Licentiatavhandling

Undervisning om växande geometriska mönster

**En variationsteoretisk studie om hur lärare
behandlar ett matematiskt innehåll på
mellanstadiet**

Klara Kerekes

fontD

Linköpings universitet

Institutionen för beteendevetenskap och lärande

Linköpings universitet

LiU-PEK-R-262

December 2014

LINKÖPINGS UNIVERSITET

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Institutionen för beteendevetenskap och lärande
LiU-PEK-R-262

ISBN 978-91-7519-135-5
Studies in Science and Technology Education No 80
ISSN 1652-5051
FontD

Linköpings universitet
Institutionen för beteendevetenskap och lärande
SE-581 83 Linköping, Sweden
Tel 013-28 10 00

Tryck: Linköpings universitet, LiU-Tryck 2015

Abstract

Syftet med studien är att analysera och beskriva hur lärare behandlar innehållet när de undervisar om växande geometriska mönster. Lärares handlingar och undervisning, där vissa aspekter av undervisningsinnehållet fokuseras och andra lämnas ofokuserade, ses som potential för förändringar i elevers erfارande av det undervisade innehållet. I studien analyseras vilka aspekter av innehållet växande geometriska mönster som är fokuserade i undervisningen. Centrala frågor i studien är vilka dimensioner av variation öppnar lärare upp och vad ges möjligt för eleverna att lära.

Studien omfattar fyra lärare, deras undervisning om växande geometriska mönster och elever i klasser som är undervisade av dessa lärare. Samtliga lärare undervisar i årskurserna 4-6. Fyra videofilmade matematiklektioner, en för varje lärare, där växande geometriska mönster behandlas utgör studiens data. Materialet har analyserats i fyra steg. Vid analysen användes variationsteori och variationsteoretiska begrepp.

Resultatet visar att samtliga lärare behandlar det matematiska innehållet på ett sådant sätt att de åstadkommer, medvetet eller omedvetet, någon form av innehållsvariation. Beroende på vilka aspekter av växande geometriska mönster som varieras och hålls konstanta öppnas olika dimensioner av variation i undervisningen och eleverna erbjuds att erfara ett ämnesinnehåll med skilda innebörder. De öppnade dimensionerna av variation resulterar i konstitution av olika lärandeobjekt i de fyra lärarnas undervisning, trots att lärarna undervisar om samma matematiska innehåll. Tre av dessa lärandeobjekt kan relateras till innehållet växande mönster. Dessa lärandeobjekt benämns i studien som 1. Beskriva ett matematiskt mönster, 2. Fortsätta på redan påbörjat matematiskt mönster och konstruera egna matematiska mönster samt 3. Uttrycka generellt hur ett mönster växer med matematiskt symbolspråk. Två lärandeobjekt hör till annat matematiskt innehåll. Det identifierades fler skillnader än likheter mellan hur fyra lärare behandlar innehållet växande geometriska mönster. En av likheterna är att samma variationsmönster iscensätts i olika lärares undervisning. En annan likhet är att flera lärare öppnar samma dimension av variation. Däremot skiljer sig sättet att öppna en och samma dimension av variation åt i de olika lärares undervisning när olika aspekter i en och samma dimension varieras. Det kan bidra till att eleverna förstår samma ämnesinnehåll på olika sätt. Vissa lärare öppnar fler dimensioner av variation än andra vilket kan bidra till en större möjlighet till elevernas lärande. I vissa klasser är det lärare som riktar elevernas uppmärksamhet mot en aspekt genom att variera värden inom aspekten. I andra klasser är det elever som öppnar en dimension av variation.

Nyckelord: matematikundervisning, dimension av variation, algebra, mönster, växande geometriska mönster, möjligt lärande, variationsteori

Innehåll

Förord	1
1. Inledning	3
Bakgrund	3
Problemområde	4
Undervisning och elevers lärande	4
Algebra	5
Syfte och forskningsfrågor	8
2. Forskning om algebra	10
Algebra	10
Växande geometriskt mönster	12
Studier som beskriver forskning om undervisning och lärande i algebra	15
Undervisning om den rumsliga och numeriska strukturen i mönstret	15
Användning av figurnummer i undervisningen	18
Undervisning som stödjer eleverna att se relationen mellan två variabler	19
Undervisning om mönsters struktur	21
Hinder för algebralärandet	23
Undervisning om samma innehåll	24
3. Teoretiskt ramverk	27
Variationsteoretiskt perspektiv på lärande	28
Urskiljning, simultanitet och variation	29
Lärandeobjekt	31
Dimension av variation	33
Variationsmönster	37
Variationsteoretiska klassrumsstudier	41
4. Metod	44
Datainsamlingsmetoder	44
Genomförande	46
Urval	46
Datainsamling	48
Analys	50
Studiens kvalitet och generaliserbarhet	53

Forskningsetiska överväganden	55
5. Resultat.....	58
Lärare A	60
Klassen och lektionen	60
Lärare A:s undervisning	61
Dimensioner av variation som öppnas upp i lärare A:s undervisning	71
Lärare B.....	73
Klassen och lektionen	73
Lärare B:s undervisning.....	73
Dimensioner av variation som öppnas upp i lärare B:s undervisning	98
Lärare C	102
Klassen och lektionen	102
Lärare C:s undervisning.....	103
Dimensioner av variation som öppnas upp i lärare C:s undervisning.....	114
Lärare D	116
Klassen och lektionen	116
Lärare D:s undervisning	116
Dimensioner av variation som öppnas upp i lärare D:s undervisning	139
Likheter och skillnader i innehållets behandling	142
Att beskriva ett matematiskt mönster	143
Att fortsätta på redan påbörjat matematiskt mönster och konstruera egna matematiska mönster	147
Att generellt uttrycka hur ett mönster växer med matematiskt symbolspråk	150
Sammanfattning	154
6. Diskussion.....	157
Slutsats	158
Undervisning om växande mönster.....	159
Metoddiskussion	164
Didaktiska implikationer	166
Idéer om framtida forskning	169
Litteraturförteckning	170

Bilagor.....	179
---------------------	------------

Förord

Nu har jag rott mitt yrkeslivs hittills största projekt i land. Resan var mestadels rolig, utvecklande och motiverande, men ibland svettig och mödosam. Att klara av den ensam skulle vara helt omöjligt. Jag skulle vilja tacka ett flertal personer som på olika sätt har bidragit till att slutföra forskarutbildningen och skriva denna licentiatavhandling.

Jag vill uttrycka min stora tacksamhet för mina handledare Joakim Samuelsson, Angelika Kullberg och Marcus Samuelsson. Ni har uppmuntrat, stöttat och utmanat mig i precis lagom dos. Ni har hjälpt mig när jag bad om hjälp, men också när jag inte förstod att jag behövde hjälp. Jag uppskattar ert engagemang och er lyhördhet väldigt mycket. Om jag någon gång bestämmer mig för att fortsätta min resa inom forskarvärlden kommer jag att fråga er om handledning igen.

Ett varmt tack vill jag rikta till min vän, lärare och inspiratör Anki Wennergren. Du är alltid positiv, stödjande och motiverande. Det är tack vare dig jag påbörjade denna forskarutbildning. Varje gång jag bad dig att läsa min text kom du med konstruktiva synpunkter som jag har haft stor nytta av.

Jag vill även rikta ett tack till Forskningsplattformen Matematikdidaktik på HLK i Jönköping med Ulla Runesson i spetsen för alla givande diskussioner kring min studie. Jag riktar också tack till Johan Häggström som har varit diskutant på mitt 90%-seminarium och givit värdefulla synpunkter.

Jag vill också tacka Jönköpings kommun för att jag fick möjlighet att delta i denna forskarutbildning. Ett särskilt tack till min rektor Lotta Johansson, som med stort intresse följt mig under detta forskningsprojekt och hela tiden tagit vara på mina nyvunna kunskaper. Ett stort tack även till mina kollegor på Ribbaskolan i Gränna som alltid har välkomnat mig och på olika sätt stöttat och uppmuntrat mig under resans gång. Det har betytt mycket för mig!

Nationella forskarskolan i naturvetenskapernas, teknikens och matematikens didaktik – FontD – och Linköpings universitet har varit huvudansvariga för min forskarutbildning. Tack till Lena Tibell, Konrad Schönbörn, Anna Ericson och alla forskarstuderande

kollegor som på olika sätt bidragit till min utveckling och gjort alla våra FontD-träffar oförglömliga.

Ett stort tack också till Lotta Danielsson, som lusläst och gjort en språkgranskning av hela arbetet samt till Anna Lócsei, som hjälpt mig med arbetets layout.

Utan lärare och elever, som öppnade sina klassrum och lät mig få ta del av deras matematiklektioner, hade denna studie inte blivit verklighet. Jag känner en stor tacksamhet över er generositet och vill uttrycka min stora uppskattning till er.

Avslutningsvis vill jag tacka mina vänner och naturligtvis min underbara familj - Pal, Emil och Emma. Tack för ert tålamod och er förståelse för att jag tillbringade så mycket av min tid under de här 2,5 åren med min dator istället för med er. Utan er skulle denna licentiatavhandling inte betyda någonting alls. Jag älskar er!

