de andra lösningen på problemet, tar André fortfarande rollen av den intresserade eleven som bekräftar sitt deltagande. Lisa däremot ger ingen respons till någon av de andra gruppdeltagarna. Moa tar ingen märkbar notis om det, utan återigen tydliggörs hur marginaliserad Lisa är i gruppens matematiserande. I grupp D tar inte heller någon av de andra eleverna en aktiv roll i matematiserandet, utan deras yttranden är i stort sett enbart ”mm” som bekräftelse på att de lyssnar på Kim. Viktor yttrar sig endast då Kim uppmanar honom (se t.ex. [8.57]). Bea däremot tar en mer aktiv roll då hon kommenterar Kims uttalanden genom att matematisera då Kim ställer aktionsinriktade frågor till de andra två eleverna (se t.ex. [8.42]-[8.54]).

⁷⁹ I flödesschemat har de övriga eleverna markerat som mottagare eftersom de förefaller lyssna trots att Moa besvarar sina egna yttranden.

Utdrag 7.17 Grupp A: Interaktionsflödet i slutet av uppgiften

Tid	André	Moa	Lisa	Lärare	Vad som sägs och vad som görs
[17.14]					Så när x är mellan 3, 3 x har vi ju 3 här [pekar i koordinatsystemet]
[17.16]					Mm
[17.17]					mellan 3 och 5. När x är mellan 3 och 5! [Följer med pennan längs y-axeln] ⁸⁰
[17.17]					lärare!
[17.24]					Mm
[17.26]					Då kommer k-värdet antingen och va nånstans mellan 1 och 2. Det högsta är 2. Så det högsta värdet x kan ha måste ju va att den stiger med <i>två gånger på varje</i> . [pekar i uppgiften på derivatans värden och därefter i koordinatsystemet]
[17.36]					Mm
[17.37]					Så, då stiger den lite på första, 2. [ritar grafen samtidigt som hon talar]
[17.39]					Mm
[17.42]					och så stiger den dit upp på andra för o få 5.
[17.44]					Mm
[17.45]					Där [visar i grafen]
17.47]					Mm

Det finns också tydliga skillnader i hur Moa och Kim, som båda har rollen av den som vet mest i sina respektive grupper, interagerar med sina gruppmedlemmar (se utdrag 7.16 och 7.17). Kim ställer återkommande frågor till de andra eleverna för att de ska involveras i matematiserandet (se t.ex. [8.46], [9.07], [9.11]). Kims aktionsinriktade yttranden har funktionen att bjuda in eleverna i gruppen att besvara frågor, det vill säga delta i matematiserandet. Dessa frågor kan beskrivas som slutna frågor (Dysthe, 1996) då eleven själv redan vet svaret. De har ändå klassificerats som [onAOS] eftersom de är inriktade på hur eleverna tänker eller gör.

Just när kameran har stängts av och eleverna i grupp D är på väg att resa sig gjordes en notering i fältanteckningarna att eleverna åter börjar arbeta tillsammans. I den audiovisuella penna kan följande ljudupptagning avlyssnas då Viktor ber Kim om ytterligare stöd:

Utdrag 7.18 Grupp D: Eleven ber om extra stöttning

Tid	Aktör	Vad som sägs och vad som görs	Kod
[10.25]	Viktor	Men gå igenom det en gång till så jag hänger med.	onN
[10.29]	Kim	Mm, vänt/ Den där punkten vet vi den är där. Vi vet att lutningen kan va mellan 1 och 2.	onM
[10.32]	Viktor	Mm	onN
[10.33]	Bea	Ja högst 2 alltså	onM
[10.36]	Kim	Det högsta värdet vi kan få det är ju när det har högst lutning	onM
[10.39]	Bea	Ja, just det jaa	onN
[10.40]	Kim	Och då utgår vi från att det här är lutning 2	onM
[10.42]	Bea	Mm	onN
[10.43]	Kim	Och om vi ska gå från 3 till 5, 3 till 5	onM
[10.45]	Bea	Jaa	onN
[10.46]	Kim	så hoppar vi 2 steg så 4 4 5 6	onM
[10.49]	Läraren	Så ja, bra kanon	onIOS

Kim bemöter visserligen Viktors vädjan om ytterligare en förklaring. Trots denna vädjan är det endast Bea som säger något som kan kategoriseras som matematiserande [10.33]. Viktor deltar inte aktivt, utan som tidigare yttrar han endast ”mm” en gång [10.32]. Det är rimligt att anta att Viktor lämnar arbetet utan att, som han själv uttryckte det, ha hängt med i matematiserandet trots bönen om extra stöttning.

Kapitel 8 Sammanfattning och resultatdiskussion

Detta kapitel är avsatt för sammanfattning och diskussion av de resultat som redovisats i kapitel 7 speglade i några tidigare forskningsresultat. Klassrumsstudiens syfte är att bidra till en ökad insikt om vad som hindrar eller gynnar den matematiska diskursens utveckling när eleverna kommunicerar tillsammans om matematik. Forskningsfrågan formulerades i avsnitt 1.3 på följande sätt:

- *Hur påverkar de enskilda deltagarnas aktivitet och bidrag till gruppens kommunikation utvecklingen av den matematiska diskursen och elevernas tillfällen till lärande?*

Forskningsfrågan splittrades inför analysen upp i två frågeställningar, riktade mot de matematiserande respektive subjektifierande yttrandena i diskursen:

- *Hur påverkar användningen av olika medierande redskap (mediatorer) och matematiska ord utvecklingen av gruppens matematiska diskurs och tillfällen till lärande?*
- *Hur påverkar de subjektifierande yttrandena i diskursen som handlar om deltagarna, vad de gör eller hur de är, utvecklingen av den matematiska diskursen och elevernas tillfällen till lärande?*

Dispositionen i kapitlet följer forskningsfrågorna. Avsnitt 8.1 är avsatt för den första och avsnitt 8.2 för den andra av de två specifika forskningsfrågorna. Här är det återigen viktigt att betona att avsikten med att separera dessa yttranden med avseende på dess innehåll endast är ett analysredskap för att studera gruppernas diskurs. Analysen av elevernas diskurs under smågruppsarbetet pekar snarare på hur näst intill oupplösligt sammantvinnande dessa matematiserande och subjektifierande yttranden är i gruppernas diskurs och hur de subjektifierande yttrandena påverkar elevernas möjlighet att utveckla den matematiska diskursen. Vidare behandlas i detta kapitel hur diskursen på en metanivå gynnas av de aktionsorienterade frågorna [AOS] och bidrar till utvecklingen av den matematiska diskursen. Avslutningsvis jämförs de identifierande respektive subjektifierande yttrandenas funktion och hur dessa påverkar kvalitén på matematiserandet.

8.1 Den matematiska diskursens utformning

I detta avsnitt sammanfattas och diskuteras hur elevernas matematiserande och utveckling av en för dem ny diskurs påverkas av valet av mediatorer och matematiska ord och de olika representationer av de matematiska objekten de därmed erbjuds att möta och kommunicera om tillsammans i smågrupperna.

8.1.1 Det upprättade didaktiska kontraktet som undervisningens motor

Den uppgift läraren valt för den observerade gruppaktiviteten kan definieras som ett matematiskt problem, enligt definitionen av Lester (1983), för samtliga observerade elevgrupper (se 2.11). Läraren presenterar uppgiften för eleverna som ett problem han förväntar sig att de ska klara av att finna lösningen på tillsammans i gruppen. Björkqvists (2013) beskrivning av ett matematiskt problem innebär att det ytterst handlar om elevernas subjektiva upplevelse av att de möter ett problem de är motiverade att finna en lösning på, samtidigt som de ska ha en upplevelse att de inte vet hur man ska gå tillväga för att lösa problemet. Även denna beskrivning stämmer väl in på samtliga observerade elever då inte någon elev i klassen hade en lösningsmetod när de påbörjade problemlösningen i gruppen.

Elevernas lärande kan rimligen antas befinna sig på en metanivå då ett för dem nytt matematiskt begrepp nyligen introducerats (Sfard, 2008). När en grupp inte längre har någon elev som kan leda diskursen framåt, begär gruppmedlemmarna sin första ledtråd. Det kan jämföras med att läraren då går in i gruppen och tar rollen av en mer erfaren deltagare och kommunicerar skriftligt genom den ledtråd, ”det yttrande”, han väljer att bidra med. Det är, enligt den gemensamma överenskommelsen mellan läraren och eleverna, gruppens medlemmar som gör bedömningen när de ska be om stöttning av läraren för att matematiserandet ska kunna utvecklas vidare. För att gynnsamma förutsättningar för lärande ska skapas, visar studien vikten av att det faktiskt finns någon i gruppen som förmår och får ta rollen att leda diskursens utveckling. Detta bekräftas också i tidigare forskning (se t.ex Ben-Zvi & Sfard, 2007)

Lärarens bidrag som klassificeras som matematiserande sker huvudsakligen med hjälp av dessa i förväg planerade skriftliga ledtrådar förutom i slutskedet på gruppernas problemlösningssituation. Lärarens yttranden kodade [onM] varierar mellan 5-18% i de observerade grupperna (Appendix F).

Under en intervju före lektionen tydliggjorde läraren att intentionen var att skapa en problemlösningssituation där eleverna bromsades från att direkt ta hjälp av läraren och att gruppen istället förlitade sig mer på varandra. Genom att läraren i inledningen av lektionen explicit uttalar sin förväntan på att eleverna skulle lyssna till varandra och samarbeta för att kunna lösa problemet, får de indirekt också outtalade signaler om att de förväntas ta ansvar för sitt eget lärande och att de kan klara av att lösa problemet tillsammans. Läraren betonade också att vikten av att de frågar hur andra tänker, förklarar för varandra och att de alla tidigare har mött de metoder som krävs för att lösa uppgiften. Eleverna har också tilldelats ansvaret att avgöra i vilken utsträckning gruppen behöver stöttning med hjälp av de i förväg valda ledtrådarna. Tävlingsinslaget i gruppaktiviteten förklarar läraren ska fungera som en spärr för att inte ta hjälp utan att de verkligen är överens om att de först har uttömt gruppens resurser. Läraren har före problemlösningssituationens början således satt upp tydliga gränser i dialog med eleverna för vad som förväntas av dem i undervisningssituationen. Här synliggörs det Brousseau (1997) kallar det didaktiska kontraktet mellan lärare och elever.

Vilka positiva faktorer medför lärarens val av undervisningsdesign för att främja elevernas matematiska diskurs under den observerade lektionen? Jämfört med en

tidigare observerad gruppaktivitet där läraren använt tiden till att muntligt stötta en grupp i taget när de ber om hjälp, observerades läraren här ha tillförsäkrat sig mer tid att rotera mellan grupperna och ta del av elevernas matematiserande. En positiv effekt av detta kan vara att läraren får en tydligare bild av elevernas mot- och medgång i deras matematiserande, vilket kan medföra att läraren får ökad insikt i de lärprocesser som pågår i samtliga grupper. Då eleverna tydligt sporras av tävlingsinslaget att sträva efter att inte be om ledtrådar ”i onödan” stimuleras de att kommunicera med varandra. Lektionsupplägget ger läraren tid för att i lugn och ro i förväg tänka igenom hur han kan leda elevernas matematiska diskurs framåt. Läraren ”tvingar” sig själv att reflektera över och ta ställning till vilka möjliga lösningsvägar som erbjuds, vilka hinder eleverna kan möta och hur han på bästa sätt kan stötta eleverna för att de ska ”passera” dessa hinder när de löser problemet. Lärarens deltagande för att utveckla elevernas diskurs under problemlösningsaktiviteten kan därför metaforiskt beskrivas som rollen av spindel som fäster de trådar som fattas för att eleverna ska kunna röra sig mellan olika semiotiska register och växla mellan olika representationer för att utveckla en diskurs om objektet derivata. Vid behov hjälper läraren eleverna att fästa de ”nya trådar” som måste länkas till det redan befintliga nät av olika representationsformer, matematiska symboler och mediatorer som eleverna redan utvecklat.

I matematikdidaktisk forskning beskrivs användning av ledfrågor som ett effektivt sätt för läraren att ge återkoppling till eleverna för att öka mängden av organisatoriska och utvecklande strategier för lärandet (Hattie, 2012, s. 174). Ledfrågorna har ofta liknats vid funktionen hos en byggnadsställning⁸¹, och konsten är att veta när de inte längre fyller den avsedda funktionen och eleverna ska lämnas till att ta ett större eget ansvar för sitt lärande (ibid., s. 174). I denna problemlösningsaktivitet har läraren lämnat över en stor del av detta ansvar till gymnasieeleverna i gruppen.

Lärarens utformning av gruppaktiviteten innebär att det är varje elevs subjektiva uppfattning om sin egen och kamraternas förutsättningar att bidra till matematiserandet som avgör om gruppen beslutar att välja att ta stöd av någon-som-vet-mer, i detta fall lärarens ledtrådar. Då eleverna steg för steg utvecklar den matematiska diskursen, fungerar ledtrådarna som ett upplevt stöd för eleverna då de ”kört fast” och matematiserandet innebär att den matematiska diskursens innehållsfokus förändras när eleverna erhållit en ny ledtråd.

Den stöttning som de ledtrådar läraren ger eleverna kan enligt van de Pol et al. (2010) beskrivas fylla olika funktioner. I lärarens interaktion med eleverna kan flera av dessa funktioner urskiljas. Grupperna får förslag på vägar för att gå vidare i matematiserandet utan att för den skull i stöttningen leverera färdiga lösningspaket eller svar. Vidare innehåller ledtrådarna förklarande upplysningar och förtydliganden. Läraren använder sig också av den språkliga strategin att ställa frågor till eleverna som kräver svar, i den mening att eleverna förväntas matematisera för att besvara frågan. Denna stöttande strategi kan också iaktas i elevgrupp D när den elev som tar på sig rollen som ledare använder aktionsinriktade frågor i diskursen (se vidare avsnitt 8.2.4).

⁸¹ Eng. scaffolding

Vikten av att i matematikundervisningen ge eleverna möjlighet att utveckla förmågan att ställa aktionsinriktade frågor är viktig i varje fall av två anledningar. Dessa frågor ger svar på hur och varför en individ matematiserar som hon gör och bidrar då till yttranden som ger svar på dessa frågor, det vill säga leder till ett ökat matematiserande. När en individ ställer dessa frågor på egen hand, innebär det också att eleverna både sätter ord på det de inte förstår och att risken minskar för att de blir utestängda och att de andra gruppmedlemmarna matematiserar "över deras huvuden", eller utanför deras närmaste utvecklingszon, ZPD (Vygotsky, 1978).

Läraren använde dock inte den stötningsfunktion som innebär att demonstrera olika modeller (van de Pol et al., 2010). Läraren betonade redan under intervjun före lektionen att han medvetet ville undvika att eleverna skulle fokusera alltför mycket på procedurer.

Den fjärde funktion som urskiljs under stöttning handlar om att ge beröm och bekräftelse (ibid., 2010). Läraren ger endast i begränsad omfattning stöttning i form av beröm eller bekräftelse på att de är på rätt väg till enskilda elever, utan denna stöttning äger istället rum på gruppnivå. Ett undantag från detta är i slutskedet av gruppernas problemlösningssituation, då läraren oftast vänder sig direkt till den elev som tar rollen att redovisa för läraren. Läraren ställer då oftast aktionsinriktade frågor till eleverna och den elev som fungerat som den-som-vet-mest är den som besvarar dessa. Läraren undviker, medvetet eller omedvetet, att vända sig till en elev som inte har tagit initiativ till att redovisa gruppens arbete. De övriga gruppmedlemmarna deltar inte i någon större omfattning under redovisningsskedet. En konsekvens av detta, som iakttagits i flera av grupperna, är att flertalet av eleverna lämnar problemlösningssituationen utan att ha följt med i hela lösningssprocessen. Elevernas uppfattning av att de inte deltagit i matematiserandet bekräftas av att elever i grupp A och D ber Kim respektive Moa, som fungerat som ledare i gruppernas matematiserande, att gå igenom allt tillsammans med dem ännu en gång när läraren lämnar gruppen efter redovisningen (se t.ex avsnitt 7.8.3, utdrag 7.18). Vikten av att som lärare vara medveten om betydelsen av att inte bara den som redan är mest förtrogen med det matematiserande som ska redovisas får ordet måste betonas. Det är också viktigt att eleverna medvetandegörs om de klassrumsnormer som ska gälla under samarbetslärande, både vad gäller eget ansvar och deltagande, för att skapa optimala förutsättningar för lärande. Detta finns också tidigare beskrivet av exempelvis Jackson och Cobb (2010) och Yackel och Cobb (1996).