Huskvarna i januari 2015

Klara Kerekes

1. Inledning

Detta är en licentiatavhandling om matematikundervisning på mellanstadiet. Den behandlar lärares olika sätt att undervisa inom området algebra när innehållet är växande geometriska mönster. I fokus står lärares undervisning och vad den möjliggör för eleverna att lära.

För att ge en bakgrund till studiens intresseområde inleder jag kapitlet med att beskriva min väg från lärare till forskare. Därefter följer ett avsnitt där problemområdet introduceras i förhållande till forskning om undervisning och om elevers lärande av algebra. Till sist presenteras studiens syfte och forskningsfrågor.

Bakgrund

Mitt intresse för relationen mellan undervisning och lärande i allmänhet och inom ämnet matematik i synnerhet har varit inspirationskälla för denna forskning. Under mitt deltagande i en kompetensutveckling som innebar att innehåll, arbetssätt och metoder i undervisningen kontinuerligt omprövades och utvecklades kom jag i kontakt med forskning som visar att läraren och kvaliteten på den undervisning som lärare bedriver i klassrummen är de viktigaste faktorerna för elevernas lärande som skolan kan bidra med (Hattie, 2009; Runesson, 2011; SOU, 2004; Thornberg, 2011). Detta har bidragit till att mitt intresse inom området har förstärkts.

Som lärare i matematik i grundskolans tidigare åldrar har jag alltid velat utveckla min förmåga att undersöka matematikdidaktiska frågor i min egen praktik, att utveckla min undervisning och hur jag kan lära mer om hur elever tänker och lär. Trots min vetgirighet har jag inte reflekterat över om mina elever lär sig det jag undervisar om, utan tagit det för givet. Det viktiga i undervisningen för mig var att variera undervisningsmetoderna, motivera eleverna genom att knyta innehållet i undervisningen till deras vardag och erbjuda dem inspirerande uppgifter att arbeta med. När jag genomförde en learning study på Ribbaskolan i Jönköpings kommun tillsammans med tre andra lärarkollegor och en forskare från Högskolan för lärande och kommunikation i

Jönköping fick jag insikter i variationsteorins grundtankar. Jag började förstå vikten av att i undervisningen utgå ifrån frågan *hur* innehållet presenteras, varieras och behandlas under lektionen. Mitt förhållningssätt har skiftat fokus från elevens förutsättningar och sättet att organisera undervisningen till lärarens sätt att undervisa kring ett lärandeobjekt. Under learning study-processen lärde jag mig att det viktigaste inte är vilka metoder och arbetssätt jag använder i undervisningen eller i vilka grupper jag delar in eleverna, utan hur jag som lärare möjliggör lärande för eleverna. Den insikten och de nyvunna kunskaperna väckte min nyfikenhet att gå vidare och mer systematiskt studera hur andra lärare behandlar ett innehåll i undervisningen.

Utvecklingen av min didaktiska kompetens under learning study-processen kom att utgöra inledningen till en vidareutbildning och professionell utveckling som lett fram till att jag sökte till FontD forskarskola och fick möjlighet att skriva denna licentiatavhandling. Mitt forskningsfokus är vad eleverna erbjuds att lära sig under en matematiklektion. Jag studerar hur olika lärare behandlar innehållet i undervisningen när de undervisar om växande geometriska mönster i årskurserna 4-6. Min förhoppning är att denna licentiatavhandling ger ett matematikdidaktiskt kunskapsbidrag om lärares undervisning kring ett specifikt ämnesinnehåll. Förhoppningsvis skall studiens forskningsresultat ge nya tankar och perspektiv på matematikundervisningen för lärare och lärarstudenter.

Problemområde

Texten som följer bidrar med olika argument om behovet att studera matematikundervisning inom området algebra.

Undervisning och elevers lärande

De återkommande internationella skolundersökningarna *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) och *Programme for International Student Assessment* (PISA) har i snart 20 år jämfört utfallet av ett stort antal utbildningssystem i länder från olika delar av världen. I utbildningsdebatten väcker jämförelser mellan elevernas resultat från de deltagande länderna stort intresse. I Sverige har särskilt resultatet i matematik och matematikutbildningen fått mycket uppmärksamhet i media. Detta beror på att svenska elevers resultat i matematik har försämrats från år till år i

de båda undersökningarna PISA och TIMSS (Skolverket, 2007, 2008, 2013).

Det kan finnas många faktorer som kan ha betydelse för elevernas lärande i matematik. En av faktorerna som nämns i Skolverkets rapport om gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik (2009) är undervisningen. Det som händer i klassrummen menar forskare har en direkt påverkan på elevers lärande och skolprestationer (Creemers, 1994; Creemers & Kyriakides, 2008; Muijs & Reynolds, 2000; Reynolds, 2007). Nuthall (2005) har med sin forskning bidragit med kunskaper om hur lärare skall undervisa så att eleverna lär sig så bra som möjligt. Att lärarens undervisning påverkar elevernas lärande inom matematiken har visats av bl.a. Emanuelssons (2001) och Kullberg (2010). Hattie (2009) skriver fram läraren som den viktigaste faktorn som bidrar till förbättring av elevernas resultat. En skicklig lärare har förmågan att i undervisningen systematiskt fokusera på vad som är centralt för eleverna att lära sig. I Matematikdelegationens betänkande (SOU, 2004) pekas lärarens roll ut som den avgörande faktorn för de matematiska kunskaper som utvecklas i skola och samhälle. Resultatet av en studie gjord av Olteanu, Grevholm och Ottosson (2003) visar att det finns stora skillnader mellan vad lärares avsikt är att lära sina elever och vad som eleverna lär. Häggström (2008) hävdar att det är lärare som formar möjligheterna för elevernas lärande när de väljer sättet att behandla ett matematiskt innehåll på. Det som är möjligt för elever att lära sig på en matematiklektion hänger ihop med hur de erfar matematikinnehållet. Elevernas erfarenhet av ett matematikinnehåll beror helt och hållet på hur detta innehåll behandlas av läraren i undervisningen.

Inom forskningsområden som understryker lärares roll i elevernas lärandeprocess har det gjorts framsteg de senaste åren (Thornberg, 2011). Trots det behövs det mer forskning för att synliggöra och förstå vad lärare egentligen gör som främjar elevers resultat (Kyriakides, Christoforou & Charalambous, 2013).

Algebra

Uppgifterna i TIMSS - studiernas matematikdel är uppdelade i fem huvudområden - *aritmetik, algebra, geometri, mätningar och statistik*. De svenska elevernas resultat har genomgående varit

sämre inom geometri och algebra än inom de andra områdena (Skolverket, 2005). Analyser av resultatet i TIMSS 2007 (Skolverket, 2008) visar också att det är algebra som drar ner de svenska resultaten när medelprestationerna i de olika huvudområdena jämförs med varandra. Det största problemet, enligt rapporten, är elevers förståelse av variabelbegreppet (Skolverket, 2008). I PISA 2012 (Skolverket, 2013) visar sig svenska 15-åringars resultat ligga under OECD-genomsnittet i de fyra delområdena – *Förändring och samband*, *Rum och form*, *Kvantitet* samt *Osäkerhet* – som har testats inom ämnet matematik. Resultatet är allra sämst inom delområdet *Förändring och samband* som testar elevernas algebrakunskaper.

Forskning har klarlagt att elever i alla åldrar har svårigheter när de arbetar med algebra (Küchemann, 1981; Warren, 2000; Radford, 2012). Eleverna uttrycker oro inför arbete med algebra och tycker att det är svårt att översätta ett matematiskt mönster till en funktion (Redden, 1996; Stacey & MacGregor, 1995; Warren, 2000, 2005). Enligt resultatet av Küchemanns studie (1981) är det svårare för elever när de möter uppgifter som kräver att en bokstav skall tolkas som ett generellt tal eller variabel än när de skall lösa uppgifter där bokstäverna kan tänkas ha särskilda okända värden. Studier om elevernas algebralärande tyder på att svårigheterna att lära sig algebra beror på hur algebrauppgifter är designade och på begränsningar av de undervisningsmetoder som används (Lee, 1996; Moss och Beatty, 2006; Måsøval, 2011; Noss, Healy & Hoyles, 1997; Stacey & MacGregor, 2001). Resultaten av undersökningarna som genomfördes av Cai och Knuth (2011) samt Kaput, Carraher och Blanton (2008) visade att elevernas svårigheter är mer relaterade till de omständigheter som råder i undervisningen än till kognitiva begränsningar.

Elevernas möte med algebra skall löpa som en röd tråd under hela deras skolgång (Cai & Moyer, 2008; Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006; Kieran, 2004; Stacey, Chick & Kendal, 2004). Matematikdidaktisk forskning visar på vikten av att elever tidigt möter algebra och utvecklar kunskaper inom detta område (Skolverket, 2011b). Ett flertal studier som redovisas av bl.a. Berg (2009), Boero (2001), Carraher & Schliemann (2007), Persson (2010) och Warren (2002) visar att yngre barn har en betydligt större förmåga till abstrakt tänkande än vad vi ofta tror och att vi borde introducera algebra mycket tidigare än vad vi gör idag.

I Lgr 11 (Skolverket, 2011a) har området algebra förstärkts och utgör ett eget kunskapsområde i det centrala innehållet. Undervisningen i matematik skall syfta till att eleverna utvecklar grundläggande algebraisk kunskap från årskurs 1 till årskurs 9. Grunden skall läggas genom att eleverna i årskurserna 1-3 arbetar med likheter och likhetstecknets betydelse. I årskurserna 4-6 arbetar eleverna med innehållet obekanta tal och deras egenskaper samt situationer där det finns behov av att beteckna ett obekant tal med en symbol. I årskurserna 7-9 införs variabelbegreppet och undervisningen skall behandla dess innebörd och användning i algebraiska uttryck, formler och ekvationer (Skolverket, 2011a).

Det finns idag en stor mängd internationell forskning inom algebra (Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2007). Trots det efterfrågas mer forskning inom området av bl.a. Carraher och Schliemann (2007), Kieran (2007) samt Radford (2000). Ytterligare studier behövs för att få mer kunskap om ett flertal frågor varav en handlar om hur undervisningen kan hjälpa elever att uttrycka växande mönster med matematiskt symbolspråk.

"Areas where the field could benefit from additional study include ... the question as to how students can be assisted in (a) becoming aware of structure in patterns and in using symbols to express these patterns, (b) seeing relations between graphical representations and the corresponding letter-symbolic forms, and (c) making connections between their verbal problem-solving activity and the generating of equations." (Kieran, 2007, sid. 729)

I Sverige har förhållandevis få studier gjorts kring algebraundervisning och algebraförståelse hos grundskoleelever, särskilt i grundskolans tidigare år (Persson, 2010). Enligt Persson (2010) behövs det mer bredare och djupare forskning om tidig algebra, och enligt undersökningar gjorda i Sverige är sådana önskvärda. I synnerhet är det matematikdidaktisk forskning i årskurserna 4-6 som efterfrågas (SOU, 2008). Trots det ökade forskningsintresset inom tidig algebra (Kieran, 2006) vet vi inte så mycket om vilken roll undervisningen om mönster har i utvecklingen av algebraiskt tänkande (Papic & Mulligan, 2007). Papic och Mulligan (2007) samt Waters (2004) efterfrågar mer forskning som undersöker ifall brister i lärares förståelse och sättet de undervisar på om mönster kan begränsa elevernas utveckling

inom området. I en forskningsöversikt över studier gjorda på 1990- och 2000-talet konstaterar Kieran (2007) att vi idag vet betydligt mer om hur lärare undervisar om algebra än vad fallet var för 20 år sedan. De fält som har påbörjats beforskas och inom vilka återstår att genomföra ett stort antal studier är exempelvis hur undervisning i algebra bedrivs och hur lärare utvecklar förmågan att på ett framgångsrikt sätt undervisa i algebra. I synnerhet är det brist på studier som genomförts med hjälp av observation och analys av hur algebraundervisningen går till (Häggström, 2008; Kieran, 2007) eftersom det saknas lämpliga modeller för observation och analys av undervisningspraktiken (Kieran, 2007).

Goda kunskaper i algebra har stor betydelse för hur elever lyckas med matematikstudierna både i gymnasiet och på högskolan (Cai & Moyer, 2008; Carraher, m.fl., 2006; Kieran, 2004; Stacey, m.fl., 2004). Därför är det av stort intresse att undersöka och förstå hur lärare med sin undervisning i grundskolan kan bidra till en god utveckling av elevernas algebrakunskaper.

I denna studie undersöks på vilka sätt fyra lärare i årskurserna 4-6 skapar förutsättningar för elever att lära sig konstruera och beskriva växande geometriska mönster samt utveckla förmågan att kunna uttrycka sig generellt med matematiska uttryckssätt. Min intention är att förstå och peka på faktorer som kan påverka lärande och undervisning inom området algebra i positiv riktning. Studien och dess resultat skall förhoppningsvis bidra till att synliggöra aspekter som tidigare togs för givet när lärare undervisade om växande geometriska mönster.

Syfte och forskningsfrågor

I studien undersöks matematikundervisning inom området algebra i årskurserna 4-6. Studiens syfte är att utifrån variations-teorin analysera och beskriva hur fyra lärare behandlar innehållet när de undervisar om växande geometriska mönster. När lärare undervisar om ett innehåll fokuserar hon/han och lyfter fram vissa aspekter av undervisningsinnehållet och lämnar andra ofokuserade. Genom att analysera vilka aspekter av innehållet som fokuseras i undervisningen besvaras följande frågeställningar:

- Vilka dimensioner av variation öppnar lärare upp i undervisningen om växande geometriska mönster?
- Vad ges möjligt för eleverna att lära?
- Vilka likheter och skillnader i innehållets behandling kan identifieras i lärarnas undervisning?

2. Forskning om algebra

Det matematiska innehållet som behandlas på de analyserade lektionerna i studien är växande geometriska mönster. Detta innehåll faller under matematikområdet algebra. I den första delen av kapitlet presenteras olika forskares definitioner av algebra. Även definition på matematiskt mönster och växande geometriska mönster ges samt exempel på växande geometriska mönster och dess beståndsdelar. Den andra delen av kapitlet behandlar tidigare forskning om algebra.

Algebra

Kiselman och Mouwitz (2008, sid. 11) definierar algebra som en "gren av matematiken där man studerar grupper, ringar, kroppar och liknande strukturer". Andra menar att algebra är ett matematiskt språk (Kaput & Blanton, 2001; Persson, 2010; Rojano 1996). Som sådan har algebra ett brett tillämpningsområde. Den kan användas för att utveckla modeller och för att kontrollera fenomen. Algebra hjälper oss att hantera siffror och funktioner samt möjliggör att se strukturer i komplexa sammanhang och att generalisera. Även Bednarz, Kieran och Lee (1996) ser på algebra som ett språk och liknar den vid en egen kultur inom matematiken. De beskriver den algebraiska kulturen som ett sätt att tänka, ett verktyg, en aktivitet och som en generaliserad aritmetik.

Många förknippar algebra med bokstavsräkning (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 1997). Men människorna har arbetat med algebra långt innan de uppfann räkning med bokstäver. Själva begreppet algebra (al-jabr) härstammar från den första arabiska algebrabokens titel "*al-kiab almukhtasar fi hisab al-jabr w'al-muqabala*" ("Den sammanfattande boken om aritmetisk komplettering och reducering") som är skriven av matematikern al-Khwarizmi på 800-talet. al-Khwarizmi visade i sin bok hur man löser problem som kan uttryckas med linjära och andragradsekvationer genom att beskriva dessa med ord och genom att ge en geometrisk motivering, dock utan att använda algebraiska symboler. I litteraturen brukar den benämnas som *geometrisk* eller *retorisk algebra*. Att använda bokstäver för att beteckna variabler och bekanta är en nyare version

av algebra och brukar kallas den *symboliska algebran*. Den började utvecklas på 1600-talet först av den franske matematikern Viète och sedan av Descartes. Slutligen, under 1800- och 1900-talet, utvecklades den *abstrakta algebran* som behandlar de metaregler som styr alla algebraiska system (Sfard & Linchevsky, 1994).

Algebra som har utvecklats i skolan skiljer sig från den algebran som är en gren av den vetenskapliga disciplinen matematik. Skolalgebra dominerades under 1900-talet av en regel- och processorientering (Kieran, 1992). Samtidigt föreslog forskare ett bredare förhållningssätt som inkluderar generalisering, modellering, problemlösning och ett funktionellt perspektiv (Bednarz, Kieran & Lee, 1996). Idag är algebra tänkt som en gren av matematiken som behandlar generella numeriska relationer och matematiska strukturer (Kilhamn, 2013). Att lära sig algebra kan alltså ses som både ett sätt att lära sig att se och resonera vad gäller relationer och strukturer, men även att lära sig använda det formella symbolspråket för att uttrycka dessa relationer och strukturer.

Kravet att se på algebra djupare och bredare än något som är en syntaktiskt styrd hantering av symboler är tydligt hos matematikforskare (Kaput & Blanton, 2001). Kaput och Blanton (2001) hävdar att algebraiskt tänkande är komplext sammansatt och kan organiseras kring fem sammanhängande aspekter av skolalgebra:

1. *Algebra as Generalising and Formalising Patterns and Constraints.* (Algebra är en generalisering och formalisering av mönster och samband).¹

I den första aspekten markeras algebrans generaliserande element som innebär att finna återkommande mönster och samband som går att uttrycka allmänt. Två underkategorier kan bli identifierade inom aspekten. Den ena omfattar generaliserat aritmetiskt resonerande där fokus ligger på talsystemets egenskaper som exempelvis den kommutativa lagen. I den andra underkategorin hittar vi generaliserat kvantitativt resonerande som handlar om egenskaper och samband mellan särskilda tal, exempelvis att summan av två udda tal är jämn.

¹ Översättningen av Kaput och Blantons (2001) aspekter av skolalgebra inom parantes enligt Skott, Hansen, Jess och Schou, (2010), sid. 602.

2. *Algebra as Syntactically Guided Manipulation of Formalisms.* (Algebra är en syntaktiskt styrd hantering av symboler inom en ogenomskådlig formalism).

Denna aspekt kan ses som den klassiska bokstavsräkningen i form av förenklandet av algebraiska uttryck genom att samla lika termer. Man räknar med hjälp av formler utan att nödvändigtvis ha förståelse för dem.

3. *Algebra as the Study of Structures and Systems Abstracted from Computations and Relations.* (Algebra är studiet av strukturer som är abstraherade från beräkningar och förhållanden).