Analysen av innehållet i samtliga grupper diskurs visar att nära 100 % av deltagarnas yttranden kan kopplas till uppgiften [onM, onAOS, onIOS]. Elevernas kommunikation i grupperna kan således konstateras vara effektiv i den meningen att den innehållsmässigt är kopplad till den uppgift de har tilldelats att lösa och att de som grupp betraktade förefaller motiverade att lösa uppgiften. Det didaktiska kontraktet mellan läraren och eleverna fungerar väl när det gäller att skapa en undervisningssituation där den kommunikation som sker har fokus på det problem eleverna är satta att lösa.

8.1.2 Användningen av olika medierande redskap, representationer och matematiska ord påverkar utvecklingen av den matematiska diskursen

I detta avsnitt belyses hur lärarens uppmaning att elevgruppen ska växla användningen av mediatorer och matematiska representationsformer bidrar till elevernas matematiserande. Vidare visas på hur en tidigare erövrad diskurs främjar elevernas utveckling av en ny diskurs när lärandet sker på en metanivå. Dessutom belyses hur och varför medieringen med hjälp av det matematiska formelspråket innebär hinder för gymnasieelevernas matematiserande. Kapitlet avslutas med en reflektion över betydelsen av att eleven deltar som skrivare och hur detta påverkar deltagandet i diskursen.

Byte av mediatorer och matematiska representationsformer bidrar till diskursiva framflyttningar

Utformningen av gruppaktiviteten innebär att eleverna inte får direkta förslag på val av metoder, lösningsvägar eller hur metoder ska tillämpas, vare sig via ledtrådarna eller vid de tillfällen då läraren bidrar till gruppens kommunikation. Ledtrådarna vägleder eleverna i användningen av andra mediatorer eller för att knyta en tidigare erövrad diskurs till den för dem nyintroducerade diskursen om derivata.

Lärarens utformning av undervisningen påminner till viss del om de steg-för-steg lösningar av problemuppgifter som presenteras i flera svenska läroböcker i matematik. Det kan innebära att eleverna felaktigt uppfattar att problemet är kopplat till en viss metod, vilket kan uppfattas som en olämpligt utformad problemuppgift (Jablonka, 2013). Här ger läraren dock inga färdiga metoder utan vägleder och uppmanar eleverna att använda olika mediatorer och då indirekt också olika representationsformer för de aktuella matematiska objekten.

Den första ledtråden läraren ger eleverna är en uppmaning att de ska använda ett koordinatsystem, vilket innebär att samtliga elevgrupper då påbörjar arbetet att försöka markera punkter för att kunna rita en graf. Koordinatsystemet fungerar här som en artefakt, ett redskap för den grafiska representationen. Samtliga elevgrupper växlar direkt över till att framställa en grafisk representation av funktionen när de får denna ledtråd. Detta byte av representationsform innebär i majoriteten av de observerade elevgrupperna att nya hinder för diskursens utveckling sätts under belysning. De flesta av grupperna behöver åter lärarens stöd (i form av en ledtråd) för att växla mellan det i uppgiften använda symbolspråket med algebraiska notationer, till ett geometriskt register, för att klara av att markera det angivna funktionsvärdet $f(3) = 2$ i koordinatsystemet. Eleverna i studien har uppenbara svårigheter att passera mellan dessa två notationssystem, något som bekräftats i flera andra forskningsstudier (se t.ex. Duval, 2006). I en svensk studie inriktad mot diskurser i matematikklassrummet lyfter Riesbeck (2008) fram liknande resultat. Läraren kan pendla mellan ett algebraiskt och ett geometriskt register och eleverna har svårt att veta i vilken diskurs de befinner sig (ibid.). Ledtråden att använda ett koordinatsystem hjälper elevgrupperna att transkribera den tillgängliga informationen om funktionsvärdet presenterat som $f(3) = 2$ till en punkt (3,2) i koordinatsystemet. Detta kan tolkas som att när eleverna får tillgång till

både det algebraiska och geometriska registret, skapas förutsättningar för eleverna att koppla ihop dessa register och därmed vidga sin diskursiva repertoar. När eleverna får sin andra ledtråd att pricka ut punkten (3,2) tolkar alla grupper $f(3) = 2$ som den punkt som ska markeras. Detta kan naturligtvis konstateras vara en enkel slutsats för eleverna att sammanlänka, men det innebär också att de flesta av eleverna nu plötsligt förefaller säkra på att $x = 3$ och $y = 2$. Via denna representation klarar de alltså av att på egen hand avgöra vad som är x - respektive y -värde, vilket här medför att diskursen flyttas fram ett steg i rätt riktning. Detta ligger helt i linje med tidigare forskning som betonar vikten av att använda flera representationer för ett matematiskt objekt för att underlätta lärandet (se t.ex. Mason, 1998; Ryve, Nilsson & Pettersson 2013, s. 511; Sfard, 2008).

Här tydliggörs återigen lärarens viktiga roll som vägvisare och spindel för att hjälpa eleverna att bygga upp, knyta samman och passera mellan olika semiotiska register och nät av matematiska symboler som representerar de matematiska objekten.

Vi har i studien iakttagit att då eleverna introduceras för det abstrakta begreppet derivata, är det av betydelse vilket medierande redskap de använder. Eleverna kan inte på egen hand använda det matematiska symbolspråkets algebraiska register, men då läraren uppmanar dem att använda koordinatsystemet, kopplar de denna artefakt till en grafisk mediator. De flesta elever kan då växla över från det algebraiska symbolspråket till det geometriska registret mer eller mindre på egen hand och diskursen utvecklas i önskvärd inriktning. Då elevernas diskurs befinner sig på en metanivå är det rimligt att anta att eleverna måste bygga upp denna nya diskurs genom att knyta an till och ta stöd i den matematiska diskurs de tidigare har utvecklat (se vidare Sfard, 2008, s. 254; Sfard, 2012). Ett byte av mediator, till exempel uppmaningen att använda ett koordinatsystem, visar sig i studien bidra till att eleverna kopplar den för dem nya diskursen till en tidigare erövrade diskurs om funktioner.

Kopplingar till en tidigare diskurs främjar utvecklingen av en ny matematisk diskurs

Den tredje ledtråden ”Derivatan är k -värdet” fungerar på ett liknande sätt, men här fungerar ledtråden som ett stöd för den process som innebär att elevernas tidigare erövrade matematiska diskurs om räta linjens funktion och förändringskvoten till linjära funktioner nu också ska innefatta derivatabegreppet och icke linjära funktioner. Sfard (2012) beskriver denna stöttning i lärandet på en metanivå som nödvändig för att eleverna med tiden ska ha allt mindre behov av stöttning från andra individer. När eleverna får ledtråden ”Derivatan är k -värdet” kan vi iaktta hur eleverna i flertalet grupper nu förändrar fokus i matematiserandet och kopplar samman det matematiska ordet k -värde med användningen av ”trappstegsmetoden” för att beräkna nya funktionsvärden när förändringskvoten är given. Denna ledtråd för elevernas matematiserande framåt. Detta är ett exempel på hur läraren eller en mer erfaren deltagare i den matematiska diskursen bidrar till att gynna dess utveckling. Detta sker genom att erbjuda eleverna möjligheten att se sammanhang mellan tidigare erövrade diskurser,

och stötta eleverna att sammanföra ett nytt matematiskt begrepp till tidigare erövrad diskurs inom området funktioner.

När eleverna erhåller den tredje ledtråden ”Derivatan är k-värdet” kommer eleverna att knyta begreppet derivata till ändringskvoten för den linjära funktionen med hjälp av ordet k-värde. Eleverna har under tidigare gymnasiekurser i matematik arbetat med räta linjens funktion presenterad i formen $y = kx + m$ och beräknat ändringskvoten $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Den ledtråd eleverna erhåller innehåller endast informationen att ”Derivatan är k-värdet”, men det innebär att eleverna för första gången sammankopplar symbolen $f'(x)$ med värdet på derivatan. Här fungerar lärarens ledtråd som ett stöd för att eleverna ska koppla den för dem helt nya diskursen till en för dem sedan tidigare erövrad diskurs, i det här fallet den räta linjens ekvation. Återigen kan vi iakttä hur matematiserande yttranden [onM] blir mer frekventa i grupperna. Elevernas kommunikation ändrar inriktning och de försöker nu komma överens om hur funktionens värde förändras i intervallet.

När läraren hjälper eleverna att koppla ihop en tidigare erövrad diskurs med den nya diskursen om derivatan, innebär det således att elevernas diskurs utvecklas. Denna ledtråd innebär exempelvis att eleverna i grupp A på eget initiativ byter semiotiskt register till ett koordinatsystem och en grafisk representation av derivatan i sin strävan att finna det största värde funktionen kan anta i intervallet.

Denna observation att eleverna associerar till tidigare etablerade lösningsrutiner ligger i linje med en forskningsstudie av när eleverna för första gången möter funktionsbegreppet (Nachlieli & Tabach, 2012). Studien visar på elevers förmåga att hantera ett för dem nytt objekt trots att det ännu inte existerar i deras matematiska diskurs, då detta nya objekt växer fram i den matematiska diskurs individen just inlett bekantskap med. Oavsett innehållet i den matematiska diskursen observerades eleverna associera till olika lösningsrutiner de kunde koppla ihop med tidigare erfarenheter (ibid.).

Vid analysen av gruppernas diskurs konstateras att ingen av de elever vi möter har en lösning på uppgiften från början, men att samtliga elevgrupper till slut presenterar en i stort sett korrekt lösning för läraren. När läraren tar rollen som vägvisare för att eleverna ska använda olika mediatorer, och därmed nya representationer för det aktuella matematiska objektet, har vi observerat hur gruppernas matematiserande tar nya vägar och drivs framåt i riktning mot den diskurs som eftersträvas. På samma sätt har vi konstaterat hur eleverna genom att associera matematiska ord i diskursen till lösningsrutiner kan åstadkomma diskursiva framflyttningar.

Vi kan inget säga om vad som hade skett om eleverna inte hade fått denna vägledning av läraren vad gäller hur eleverna lyckats lösa problemet eller något om graden av lärande. Men viktigt att betona är att elevernas subjektiva bedömningar varje gång de begär en ledtråd innebär att gruppen inte kan komma vidare utan hjälp från någon som vet mer. Det innebär att elevernas bedömning är att de inte hade kommit vidare i matematiserandet utan dessa ledtrådar som till slut innebär att de löser problemet tillsammans.

Mediering med enbart matematiskt formelspråk hindrar elevernas matematiserande när lärande sker på en metanivå

Uppgiftens utformning innebär att eleverna måste tolka det matematiska symbol-språket, vilket inte är anmärkningsvärt då de problem eleverna möter i stort sett utslutande presenteras just med hjälp av ett formellt matematiskt symbolspråk. Förutom att eleverna utvecklar sina färdigheter att använda bokstavssymboler för ett okänt eller ett generaliserat tal, är det just när eleverna arbetar med funktionssamband som denna förmåga övas (Persson, 2010, s. 36). De symboler som används, förutom naturliga tal, är bokstavssymbolerna $f(x)$, $f'(x)$, $f(x) = y$ med insatta värden $f(3) = 2$, x , samt olikhetstecknen "mindre än eller lika med" ($\leq$), "större än eller är lika med" ($\geq$) och likhetstecknet ($=$). Ingen av dessa symboler är helt nya bekantskaper för eleverna, i bemärkelsen att inte ha mött dem i tidigare kurser. Även $f'(x)$, som symbol för derivatan, har eleverna presenterats inför under lärarens arbete med hela gruppen under de närmast föregående lektionerna.

De hinder som eleverna möter när de ska utveckla den matematiska diskursen under problemlösningsaktiviteten visar sig främst vara av fyra slag: Svårigheten att tolka den matematiska symbolen för derivatan $f'(x)$, att tolka $f(3) = 2$ korrekt som ett givet funktionsvärde, svårigheter att hantera läsriktningen vid tolkningen av de angivna intervallen för derivatan och funktionens x -värden, samt problem kopplade till att hantera likhets- och olikhetstecknet. Var och en av dessa svårigheter presenteras och diskuteras i följande avsnitt och speglas i tidigare forskningsresultat.

Tolkningen av likhets- och olikhetstecknet ett hinder för den matematiska diskursens utveckling

För att förstå vad eleverna brottas med när de ska tolka likhetstecknet ska vi närmare studera några yttranden. Redan när Moa tolkar $f(3) = 2$ verbalt genom att förkunna att "då blir det att y är lika med 2" [5.38], uttrycker André tydligt att han är förbryllad när han frågar: "Men var det inte $f(x)$ som blir y ?" [5.41]. Han har problem att avläsa symbolen för likhetstecknet strukturellt och ser likhetstecknet som en process som "ska bli" något. André uttrycker frustation när han ska tolka det angivna intervallet för derivatan $1 \leq f'(x) \leq 2$:

Sen har vi 1 är mindre än f prim x som är större än 2, y eh Deriverar man den så åker 2:an iväg och det blir noll..... Jag fattar inte! [6.13]

Det är uppenbart att André inte helt oväntat också har svårighet att tolka olikheten på annat sätt än operationellt, som om att det förväntas att "utföra något" med $f'(x)$ som att här genomföra en derivering. Även Moa tolkar olikhetstecknet operationellt när hon drar med pennan under intervallet för x och sedan pekar på symbolen $f'(x)$ och säger:

När x är ... är mellan här och här blir det någonstans mellan där. Men grejen är ju att det här i slutet är ju inte deriverat. [2.20]

Moa förefaller ännu inte till fullo ha förvärvat betydelsen av olikhetstecknet som symbol. Hon tolkar olikhetstecknet som att en derivering är en process som ska genomföras och inte som ett tillstånd. Elevernas problem att tolka användningen av olikhetstecknet kan jämföras med tidigare forskningsstudier som lyfter fram att likhetstecknet presenteras som en operationell indikator för att ”nu ska det skrivas ett svar” (se t.ex. Kieran, 1981; Persson, 2010; Attorps, 2006). Om likhetstecknet tidigt i åldrarna tolkas och läses ut som en symbol för ”blir” kan det leda till svårigheter i matematik (Kieran, 1992). En amerikansk studie genomförd av Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg och Stevens (2005) visar att mer än 50 % av eleverna i åk 6-8 i första hand använder denna operationella betydelse av likhetstecknet. Denna tolkning av likhetstecknet tenderar att följa eleverna genom hela gymnasiet för att hänga kvar och påverka begreppsuppfattningen även på universitetsnivå (Attorps, 2006; Kieran, 2007). I en nyligen genomförd svensk studie med fokus på algebraundervisningen i gymnasiet har denna tolkning också observerats (Persson, 2010, s. 42). Tolkningen av likhets- och olikhetstecknet följer således samma mönster. Den tolkning där likhets- och olikhetstecknet ses som en relationell symbol för att jämföra eller transformera en struktur förefaller få träda tillbaka för den operationella tolkningen.

Vi återerinnrar oss nu återigen den sekvens som utspelar sig när Moa inledningsvis tolkar olikhetstecknet i det angivna intervallet $3 \leq x \leq 5$ och därefter i intervallet $1 \leq f'(x) \leq 2$ och drar med pennan under intervallet för x och därefter pekar på symbolen för $f'(x)$ och säger:

När x är .. är mellan här och här blir det något2nstans mellan där. Men grejen är ju att det här i slutet är ju inte deriverat. [2.20]

Om vi är uppmärksamma kan vi här lägga märke till att Moa tolkar olikhetstecknet på två skilda sätt när hon ändrar fokus från en tolkning av en symbol till en annan (från x till $f'(x)$). Tolkningen av olikhetstecknet när Moa beskriver intervallet för x -värdena är ett steg i riktning mot en strukturell tolkning, även om hon uttrycker sig i vaga ordalag. Hon fortsätter i nästa andetag tyda olikhetstecknet för det angivna intervallet för derivatan. I och med växlingen, från intervallet för x till intervallet för derivatan $f'(x)$, förändras också hennes tolkning från en relationell till en operationell tolkning av symbolen. Detta kan ses som en indikation på att tolkningen av olikhetstecknet skapar hinder för eleven när det är relaterat till ett för dem nytt begrepp. Svårigheten att använda ett precist talspråk och en korrekt ordföljd när eleverna översätter symbolspråket till verbalt språk, kan vara en bidragande orsak till att deltagarna i gruppen har svårt att både förmedla och tolka varandras bidrag till matematiserandet.

En alternativ tolkning till elevernas problem med olikhetstecknet är att eleverna ”har fastnat i inövade rutiner”. Undervisningsgruppen har nyligen under ett arbetspass presenterats inför och övat rutiner för att derivera funktioner med hjälp av deriveringsregler, vilket möjligen också bidrar till att eleverna i ett famlande försök att tolka det presenterade symbolspråket försöker dra sig till minnes den procedur de nyligen har mött.