Denna aspekt är uttryck för resonemang och generalisering inom en högre och mer abstrakt algebra.

4. *Algebra as the Study of Functions, Relations and Joint Variation.* (Algebra är studiet av funktioner, relationer och storheters gemensamma variation).

Här påvisas att funktionslära så som geometriska och talmönster också är algebra. Frågor, som hur mönsterutvecklingen i ett växande geometriskt mönster kan förklaras med sambandet mellan den aktuella och den föregående figuren, hör till denna aspekt.

5. *Algebra as a Cluster of Modelling and Phenomena-Controlling Languages.* (Algebra är ett språk för att utveckla modeller och för att kontrollera fenomen).

Algebra ses som ett brett tillämpningsorienterat språk för att utveckla modeller och för att kontrollera fenomen.

Det matematiska innehållet som behandlas under de analyserade lektionerna i studien, alltså växande geometriska mönster, kan positioneras i Kaput och Blantons (2001) fjärde aspekt.

Växande geometriskt mönster

Mulligan, English, Mitchelmore och Robertson (2010) skriver att så gott som all matematik är baserad på mönster och strukturer. Steen (1990) betraktar matematiken som vetenskapen av mönster. Zazkis och Liljedahl (2002) ser mönster som matematikens hjärta och själ. Mönster är grunden för det abstrakta matematiska tänkandet hävdar Waren (2005). Mönster och generaliseringar gör det möjligt att upptäcka relationer och ger matematiken dess kraft.

"Abstracting patterns is the basis of structural knowledge, the goal of mathematics learning." (Waren, 2005, sid. 759)

Mönster anses vara ett av de centrala områdena inom matematiken och grunden för de andra områden inom ämnet av ovan nämnda forskare.

Ett matematiskt mönster kan beskrivas som en förutsägbar regelbundenhet som vanligtvis omfattar numeriska, rumsliga eller logiska relationer (Mulligan m.fl., 2010). Karakteristiskt för ett matematiskt mönster är att det har en struktur som är det sätt som mönstrets olika delar är organiserade på (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Strukturen kan vara konstruerad genom att en del av mönstret upprepas. Strukturen i ett växande geometriskt mönster kan visas genom mönsterfigurernas varierade egenskaper och den kan uttryckas med en formel. Forskningen skiljer mellan olika typer av matematiskt mönster – talmönster, geometriska mönster, mönster inom data och kalkylering, linjära och kvadratiske mönster, upprepande mönster, växande mönster, m.m. (Mulligan & Mitchelmore, 2009; Zazkis & Liljedahl, 2002).

Ett *växande mönster* i matematik är ett mönster som systematiskt ökar eller minskar (Papic & Mulligan, 2007). Det utvecklas i enlighet med en bestämd procedur (Måsøval, 2011). Om mönstret illustreras med stöd av bilder där mönstret växer genom att exempelvis antal rutor eller trianglar i en figur ändras succesivt efter en additiv struktur kallas mönstret för *visuellt växande mönster* eller *växande geometriskt mönster* (Warren & Cooper, 2008). I engelskspråkig litteratur används benämningarna "*shape pattern*" (Måsøval, 2011), "*visual growth pattern*" (Warren & Cooper, 2008), "*growing pattern*" (Rivera & Becker, 2005) "*geometric pattern*" (Carragher & Schliemann, 2007; Moss m.fl., 2006), "*sequence*" (Radford, 2012), "*pattern of triangular numbers*" och "*pattern of squared numbers*" (Papic & Mulligan, 2007).

Att växande mönster gestaltas som ett geometriskt mönster kan vara ett stöd för att kunna göra generaliseringar (Ahlström m.fl., 1996). Bilders strukturella egenskaper i mönstret kan användas för att förstå matematiska samband och begrepp (Bergsten m.fl., 1997). Exempel på växande mönster som konstrueras genom att använda geometriska figurer är kvadrattal (Figur 2.1a), triangelantal (Figur 2.1b) och rektangelantal.

Figur 2.1a. Exempel på växande geometriskt mönster.

Figur 2.1b. Exempel på växande geometriskt mönster.

Det växande mönstret konstrueras eller sätts samman av *utökningsenheten* (*sequence, component* eller *unit of repeat*, på engelska) som förändras varje gång den upprepas. Förändringen består i att något läggs till eller tas bort från enheten. Den förändrade utökningsenheten kallas *figur*. Varje figur i ett växande mönster har ett numeriskt värde som stiger. Värdet uppkommer från figurens ordinala nummer i det växande mönstret. Det börjar med ett och fortsätter i oändlighet. De engelska benämningarna för figur är "*element*", "*term*" eller "*shape*".

En utökningsenhet kan t.ex. bestå av trianglar, kvadrater eller tändstickor. Dessa utgör utökningsenhetens minsta beståndsdel och benämns i avhandlingen som *byggelement* (Heiberg, Alseth & Nordberg, 2011). Måsøval (2011) använder begreppet "*building blocks*" i sin avhandling.

Figur 2.2. Beståndsdelar av ett växande geometriskt mönster (efter Måsøval, 2011).

I exemplet i Figur 2.2 är byggelementet en triangel eftersom mönstret är konstruerat med hjälp av färdiga trianglar. Hade vi använt tändstickor för att bygga trianglarna och därmed även mönstret skulle en tändsticka vara byggelementet.

Studier som beskriver forskning om undervisning och lärande i algebra

Presentationen av forskningsstudier inom området algebra kommer att göras med utgångspunkt från licentiatavhandlingens intresseområde och syfte. Det betyder att den forskning som uppmärksammas har anknytning till frågor om undervisning och lärande i ämnet matematik och området algebra.

Åtskilliga studier har undersökt elevernas algebralärande och elevernas algebratänkande i alla åldrar där det matematiska innehållet är växande geometriska mönster (Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2007). Jag har grupperat resultatet från olika studier under ett flertal teman för att integrera olika forskningsstudier som har undersökt samma fenomen med varandra. De valda studier som presenteras nedan samlas kring sex teman som av mig benämns som:

1. Undervisning om den rumsliga och numeriska strukturen i mönstret
2. Användning av figurnummer i undervisningen
3. Undervisning som stödjer eleverna att se relationen mellan två variabler
4. Undervisning om mönsters struktur
5. Hinder för algebralärandet
6. Undervisning om samma innehåll

Undervisning om den rumsliga och numeriska strukturen i mönstret

En av de studier som undersöker utvecklingen av elevernas algebraiska tänkande är Radfords (2012) studie. Förmågan att kunna bygga upp ett växande mönster med nästa figur förutsätter att man förstår regelbundenheten i mönstret som enligt Radford (2012) involverar kopplingen av två olika strukturer: en rumslig och en numerisk. Den rumsliga strukturen hjälper en att se rektanglarnas, cirkelarnas, stickornas m.fl. spatiala positioner, medan

deras antal framträder från den numeriska strukturen. Resultatet i studien visar de allra yngsta eleverna i årskurs 2 använder sig av den numeriska strukturen när de skall bygga på ett redan påbörjat växande mönster som presenteras i Figur 2.3. När eleverna ritar figur nummer 5 och 6 i det växande mönstret ritar de nämligen rätt antal kvadrater som är 11 och 13.

Figur 2.3. Växande mönster som eleverna i Radfords studie arbetar med (Radford, 2012, sid 679).

Den rumsliga strukturen lägger eleverna antingen inte märke till eller så används den inte på ett konsekvent sätt av dem, vilket visas när de ritar figur nummer 5 och 6 med rätt antal kvadrater men med alla kvadrater placerade efter varandra i samma rad. Detta betyder dock inte att dessa elever inte ser figurerna som, i detta fall, består av två horisontella rader, utan att fokus på den numeriska strukturen lämnar den rumsliga strukturen i bakgrunden. Den rumsliga strukturen som eleverna använder sig av är inte relaterad till den numeriska på ett meningsfullt och effektivt sätt, vilket försvårar för eleverna att svara på frågor om en mer avlägsen figur i mönstret, exempelvis figur nummer 12 och 25.

Eleverna i Radfors (2012) studie lyckades lösa uppgifter som handlar om en avlägsen figur i mönstret först när läraren diskuterade med dem hur varje figur i mönstret är uppbyggd och hänvisade till raderna i mönstret på ett tydligt sätt. Läraren använde sig både av ord och av sin kropp för att uppmärksamma elever på att en figur i mönstret består av ett speciellt antal kvadrater på "botten" (nedersta raden) och ett antal kvadrater på "toppen" (översta raden) i varje figur. Läraren upprepade samma beskrivningsprocess på ett rytmiskt sätt för figur nummer två och figur nummer tre. Sedan bjöd hon in eleverna att räkna antalet kvadrater för de resterande figurerna tillsammans med henne. När läraren behandlade innehållet i undervisningen på detta sätt uppmärksammades eleverna på kopplingen mellan den rumsliga strukturen, som motsvarades av raderna i mönstret, och den numeriska strukturen, vilket var antalet kvadrater i varje figur. Det

gjordes möjligt för eleverna att lägga märke till och formulera nya former av matematisk generalisering (Radford, 2012).