Tolkningen av symbolen $f'(x)$ som en process

En alternativ förklaring till elevernas problem kan vara att de tolkar symbolen för derivatan $f'(x)$ som en process och inte som ett objekt (se t.ex. Sfard & Linchevski, 1994). Elevernas operationella uppfattning handlar om att ett uttryck, eller som i det här fallet en symbol, uppfattas som en process som ska utföras. Den strukturella uppfattningen har istället fokus riktat mot egenskaperna hos det matematiska objektet. Vi lyssnar återigen på Moa när hon först pekar på det angivna intervallet för x -värdena och förkunnar:

När x är (2s) är mellan här och här blir det någonstans mellan där... (Grupp A [6.13]).

Här förefaller hon tolka x -värdena som ett objekt, men direkt därefter riktar hon fokus mot det andra angivna intervallet för derivatan och symbolen $f'(x)$ och säger i samma andetag:

Men grejen är ju att det här i slutet är ju inte deriverat. Deriverar man den så åker 2:an iväg och det blir noll. (Grupp A [6.13])

Det förefaller istället som att det är själva symbolen x respektive $f'(x)$ och inte tolkningen av olikhetstecknet, som här är avgörande. Moa tolkar $f'(x)$ operationellt, som att hon "ska sätta igång och derivera". Sfard och Linchevski (1994) ser det operationella perspektivet som att det alltid föregår det strukturella, något som ifrågasatts av senare forskning (t.ex. Tall, 2008). Denna förändrade kommunikation från att tala om processer till att tala om objektet kallar Sfard (1991) reifikation⁸²

Uppgiften elevgruppen har tilldelats innebär att de måste tolka symbolen $f'(x)$ som ett matematiskt objekt, som funktionens derivata med ett största värde $f'(x) = 2$ i intervallet. Under tidigare lektioner har eleverna arbetat med uppgifter där de uppmanats att själva beräkna derivatan i en punkt. De uppgifter de arbetat med har varit av typen:

$$f(x) = 3x^2 + 3x - 8.$$

a) Ange funktionens deriverade funktion.

b) Ange därefter derivatan då $x = 2$

Eleverna har då övat in rutiner där symbolen $f'(x)$ tolkas operationellt, som en process som ska utföras, vilket nu skapar svårigheter för eleverna. Det gäller för läraren i val av rutinuppgifter och problem under matematiklektionerna att skapa förutsättningar för att erbjuda eleverna möjligheter att förutom ett operationellt perspektiv också utveckla en strukturell uppfattning, att se exempelvis derivatan $f'(x)$ som ett objekt.

⁸² Eng. reification

Grammatiska skillnader mellan formellt matematiskt symbolspråk och naturligt språk skapar hinder

Elevernas osäkerhet att hantera läsriktningen när de ska tolka det formella symbolspråket för de angivna intervallen för x respektive derivatan, hindrar elevernas matematiserande i de flesta grupperna då det visar sig leda både till felaktiga tolkningar, men också till att eleverna uttrycker sig vagt då de inte hanterar att överföra symbolspråket till verbalt språk. I en svensk studie av läsning kopplad till matematik lyfter Österholm (2004) fram att det krav som ställs på att eleverna använder en annan grammatik än de är vana vid kan påverka "den mentala representationen" (ibid., s. 42). I samtliga grupper förefaller det som om eleverna ser det nödvändigt att "översätta" de med matematiskt algebraisk symbolspråk angivna intervallen till verbalt språk för att kunna komma vidare i matematiserandet. Detta pekar på att när lärandet sker på en metanivå kan en parallell användning av flera mediatorer främja matematiserandet.

8.1.3 Ensidig träning av rutinuppgifter kan bli till hinder för matematiserandet vid problemlösning

Då elever ska utveckla sin problemlösningsförmåga krävs att läraren noggrant väljer ut problemuppgifter som inkluderar de matematiska begrepp, tolkningar och olika metoder anpassade till den aktuella elevgruppens kunskapsnivå. Det kan konstateras att i stort sett samtliga elever i de observerade grupperna har stora svårigheter att tillämpa de beräkningsprocedurer som de förefallit behärska under de tidigare observerade lektionerna då de arbetade med uppgift efter uppgift av rutinkaraktär under "enskilt" bänkarbete. Trots att eleverna övat procedurer för att derivera om och om igen i dessa rutinuppgifter, arbetat med symbolen $f'(x)$ och beräknat dess värde för olika x -värden, uppfattar inte flertalet av eleverna i klassen att derivatans värde redan finns angivet i det problem de har tilldelats att lösa. Vi kan istället konstatera att eleverna är inriktade på att använda de procedurer de tidigare arbetat med i rutinuppgifter, som att finna en funktion att derivera. Dessa iakttagelser pekar tydligt på vikten av att i undervisningen motverka att kunskaper och färdigheter blir "hängande i luften som lösa delar".

8.1.4 Rollen som skrivare och deltagandet i gruppens matematiserande

Om vi först vänder blicken mot deltagandet i de yttranden som kategoriserats som matematiserande i diskursen kan vi konstatera att i samtliga grupper är det de elever som via lotning tilldelats rollen att hålla i pennan, som också är de elever som har högst andel yttranden som kategoriserats handla om matematiska objekt eller processer på dessa. Det är också dessa skrivande elever som står för huvuddelen av det totala antalet yttranden i samtliga observerade grupper (se Appendix F). I denna studie kan vi också iakta hur gruppens matematiserande kan ta en icke önskvärd riktning och bromsas av den elev som är skrivare, om inte den skrivande eleven under en sekvens följer med i gruppens matematiska resonemang eller matematiserar på egen hand utan att interagera med de övriga gruppmedlemmarna.

Att lämna skrivandet till endast en enskild elev i gruppen, innebär således ett krav på att eleven aktivt hela tiden deltar i gruppens matematiserande. Om samtliga elever skulle innehålla rollen som skrivare skulle inte samma krav ställas på den skrivande eleven. Det kan också minska risken för felaktiga noteringar och medföra att samtliga gruppmedlemmar i högre grad skulle behöva delta i den skriftliga kommunikationen. Detta skulle innebära att andelen aktionsinriktade frågor om hur och varför en elev skriver som hon gör säkerligen skulle öka i gruppen, vilket i studien iakttagits medföra att andelen matematiserande yttranden ökar. Ytterligare en aspekt är att skrivandet "stjäl tid" av samtliga elever och att en tänkbar effekt är att tempot i den verbala kommunikationen sänks, då samtliga elever använder ytterligare en mediator när de matematiserar. En temposänkning i gruppens kommunikation, skriftlig som verbal, innebär att det naturligt skapas fler kortare pauser i gruppens kommunikation, vilket ger varje enskild gruppmedlem ytterligare tid att tänka, reflektera och ställa frågor till andra gruppmedlemmar.

8.2 Subjektifieringens roll för utvecklingen av den matematiska diskursen

Då lärandet betraktas som en social aktivitet är det inte bara deltagarnas matematiserande som skapar förutsättningarna för och formar lärandet i matematik då eleverna arbetar tillsammans i klassrummet (Vygotsky, 1978; Sfard, 2008). Studien belyser att långt ifrån alla elevernas yttranden kan kategoriseras som matematiserande. Analysen visar att ca 35 % av gymnasieelevernas yttranden under smågruppsarbetet kan beskrivas handla om matematiska objekt eller processer på dessa [onM/offM] och i egentlig mening vara yttranden som kan antas bidra till den matematiska diskursens utveckling.

I detta kapitel sammanfattas och diskuteras vilka huvudsakliga funktioner de olika subjektifierande yttrandena har för gymnasieelevernas möjlighet att kommunicera om matematik i smågrupper, dvs. hur de subjektifierande yttrandena är tätt sammanflätade med elevernas matematiserande; hur de identifierande yttranden som handlar om deltagarnas egenskaper används för att forma roller och klargöra förväntningar inom gruppen; de subjektifierande yttrandenas funktion att signalera att eleverna inte kan eller vill delta i gruppens matematiserande; hur de aktionsorienterade frågorna gynnar diskursen på denna metanivå av lärande; samt hur de olika typerna av subjektifierande yttranden används för att signalera om behov av hjälp, men påverkar den matematiska diskursen i skilda riktningar.

8.2.1 Subjektifieringen är tätt sammanflätad med matematiserandet och påverkar diskursens utveckling

När elevgruppernas kommunikation granskas i detalj råder inget tvivel om hur tätt sammanflätade elevernas matematiserande är med de subjektifierande yttranden som antingen handlar om vad eleverna gör eller hur de är. Att dessa subjektifierande

yttranden påverkar elevernas matematiserande har också bekräftats i flera tidigare studier (se t.ex. Wood, 2008; Wood & Kalinec, 2012).

Under den lektion vi följer står de subjektifierande yttrandena (kategoriserade [IOS]/[AOS]) i genomsnitt för ca 25 % av elevernas yttranden (se Appendix F). Trots denna höga andel kan elevernas kommunikation samtidigt konstateras i stort sett till 100 % vara relaterad till det problem eleverna är satta att lösa i tre av de fyra observerade grupperna. Det innebär att elevernas yttranden som är relaterade till vad de eller någon annan gruppmedlem gör eller beskriver deras egenskaper är relaterade till den uppgift de arbetar med, det vill säga i någon mening är kopplad till matematiserandet.

Vad är det då egentligen eleverna kommunicerar om i grupperna då de inte matematiserar och hur kan funktionen hos dessa yttranden beskrivas påverka gruppernas matematiserande? Två kategorier av subjektifierande yttranden har urskilts: antingen är de riktade mot vad eleverna gör [AOS] eller har fokus på deltagarnas egenskaper [IOS]. De som beskrivs som aktionsinriktade [AOS] är frågor som söker svar på varför eller hur någon matematiserar som hon gör, medan de yttranden som klassificeras som identitetsorienterade [IOS] istället syftar direkt till att kommunicera om egna eller andra gruppmedlemmars egenskaper. Dessa yttranden är en del av det sociala samspelet i grupperna. Av särskilt intresse är att studera vilken funktion de subjektifierande yttranden förefaller ha för gruppernas matematiserande, både vad gäller kvalitet och kvantitet (Wood & Kalinec, 2012).

8.2.2 Identifierande yttranden klargör förväntningar och roller i gruppen - utestänger och införlivar deltagarna i matematiserandet

I samtliga fyra smågrupper har vi kunnat observera hur eleverna med hjälp av subjektifieringsorienterade yttranden och framför allt de yttranden som klassas som identitetsorienterade [IOS] förmedlar till de andra gruppmedlemmarna hur de ser på sin egen identitet som deltagare i den matematiska aktiviteten. Denna iakttagelse har bekräftats i flera tidigare forskningsstudier (t.ex. Heyd-Metzuyanin & Sfard, 2012; Wood, 2008; Wood & Kalinec, 2012). Redan under den inledande fasen av gruppernas arbete kan vi iaktta hur eleverna gör upp om sina respektive roller genom att "sätta varandra på plats" med subjektifierande yttranden där de klargör sina förväntningar på varandra. Vi har sett exempel på hur elever kommunicerar, nästintill i förtäckta ordalag eller med hjälp av paralingvistiska signaler. De förmedlar inte bara hur de ser på sig själva utan också på sina kamraters förmåga att delta i den matematiska aktiviteten under lektionen [onIOS]. Då en hög andel av denna typ av subjektifierande yttranden inte uttalas i klarspråk och nästan uteslutande är negativa omdömen av egna eller andra gruppmedlemmars möjlighet att bidra till matematiserandet, är det rimligt att anta att dessa yttranden inte bidrar till att föra elevernas matematiserande framåt i positiv riktning.

Denna identifiering tar sig olika uttryck, beroende på om det är egna eller andra elevers egenskaper som beskrivs. Vi har iakttagit hur dessa subjektifieringsprocesser ständigt dyker upp tätt sammanvävda med elevernas matematiserande som svärord,

små suckar för att uttrycka att man känner sig som en-som-inte-vet som när André utbrister "Mind fuck" (grupp A, [14.19]), ett ofta använt uttryck för "förvirring" inom i varje fall den observerade ungdomsgruppen. Denna typ av yttranden förmedlar hur eleven ser sin egen förmåga att matematisera kopplad till den uppgift eleven just då arbetar med och är en svagare nivå av identifiering. Denna typ av identifiering är vanligast då yttrandet är riktat mot elevens frustration över sin egen oförmåga att kunna hantera den matematiska diskurs som efterfrågas. Ett annat exempel är när André i grupp A förmedlar att han inte ser sig som att han kan bidra till gruppens matematiserande med hjälp av ett ironiskt uttalande och ett kort skratt för att understryka avsikten med yttrandet (grupp A, [5.00])

Däremot är yttranden som beskriver hur en elev ser på andra gruppmedlemmars förmåga att bidra till den matematiska diskursen oftast förmedlade i mer förtäckta ordalag. Under gruppobservationerna har vi konstaterat att eleverna vid upprepade tillfällen också använder sig av små, näst intill omärkbare små yttranden, fnysningar eller ironiska tonfall som fungerar som signaler till de andra eleverna hur de ser på dessa elevers förmåga att delta i gruppens matematiserande. Dessa identifierande yttranden kan konstateras vara mer eller mindre väl "kamouflerade" när de innehåller värderingar om andra elever i gruppen. Ett undantag är eleverna i grupp C, vars subjektifierande yttranden kommenteras nedan i avsnitt 8.2.3.

När en elev inte deltar i en gruppaktivitet kan detta tolkas som att hon inte uppfattar sig själv kapabel att bidra till matematiserandet eller har legitimitet som deltagare i gruppen. Vi har iakttagit hur Lisa (grupp A) gör försök att delta i gruppens matematiserande. Moa uttrycker då med en lätt, nästan inte hörbar fnysning att hon inte ser Lisas bidrag som något av värde (grupp A, [10.09]). Det måste tolkas som hon inte har legitimitet att delta i gruppen. Det går inte att säkert uttala sig om huruvida Lisa uppfattar detta budskap, men det kan konstatera att Lisa själv bekräftar att hon ser sig som en elev som-inget-vet under problemlösningsaktiviteten (se t.ex. [14.19], [14.56]).

Vi har också iakttagit hur Lisa inte heller bjuds in eller förmår delta i gruppens matematiserande. Lisa nonchaleras helt och blir "till luft" i gruppen utom när läraren finns närvarande och kan lyssna. De övriga gruppmedlemmarna tar ingen notis om att hon inte deltar i gruppens kommunikation. Detta beskrivs här som den starkaste nivån av identifiering då signalen till Lisa kan knappast tolkas på annat sätt än att hennes deltagande saknar betydelse och att hon inget har att tillföra gruppen. Vi kan inte förutsätta att Lisa inte lyssnar till de andra eleverna, men då hon inte deltar i någon för de andra deltagarna förnimbar kommunikation, innebär det att hon vare sig bidrar till den matematiska kommunikationen eller påverkar dess innehåll. Lisa kan därför konstateras sakna en egentlig grupptillhörighet under denna problemlösningsaktivitet. Hon sätter själv ord på att hon upplever en oförmåga att delta i matematiserandet, när hon med en suck slår fast:

Man ser ju inte dom här talen dom vanliga lektionerna. Det ju sånt här jag har svårt med (Grupp A, [14.56])

Hennes förutsättningar för lärande kan antas vara minimala och under lektionen bekräftar hon regelbundet att hon inget har "fattat". Att lägga märke till är att Lisa dessutom förefaller välja att låta läraren tro att hon deltar i gruppens matematiserande i högre grad än vad som är fallet. Hon yttrar sig huvudsakligen vid de tillfällen när läraren finns i närheten av gruppen (se appendix A, t.ex. [8.35], [8.46], [14.19], [14.38], [15.56]). Dessa iakttagelser understryker betydelsen av att etablera sociomatematiska normer (Yackel & Cobb, 1996) i klassrummet som innebär att samtliga eleverna erbjuds möjligheter till deltagande. Att skapa grupper som är välfungerande kan antas vara en viktig faktor i detta sammanhang.

8.2.3 Identifierande yttranden används i syfte att undvika matematiserande

Den grad av identifiering då individen värderar sin förmåga kopplad till uppgiften betraktas inte lika stark som när eleverna identifierar sig som en individ som innehar egenskapen att aldrig klara av matematiken (Wood & Kalinec, 2012). Den vanligast förekommande typen av identifierande yttranden är av den svagare graden och kan kopplas till det i stunden pågående arbetet. Även i denna studie använder eleverna identifierande yttranden om sig själva, för att tydliggöra för sina kamrater att de inte är deltagare att räkna med under den matematiska aktiviteten. Dessa yttranden, där eleven värderar sin egen och även andras förmåga att matematisera, är oftast klassificerade som en starkare grad av identitetsorienterad subjektivering [IOS] och innebär i stort sett alltid att eleverna uttalar sig negativt om förmågan att delta i en matematisk aktivitet. Då yttrandena uttalas högt i rummet har det tolkats som att andra deltagare ska veta hur de ser på sin egen, och ibland även kamraternas, förmåga att bidra till matematiserandet. Yttrandena kan tolkas som ett sätt att bli uppmärksammade för att få hjälp. Eleverna i grupp C använder sig av identifierande uttalanden både om sig själva och om varandra med en ljudnivå de avsiktligt vill att hela undervisningsgruppen och även läraren ska uppfatta. Under observationerna av grupperna har de identifierande yttrandena också ibland funktionen att de ger signaler till de andra i gruppen för att slippa förväntningarna på att de ska delta i matematiserandet.