Rivera och Becker (2005) har i sin studie undersökt hur eleverna i årskurs 6 resonerar när de gör generaliseringar av växande geometriska mönster. De har funnit att eleverna använder både det numeriska och det figurala sättet att tänka. Det numeriska sättet innebär att elever ser det växande geometriska mönstret som en talföljd och identifierar differensen i talmönstret. De adderar antalet byggelement som varje figur växer med till det totala antalet byggelement i föregående figur för att få antalet byggelement i nästkommande figur. Det figurala tankesättet innebär att elever använder visuella strategier där fokus ligger på att identifiera på vilket sätt ett mönster är uppbyggt.

När eleverna använder det figurala resonemanget har de möjlighet att uppmärksamma visuella ledtrådar som kan organiseras på olika sätt och översättas till det matematiska symbolspråket (Rivera & Becker, 2005). I Figur 2.4 presenteras olika sätt att beskriva ett växande geometriskt mönster vid användning av strategier inom det figurala resonemanget. Frågor som möjliggör utvecklandet av det figurala sättet att tänka är exempelvis: Hur många olika mönster kan du se i detta exempel? Hur skulle du rita nästa figur? Hur skulle du berätta för en kompis att han/hon skall rita vilken figur som helst i detta mönster?

Figur 2.4. Exempel på tre olika strategier inom det figurala resonemanget (Friel & Markworth, 2009, sid. 28).

Det numeriska sättet att resonera kan begränsa elevernas algebratänkande. När eleverna bara ser den konstanta differensen som representerar förändringen av antalet byggelement från en figur till en annan riktas deras uppmärksamhet till den rekursiva relationen mellan antal byggelement. Denna strategi är användbar endast för att lösa uppgifter som kräver en nära generalisering. Det betyder att eleverna kan svara på frågor om antalet byggelement i de figurnumren som ligger nära, d.v.s. figur nummer upp till 10. För uppgifter som kräver en avlägsen generalisering (t.ex. figur nummer 54 eller figur nummer 100) är denna strategi ineffektiv (Markworth, 2012). Frågor som uppmuntrar eleverna att använda sig av det numeriska tankesättet är av typen "Hur många byggelement behövs för att bygga en viss figur?".

Användning av figurnummer i undervisningen

Under en av lektionerna som ingår i Radfords (2012) studie arbetade läraren med figurnumret genom att skriva ner dessa nummer på olika kort och använda korten i undervisningen på olika sätt. Radford hävdar att detta hjälpte eleverna att länka samman figurernas nummer i mönstret med antalet byggelement (rektanglar, cirklar, stickor, m.m.) i figuren. Efter arbetet med figurnummer fick eleverna en helt ny förståelse om både figurens ordinala aspekt och figurens utseende. Figurernas utseende och plats i mönstret uppfattades inte längre som ett godtyckligt antal rektanglar eller cirklar som kunde läggas hur som helst efter varandra, utan något som är avgörande för hur många t.ex. rektanglar används och hur de läggs ihop för att bilda mönstret. Undervisning som fokuserar på figurnummer i ett växande mönster för att peka på en figurs position i mönstret verkar också ha positiv inverkan på elevernas lärande även i Warrens (2005) studie som beskrivs längre fram i texten.

Att arbetet med positionskort understödjer elevernas lärande om växande mönster har observerats av Moss, Beatty, McNab och Eisenband (2006). Forskare och lärare genomförde två interventionsstudier med elever som gick i andra respektive fjärde klass. Syftet med studien var att bedöma elevernas lärande om regler som styr geometriska mönster och talmönster. Forskarna jobbade fram aktiviteter och uppgifter som de ansåg utveckla elevernas förmåga att koppla ihop figurens ordinala position i ett mönster med antalet byggelement i den aktuella figuren. Aktiviteter

och materialet som användes bestod av byggandet av geometriska mönster med användning av positionskort (kort som visade vilket nummer i ordningen figuren hade i mönstret), funktionsmaskiner och tabeller. Både geometriska mönster och talmönster användes under de 20 genomförda lektionerna. Interventionen inleddes med elevernas enskilda arbete med geometriska- och talmönster. Därefter följde lärarledda lektioner som designades med syftet att integrera elevernas numeriska och visuella förståelse. Interventionen avslutades med lektioner där eleverna fick arbeta med geometriska mönster och positionskort samt multiplikativa ($n \cdot 2$) och sammansatta funktioner ($n \cdot 2 + 1$).

Eleverna intervjuades före och efter interventionslektionerna. Intervjun grundades på tio mönsterproblem. Resultatet från intervjun visade att elever som ingick i den experimentella gruppen kunde (a) bygga geometriska mönster som baserades på algebraisk representation, (b) känna igen funktioner genom att analysera geometriska mönster och (c) uttrycka funktioner med matematiska termer. De var även bättre på att tillämpa multiplikation när de arbetade med uppgifterna än elever i kontrollgruppen trots att de senare fick mer undervisning om multiplikation.

Undervisning som stödjer eleverna att se relationen mellan två variabler

I interventionsstudien som Moss m.fl. (2006) genomförde med elever i fjärde klass samarbetade elever från två olika skolor med varandra med stöd av ett elektroniskt nätverk. Uppgifterna som de arbetade med bestod av (a) spelet "Gissa min regel", (b) konstruktion av geometriska mönster ur givna regler och (c) bestämmandet av regeln för ett givet geometriskt mönster. Forskarna framhåller att eleverna efter deltagandet i interventionslektionerna visade prov på att kunna använda det matematiska symbolspråket och kunna ge bevis och argumentera för sina lösningar. De kunde också hitta regler för olika mönster och se relationen mellan olika mönster, men också relationen mellan de olika representationsformerna. Slutsatsen som Moss m.fl. (2006) drog var att de i studien deltagande eleverna utvecklade sin förståelse för relationen mellan två variabler.

I Warren och Coopers (2008) studie beskrivs vilka av lärares agerande och instruktioner som gynnade yngre elever att se,

uppfatta och beskriva förändringar i ett växande geometriskt mönster i termer av förhållande mellan en figur i mönstret och dess position i mönstret. Två lektioner genomfördes i två utvalda klasser. Den första lektionen bestod i huvudsak av att eleverna skulle avbilda och fortsätta enkla geometriska växande mönster. Elevernas uppgift var att beskriva mönstren i termer av relationen mellan en figur och dess position i mönstret. Denna beskrivning skulle, enligt forskarna, stödja eleverna att förutse och konstruera figurer längre fram i mönstret, dvs. att generalisera. De elever som beskriver ett växande mönster på detta vis visar att de erfor växande mönster som en funktion menar Warren och Cooper (2008) (förändringen i mönstret är en funktion av den beskrivna figurens plats i mönstret). I uppgifterna som eleverna arbetade med på den första lektionen var kopplingen mellan en figur i mönstret och dess position tydlig. Exempelvis förändrades mönstrets bredd i varje figur och var samma som figurens nummer medan höjden var konstant. På andra lektionen repeterades några av de mönsteruppgifter som behandlades på den första lektionen, men med den skillnaden att elevernas tänkande och språk utmanades till att förutse och beskriva en godtycklig figur i mönstret.

Effekter av lektionerna mättes i skillnaden på resultatet på ett för- och ett eftertest som gjordes två veckor efter interventionen. Resultatet tydde på en ökning av elevernas förståelse av växande mönster och en förbättring av elevernas förmåga att i generella termer beskriva relationen mellan en figur i mönstret och dess position. Slutsatsen som drogs av Warren och Cooper (2008) var att elever i åttaårsålder är inte bara kapabla att tänka om relationen mellan två variabler utan kan också uttrycka denna relation i abstrakta former. Antagandet att yngre elever inte kan uttrycka sig generellt med abstrakta symboler falsifierar Waren (2005) även med sin tidigare forskning. Hon visade på fyra olika sätt att som fjärdeklassare uttrycka sig generellt på, nämligen genom att (1) använda sig av höga tal, (2) upprepa antalet "n" för att bilda det rätta antalet (ett "n", två "n" läggs samman, tre "n" läggs samman), (3) använda sig av ord som "dubbel n" och "trippel n" eller "två gånger n" och "tre gånger n", samt (4) genom att använda formell beteckning så som $2 \cdot n$ och $3 \cdot n$.

Warren och Cooper (2008) påstår att vissa val som lärare gör i sin undervisning påverkar elevernas funktionella tänkande mer än

andra. De åtgärder/insatser som stödjer eleverna i deras utveckling är (a) användning av konkret material för att skapa mönster, (b) specifika frågor som ställs av läraren och som visar explicit förhållandet mellan figuren i mönstret och dess position samt (c) frågor som hjälper elever att nå generalisering beträffande en godtycklig figur. Warren (2005) styrker att speciella undervisningsstrategier och frågor som lärare ställer under lektionerna kan bidra till att elever börjar söka efter mönster mellan figurnumret och antalet byggelement i figuren. I Warrens (2005) studie gjorde eleverna det genom att söka efter mönster tvärsöver i en tabell istället för att enbart se mönster som talen som var inskrivna under varandra i tabellen bildade.