Eleverna visade sig också aktivt välja att kommunicera med olika ljudnivåer beroende på innehållet i yttrandena och vilka de önskade ha som mottagare. I sekvensen i grupp C kan vi iaktta hur eleverna sänker rösten när de ställer de aktionsinriktade frågorna som avslöjar vad det är de inte klarar av i den matematiska aktiviteten. Elevernas yttranden med mycket låg viskande ton uppfattades inte mer än som ett brus i videokamerornas ljudupptagning, medan de audiovisuella pennorna fungerar utmärkt för att ta upp viskningarna när eleverna böjde sig ner över block och penna och avsiktligt kommunicerade så att ingen utomstående skulle höra (grupp C [1.00]).

I grupp C (se 7.8.2) har vi lyssnat till hur Theo och Joan använder i stort sett enbart identifierande yttranden [IOS] både om sig själva och om varandra för att tydliggöra sina roller och förväntningar på varandra. Med yttrandet "Ja, kul om vi hade haft någon matematisk hjärna i vår grupp" [1.44] ger Joan en tydlig signal att han ser både sig själv och Theo som två elever som inte har biologiska förutsättningar för att lära sig matematik (se utdrag 8.13). Detta är den starkaste graden av identifiering.

Med låg röst har Joan några sekunder tidigare viskat till Theo: "Gör man så där? Gör man det?" [1.00]. Denna korta sekvens kan förefalla något förbryllande när eleverna först relativt högljutt förmedlar hur de ser på sig själv som inkapabla att matematisera och samtidigt viskande försöker matematisera. Det tolkas som att eleverna inte vill visa vad de inte förstår, att helt enkelt visa upp ett felaktigt matematiskt resonemang. Även om läraren tolkar elevernas yttranden som att de verkligen är i behov av stöd, kan vi konstatera att vi inte kan avgöra om eleverna inte skulle ha klarat av problemet "på egen hand" som de övriga grupperna. De identifierande yttrandena fungerar alltså dels som en signal för att få hjälp, och dels i syfte att förmedla vad de andra gruppmedlemmarna kan förvänta sig av dem som deltagare i matematiserandet.

8.2.4 Diskursen på en metanivå gynnas av aktionsorienterade frågor om hur och varför

Då vi har följt deltagarnas diskurs i grupp A under hela problemlösningsaktiviteten finns det inget tvivel om att eleverna behöver stöd och hjälp av de-som-vet-mer. Lärande på en metanivå när eleverna möter för dem nya matematiska begrepp sker i den process som erbjuder möjligheten att tillsammans med andra mer erfarna deltagare stötts i utvecklingen av den matematiska diskursen (Sfard & Ben-Zvi, 2007). Elevernas narrativer om den nya diskursen, förklaringar och ordanvändning fyller en viktig funktion för att stimulera denna diskurs på en metanivå och gruppens matematiserande. För att en effektiv gruppinläring ska kunna ske måste eleverna ställa de rätta frågorna, lyssna till och förlita sig på varandra. Eleverna kommer då om lärandet fortskrider i positiv riktning, steg för steg ta till sig den nya matematiska diskursen för att lärandet en gång ska kunna ske på objektnivå (ibid., ss. 126-127). För att eleverna under problemlösningsaktiviteter ska erbjudas denna stöttning för individualisation⁸³ av en för dem ny matematisk diskurs förefaller det då viktigt att understryka betydelsen av gruppernas sammansättning för att optimala förutsättningar skapas för elevernas lärande. Utifrån detta perspektiv är lottning av grupper inte att föredra, utan att istället överväga en gruppsammansättning så att det finns någon i gruppen som kan ta rollen av den-som-vet-mer i den aktuella diskurs som ska utvecklas. Gruppernas sammansättning bör istället övervägas så att någon elev kan ta rollen av den-som-vet-mer utifrån lärarens kännedom om elevernas förmåga inom den aktuella matematiska diskursen.

Finns det då förutsättningar för lärande i de grupper vi observerat under den aktuella problemlösningsaktiviteten trots att eleverna ofta förefaller "famla i blindo"? Då ungefär en tredjedel av elevgruppernas yttranden kategoriseras som matematiserande [onM], kan vi anta att förutsättningar för lärande kan erbjudas, trots att flertalet yttranden inte i direkt mening kategoriseras som en diskurs om matematiska objekt [onM]. Forskning pekar på att lärande i matematik förefaller starkare kopplat till faktorer som sättet att ställa och besvara frågor och att förstå motsättningar än kvantiteten av matematiska yttranden (Wood & Kalinec, 2012).

⁸³ Eng. scaffolded individualization

Vi kan dock inte utifrån detta analysinstrument och kategoriseringen av yttranden i diskursen som matematiserande [onM], säga något om vilka förmågor eller vilket innehåll i den matematiska diskursen som varje elev har möjlighet att flytta fram sina positioner inom. Det avgörs av elevens ZPD, "zone of proximal development" som beskrivs av Vygotsky (1978, ss. 85-86). Det kan exempelvis innebära att en elev efter problemlösningsaktiviteten självständigt kan pendla mellan en geometrisk och algebraisk representation av funktionsvärdet $f(3) = 2$ och punkten (3,2), medan en annan elev i gruppen har "fångat in" begreppet derivata. En slutsats blir att gruppernas sammansättning är, om inte helt avgörande, så i varje fall av betydelse, för elevernas lärande under problemlösningsaktiviteter i mindre grupper.

Då forskning lyfter fram frågornas betydelse som en viktig faktor kopplad till lärande i interaktion med andra individer (Wood & Kalinec, 2012) är det av speciellt intresse att studera den roll de yttranden har som klassificeras som [AOS]. Dessa yttranden observeras i studien leda till att eleverna "sätter ord på sina tankar" om den för dem nya diskursen, och därigenom bidrar till nya förtydliganden och förklaringar som kommer dem och andra gruppmedlemmarna tillgodo.⁸⁴ I Grupp A har vi observerat hur André har tagit rollen som en intresserad nyfiken elev i gruppen genom att ständigt ställa dessa frågor [AOS] om hur och varför Moa matematiserar som hon gör. Detta bidrar säkerligen till att Moa står för så mycket som 78 % av gruppens matematiserande. André signalerar också samtidigt att han identifierar sig som en elev som bidrar till gruppens matematiserande, trots att han också vid flera tillfällen markerar att han inte förstår det problem gruppen har att lösa. I Carlsens (2008) fallstudie av elever som arbetar tillsammans i en problemlösningssituation iaktas på liknande sätt att eleverna iklär sig rollerna som "frågaren" och "förklararen". En svensk forskningsstudie visar elever som ställer aktionsinriktade frågor som leder till att metadiskursen förtydligas också senare klarar tester bättre (Ryve, 2006b, s. 204).

Om vi studerar andelen frågor [onAOS] i jämförelse med andelen yttranden kategoriserade som [onM] hos enskilda individer visar det sig att de elever som har den lägsta andelen matematiserande yttranden [onM] också i flertalet grupper är de elever som står för den lägsta andelen [AOS] yttranden. Detta kan tolkas som att dessa elever inte förmår, väljer eller uppfattar sig kunna bidra direkt till den matematiska diskursen, inte heller identifierar sig som någon som kan ställa eller tolka svaren på de som ger svar på varför eller hur någon i gruppen matematiserar som de gör (se figur 7.15, 7.17, 7.20, Appendix F). I grupp C finns ingen elev som uppfattar sig som-den-som-vet mest. Båda eleverna sänder också tydliga signaler på att de uppfattar sig som två elever där ingen av dem förväntar sig att den andre kan ta rollen av-den-som-vet. Här bidrar de bägge eleverna till gruppens diskurs på ett likartat sätt, både vad gäller andelen yttranden kategoriserade [AOS] och matematiserande [M].

Det kan konstateras att det är betydande skillnader på i vilken grad de elever som står för den högsta andelen av gruppens matematiserande [onM] bidrar till AOS-frågor i gruppens diskurs (se Appendix F). En förklaring till detta är att AOS-frågorna också

⁸⁴ Sfard kallar denna process "communalization of the individual".

har funktionen att stötta elevernas lärande (van de Pol et al., 2010), vilket innebär att den elev som är den-som-vet-mest i gruppen också identifierar sig som en person som tar ansvar för att ställa de AOS-frågor till gruppen som har funktionen att stötta och uppmuntra de andra gruppmedlemmarna att matematisera. I grupp D står Kim för 70 % av yttrandena kategoriserade som [onM] och 53 % av gruppens yttranden kategoriserade som [onAOS]. Denna iakttagelse att eleverna iklär sig olika roller i gruppen överensstämmer med forskningsresultat presenterade av Wood (2008) som visar på att individernas matematiserande och hur de identifierar sig som elever i klassrummet är tätt sammantvinnande (se vidare kap 8.2.5).

Både inom och mellan olika elevgrupper är det skillnader i vilken grad eleverna riktar AOS-frågor till andra gruppmedlemmar. Vid jämförelse av innehållet i enskilda elevers bidrag till de olika gruppernas diskurs visar resultatanalysen på stora skillnader på individnivå. Dessa skillnader kan antas vara sammankopplade med hur deltagarna ser på sig själva men också på sina kamraters roll i gruppens matematiserande (Wood & Kalinec, 2012, s. 110; Sfard, 2008, 2012).

I tre av de fyra grupperna finns det en tydlig ledare ”den-som-vet-mest” i gruppen, en elev som tar på sig rollen av att leda gruppens matematiserande. I samtliga dessa grupper är det denna elev som håller i pennan och står för cirka 40 % av gruppens yttranden. Dessa elever är också de som står för den högsta andelen av yttranden som direkt kategoriseras som att bidra till gruppens matematiska diskurs (se Appendix F). När läraren i slutskedet av aktiviteten kommunicerar med gruppen är det denna elev som läraren vänder sig till och det är också ”den-som-vet-mest” som redovisar gruppens lösningar.

I grupp D ställer Kim 53 % av de frågor som söker svar på hur och varför någon i gruppen matematiserar som han/hon gör [onAOS], trots att han är den elev som är den-som-vet-mest och står för 70 % av gruppens matematiserande. I grupp A står Moa för 78 % av yttranden klassificerade som [onM], men ställer bara 19 % av gruppens AOS-frågor (se Appendix F). Detta visar sig vid en närmare granskning bero på att Kim tar ett tydligare ansvar i sin ledarroll för att fungera mer som en lärare för gruppen. Han ger utrymme för de övriga gruppmedlemmarna att ställa frågor och kontrollerar i högre grad att de övriga deltagarna hänger med i resonemangen. Kim formulerar också själv frågor till gruppen som i strukturen påminner om de stödjande AOS-frågor frågor läraren riktar mot eleverna.

I grupp A möter vi André som tar en tydlig roll som ”den-som-vill-veta” i gruppen. Han tar en tredjedel av samtliga yttranden, det vill säga ett förväntat talutrymme som en aktiv gruppmedlem i en grupp med tre elever. Kännetecknande för dessa elever är också att ta rollen som aktiva lyssnare, vilket innebär att de genom små bekräftande ord (”mm, jaa”) visar att de hänger med i gruppens kommunikation. Den elev som har rollen den nyfikne frågaren ”den-som-vill-veta” har betydelse som motor för att driva gruppens kommunikation framåt när lärandet sker på en metanivå. Den viktiga roll André spelar i gruppen som ”den-som-vill-veta” innebär att hans bidrag huvudsakligen handlar om att ställa frågor till gruppen om hur och varför de andra matematiserar som de gör. André står i sin grupp för nästan hälften av dessa frågor i gruppen [onAOS].

De aktionsorienterade frågorna besvaras oftast med matematiserande [onM], vilket innebär att elevernas kommunikation om matematiska objekt eller processer på dessa ökar. Frågorna fyller flera funktioner som kan antas gynna elevernas förutsättningar för att utveckla den matematiska diskursen i riktning mot den som eftersträvas. Dels kan vi iakttä att den-som-vet-mer i gruppen upprepar yttranden och ofta förtydligar sitt matematiserande med ett förändrat ordval. Likaså är det vanligt att eleven också tar stöd av andra mediatorer, företrädesvis grafer eller gester med hand och penna, för att visuellt förstärka eller förtydliga matematiserandet. AOS-yttranden fyller också funktionen att den som frågar söker och får bekräftelse från andra för sitt eget tänkande. Vi har också sett hur de elever som besvarar frågor i vissa sekvenser förefaller ”tänka högt” för att istället bekräfta för sig själva när de får frågor från andra elever i gruppen.

Sammanfattningsvis visar analysen av gruppernas diskurs på stora skillnader i hur eleverna använder AOS-yttranden och i vilken grad de deltar i den matematiska diskursen [onM] när de arbetar i smågrupper. Detta understryker vikten av att i undervisningen ge eleverna tillfällen till muntlig kommunikation i mindre grupper som innebär att eleverna erbjuds att både öva på att ställa frågor om hur och varför, men också motivera och resonera för till exempel en lösningsmetod eller ett resultat. Det är bara att instämma i Sfards & Kierans konstaterande efter en genomförd studie av elevers kommunikation i matematik:

The only reasonable conclusion of our analysis is that if conversation is to be effective and conducive for learning, the art of communicating has to be taught. (Sfard & Kieran, 2001, s.71)

8.2.5 Identifiering och aktionsinriktad subjektifiering – två olika sätt att be om hjälp – men resulterar i olika förutsättningar för kvalitén på matematiserandet

I grupperna har vi sett hur elever då och då uttrycker att de inte förstår t.ex. ”Jag är helt lost! (utdrag 7.7a, [14.51]) för att i nästa stund fortsätta att matematisera. Dessa yttranden som är kopplade till en speciell händelse, något eleverna gör, klassificeras då som en svagare grad av identifiering. Denna typ av yttranden är i denna klassrumsstudie nästan uteslutande elevernas omdömen om sig själva. De fungerar som signal till andra gruppmedlemmar för att de ska förklara något igen eller att eleverna inte kan bidra till matematiserandet. Vid en första anblick har denna identifierande subjektifiering en liknande funktion som när eleverna ställer aktionsorienterade yttranden till de andra eleverna i grupperna, då de också oftast leder till ett ökat matematiserande. Så är dock inte fallet då de aktionsinriktade frågorna direkt bidrar till att eleverna sätter ord på det de ännu inte kan klara på egen hand. I studien ser vi flera exempel på att de elever som-vet-mest i gruppen då förtydligar sin matematiska diskurs och ofta använder ytterligare en mediator som exempelvis en graf, ett förändrat ordval eller en gest. Det innebär att elevernas matematiserande ökar i omfattning och förutsättningar finns för en högre kvalitet när eleverna uppmanas att omformulera sig och specificera sina yttranden. De identifierande yttrandena däremot ger visserligen de andra grupp-

medlemmarna en signal om att en individ inte följer med i matematiserandet, men ger ingen fingervisning om vad det är eleven ifråga inte förstår. Att i matematikundervisningen stärka elevernas förmåga att ställa frågor om hur och varför andra matematiserar som de gör, förefaller vara en framkomlig effektiv väg att minska negativ identifiering till förmån för en ökad andel aktionsinriktade yttranden. Förutom att den negativa identifieringen minskar visar studien att en ökning av andelen aktionsinriktade yttranden innebär att andelen matematiska yttranden ökar i gruppen och att eleverna använder exempelvis ytterligare en mediator, en annan representation av objektet eller knyter an till en tidigare erövrad matematisk diskurs.

Kapitel 9 Implikationer för undervisningen

9.1 Studiens relevans

Studiens syfte är att bidra till att förstå mer av vad som hindrar eller gynnar elevernas kommunikation för att utveckla en matematisk diskurs om ett för dem nyligen introducerat matematiskt objekt. Att eleverna kommunicerar effektivt i bemärkelsen att de förmår utveckla den diskurs som är målet för lärandeaktiviteten, får betraktas som en kärnfråga för matematikundervisning.

Målet i studien har inte varit att studera själva lärandet, utan att belysa faktorer som påverkar gymnasieelevernas möjlighet utveckla diskursen i riktning mot den önskade diskursen i matematik. Ur studiens valda teoretiska perspektiv, är det inte endast faktorer kopplade till den matematiska kommunikationen som hindrar eller gynnar matematiserandet, utan också den sociala interaktion som sker mellan klassrummets olika interaktörer (Sfard, 2008, 2012). Utifrån den genomförda resultatanalysen tar även implikationerna för undervisningen ett avstamp utifrån dessa bägge perspektiv.