Att yngre elever har en förmåga att tänka funktionellt har tidigare visats av Blanton och Kaput (2004) i en forskningsrapport där de undersökte 5-9 år gamla elevers utveckling när de uttryckte funktioner. I studien löste elever en uppgift som handlade om att uttrycka ett funktionellt samband mellan ett godtyckligt antal hundar och hundarnas totala antal ögon eller det totala antalet ögon och svansar de hade. Eleverna använde tabeller, diagram, bilder, ord och symboler för att uttrycka matematiska samband. Resultatet visar att en särskild progression äger rum i elevernas tänkande när det gäller sätten de använder för att beskriva ett mönster. Denna progression sker från en användning av vardagligt språk för att uttrycka en additiv relation till en användning av symboliska representationer av multiplikativa relationer. Enligt Blanton och Kaput (2004) spelar lärarens sätt att presentera ett innehåll en stor roll för hur eleverna utvecklar sitt funktionella tänkande. De menar att lärare måste erbjuda eleverna fler uppgifter där två eller fler kvantiteter behandlas samtidigt istället för uppgifter där bara analysen av enstaka variabler sker.

Undervisning om mönsters struktur

Papic och Mulligan (2005; 2007) genomförde en interventionsstudie i vilken de följde utvecklingen av 53 förskolebarns matematiska förmågor att identifiera, fortsätta och beskriva växande mönster och mönster där en enhet upprepas. Undersökningen gjordes på två förskolor. Interventionen gjordes i en förskola. I den andra förskolan pågick den vanliga verksamheten under tiden. Den sex månader långa interventionen bestod av aktiviteter och uppgifter som enligt forskarna gynnade utvecklingen

av mönsterbegrepp. Barnen som deltog i interventionen visade mycket bättre resultat när det gäller att fortsätta och beskriva mönster. De lyckades bättre än barnen som inte deltagit i interventionen att konstruera mönster i olika former som exempelvis i rutnät, i "Hoppa-hage-mönster", i så kallade subitizing-mönster och i numeriska sekvenser. Det framgår av resultatet att interventionen uppmuntrade barnen att se strukturen i hur ett mönster upprepar sig genom att medvetandegöra dem om utökningsenheten som upprepas. De barn som lärde sig identifiera enheten som upprepas i ett mönster kunde använda sig av denna kunskap när de löste andra mer komplexa mönsteruppgifter.

Resultatet av Papics och Mulligans (2005; 2007) studie dementierar påståenden att arbetet med algebra i yngre åldrar är olämpligt. Studien visar snarare att äldre elevers svårigheter inom området algebra, kan spåras till begränsade möjligheter som erbjuds att lära sig algebra och/eller felaktiga undervisningsmetoder, som används i elevernas tidigare ålder. Speciellt betonas vikten av att göra eleverna medvetna om utökningsenheten och om mönstrets struktur.

Warren (2005) påstår att undervisning som bedrivs om mönster är otillräcklig eller olämplig. I sin studie med 45 elever i två fjärdeklasser ifrågasatte hon om brister i elevernas kunskaper om växande mönster verkligen berodde på att dessa mönster var kognitivt svårare för yngre elever. Hon kom fram till att detta inte var fallet. Enligt Warren (2005) kan elevernas svårigheter snarare spåras till att fokus i yngre barns matematikundervisning främst inriktats på mönster som upprepas. Hon visade att undervisningen inte möjliggör för eleverna att få en god förståelse av de mönsterenheter som upprepas, eftersom mönstretstrukturen antingen ignoreras eller missförstås när lärare arbetar med upprepande mönster. Detta begränsar och hindrar elevernas kunskapsutveckling om växande mönster. Därför är det orimligt att förvänta sig av elever att upptäcka andra och mer komplexa mönsterstrukturer såsom i växande mönster. Flera av de svårigheter som elever i Warrens studie uppvisar speglar svårigheter som är funna i tidigare forskning med unga vuxna. Warren (2005) drog slutsatsen att dessa svårigheter inte beror så mycket på elevernas utvecklingsnivå, utan på vad de får möjlighet att erfara under sin skoltid.

Hinder för algebralärandet

Det finns studier som beskriver de processer som anses vara ett hinder för att eleverna skulle förstå och kunna beskriva växande mönster. Warren och Coopers (2008) undersökning med två klasser åttaåringar är en sådan studie. I den gjorde eleverna ett förtest före de två lektionerna som de deltog i och ett eftertest två veckor efter den andra lektionen. Trots att många av eleverna visade på en god förmåga att muntligt uttrycka en generalisering, visade elevernas skriftliga beskrivningar brist på språklig precision. Den språkliga precisionen som efterlystes av forskarna lyste med sin frånvaro på lektionerna också. Eleverna i studien visade bristande förmåga att konstruera växande mönster som saknar en eller flera figurer mitt i en mönstersekvens. Enligt forskarna är detta ett resultat av att eleverna fokuserade endast på en variabel, som oftast är själva variationen i mönstret från en figur till en annan. I dessa situationer såg eleverna att mönstret växte och beskrev växandet som en additiv ökning men missade att se hur mönstret förändrades.

Warren (2005) fann att elever hade en tendens att se de additiva strategier när de sökte efter mönster i en tabell med olika värden. Eleverna fokuserade på mönster som fanns i de värden som var inskrivna i samma kolumn i en tabell (tittade neråt i tabellen) och missade förhållandet mellan värdena i samma rad i tabellen. Ytterligare en svårighet som Warren tillsammans med Cooper (2008) observerade var att eleverna inte kunde särskilja den kardinala aspekten av ett mönster från den ordinala aspekten. Detta yttrade sig i elevernas förvirring när de skulle uttrycka ett mönster i generella termer. I dessa situationer blandade eleverna ihop den ordinala aspekten av en figur med antalet byggelement i figuren.

Måsøval (2011) beskriver vad som utgör ett hinder i lärandeprocessen om algebra men riktar sin uppmärksamhet mot vuxnas lärande. I sin forskning fokuserar hon på faktorer som begränsade lärarstudenternas etablering av och bevis för att uttrycka formler och matematiska förklaringar som representerar det generella i ett växande geometriskt mönster. Med intentionen att hitta faktorer som hindrade studenternas algebraiska generaliseringsprocesser analyserade hon undervisningssituationer i små grupper. Hon undersökte hur didaktiska miljöer begränsade studenternas möjligheter att anamma det bestämda kunskapsmålet. Med miljöer ansågs i studien de delmängder i studenternas

omgivning som var relevanta med avseende på det bestämda kunskapsmålet.

Resultatet visade att studenternas algebraiska generaliseringsprocesser begränsades på tre olika sätt. Den första begränsningen hängde samman med en begränsad feedbackpotential. Den begränsningen visade sig i undervisningssituationer där studenterna förväntades lösa matematikuppgifter på egen hand utan tillgång till lärarhjälp. Den andra begränsningen handlade om hinder som studenterna mötte när de skulle omvandla sina lösningar uttryckta med vardagligt språk, till att uttrycka sig algebraiskt med matematiskt symbolspråk. Den tredje begränsningen var relaterad till hur studenterna argumenterade för och bevisade giltigheten av de angivna formlerna och de matematiska förklaringarna som de föreslog i uppgifter med växande mönster.

Måsøval (2011) identifierade tre faktorer som exemplifierar de ovan nämnda begränsningarna. En av dessa faktorer handlar om uppgifternas design. Om i uppgiften endast en figur av ett växande mönster presenteras och fokuseras har det negativ effekt på studenternas utveckling av algebrakunskaper. En annan faktor som utgör en svaghet i studenternas miljö är deras ovana att tolka, förstå och använda sig av matematiska begrepp. Läraren måste vara medveten om språklig tydlighet i den valda eller konstruerade uppgiften så att den inte framkallar missförstånd hos studenterna. Om studenternas förkunskaper inte tas i anspråk vid uppgiftskonstruktioner är det den tredje faktorn som också kan utgöra ett hinder i deras utveckling av algebraiska generaliseringsprocesser. Detta var särskilt avgörande vid studenternas självständiga arbete. Om uppgiften kunde missförstås på grund av att läraren tog studenternas kunskaper för givet är det olämpligt att den didaktiska situationen delegeras till studenterna hävdar Måsøval (2013). Studenterna kan i dessa situationer misslyckas med uppgiften eftersom sättet de tolkar och löser uppgiften på är beroende av kunskaper som de inte besitter.

Undervisning om samma innehåll

Till skillnad från de hittills presenterade studierna som har elevernas lärande inom algebra och elevernas algebraiska tänkande som i fokus, försöker Kilhamn (2013) och Häggström (2008) ge svar

på frågan om hur olika lärare undervisar om samma algebrainnehåll. Kilhamn (2013) studerade två lektioner där begreppet variabel introducerades i årskurs 6. De undervisade lärarna följde samma kurs- och läroplan och använde samma läromedel. När de två lektionerna jämfördes med varandra fanns både likheter och skillnader i hur undervisningen genomfördes. Likheter gällde uppgiften som arbetades med på lektionen, att båda lärarna utgick ifrån lärobokens rekommendationer och att de använde symboler för att representera åldersrelationer i uppgiften. Båda lärare introducerade en bokstav som representerar ett obekant tal före variabelbegreppet. I båda klasserna beskrevs variabler som något som varierar utan att skillnaden mellan begreppen variabel och obekant tydliggjordes.