Som beskrevs i avsnitt 1.2 var en motivering till genomförandet av denna studie att den matematikdidaktiska forskningen liksom ämnesplanen i Gy 2011 pekar på vikten av att utveckla elevernas kommunikations- och problemlösningskompetens, samt betona användningen av olika representationsformer för att åskådliggöra de matematiska objekten (Skolverket, 2011c). Den bild som under 2000-talet förmedlats i olika medier av svensk matematikundervisning pekar tillsammans med de nyligen implementerade styrdokumenterna på ett behov att utveckla undervisningen. Det handlar då både om val av arbetsmetoder och arbetssätt och presentationen av det matematiska innehållet för att eleverna ska möjliggöras att i högre grad utveckla samtliga matematiska förmågor i ämnet. Detta innebär också en förväntan på förändringsbenägenhet hos lärare som undervisar i matematik och en granskning av den egna undervisningspraktiken. Den matematikdidaktiska forskningen har ett ansvar att bidra med kunskap som stöd för sådan utveckling. En sådan kunskapsbas bygger på klassrumsnära forskningsstudier som har fokus inriktat på att belysa hur eleverna mer framgångsrikt kan erbjudas ökade möjligheter att kommunicera om matematik i klassrummet. Ytterligare kunskap om olika former för samarbetslärande i matematik kan bidra till att förändra den svenska undervisningstradition som domineras av det den norske forskaren Mellin-Olsen (1991) benämner som en uppgiftsdiskurs där eleverna förväntas arbeta enskilt med uppgifter ur läroboken. I den omfattande pågående kollegiala fortbildningssatsningen ”Matematiklyftet”⁸⁵, betonas också arbetsformer som främjar kommunikation inom matematik för elevernas möjlighet att utveckla samtliga förmågor i ämnet.

⁸⁵ Se <http://matematiklyftet.skolverket.se>

Få svenska klassrumsstudier har genomförts som belyser samarbetslärande i smågrupper i gymnasieskolans undervisning i matematik. I föreliggande studie har vi på nära håll följt elevernas arbete med en uppgift kopplad till funktioner och begreppet derivata. Den aktuella uppgift elevena möter kan betraktas som ett matematiskt problem för samtliga elever i gruppen, då ingen tidigare mött denna uppgift eller har en färdig lösningsmetod. I grupperna har den matematiska diskursen studerats ur ett mikroperspektiv, men också den ständigt pågående kommunikation som inte direkt handlar om matematik, utan om vad gruppdeltagarna gör eller deras egenskaper som individer.

Utifrån studiens teoretiska perspektiv är kommunikationen med andra individer en viktig förutsättning för elevernas möjlighet till lärande av en ny diskurs, när lärandet sker på en metanivå (Sfard, 2008). Studien visar på hur eleverna erbjuds tillfälle att lyssna till och delta i denna metadiskurs, vilket ses som en förutsättning för lärandet (ibid.). Eleverna har i mycket varierande grad observerats delta i gruppens kommunikation. För att ett lärande ska ske förutsätts att eleverna gradvis deltar alltmer i den kommunikation som handlar om matematik, de matematiska objekten och olika processer på dessa (ibid.). När samarbetslärandet fungerat som bäst i grupperna har eleverna tagit del av varandras förmåga att kommunicera om det matematiska innehållet, muntligt som skriftligt och även med stöd av gester.

Valet att genomföra datainsamling när gymnasieeleverna introducerats inför derivatabegreppet, motiveras av att det finns få nordiska studier genomförda inom området. Eftersom derivatabegreppet är helt nytt för de flesta eleverna måste de i stort sett då upptäcka det diskursiva objektet i stort sett från början (Nachlieli & Tabach, 2012, s. 11). I studien har vi bevittnat elevernas famlande försök att hantera och tolka de olika representationer de möter kopplade till derivatabegreppet. När vi studerat elevernas matematiska diskurs har vi bevittnat hur de i olika grad har varit olika förtrogna med det matematiska algebraiska symbolspråket och att använda och tolka en grafisk representation av funktionen och dess derivata. Bilden av gymnasieelevernas svårigheter att växla mellan olika medierande redskap och använda olika matematiska representationer av funktionen har tydligt framträtt, liksom deras svårigheter att växla mellan ett algebraiskt och geometriskt register. Vi iaktar hur eleverna stöttar varandra, inte bara för att utveckla en ny diskurs, utan även för att knyta samman denna och utvidga den tidigare bristfälligt utvecklade matematiska diskursen om funktioner. Denna krävs för att eleverna ska kunna hantera mötet med den för dem nya diskursen om derivatan. Elevernas begränsade möjlighet att på egen hand utveckla den erforderliga matematiska diskursen har tydligt speglats under smågruppsnas arbete med problemet. Men lika tydligt speglar studien hur smågruppsarbetet erbjuder eleverna möjligheten att få stöd av andra deltagare som-vet-mer för att möjliggöra diskursiva framflyttningar mot den önskade diskursen som är målet för lärandet.

I kommentarmaterialet till Gy 2011 förtydligas i ämnets syfte de förmågor som eleverna ska utveckla i matematik. Skolverket betonar vikten av att erbjuda problemlösning som ett medel för att skapa situationer ”där eleverna får tänka högt, söka alternativa lösningar, diskutera och värdera lösningar, metoder, strategier och resultat”

(Skolverket, 2011c, s. 2). I studien lyssnar vi till hur eleverna försöker finna strategier för att lösa det problem de ställts inför och hur matematiska erfarenheter och tankar byter ägare. När elever deltar i en problemlösningsprocess övar de inte bara problemlösningsförmågan, utan problemlösningen ses också som ett medel för att utveckla övriga matematiska förmågor då eleverna erbjuds att diskutera lösningar och strategier, klä sina tankar i ord och värdera till exempel olika lösningsmetoder och strategier (ibid.). Detta kan tydligt iakttas i gruppernas arbete då huvuddelen av den matematiska diskursen inte i egentlig mening handlar om begreppet derivata.

Studien är en naturlig klassrumsstudie och de grupper vi har följt skulle kunna vara vilka gymnasieelever som helst, någonstans i ett svenskt gymnasieklassrum. Det som händer i en elevgrupp kan lika gärna hända någon annanstans i ett annat klassrum, eller i någon av de andra smågrupperna i denna undervisningsgrupp. Min intention är inte att ge direkta råd om hur undervisningen ska utformas, utan att belysa faktorer som utifrån denna klassrumsstudie hindrar eller befrämjar gymnasieelevernas kommunikation när de arbetar tillsammans med ett problem kopplat till funktions- och derivatabegreppet.

9.2 Implikationer för undervisningspraktiken

I detta avsnitt redovisas utifrån resultaten från denna fallstudie några implikationer för matematikundervisningen när eleverna kommunicerar tillsammans i mindre grupper.

9.2.1 Skrivande elever kommunicerar mer om matematik

Klassrumsstudien visar på stora skillnader när det gäller i vilken grad eleverna deltar i gruppernas kommunikation och även på innehållet i enskilda elevers yttranden under smågruppernas arbete.

Utifrån studiens teoretiska perspektiv betraktas deltagandet i matematiserandet som en viktig förutsättning för lärandet. Att ha rollen som skrivare i gruppen medför att eleverna i högre grad har iakttagits delta i gruppens matematiserande. De elever som håller i pennan kan konstateras vara de gruppdeltagare som totalt sett står för den högsta andelen yttranden som handlar om matematik⁸⁶ och då i direkt mening kan tillföra ett bidrag till utvecklingen av den matematiska diskursen (se avsnitt 8.1.4). Dessa iakttagelser indikerar att det finns skäl för att samtliga elever bör uppmanas att fatta pennan och ha rollen som skrivare när eleverna arbetar tillsammans med matematik. Ytterligare en effekt av att varje elev uppmanas att föra noteringar antas vara att taltempot sänks i gruppen, vilket medför att eleverna får en ökad reflektionstid och möjlighet att ställa frågor till varandra om hur eller varför andra deltagare matematiserar som de gör⁸⁷ (se vidare avsnitt 8.2.3). Då tidigare forskningsstudier också pekar på att elever som i en grupp själva väljer att ta rollen som skrivare, i lägre

⁸⁶ I analysen klassificeras matematiserande yttranden [onM]/[offM].

⁸⁷ Aktionsinriktade frågor är yttranden kategoriserade [onAOS]/[offAOS] i analysen.

grad är delaktig i den matematiska diskursen, undviks då även denna möjlighet att välja "att bara vara den som skriver". Om alla elever har rollen som skrivare undviks också risken att den skrivande eleven i lika hög grad ensam kan leda gruppens matematiska resonemang i en icke önskvärd riktning. Detta har i studien iakttagits skapa negativa konsekvenser för gruppens matematiserande då den skrivande eleven inte kunde eller hann följa med i det matematiska resonemanget under en sekvens (se utdrag 7.10 och 7.11).

9.2.2. Vikten av att någon elev kan leda den matematiska diskursen

Studien pekar på vikten av att i varje fall någon i gruppen tar rollen av den-som-vet mest när eleverna matematiserar i smågrupper. Avsaknaden av en elev som tar en tydlig ledarroll medför att gruppens kommunikation kan bli mer ineffektiv i bemärkelsen att en högre andel yttranden inte kan kategoriseras direkt handla om matematiska objekt. Elevernas yttranden handlar istället om att eleverna då ställer ospecifika aktionsinriktade frågor till varandra om hur de ska komma vidare som exempelvis "Vad gör vi nu?" eller "Hur ska vi göra?". När ingen elev i gruppen förmår leda diskursen framåt resulterar det i en ökad andel av subjektifierande yttranden som istället handlar om individens egenskaper, och vad de kan och inte kan göra.

Att en elev i gruppen förväntas kunna ta en ledarroll innebär inte att ha en lösning på det problem eller de uppgifter eleverna är satta att arbeta med tillsammans. Det handlar istället om att det finns en gruppmedlem som visar en större säkerhet i användningen av nödvändiga metoder för beräkningar. Vidare behöver någon elev i gruppen förväntas klara av att hantera och ta stöd av olika de olika medierande redskap som kan komma till nytta under elevernas matematiserande, som exempelvis att använda grafiska representationer eller tolka och använda ett matematiskt symbolspråk. Elevernas matematiserande och utveckling av en ny diskurs försvåras också om ingen elev finns som är mer förtrogen med den tidigare matematiska diskurs som det nya matematiskt objektet måste kopplas till (se vidare avsnitt 7.8.1).

Vikten av att det finns någon som kan ta en roll som den-som-vet i gruppen innebär att det talar emot att använda slumpen när grupper ska skapas vid smågruppsarbete. Istället är det rimligt att läraren bör använda den kännedom han/hon har om elevens tidigare kunskaper inom den matematiska diskurs eleverna förväntas knyta an till.

9.2.3 Säkerhet i att använda medierande redskap befrämjar elevernas utveckling av en ny diskurs

Brister i att hantera det matematiska symbolspråket som medierande redskap innebär ett hinder för gymnasieelevernas utveckling av den matematiska diskursen. Uppgiftens presentation med ett matematiskt formelspråk hindrar elevernas matematiserande då de inte kan tolka dessa representationer för derivata. Studien har följt elevernas tidvis famlande försök att ta till sig den för dem nya matematiska diskursen om derivata. Vi har bevittnat hur bristande förkunskaper, framför allt svårighet att tolka och använda

det matematiska formelspråket som ett medierande redskap, inneburit att eleverna snarare fokuserat på att tyda det matematiska formelspråket än att använda det som ett medierande redskap som stöd för den matematiska kommunikationen om det nya objektet derivata. Detta understryker vikten av att i undervisningen ge eleverna möjlighet att stegvis och kontinuerligt övas i att använda och tolka det matematiska symbolspråket för att kommunicera om matematiska objekt. Då eleverna inte kan använda de medierande redskapen fungerar de snarare som ett hinder för matematiserandet när eleverna möter dem i gymnasiekursen. Det är rimligt att anta att elevernas svårigheter att använda det matematiska symbolspråket som stöd för kommunikationen också är ett hinder för eleverna då läraren använder sig av helklassgenomgångar eller när eleverna arbetar på egen hand med läromedlet som den talande kommunikatören.

9.2.4 De medierande redskapen länkar den nya diskursen till en redan erövrad diskurs

Lärarens bidrag till gruppernas aktivitet är främst i form av i förväg planerade ledtrådar, det vill säga bidrag till gruppens matematiserande. Dessa är oftast i form av uppmaningar att byta medierande redskap, till exempel när de uppmanas att växla över till en grafisk representation av den med ett algebraiskt matematiskt formelspråk angivna funktionen. Denna uppmaning hjälper eleverna att fortsätta matematisera. När eleverna byter mediator byter de också till ett geometriskt register för det matematiska symbolspråket. Dessa uppmaningar att byta mediatorer innebär även att eleverna använder andra representationer av funktionen, vilket innebär att gruppmedlemmarnas matematiserande tar ny fart. Eleverna observeras, när de byter mediatorer, plötsligt kunna koppla på den nya diskursen med tidigare erövrad diskurs om funktioner.

Liksom tidigare forskningsstudier visar alltså denna studie tydligt hur elevernas matematiska diskurs gynnas av användningen av olika visuella mediatorer. Vi har observerat hur matematiserandet i smågrupperna leder till diskursiva framflyttningar då eleverna under lärarens stöd uppmanas att växla till ett koordinatsystem och en grafisk representation av funktionen. På samma sätt kan vi iakttä hur eleverna får stötning för att tillsammans i gruppen sammanlänka en för dem ny matematisk diskurs till en tidigare känd, genom att läraren vägleder eleverna att exempelvis koppla ihop begreppet riktningskoefficient till det nya begreppet derivata. I flertalet av de observerade grupperna associerar eleverna också det för dem kända begreppet riktningskoefficient (k -värde) till att själva ta initiativ till att byta mediator och använda en grafisk representation. Eleverna finner därigenom på egen hand en lösningsmetod som så småningom leder dem till att beräkna derivatans värde i en punkt.

Studien visar på vikten av att deltagarna använder mer än ett medierande redskap och olika representationer av ett matematiskt objekt när eleverna möter en för dem ny matematisk diskurs och lärandet sker på en metanivå. Genom att i undervisningen presentera olika lösningsmetoder med stöd av olika medierande redskap, kan vi iakttä hur eleverna ges möjlighet att knyta an den nya diskursen till en redan erövrad diskurs.

9.2.5 Subjektifierande yttrandens betydelse för den matematiska kommunikationen

I studien har de subjektifierande yttrandena delats in i två olika kategorier: aktionsorienterande och identifierande. Resultaten indikerar att om elevernas aktionsinriktade frågor till varandra ökar, ökar även andelen yttranden i gruppen kategoriserade som matematiserande, det vill säga yttranden som handlar om matematiska objekt eller processer på dessa. Att som lärare bidra till att utveckla ett undervisningsklimat där eleverna är vana vid och förutsätts ställa frågor till varandra framträder som centralt för att gynna förutsättningar för lärande under matematiklektionerna.

Vid analysen av elevernas kommunikation under smågruppsarbetet framträder bilden av gymnasieelevernas osäkerhet inför att bidra till gruppens matematiserande och därigenom tvingas blotta att de inte kan hantera den matematiska diskurs som efterfrågas. Studien understryker behovet av att eleverna redan under grundskoletiden successivt tränas på att kommunicera om matematik för att få möjlighet att utveckla förmågor som att kommunicera, föra resonemang och argumentera i ämnet matematik.

Att eleverna tränas på att ställa aktionsinriktade frågor om hur och varför en deltagare matematiserar som hon gör är här centralt, men också att eleverna tränas på att lyssna till varandra och värdera gruppens olika resonemang. Denna träning i att kommunicera om matematik, behöver nödvändigtvis inte enbart ske i samband med problemlösningsaktiviteter i smågrupper, utan kan också med fördel genomföras under kortare övningar då eleverna till exempel får resonera om och utvärdera olika lösningsmetoder. Läraren har en viktig roll att under helklassgenomgångar använda arbetssätt och metoder som fungerar som förebild för hur eleverna kan ställa frågor och redovisa sina matematiska idéer och resonemang.

De subjektifierande yttrandena som klassificeras som identitetsorienterande används av eleverna för att förmedla hur de ser på varandra som individer och deltagare i matematikklassrummet. Att skapa ett tillåtande arbetsklimat i matematikklassrummet, där eleverna vågar ställa frågor och försöka besvara dessa, är en utmaning för matematikläraren. En viktig fråga här handlar då om andelen subjektifierande yttranden som handlar om att deltagarna bedömer varandras egenskaper eller roller.⁸⁸ I studien bidrar eleverna i huvudsak med negativa identifierande yttranden i gruppen, varför dessa yttranden inte rimligen kan bidra till att stödja elevernas deltagande och utveckling av en matematisk diskurs. Dessa identifierande uttalanden används för att tydliggöra förväntningar på varandra eller av eleverna själva för att förmedla till sina kamrater vad de kan vänta sig av dem under lektionen. De har iakttagits fungera som ett skydd för att slippa delta, eller en markering för att en gruppdeltagare ska veta att ingen förväntar sig att de har något att bidra med till matematiserandet. De identifierande yttrandena är svåra att upptäcka eftersom de ofta också förmedlas kamouflerade i förtäckta ordalag, med olika paralingvistiska signaler som suckar och tonfall eller med hjälp av kroppsspråket.

⁸⁸ Identitetsorienterad subjektifiering [IOS]

De identifierande yttrandena har i studien iakttagits förekomma i de tre olika nivåer (Heyd-Metzuyanin & Sfard, 2012; Wood & Kalinec, 2012). Den starkaste graden är när en elev verbalt uttrycker att en person innehar en egenskap till exempel: ”Jag är dum i huvudet i matte!” och det inte längre är förknippat med en viss handling utan beskrivs som ett tillstånd. Då i stort sett samtliga identifierande yttranden är negativa omdömen kan dessa inte betraktas som ett positivt bidrag till kommunikationen i matematikklassrummet. Andelen negativa omdömen om andra individer och sin egen insats som lärande elev, har rimligen ingen positiv effekt för elevernas förväntningar på varandra eller för deltagandet i en matematisk kommunikation.

Vad kan man då som lärare göra för att minska andelen identifierande yttranden i klassrummet? Att vara ett gott föredöme och vara vaksam på att man som lärare ger respons på elevens handlingar och inte värderar individen som person kan vara ett första viktigt steg för att eleverna inte ska bedöma varandra som personer utan istället värdera matematiska lösningsmetoder etc. Att uppmärksamma och påminna sig om att det finns en skillnad i hur man säger som lärare. Yttrar man ”Vad duktig du är” är det ett uttalande riktat mot individens egenskaper och har i egentlig mening ingen koppling till elevens matematiserande. Att istället berömma och bedöma en handling och exempelvis istället säga: ”Den här lösningsmetoden är ett bra val av dig” är kopplat till själva matematiserandet och inte individens egenskaper. Det leder dessutom direkt till respons på valet av lämplig lösningsmetod (se t.ex. Björklund Boistrup, 2010).

9.3 Fortsatt forskning

Ur ett svenskt perspektiv och med den nya ämnesplanen i matematik från år 2011, är en fortsatt forskning riktad mot gruppaktiviteter och hur elevernas kommunikation om matematik kan gynnas en angelägen fråga. Det måste ses som angeläget att förstå mer av hur eleverna kan erbjudas möjlighet att i högre grad delta i kommunikationen om matematik under lektionerna genom val och variation av arbetssätt och arbetsmetoder. Likaså visar denna studie på betydelsen av att få ytterligare kunskap om vilken betydelse variationen av användningen av de olika medierande redskapen spelar för elevernas möjlighet att delta i den matematiska kommunikationen och att förnimma de matematiska objekt som är föremål för lärandet.

I studien framträder elevernas svårigheter att fånga det för dem nya matematiska begreppet derivata. Matematikämnets abstraktion är här centralt och hur vi som individer uppfattar de abstrakta matematiska objekten på både en process- och objektnivå. Studien visar hur eleverna när de möter det matematiska symbolspråket för derivata, som när de möter symbolen $f'(x)$, främst fokuserar på processnivå och att den matematiska diskursen hindras i samtliga observerade grupper av elevernas fokusering på att utföra en deriveringsprocess. Studien pekar på ett behov av ytterligare forskning kopplat till hur undervisning kan utformas för att främja att eleverna utvecklar förståelse för begrepp på både process- och objektnivå i matematiken, och en ökad medvetenhet om hur hinder som kan uppstå kan förebyggas redan under lägre åldrar.

Fallstudien av gymnasieelevernas arbete i smågrupper visar också på mycket stora variationer av i vilken grad eleverna faktiskt deltar i gruppernas kommunikation och hur innehållet i individernas yttranden varierar främst på individnivå. Även om förutsättningar för lärande finns i den observerade gruppaktiviteten, är de stora skillnaderna vad gäller gymnasieelevernas bidrag till matematiserandet värd att notera. Forskningsstudien visar på ett behov av ytterligare kunskap om hur matematiklärare på bästa sätt kan organisera smågrupper för att öka elevernas engagemang och kvaliteten på elevernas matematiserande, vilket också betonats i tidigare forskning (se t.ex. Wood & Kalinec, 2012). Vikten av att läraren i förväg tänkt sig in i de förväntade hinder eleverna kan stöta på i problemlösningssituationen framträder, inte minst när inte någon elev i gruppen har någon som kan ta rollen av att leda den matematiska diskursen.

Olika slags subjektifierande yttranden ([AOS]/[IOS]) har visat sig ha betydelse för andelen yttranden som i egentlig mening bidrar till den matematiska diskursen, men också för elevernas deltagande i gruppen. De aktionsinriktade yttrandena [AOS], frågorna om hur eller varför en elev matematiserar som hon gör, har visat sig gynna elevernas matematiserande [M]. Detta exempelvis genom att elevernas metadiskurs om matematik förstärks då den som-vet-mer i gruppen utmanas att förtydliga och förklara för andra elever. Studien visar på förekomsten av identifierande yttranden [IOS], när eleverna bedömer varandra och sig själva, och hur detta påverkar elevernas matematiserande och deltagande i gruppen. Dessa identifierande yttranden tydliggör oftast elevernas negativa förväntningar på varandra i ämnet. Få studier finns som belyser förekomsten av dessa olika typer av subjektifierande yttranden i det svenska matematikklassrummet och hur dessa påverkar klassrumsdiskursen. Att ytterligare forskningsintresse riktas inte endast mot den bedömning som sker mellan lärare och elev, utan också mot den bedömning som pågår mellan eleverna, ses om en viktig utmaning utifrån denna studies resultat. Elevernas bedömning av varandra får rimligen antas påverka vilka roller de väljer eller tilldelas i klassrummet. Detta kan antas var av stor vikt för hur eleverna kommunicerar om matematik med andra deltagare i klassrummet och därmed påverka lärandet.

Ytterligare klassrumsforskning kopplad till val av och utformning av undervisningen för att gynna kommunikationen och lärandet i matematik, är en viktig utmaning för forskare och matematikundervisare, inte minst ur ett svenskt perspektiv. Hur ska samarbetslärandet utformas för att på bästa sätt stötta elevernas svårigheter och hinder för att utveckla en ny matematisk diskurs och knyta an till tidigare helt eller delvis erövrade matematiska diskurser? Hur ska matematikläraren bygga upp det tillåtande arbetsklimat där eleverna inte bedömer sig själva och andra, utan istället vågar ställa de frågor som gradvis i allt större omfattning innebär att de blir alltmer delaktiga i den matematiska diskursen? Hur ska undervisningen utformas för att eleverna, metaforiskt uttryckt, ska ledas till effektiva vägval i den snårskog av begrepp, metoder och redskap som erfordras för att inte gå vilse i matematikens djungel?

Referenser

- Ainsworth, S. (2006). A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16, 183-198.
- Alrø, H., & Skovsmose, O. (2004). Dialogic learning in collaborative investigation. *Nordisk Matematikdidaktik*, 9, 39-62.
- Alrø, H., & Johnsen Høines, M. (2010). Critical dialogue in mathematics education. I H. Alrø, O. Ravn, & P. Valero (Eds.), *Critical mathematics education. Festschrift for Ole Skovsmose* (pp. 11-22). Rotterdam: Sense Publishers.
- Attorps, I. (2006). *Mathematics teachers' conceptions about equations*. Doctoral dissertation, Research Report 266. Department of Applied Sciences of Education, University of Helsinki, Finland.
- Backlund, P., & Backlund, L. (1999). Att förändra arbetssätt – svårt men nödvändigt. *Nämnamnaren*, 4, 105-112.
- Ben-Zvi, D., & Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, Deдалus' wings, and the learner's autonomy. *Education and Didactics*, 1(3), 123-141.
- Ben-Yehuda, M., Lavy, I., Linchevski, L., & Sfard, A. (2005). Doing wrong with words: What bars students' access to arithmetical discourses. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(3), 176-247.
- Berger, M. (2004). The functional use of a mathematical sign. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 81-102.
- Bergsten, C. (2006). En kommentar till den matematiska problemlösningens didaktik. I L. Häggblom, L. Burman & A-S. Røj-Lindberg (red.), *Perspektiv på kunskapens och lärandets villkor* (ss. 165-176). Vasa: Åbo Akademi.
- Bergsten, C. (2008). Några aspekter av matematikens formelspråk. I H. Lennerstad, & C. Bergsten (red.), *Matematiska språk – Sju essäer om symbolspråkets roll i matematiken* (ss. 127-142). Stockholm: Santérus förlag.
- Berry, J., & Sahlberg, P. (2006). Accountability affects the use of small group learning in school mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 11(1), 5-32.
- Bjerneby Häll, Maria. (2006). *Allt har förändrats och allt är sig likt. En longitudinell studie av argument för grundskolans matematikundervisning*. Doktorsavhandling. Linköping: Linköpings universitet, Institutionen för beteendevetenskap.
- Björkqvist, O. (2003). *Matematikdidaktiken i Sverige: En lägesbeskrivning av forskningen och utvecklingsarbetet*. Stockholm: Kungliga vetenskapsakademien.
- Björklund Boistrup, L. (2010). *Assessment discourses in mathematics classrooms: A multimodal social semiotic study*. Doktorsavhandling. Naturvetenskapliga fakulteten, Institutionen för matematikämnet och naturvetenskapsämnens didaktik, Stockholms Universitet.
- Boaler, J. (2002). The development of disciplinary relationships: Knowledge, practice, and identity in mathematics classrooms. *For the learning of mathematics*, 22(1), 42-47.

- Boaler, J. (2006). How a detracked mathematics approach promoted respect, responsibility, and high achievement. *Theory into Practice*, 45, 40-46.
- Boaler, J., & Greeno, J. (2000). Identity, agency, and knowing in mathematics words. In J. Boaler (Eds.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 171-200). Westport: Ablex Publishers.
- Brandell, G., & Backlund, L. (2011). Samarbetslärande i matematik. I G. Brandell & A. Pettersson (red.). *Matematikundervisning. Vetenskapliga perspektiv* (ss. 115-148). Stockholm: Stockholms universitets förlag.
- Bremner, N. (2003). *Matteboken som redskap och aktör. En studie av hur derivata introduceras i svenska läroböcker 1967-2002*. Licentiatuppsats. Institutionen för undervisningsprocesser, kommunikation och lärande. Lärarhögskolan i Stockholm.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics 1970-1990* [Edited and translated M. Cooper, N. Balacheff, R. Sutherland and V. Warfield.] Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bryman, A. (2002). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Malmö: Liber Ekonomi.
- Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks: An analysis of the levels of difficulty*. Licentiate thesis. Luleå: Luleå University of Technology.
- Bräuning, K., & Steinbring, H. (2011). Communicative characteristics of teachers' mathematical talk with children: from knowledge transfer to knowledge investigation. *ZDM*, 43, 927-939.
- Börjeson, M., & Palmblad, E. (red.) (2007). *Diskursanalys i praktiken*. Malmö: Liber.
- Carlgren, I. (2005). Konsten att sätta sig själv i arbete. I E. Österlind (red.), *Eget arbete en kamelont i klassrummet*. Lund: Studentlitteratur.
- Carlsen, M. (2008). *Appropriating mathematical tools through problem solving in collaborative small-group settings*. Doctoral dissertation. Faculty of Engineering and Science, University of Agder.
- Christie, F. (2002). *Classroom discourse analysis: A functional perspective (Open Linguistics Series. Ed. R. Fawcett)*. London: Continuum International Publishing.
- Cotton, T., & Hardy, T. (2004). Problematizing culture and discourse for mathematics education research. Defining the issues; tools for research. In P. Valero & R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology* (pp. 85-104). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Dunkels, A. (1996). *Contributions to mathematical knowledge and its acquisition*. Doctoral thesis. Luleå: University of Technology, Dept. of Mathematics.
- Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 55-69). Hiroshima, Japan: Nishiki Print Co. Ltd.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Dysthe, O. (1997). *Det flerstämmiga klassrummet*. Lund: Studentlitteratur.
- Dysthe, O. (2003). *Dialog, samspel och lärande*. Lund: Studentlitteratur.

- Edwards, D., & Potter, J. (1992). *Discursive psychology*. London: Sage.
- Emanuelsson, J., Fainsiber, L., Häggström, J., Kullberg, A., Lindström, B., & Löwing, M. (red.) (2011). *Voices of learning and instruction in mathematics*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.
- Engström, A. (2002). *Semiotik och matematik - En introduktion*. Arbetsrapport vid pedagogiska institutionen. Örebro universitet.
- Eriksson, I. (2009). Re-interpreting teaching: A divided task in self-regulated teaching practice. *Scandinavian Journal of Educational research*, 53(1), 53-70.
- Fairclough, N. (2003). *Analysing discourse: Textual analysis for social research*. London: Routledge.
- Foucault (1971/1993). *Diskursens ordning*. Stockholm: Symposion.
- Galton, M., Hargreaves, L., & Pell, T. (2009). Group works and whole-class teaching with 11- to 14-year olds compared. *Cambridge Journal of Education*, 39, 119-140.
- Gee, J. P. (1999). *An introduction to discourse analysis: theory and method*. London and New York: Routledge.
- Gee, J. P. (2001). Identity as an analytic lens for research in education. *Review of Research in Education*, 25, 99-125.
- Gee, J. P. (2005). *An introduction to discourse analysis: Theory and method*. New York: Routledge.
- Gray, E., & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics. In M. van den Heuval-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 65-72). Utrecht, The Netherlands.
- Halliday, M. A. K. (1985/1994). *An introduction to functional grammar*. London: Arnold.
- Halliday, M. A. K., & Matthiessen, C. (2004). *An introduction to functional grammar*. London: Arnold.
- Hannula, M. S. (2005). Shared cognitive intimacy and self-defence: two socio-emotional processes in problem solving. *Nordisk Matematikdidaktikk*, 10(1), 25-42.
- Harre, R., & Gillett, G. (1994). *The discursive mind*. London: Sage.
- Hattie, J. A. C. (2009). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London/ New York: Routledge.
- Hattie, J. A. C. (2012). *Synligt lärande för lärare*. Stockholm: Natur och kultur.
- Hattie, J. A. C., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81-112.
- Hauger, G. (1997). Growth of knowledge of rate in four precalculus students. Paper presented at the annual meeting of the American educational research association (AERA), Chicago, March 24-28.
- Hedeboe, B., & Polias, J. (2008). *Genrebyrån. En språkpedagogisk funktionell grammatik i kontext*. Stockholm: Hallgren & Fallgren Studieförlag AB.

- Heyd-Metzuyanim, E., & Sfard, A. (2012). Identity struggles in the mathematics classroom: On learning mathematics as an interplay of mathematizing and identifying. *International Journal of Educational Research*, 51/52, 128-145.
- Holmberg, P., & Karlsson, A-M. (2006). *Grammatik med betydelse. En introduktion till funktionell grammatik*. Uppsala: Hallgren & Fallgren.
- Hoyles, C. (2001). From describing to designing mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 273-276.
- Hoyles, C. (2012). From describing to designing mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 273-276.
- Hähkiöniemi, M. (2006a). *The role of representations in learning the derivative*. Dissertation. University of Jyväskylä, Department of Mathematics and Statistics.
- Hähkiöniemi, M. (2006b). Perceiving the derivative: The case of Susanna. *Nordisk Matematikdidaktikk*, 11(1), 51-73.
- Igländ, M-A., & Dysthe, O., (2003). Mikhail Bakhtin och sociokulturell teori. I O. Dysthe (red.), *Dialog, samspel och lärande* (ss. 95-118). Lund: Studentlitteratur.
- Ingram, N. (2008). Who a student sits near to in maths: Tension between social and mathematical identities. In M. Goos, R. Brown, & R. Makar (Eds.), *Navigation currents and charting directions. Proceedings of the 31st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 281-286). Brisbane, Australia: MERGA.
- Jablonka, E., Johansson, M., & Rohdin, M. (2010). Achievement as a matter of choice? In C. Bergsten, E. Jablonka, & T. Wedege (Eds.), *Mathematics and mathematics education: Cultural and social dimensions: Proceedings of MADIF 7* (pp. 113-123). Linköping: SMDF.
- Jackson, K., & Cobb, P. (2010). *Refining a vision of ambitious mathematics instruction to address issues of equity*. Paper presented at the National Council of Teachers of Mathematics Research Presession, San Diego.
- Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks. A classroom and curricular perspective*. Doctoral thesis. Luleå University of Technology, Department of Mathematics.
- Juter, K. (2006). *Limits of functions. University students' concept development*. Doctoral thesis. Luleå University of Technology, Department of Mathematics.
- Jørgensen, M. W., & Phillips, L. P. (2008). *Discourse analysis as theory and method*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Kieran, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 187-228.
- Kieran, C., Forman, E., & Sfard, A. (2001). Learning discourse: Sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 1-12.