Skillnaderna som hittades mellan sätten att behandla undervisningsinnehållet gällde sättet att arbeta med algebra-uppgiften samt innebörden av begreppen algebra och variabel. De aktiviteter som förekom i klasserna karakteriserades av forskaren som transformerande och generaliserande. Analysen visade att lärare 1 hade presenterat algebra som ett *främmande symbolspråk* som hjälpte eleverna att vara mer effektiva i sina uträkningar och som kom att underlätta matematiska lösningar. Lärare 2 undervisade om algebra som ett *problemlösningsverktyg*, som en användbar modell samt som något man använde för att generalisera och uttrycka relationer. I sina exempel tog lärare 2 ett specifikt fall till en generell nivå. Skillnaderna visade sig också i antalet använda variabler. Medan lärare 1 endast använde en variabel i de uttryck som presenterades under lektionen, använde lärare 2 flera variabler där den ena var en funktion av de andra. Lärare 2 introducerade även begreppet formel. Killhamn (2013) hävdar att dessa skillnader kan påverka vilka möjligheter som erbjuds för eleverna att lära under en lektion. Resultatet tyder på att det är lärare som formar lärandemöjligheterna genom att välja sättet som det matematiska innehållet behandlas på.

Häggströms (2008) studie visar att lärare ger elever möjlighet att urskilja och erfara viktiga aspekter av matematikinnehållet genom att på ett systematiskt sätt skapa variation i undervisningen i förhållande till innehållet. I studien jämfördes kinesiska och svenska lärares undervisning på högstadiet inom området algebra om linjära ekvationssystem och om substitutionsmetoden. Det som studerades

var, hur matematikämnet hanterades och gjordes tillgängligt för eleverna i undervisningen. Analysen av data gjordes ur ett variationsteoretiskt perspektiv. Det som bland annat analyserades var vilka exempel som togs upp i undervisningen och på vilket sätt, vilka aspekter av innehållet som fokuserades och på vilket sätt samt vilka uppgifter eleverna arbetade med.

För att göra beskrivningar av aspekter som varierades vid jämförelsen av de olika lärares undervisning använde sig Häggström (2008) av det variationsteoretiska begreppet dimension av variation (DoV) (Marton & Booth, 2000). Resultatet visade tydliga skillnader i hur innehållet behandlades och vad som gjordes möjligt för eleverna att lära. I de kinesiska klassrummen fanns flera exempel på genomtänkta sätt att presentera innehållet på än i de svenska. De kinesiska lärarna gav sina elever möjlighet att urskilja och uppfatta viktiga aspekter av matematikinnehållet genom att de systematiskt skapade kontraster och variation i undervisningen. Det visade sig att en del aspekter oftare hölls konstanta i svenska lärares undervisning än i kinesiska lärares undervisning vilket innebar att de togs inte upp eller diskuterades av svenska lärare.

I studien presenteras drygt tjugo olika aspekter som varierades i undervisningen och som framträdde i analysen av det matematiska innehållet. Några av dessa var antalet och typen av ekvationer, antalet obekanta, typen av tal i uppgifterna, bokstäver som användes i ekvationssystemen, sätten att presentera och lösa uppgifterna på, antalet lösningar och metoder som användes när de bytte ut värdet av en obekant i en ekvation med en annan ekvation (substitutionsmetoden). De av Häggström (2008) framskrivna aspekterna kan enligt honom tillämpas i undervisningen oavsett i vilket land den genomförs, vilken lärare som genomför den, hur undervisningen är organiserad eller hur stor klassen där undervisningen genomförs är. Det som svensk matematikundervisning kan lära av det kinesiska sättet att undervisa menar Häggström (2008) är det systematiska och genomtänkta sättet att variera innehållet.

3. Teoretiskt ramverk

Studiens syfte är att utifrån variationsteorin analysera och beskriva hur fyra lärare behandlar innehållet när de undervisar om växande geometriska mönster. Olika lärares kvalitativt skilda sätt att behandla samma matematiska innehåll, i detta fall växande geometriska mönster, beskrivs. Vad är möjligt för eleverna att lära analyseras. Beskrivningar av lektioner, analyser av vad som möjliggörs för elever att lära och jämförelser mellan hur lärare behandlar samma innehåll baseras på variationsteori (Lo, 2012; Marton & Booth, 2000; Marton & Tsui, 2004).

För att analysera undervisning kan olika teorier användas. Valet av variationsteori kan sammanfattas i följande punkter: (a) teorin är väl empiriskt förankrad och har visat sig användbar i olika analyser av undervisning (Häggström, 2008; Lo, 2012; Runesson 1999), (b) den har en tydlig koppling till lärande och undervisning i en skolkontext (Runesson 2006) och kan sålunda användas som teoretisk utgångspunkt i en studie om undervisning inom ämnet matematik, (c) variationsteorin erbjuder verktyg för att analysera undervisning samt (d) den ger ett ramverk som gör det möjligt att beskriva skillnaderna i hur ett matematiskt innehåll behandlas och vad som görs möjligt för elever att lära.

I variationsteoretiska studier används begreppen erfara, uppfatta, förstå och urskilja frekvent. Begreppet erfara kan definieras med det sätt på vilket medvetandet är strukturerat och organiserat i ett särskilt ögonblick (Marton & Booth, 2000). Erfara är "... en intern relation mellan subjektet och världen, ... intern relation mellan personer och fenomen" (Marton & Booth, 2000, s. 160). Erfara, uppfatta och förstå brukar användas som synonyma termer. Dessa begrepp kommer även i föreliggande studie att användas som synonymer. Begreppet urskilja brukar användas tillsammans med begreppet aspekt i texter om variationsteori. Urskiljning innebär att olika aspekter urskiljs från en helhet (Marton & Booth, 2000). Att erfara ett fenomen innebär att bli kapabel att urskilja särskilda aspekter av fenomenet och att ha förmågan att samtidigt vara medveten om dessa aspekter. I studien har termen urskilja samma innebörd som beskrivs ovan och används för att uttrycka urskiljning av aspekter.

Variationsteoretiskt perspektiv på lärande

Variationsteori är en innehållsfokuserad teori om lärande som har vuxit fram ur mångårig forskning om lärande (Marton & Booth, 2000). Teorin är grundad i den fenomenografiska forskningsansatsen (Marton, 1981). Inom den fenomenografiska forskningen beskrivs variationen i människors kvalitativt olika sätt att erfara fenomen i sin omvärld.

“Traditional phenomenographic research aims to investigate the qualitatively different ways in which people understand a particular phenomenon or an aspect of the world around them. These ‘different ways of understanding’, or conceptions, are typically represented in the form of categories of description, which are further analyzed with regard to their logical relations in forming an outcome space.” (Marton & Pong, 2005, sid. 335)

Variationsteori är inriktad på lärande och på hur det kan möjliggöras för den lärande att förstå ett fenomen på ett visst sätt. Teorin beskriver inte undervisningsmetoder som kan användas i alla situationer utan ger en tankemodell för hur undervisningens innehåll kan synliggöras (Marton, 2014). Variationsteorin fokuserar således på nödvändiga innehållsrelaterade aspekter av lärande och inte på undervisningens allmänna förutsättningar. Enligt teorin är lärandet alltid kopplat till ett innehåll (Runesson, 2006). Undervisning och lärande är alltid undervisning om och lärande av något. Variationsteorin handlar om en speciell form av lärande som förbereder den som lär att på ett mer framgångsrikt sätt hantera nya, okända situationer i framtiden (Marton & Tsui, 2004). Det centrala i teorin är att få den lärande att erfara ett fenomen på ett mer fullständigt sätt. Det skall ges möjligt för den lärande att urskilja fler och nya aspekter av ett fenomen i jämförelse med vad han/hon kunde urskilja tidigare (Runesson, 2006).

I texten som följer kommer ytterligare att belysas det som kännetecknar variationsteorin och är relevant att diskutera utifrån studiens syfte och forskningsfrågor. De variationsteoretiska begrepp som används i analysen av hur matematikinnehållet behandlas i olika lektioner presenteras och beskrivs.

Urskiljning, simultanitet och variation

Skillnader mellan sätt att erfara fenomen, företeelser, situationer m.m., kan förstås som skillnader vad gäller medvetandets struktur och dynamik (Marton & Booth, 1997). Allt finns i vårt medvetande, men inte samtidigt och inte organiserat på samma sätt. Medvetandet definieras av Marton och Tsui (2004) som

“... the totality of a person’s experiences of the world, at each point in time. It is all that is present on every occasion.”
(Marton & Booth, 2004, sid. 19)

Vårt medvetande har en struktur. Medvetandets struktur har en dynamisk karaktär och förändras hela tiden. Det som vid ett visst tillfälle är i fokus i vårt medvetande och utgör en figur mot en bestämd bakgrund kan vid ett annat tillfälle ersättas av ett annat fokus. Vad som är i förgrunden hos en individ beror på flera olika faktorer. Dels beror det på hur fenomenet framträder och dels på med vilka nya och gamla erfarenheter, tankar och känslor vi möter det. Medvetandet är relaterat till tid och rum och alltid har en riktning mot något. När vi förstår något är det alltid något vi förstår. Exempelvis när vi förstår att tal i decimalform är delar av en helhet och när vi förstår olika representationsformer av ett tal i decimalform förstår vi att det finns oändligt många tal mellan två godtyckliga tal (Kullberg, 2010). Det vi erfar har på detta sätt alltid en mening för oss. Denna beskrivning av medvetandet relaterar Marton och Booth (1997) till lärande och till hur vi erfar, förstår eller uppfattar vår omvärld. De menar att begreppet erfarenhet kan definieras med det sätt på vilket medvetandet är strukturerat och organiserat i ett särskilt ögonblick. Lärande för dem är en förändring av sättet att erfara, vilket innebär en förändring i medvetandets struktur. Alltså lärande uppstår först när man uppfattar omvärlden på ett nytt sätt. Lärande förutsätter en erfaren variation där lärande ses som en förändring i den lärandes förmåga att erfara någonting nytt i sin omvärld (Marton & Tsui, 2004). För att man skall kunna urskilja det nya måste variation av ett fenomenas aspekter erfaras, d.v.s. vi måste erfara hur något skiljer sig från något annat. Detta är möjligt om vissa delar eller aspekter är konstanta och andra varierar (Runesson, 2006). I detta sammanhang betonas tre centrala begrepp – urskiljning, simultanitet och variation.