- Kilborn, W. (1982). Är läromedlet den verkliga läroplanen? I U. P. Lundgren, G. Swingby, & E. Wallin (red.), *Läroplaner och läromedel: En konferensrapport*. Stockholm: Institutionen för pedagogik, Högskolan för lärarutbildningen.
- Kilborn, W. (2007). Kommunikationens betydelse. *Nämnamnaren*, 1, 3-7.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academic Press.
- Kinard, J. T., & Kozulin, A. (2012). *Undervisning för fördjupat matematiskt tänkande*. Lund: Studentlitteratur.
- Kling Sackerud, L-A. (2009). *Elevers möjligheter att ta ansvar för sitt lärande i matematik. En skolstudie i postmodern tid*. Doktorsavhandling. Umeå: Umeå universitet.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle-school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. *ZDM - The International Journal on Mathematical Education*, 37(1), 1-9.
- Kress, G. (2001). *Multimodal discourse: the modes and media of contemporary communication*. London: Arnold.
- Kress, G., & van Leeuwen, T. (2006/1996). *Reading images. The grammar of visual design*. London: Routledge.
- Kvale, S. (1997). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur.
- Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Lemke, J. L. (1993). *Talking science: Language, learning and values*. New Jersey: Ablex Publishing Corporation.
- Lennerstad, H., & Pettersson, E. (2001). Mera dialoger i läroböckerna! I B. Grevholm, I. Sigstam, & A. Vretblad (red.), *Kvinnor och matematik: Konferensrapport* (ss. 119-130). Uppsala: Matematiska institutionen. Uppsala universitet.
- Lerman, S. (1998). *Research on socio-cultural perspectives of mathematics teaching and learning*. I A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain. An ICMI Study* (pp. 333-350). Dordrecht: Kluwer.
- Lerman, S. (2000). Some problems of socio-cultural research in mathematics teaching and learning. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 3, 55-71.
- Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A socio-cultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 87-113.
- Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem-solving research. In R. Lesh (Ed.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 229-261). New York: Academic press.
- Lester, F. K. (1996). Problemlösningens natur. I R. Ahlström m fl. (red.), *Matematik - ett kommunikationsämne. Nämnamnaren TEMA*. (s. 85-91). Göteborg: Göteborgs Universitet.
- Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Newbury Park, CA: Sage Publications.

- Lindqvist, U., Emanuësson, L., Lindström, J-O., & Rönnerberg, I. (2003). *Lusten att lära - med fokus på matematik (No 221)*. Stockholm: Statens skolverk.
- Linell, P. (1998). *Approaching dialogue. Talk, interaction and contexts in dialogical perspectives*. Amsterdam: John Benjamins
- Linell, P. (2009). *Rethinking, language, mind, and world dialogically: interactional and contextual theories human sense-making*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255-276.
- Lundgren, U. P. (1979). *Att organisera omvärlden. En introduktion till läroplansteori*. Stockholm: Liber.
- Löwing, M. (2004). *Matematikens konkreta gestaltning: En studie av kommunikationen lärare-elev och matematiklektionens didaktiska ramar*. Doktorsavhandling. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Löwing, M. (2008) Att kommunicera matematik i skolan. I H. Lennerstad & C. Bergsten (red.), *Matematiska språk - Sju essäer om symbolspråkets roll i matematiken* (ss. 91–104). Stockholm: Santérus förlag.
- Marton, F., & Tsui, A. B. M. (Eds.). (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Mason, J. (1996). *Qualitative researching*. London: Sage Publications.
- Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 243–267.
- Mellin-Olsen, S. (1991). *Hvordan tenker lærere om matematikkundervisning?* Landås: Bergen lærerhøgskole.
- Moschkovich, J. (1996). Moving up and getting steeper: negotiating shared descriptions of linear graphs. *The Journal of the Learning Sciences*, 5(3), 239-277.
- Mouvitz, L. (2001). *Hur kan lärare lära? Internationella erfarenheter med fokus på matematikutbildning*. NCM-RAPPORT 2001:2. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning.
- Nachlieli, T., & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom - The case of function. *International Journal of Educational Research*, 51/52, 10-27.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- NCM /UFM. (2009). *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet*. Göteborg: NCM, Nationellt centrum för matematikutbildning.
- Neuman, I. (2003). *Mening, materialitet, makt: En introduktion till diskursanalys*. Lund: Studentlitteratur.
- Nickson, M. (2000). *Teaching and learning mathematics. A teacher's guide to recent research and its application*. London: Casell.

- Nilsson, G. (2005). *Att äga π : praxisnära studier av lärarstudenters arbete med geometrilaborationer*. Doktorsavhandling. Göteborg: Acta universitatis Gothoburgensis.
- Nilsson, P., & Ryve, A. (2010). Focal event, contextualization, and effective communication in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 74(3), 241-258.
- Niss, M. (1999). Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse. *Uddannelse*, 9, 21-29.
- Niss, M. (2001). Den matematikdidaktiska forskningens karaktär och status. I B. Grevholm (red.), *Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv* (ss. 21-47). Lund: Studentlitteratur.
- Niss, M., & Højgaard-Jensen, T. (2002). Kompetencer och Matematiklärning. *Uddannelsesstyrelsens temahafteserie nr. 18-2002*. Köpenhamn, Undervisningsministeriet.
- Norrby, L. (2004). *Samtalsanalys*. Lund: Studentlitteratur.
- OECD, Organisation for Economic Co-operation and Development. (1999). *Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment*. Paris: Author.
- O'Halloran, K. L. (2000). Classroom discourse in mathematics: A multisemiotic analysis. *Linguistics and Education*, 10(3), 359-388.
- Orton, A. (1983a). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.
- Orton, A. (1983b). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.
- Palm, T., Bergqvist, E., Eriksson, T., & Häggström, C-M. (2004). *En tolkning av målen med den svenska gymnasimatematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion*. Pm Nr 199, 2004. Umeå universitet.
- Persson, P-E. (2005). *Bokstavliga svårigheter: Faktorer som påverkar gymnasieelevers algebralärande*. Licentiatavhandling. Luleå: Institutionen för matematik, Luleå tekniska universitet.
- Persson, P-E. (2010). *Räkna med bokstäver. En longitudinell studie av vägar till en förbättrad algebraundervisning på gymnasienivå*. Doktorsavhandling. Luleå: Institutionen för matematik, Luleå tekniska universitet.
- Pettersson, K. (2008). *Algoritmiska, intuitiva och formella aspekter av matematiken i dynamiskt samspel. En studie av hur studenter nyttjar sina begreppsuppfattningar inom matematisk analys*. Doktorsavhandling. Göteborg: Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet.
- van de Pol, J., Volman, M., & Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in teacher-student interaction. *Educational Psychology Review*, 22, 271-296.
- Potter, J., Wetherell, M. (1987). Analysing discourse. In A. Bryman & R. G. Burgess (Eds.), *Analyzing qualitative data* (pp. 47-66). London: Rotledge.
- Rogoff, B. (2003). *The cultural nature of human development*. Oxford: Oxford University Press.

- Riesbeck, E. (2000). *Interaktion och problemlösning: att kommunicera om och med matematik*. Linköping: Linköpings universitet, Institutionen för pedagogik och psykologi.
- Riesbeck, E. (2008). *På tal om matematiken. Matematiken, vardagen och den matematikdidaktiska diskursen*. Doktorsavhandling. Linköping: Linköpings universitet, Institutionen för pedagogik och psykologi.
- Robson, C. (2002). *Real world research. A resource for social scientists and practitioner-researcher*. Oxford: Blackwell publishing.
- Rogoff, B. (2003). *The cultural nature of human development*. Oxford: Oxford University Press.
- Roth, W-M., & Welzel, M. (2001). From activity to gestures and scientific language. *Journal of Research in Science Teaching*, 38(1), 103-136.
- Ryve, A. (2004). Can collaborative concept mapping create mathematically productive discourses? *Educational Studies in Mathematics*, 56(2-3), 157-177.
- Ryve, A. (2006a). Vad är kunskap i matematik? *Nämnamnaren*, 2, 7-9.
- Ryve, A. (2006b). Making explicit the analysis of students mathematical discourses - revising a newly developed methodological framework. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 191-209.
- Ryve, A., Larsson, M., & Nilsson, P. (2013). Analyzing content and participation in classroom discourse: Dimensions of variation, mediating tools, and conceptual accountability. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 57(1), 101-114.
- Ryve, A., Nilsson, P., & Pettersson, K. (2013). Analyzing effective communication in mathematics group work: The role of visual mediators and technical terms. *Educational Studies in Mathematics*, 82(3), 497-514.
- Sahlberg, P., & Berry, J. (2003). *Small group learning in mathematics. Teachers' and pupils' ideas about group work in school*. Turku, Finland: Finnish Educational Research Association.
- Sahlström, F. (2008). Från lärare till elever, från undervisning till lärande: Några utvecklingslinjer i klassrumsforskningen. *Vetenskapsrådets rapportserie*, 9:2008. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Schiffrin, D. (1994). *Approaches to discourse*. Oxford: Blackwell.
- Selander, S., & Kress, G. (2010). *Design för lärande - Ett multimodalt perspektiv*. Stockholm: Nordstedts Akademiska förlag.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the danger of choosing just one. *Educational Researcher*, 27(2), 4-13.
- Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 13-57.

- Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a Commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, 16(4), 565-615.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Sfard, A. (2009). What's all the fuss about gestures? A commentary. *Educational Studies of Mathematics*, 70, 191-200.
- Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse - Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, 51/52, 1-9.
- Sfard, A., & Ben-Zvi, D., (2007). Ariadne's threat, Daedalus' wings and the learner's autonomy. *Education & Didactique*, 1(3), 123-142.
- Sfard, A., & Heyd-Metzuyanim, E. (2011). *Speaking of counting. How discourses of identity enable or hinder participation in discourses of mathematics and science* (Presentation). University of Kristiansand, Norway 2011.11.04.
- Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning by talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity*, 8, 42-76.
- Sfard, A., & Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what grown-ups cannot see as different? - Early numerical thinking revisited. *Cognition and Instruction*, 23(2), 237-309.
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.
- Sfard, A., & McClain, K. (Eds.) (2002). *Learning tools: Perspectives on the role of designed artifacts in mathematics learning*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search for an analytical tool for investigating learning as a culture shaped activity. *Educational Researcher*, 34(4), 14-22.
- Sharan, S. (2003). Large classes, small groups: a social systems approach. I R. Gillies, & A. F. Ashman (Eds.), *Co-operative learning* (pp. 210-221). London and New York: Rotledge.
- Skolinspektionen (2010). *Skolinspektionens rapport 2010:13. Kvalitetsgranskning. Undervisningen i matematik i gymnasieskolan*. Stockholm.
- Skolverket (2000). *Naturvetenskapsprogrammet - Program mål, kursplaner, betygskriterier och kommentarer. Gy2000:14*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2001). *Svenska femtonåringars läsförmåga och kunnande i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv. PISA 2000*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2003a). *Lusten att lära – med fokus på matematik. Nationella kvalitetsgranskningen 2001-2003. Skolverkets rapport 221*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2003b). *Det nationella provsystemet – vad, varför och varthän?* Stockholm: Skolverket.

- Skolverket (2004a). *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003. Huvudrapport – svenska/svenska som andraspråk, engelska, matematik och undersökningen i årskurs 5. Rapport 251*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2004b). *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003. Matematik årskurs 9, ämnesrapport till rapport 251*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2004c). *TIMSS 2003. Svenska elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i skolor 8 i ett nationellt och internationellt perspektiv. Rapport 255*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2004d). *PISA 2003. Svenska femtonåringars kunskaper och attityder i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2006). *Med fokus på matematik och naturvetenskap. En analys av skillnader och likheter mellan internationella jämförande studier och nationella kursplaner*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2007). *PISA 2006. 15-åringars förmåga att förstå, tolka och reflektera – naturvetenskap, matematik och läsförståelse. Rapport 306*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2008a). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007. Analysrapport till 323*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket. (2008b). *TIMSS 2007. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv. Rapport 323*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2009). *Vad påverkar resultaten i svensk grundskola? Kunskapsöversikt*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2011a). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2011b). *Kommentarer till uppbyggnad av och struktur för ämnet matematik*. Hämtat från http://www.mathplanet.com/media/34493865/strukturkommentarer_nya_kursplaner.pdf
- Skolverket (2011c). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2012a). *TIMSS 2011. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv. Rapport 380*.
- Skolverket. (2012b). *Utökad undervisningstid i matematik. Skolverkets rapport nr 378*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2013). *Pisa 2012. 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap. Rapport 398*. Stockholm: Fritzes.
- Slavin, R. E. (1995). *Cooperative learning theory, research and practice* (2nd ed.). Boston: Allyn and Bacon.
- Stevenson, H. W., & Stiegler, J. (1992). *The learning gap. Why our schools are failing and what we can learn from Japanese and Chinese education*. New York: Summit Books.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: The Free Press.
- Strandberg, L. (2008) *Vygotskij i praktiken. Bland plughästar och fuskklappar*. Stockholm: Nordstedts akademiska förlag.

- Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma.
- Säljö, R. (2005). *Lärande & kulturella redskap. Om lärprocesser och det kollektiva minnet*. Stockholm: Nordstedts Akademiska Förlag.
- Tall, D. (2003). Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. In L. Carvalho & L. Guimarães (Eds.), *História e tecnologia no ensino da matemática* (Vol. 1, pp. 1-28). Rio de Janeiro.
- Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning meaning and identity*. New York: Cambridge University Press.
- Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the mind. A sociocultural approach to mediated action*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Wertsch, J. V. (1998). *Mind as action*. New York: Oxford University Press.
- Vinterek, M. (2006). *Individualisering i ett skolsammanhang*. Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.
- Winther Jørgensen, M., & Phillips, L. (1999/2000). *Diskursanalys som teori och metod*. Lund: Studentlitteratur
- Winsløw, C. (2004). Semiotics as an analytic tool for the didactics of mathematics. *Nordisk matematikdidaktik*, 9(2), 81-100.
- Wood, L. A., Kroger, R. O. (2000). *Doing discourse analysis. Methods for studying action in talk and text*. Thousand Oaks: Sage Publications, Inc.
- Wood, M. B. (2008). *Mathematizing, identifying and autonomous learning: Fourth grade students engage mathematics*. Dissertation. Department of teachers education, Michigan State University, USA
- Wood, M. B., & Kalinec, C. (2012). Student talk and opportunities for mathematical learning in small group interactions. *International Journal of Educational Research*, 51/52, 109-127.
- Vygotsky, L. (1978). *Mind in society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Vygotsky, L. (1986). *Thought and language*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- Wyndhamn, J. (1995). Lärarens triangel och elevens trekant. En deskriptiv studie över matematiska samtal i klassrummet. *Arbetsrapport från Tema K 1995:1*. Linköping: Institutionen för Tema.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 58-477.
- Yin, R. K (2007). *Fallstudier: design och genomförande*. Malmö: Liber.
- Yin, R. K. (2009). *Case study research. Design and methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Zack, V., & Graves, B. (2001). Making mathematical meaning through dialogue: "Once you think of it, the Z minus three seems pretty weird". *Educational Studies in Mathematics*, 46, 229-271.

Österholm, M. (2006). *Kognitiva och metakognitiva perspektiv på läsförståelse inom matematik*. Doktorsavhandling, Matematiska institutionen, Linköpings universitet.

Appendix A Flödesscheman för grupp A

Utdrag 7.1a Episod 1: Interaktivt flödesschema, mediatorbyte, subjektifieringsgrad

Tid Ep. 1	André	Moa	Lisa	Lärare	Mediator/ identifiering ⁸⁹	Tid Ep. 1	André	Moa	Lisa	Lärare	Mediator/ identifiering
[2.08]					2 M ^M Alla	[3.55]					sy
[2.08]					sy + vb	[3.59]					
[2.17]						[4.00]					sy
[2.20]					sy + vb + ge	[4.00]					sy
[2.55]						[4.16]					
[3.32]					sy + ge						
[3.40]											
[3.45]											
[3.54]											

Utdrag 7.2b Episod 2: Interaktivt flödesschema, mediatorbyte, subjektifieringsgrad

Tid Ep. 2	André	Moa	Lisa	Lärare	Mediator/ identifiering	Tid Ep. 2	André	Moa	Lisa	Lärare	Mediator/ identifiering
[5.00]						[5.35]					
[5.00]					2 A ^A Alla	[5.38]					sy + vb
[5.00]						[5.41]					
[5.09]						[5.46]					sy + vb + ge
[5.14]					sy + vb	[5.48]					
[5.15]						[5.49]					sy + vb + ko
[5.16]						[5.51]					
[5.18]					sy + vb	[5.51]					
[5.20]						[5.54]					sy
[5.20]											
[5.23]											

⁸⁹ Använd mediator anges vid yttranden klassificerade [onM] och nivå av identifiering vid yttranden klassificerade [onIOS]. Ex: 2 L^{Moa} Alla utläses *identifiering av andra nivån, läraren uttalar sig om Moa och alla i gruppen är mottagare* (se vidare tabell 5.4).

Utdrag 7.3b Episod 3: Interaktivt flödesschema, mediatorbyte, subjektifieringsgrad

Tid Ep. 3	André	Moa	Lisa	Lärare	Mediator/ identifiering	Tid Ep. 3	André	Moa	Lisa	Lärare	Mediator/ identifiering
[6.13]		o	o		sy + vb + ge	[10.02]		o	o		sy + vb
[6.13]		o	o		2 A ^A Alla	[10.04]		o	o		
[6.13]		o	o	o		[10.08]		o	o		sy
[7.28]		o	o	o	sy + ko	[10.09]		o	o		2 M ^L Alla
[7.37]		o	o	o		[10.11]		o	o		
[7.39]		o	o	o		[10.14]		o	o		sy + vb
[8.35]		o	o	o		[10.29]		o	o		
[8.40]		o	o	o	2 M ^A Alla	[10.37]		o	o		sy
[8.40]		o	o	o	sy	[10.41]		o	o		
[8.46]		o	o	o		[10.42]		o	o		vb
[8.52]		o	o	o	2 M ^M Alla	[10.46]		o	o		
[8.55]		o	o	o		[10.48]		o	o		vb + ko + gr
[9.20]		o	o	o	sy + ge + ko	[10.51]		o	o		
[9.26]		o	o	o		[11.48]		o	o		sy + vb
[9.26]		o	o	o	sy	[11.57]		o	o		
[9.42]		o	o	o	sy + vb	[11.59]		o	o		sy + gr + ko
[9.45]		o	o	o		[12.02]		o	o		
[9.46]		o	o	o	sy + vb + ko	[12.10]		o	o		sy + vb + ko + gr
[9.57]		o	o	o		[12.21]		o	o	o	sy + vb
[10.02]		o	o	o		[12.23]		o	o	o	vb + ko + gr
						[12.25]		o	o	o	
						[12.39]		o	o	o	sy + vb + ko
						[12.45]		o	o	o	(ledtråd)

Utdrag 7.4b Episod 4: Interaktivt flödesschema, mediatorbyte, subjektifieringsgrad

Tid Ep. 4	André	Moa	Lisa	Lärare	Mediator/ identifiering	Tid Ep. 4	André	Moa	Lisa	Lärare	Mediator/ identifiering
[13.17]					sy + vb + gr + ko	[14.56]					
[13.30]					vb	[14.56]				2 L ^L Alla	
[13.30]					ledtråd	[15.12]					
[13.47]					sk + vb	[15.36]				2 A ^A Alla	
[13.53]					sy + vb	[15.41]					
[13.54]						[15.56]				vb + sy	
[13.55]					sy + vb	[15.59]					
[13.59]						[16.05]				(eko)	
[14.01]						[16.08]					
[14.03]					(eko)	[16.10]				gr	
[14.06]						[16.13]					
[14.10]					vb	[16.13]				2 Lä ^A Alla	
[14.12]						[16.13]					
[14.13]					sy + vb	[16.20]				2 A ^A Alla	
[14.16]						[16.20]				gr	
[14.17]					2 M ^M Alla	[16.28]				2 L ^{Alla} Alla	
[14.19]					3 L ^L Alla	[16.32]				2 L ^L Alla	
[14.20]					3 Lä ^A Alla	[16.32]				(ej ljud)	
[14.22]						[16.45]				(ej ljud)	
[14.22]						[16.45]					
[14.32]						[16.45]				sy	
[14.38]						[16.49]				sy	
[14.38]						[17.00]					
[14.51]					3 A ^A Alla	[17.00]				sy + vb + ge	
						[17.06]					
						[17.07]				sy + vb	
						[17.11]					

<i>Tid Ep. 4</i>	<i>André</i>	<i>Moa</i>	<i>Lisa</i>	<i>Lärare</i>	<i>Mediator/ identifiering</i>	<i>Tid Ep. 4</i>	<i>André</i>	<i>Moa</i>	<i>Lisa</i>	<i>Lärare</i>	<i>Mediator/ identifiering</i>
						[18.24]	o		o	o	ko + gr
[17.14]	o		o		sy + ge + ko	[18.28]	o		o	o	
[17.17]		o	o		(eko)	[18.28]	o	o		o	2 Lä ^M Alla
[17.17]		o	o			[18.28]	o	o	o	o	2 Lä ^M Alla
[17.24]	o	o	o			[18.28]	o	o	o	o	sy
[17.26]	o		o		ge + ko + gr	[18.2]	o	o	o	o	2 Lä ^M Alla
[17.36]		o	o			[18.49]	o		o	o	sy + vb
[17.37]	o		o		ge + ko + gr	[19.06]	o	o	o	o	
[17.39]		o	o			[19.07]	o		o	o	sy + vb + gr
[17.42]	o		o		sy→gr + ko	[19.10]	o	o		o	
[17.44]		o	o			[19.10]		o	o	o	
[17.45]	o		o		gr + ge	[19.18]	o	o	o	o	
17.47]		o	o			[19.20]	o	o	o		
[17.50]	o		o			[19.22]	o		o	o	
[17.52]		o	o			[19.25]	o	o	o	o	2 Lä ^M Alla
[17.54]	o		o		gr + ge	[19.29]	o	o	o	o	
[17.54]		o	o			[19.29]	o		o	o	
[18.06]	o		o		sy + gr + ge	[19.30]	o	o	o		
[18.10]	o	o	o								
[18.10]	o	o	o	o	sy						
[18.14]	o		o	o	sy						
[18.17]	o	o	o	o							
[18.18]	o		o	o	sy						
[18.21]	o	o	o		2 A ^M Alla						

Appendix B Koder för analys av medierande redskap

Matematiska diskursens innehåll	Kod	Specificering
Ordval i den matematiska diskursen	[vb] ⁹⁰	Växling till verbalt språk för att förtydliga t.ex. en matematisk symbol eller annan mediator Ex: En elev pekar på $3 \leq x \leq 5$ och säger "x är mindre än eller fem och större än eller lika med tre"
Visuella hjälpmedel, naturligt skriftspråk, matematiskt symbolspråk, gester eller olika slags ikoner	[sy]	Matematiskt symbolspråk används som mediator Ex: En elev läser "om x är tre är y fyra" och skriver samtidigt (3,4)
	[sk]	Individen använder det naturliga skriftspråket som stöd för kommunikationen Ex: Eleven skriver "funktionens största värde är sex när y är fyra"
	[gr]	En graf används som stöd för ett verbalt yttrande Ex: En elev pekar i en graf för att förtydliga ett resonemang
	[vt]	En värdetabell fungerar som mediator Ex: En elev för över punkterna (3,2) och (4,4) till en värdetabell
	[b]	Ikoner som teckningar och bilder (ej grafer, värdetabeller) Ex: Eleven ritar en bild av en geometrisk figur
	[ge]	Gester med hjälp av kroppsspråk En gest läggs till som stöd för det verbala yttrandet. Ex: En elev följer med en penna längs en graf
	[ko]	Koordinatsystemet fungerar som artefakt eller mediator Ex: Eleven markerar punkten (3,2) i ett koordinatsystem

⁹⁰ Verbalt språk anges endast om eleven aktivt väljer att övergå till att använda naturligt språk. Verbalt språk förutsätts om inget annat är angivet i de yttranden som klassificeras som matematiserande [onM], [offM].

Appendix C Uppläggnig av de första lektionerna om ”derivatan”

Lektion	Arbetsområde/ begrepp	Använda visuella mediatorer / matematiskt symbolspråk	Aktiviteter
1	gränsvärdesbegreppet repetition; rätta linjens funktion, funktionsvärde, koordinatsystem derivatabegreppet presenteras	grafisk representation, funktionsvärdet av (x,y) i koordinatsystemet, rätta linjens funktion, riktningskoefficienten/ k-värdet $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, graf, sekant, tangent, $\frac{dy}{dx}$, Newton, Leibniz, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	laboration/ helklassundervisning/ bänkarbete lärobok (s. 79-)
2	repetition beräkna funktionsvärde i punkter, koordinatsystemet, m- värde, beräkna funktionsvärden i punkter derivatans definition	Beräkna f(3) en given funktion f(x), presenterat med grafisk representation och matematiskt symbolspråk Bestämma f(2+h) för funktionen $f(x) = 3x + 7$ $f(2+h) - f(2)$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	helklassundervisning/ bänkarbete
3	repetition : beräkna funktionsvärdet för f(x) för funktionen i en given punkt , kvadreringsregeln, derivatans definition användningsområden för derivatan	rutiner för att beräkna t.ex. f(2) då $f(x) = 3x^2 + 1$ grafisk och algebraisk representation rutiner för att bestämma f(x+h) för polynomfunktioner $f(x) = ax^n + m$ rutiner för att beräkna derivatan för ett funktionsvärde då $f(x) = 3x + 7$ för polynomfunktioner $f(x) = ax^n + m$ $f'(x) = anx^{n-1}$	helklassundervisning/ bänkarbete

Pass	Arbetsområde/ begrepp	Använda visuella mediatorer/ matematiskt symbolspråk	Aktiviteter
4	deriveringsregler av polynomfunktioner, termvis derivering derivatan för konstanter $f'(x) = 0$	symbolerna dy/dx , $f'(x)$, $f(x) = 0$ $f(x) = kx^n$, $f'(x) = nkx^{n-1}$ grafisk $f'(x) = 0$	helklass/ bänkarbete gemensamma uppgifter från tavlan , derivering polynomfunktioner
5	repetition: finna funktionsvärdet för polynomfunktioner $f(x) = ax^n + m$, värdetabell, rita funktionens graf, lösa motsvarande ekvation ekvationen $ax^n + m$ grafiskt och algebraiskt		helklass/gruppaktiviteter
6	genomgång, test repetition av moment från pass 1-5, derivatans tecken, teckenstudium för en polynomfunktion: maximi- och minimipunkter arbetsblad	$\begin{array}{c} x \\ f'(x) \quad + \quad 0 \quad - \\ f(x) \end{array}$	helklass/ bänkarbete, gemensamma uppgifter repetitionsblad

Appendix D Brev till målsmän och deltagande elever

Information till elever och föräldrar

Jag heter Marie Bergholm och är lärare i matematik på gymnasieskolan men går för närvarande en utbildning i matematikdidaktik kopplad till forskarskolan FontD. Min huvudhandledare är professor Christer Bergsten, Linköpings universitet och biträdande handledare är Iris Attorps, Gävle högskola.

Under vår- och höstterminen planerar jag att genomföra en klassrumsstudie i undervisningsgruppen. Studiens fokus är elevernas deltagande i kommunikationen om matematik i första hand när eleverna arbetar i smågrupper.

Jag kommer att närvara under de lektioner då eleverna arbetar med derivatabegreppet under kursen Matematik C. Datainsamlingen sker med hjälp av video- och audio- inspelningar och insamling av skriftligt material. För att inte datainsamlingen ska bli för omfattande kommer grupper att väljas slumpvis vid gruppaktiviteter.

Allt material i studien kommer att användas i forskningssyfte och redovisas i en licentiatavhandling och eventuellt också presenteras i vetenskapliga artiklar och vid konferenser. I resultatredovisningen kommer inga foton att användas som kan innebära att enskilda elever kan identifieras. Forskningsmaterialet kommer inte att användas för någon form av betygsbedömning av eleverna.

Projektet kommer att genomföras i enlighet med Vetenskapsrådets forsknings-etiska regler. Allt inspelat material kommer att förvaras oåtkomligt för obehöriga. Medverkande i studien är frivilligt och eleverna kan när som helst avbryta deltagandet.

Om Ni har några frågor får ni gärna höra av er till mig.

Vänliga hälsningar

Marie Bergholm

Telefon: 070 6117006

Mail: mebm@soderkoping.se

Handledare: Professor Christer Bergsten MAI, Linköpings universitet 013/282984
Iris Attorps, Högskolan i Gävle 026/648786

Appendix E Fullmakt till målsmän och deltagande elever

FULLMAKT

Jag ger härmed mitt tillstånd till Marie Bergholm att i forskningssyfte använder ljud- och videoupptagning i matematikundervisningen där jag deltar som elev.

Elevens namn: _____

- ☐ Jag säger ja till att medverka i forskningsprojektet och tillåter videofilmning där jag finns med som deltagare
- ☐ Jag säger nej till all medverkan i forskningsprojektet

Underskrift av eleven

Underskrift av målsman för omyndig elev

Appendix F Fördelning av deltagarnas andel av respektive yttrande

GRUPP A		André	Moa ⁹¹	Lisa	Läraren
Andel av gruppens samtliga yttranden (n = 164)		32 %	43 %	7 %	17 %
onM	37 %	10 %	78 %	7 %	5 %
onAOS	16 %	44 %	19 %	11 %	26 %
onN	36 %	53 %	27 %	3 %	20 %
onIOS	10 %	25 %	25 %	19 %	31 %

GRUPP B		Emil	Maria ⁹²	Sam	Läraren
Andel av gruppens samtliga yttranden (n = 206)		22 %	42 %	18 %	17 %
onM	43 %	26 %	39 %	18 %	16 %
onAOS	14 %	31 %	44 %	7 %	14 %
onN	36 %	16 %	45 %	22 %	18 %
onIOS	8 %	13 %	38 %	25 %	25 %

GRUPP C		Theo	Joan ⁹³		Läraren
Andel av gruppens samtliga yttranden (n = 144)		40 %	42 %		18 %
onM	27 %	46 %	41 %		13 %
onAOS	15 %	33 %	33 %		33 %
onN	40 %	43 %	45 %		21 %
onIOS	18 %	35 %	39 %		6 %

GRUPP D		Bea	Kim ⁹⁴	Viktor	Läraren
Andel av gruppens samtliga yttranden (n = 130)		25 %	47 %	21 %	7 %
onM	33 %	26 %	70 %	2 %	2 %
onAOS	13 %	24 %	53 %	12 %	12 %
onN	48 %	27 %	33 %	32 %	6 %
onIOS	5 %	14 %	14 %	57 %	14 %

I denna studie är <1 % av gruppernas yttranden klassificerade som offM, offAOS eller offN eller offIOS eller onC/offC. Dessa yttranden redovisas därför inte i statistiken i tabell 6 utan endast i respektive transkript.

⁹¹ Den elev i gruppen som håller i pennan

⁹² Den elev i gruppen som håller i pennan

⁹³ Den elev i gruppen som håller i pennan

⁹⁴ Den elev i gruppen som håller i pennan

Appendix G Transkriptionsmodell

Fet stil	Används för att understryka ett visst fenomen till analysen
Understrykning	Markerar att ordet betonas
VERSALER	Används när ett ord talas med högre volym eller med emfas
(.)	Knappt hörbar paus
(4s)	Paus angiven i sekunder (här 4 sekunder)
ka -	Ett tankstreck visar ett snabbt avbrott av talet
Under	Understrykning visar på emfas hos talaren
VERSAL	Versaler används för att markera tal som är högre än omgivande
°lägre°	Gradtecken används för att markera tal med lägre ljudnivå än omgivande tal
(om)	Markerar att transkriberaren är osäker på vilket ord som sägs
(xxx)	Ohörbart tal
., ? !	Skiljetecken används mer för att markera skillnader i talet än för grammatiska ändamål. En punkt markerar ett stopp, ett komma en fortsättning i intonation, ett frågetecken ett stigande tonfall, ett utropstecken indikerar ett emfatiskt eller påverkande röstläge
((hostar))	Dubbla parenteser används för att markera transkriberarens kommentarer ((hostar)) eller beskrivningar av händelser ((eleven för pennan över grafen))
[tittar ner i blocket]	Hakparentesen används för att beskriva vad som sker och icke verbal kommunikation
besviket	Markerar besvikelse i rösten
det måste bli /	Snedstreck markerar avbrott i ett yttrande

Delvis efter Linell (2009)