Hur något uppfattas eller förstås beror på sättet att urskilja delar eller aspekter från helheten samt att relatera delarna/aspekterna till varandra och till helheten. Innebörden i erfandet förutsätter att vissa aspekter blir urskilda på ett speciellt sätt. Ett objekt eller fenomen måste urskiljas från kontexten som omger det och delar av objektet eller fenomenet måste urskiljas och relateras till varandra och till helheten (Marton & Booth, 1997). För att kunna uttrycka förändringen i ett växande mönster med en formel behöver eleverna se flera figurer i det aktuella mönstret samtidigt för att urskilja både delarna och helheten. Om figur nummer 2 inte byggs bredvid figur nummer 1 utan byggs på figur 1 är det mycket svårare att erfara delarna i mönstret samtidigt och relatera dem till hela mönstret. Det är också nödvändigt att förändringen analyseras i flera figurer och inte bara i en figur för att urskilja delarna. Detta förutsätter att eleverna kan relatera delarna i ett växande mönster till varandra.

Förutsättningen för att kunna erfara ett fenomen på ett specifikt sätt är att de olika aspekterna urskiljs och finns fokuserat i medvetandet samtidigt. I varje situation finns en mängd aspekter som är urskiljbara. Skillnaden i hur något erfars beror på att vissa aspekter fokuseras och andra inte, eller om aspekterna urskiljs samtidigt eller inte. Om vi kunde urskilja och fokusera varje aspekt samtidigt skulle vi erfara allting på ett och samma sätt. Men eftersom det är olika aspekter som vi urskiljer och fokuserar simultant, erfår vi världen på kvalitativt olika sätt. Vad som samtidigt blir urskilt och finns i det fokuserade medvetandet är avgörande för vilken innebörd det erfarna fenomenet eller objektet får (Marton & Booth, 1997). Om vi vill att eleverna skall erfara ett växande mönster som ett mönster som kan byggas av olika element måste de urskilja aspekten "olika sorters byggelement". Eleverna urskiljer denna aspekt om de samtidigt erfår en variation av byggelement (exempelvis stickor, trianglar, hjärtan, m.m.) som används för att konstruera samma växande mönster.

För att en ny aspekt skall kunna urskiljas från en specifik situation måste det finnas en variation som är möjlig att erfara. När någon aspekt blir urskild ses denna mot bakgrund av en möjlig variation. Att till exempel urskilja och vara medvetet fokuserad om att någonting rör sig förutsätter att man har erfart att något står stilla. Man måste ha erfart en dimension av en variation med två möjliga tillstånd – rörelse och vila. Att urskilja och medvetet

fokusera på ett växande mönster måste elever samtidigt erfara ett regelbundet mönster som inte växer. Varje urskild aspekt måste samtidigt erfaras mot bakgrund av att dessa skulle kunna variera. Exempelvis om jag erfar ett föremål som en hög, fyrkantig, vit kruka med trådetaljer, görs detta mot bakgrund av att det skulle kunna röra sig om en låg, rund, svartgråmönstrad kruka utan trådetaljer. Om vi vill att eleverna erfar att det finns olika sorters växande mönster skall vi göra det möjligt för dem att urskilja aspekten "växande mönster kan förändras på olika sätt". Det kan vi göra genom att samtidigt visa flera växande mönster som är byggda av samma byggelement, t.ex. bokstäver eller tändstickor. Det som skall varieras är antal byggelement som mönstret förändras med för varje ny figur (Figur 3.1).

figur nr.1	figur nr.2	figur nr.3	figur nr.4	
ab	abb	abbb	abbbb	(mönstret växer med ett "b")
ab	abbb	abbbbb	abbbbbbb	(mönstret växer med två "b")
ab	abbbb	abbbbbbb	abbbbbbbbbb	(mönstret växer med tre "b")

Figur 3.1. Exempel på hur värdet "antal byggelement" skulle kunna varieras för att vara möjligt att urskilja aspekten "växande mönster kan förändras på olika sätt" och erfara olika sorters växande mönster.

Urskiljning, simultanitet och variation förutsätter varandra. En urskild aspekt som finns fokuserat i det fokala medvetandet förutsätts av en medvetenhet av en möjlig variation simultant med andra aspekter (Marton & Booth, 2000).

Lärandeobjekt

När man inom variationsteorin talar om lärande är utgångspunkten att lärandet är om eller av något. Faktum är att det inte finns något erfalande utan något att erfara och inget lärande utan någonting att lära. Lärandet måste alltid ha ett objekt, ett lärandeobjekt (Marton & Booth, 1997; Lo 2012). Begreppet lärandeobjekt är i ett fenomenografiskt och variationsteoretiskt sammanhang synonymt med ett avgränsat kunskapsområde tillsammans med en särskild förmåga som man vill att eleverna skall utveckla (Marton & Pang, 2006).

Lärandeobjektet kan delas upp i ett *direkt* och ett *indirekt* lärandeobjekt (Lo, 2012). Det som undervisningshandlingar och lärande är riktat mot är det direkta lärandeobjektet. Hur eleven skall visa sin färdighet och förmåga som skall utvecklas är det indirekta lärandeobjektet. Det direkta lärandeobjektet avser oftast ett innehåll. Det indirekta lärandeobjektet avser det som eleven förväntas att kunna göra med innehållet. Det direkta och indirekta lärandeobjektet skall ses som en helhet och inte som två separata delar av undervisningen (Marton & Pang, 2006). Läraren bör planera sin undervisning med hänsyn till såväl det indirekta som det direkta lärandeobjektet.

“The learner’s focus is normally on what they are trying to learn (the direct object of learning), whereas the teacher’s focus should be on both; not only on that which the learner are trying to learn, but also on the way in which the learners are trying to master what they are trying to learn. We might assume therefore, that teachers are trying to work toward an object of learning.” (Marton, Runesson & Tsui, 2004, sid. 4)

Lärandeobjektet kan betraktas från tre olika perspektiv (Häggström, 2008). När det betraktas från *lärares perspektiv* är det det *intentionella lärandeobjektet*. I en undervisningssituation är det vad läraren avser att undervisa om. Det *iscensatta lärandeobjektet* är när lärandeobjektet undersöks från *forskarens perspektiv*. Det är lärandeobjektet som konstitueras i interaktion mellan det lärande och läraren i undervisningen. Genom att studera det iscensatta lärandeobjektet kan man dra slutsatser om vad elever i praktiken får möjlighet att lära. Från *elevernas perspektiv* kan man studera det *erfarna lärandeobjektet*. Det är den kunskap och förmåga elever tillägnar sig under lektionen och kan bland annat studeras genom ett för- och ett eftertest (Marton, Runesson & Tsui, 2004). Relationen mellan de tre lärandeobjekt illustreras i Figur 3.2.

Figur 3.2. Relationen mellan tre lärandeobjekt efter Häggström (2008).

I Figur 3.2 kan man avläsa hur stor del av det intentionella lärandeobjektet blev iscensatt och erfaren under en lektion. Man skall sträva efter en så stor överlappning som möjligt vilket skulle betyda att undervisningen leder till att eleverna lär sig det som är planerat att de skall lära sig. Beroende på vilken del av cirkarna betraktas och hur cirkarna ritas kan en mängd olika situationer beskrivas. En total överlappning av de tre cirkarna skulle betyda att det som var lärares intention att eleverna skulle lära sig blev möjligt för de att lära under lektionen. Eleverna visar också att de har lärt sig det som lärare ville att de skulle lära. Situationen som presenteras i Figur 3.2 där cirkarna bara delvis överlappar varandra skulle kunna tolkas som att bara vissa av de planerade aspekterna blev iscensatta. Det implicerar att eleverna inte får möjlighet att erfara dessa.

I denna studie studeras det iscensatta lärandeobjektet.

Dimension av variation

Enligt Marton och Booth (1997) är lärande en funktion av urskiljning, vilket förutsätter en erfaren variation. Lärandet av exempelvis ett objekt är inte möjligt om vi inte först kan urskilja objektet från sitt sammanhang. För att urskilja objektet från dess sammanhang och skilja det från andra objekt måste vi uppleva variation av objektet. Vi uppmärksammar alltid objekt som är varierande och som skiljer sig från andra. Detta är en regel som vi tillämpar i det dagliga livet och som vi hittar i naturen (Lo, 2012). Exempelvis om vi vill att någon skall se oss bland en grupp människor hoppar vi och vinkar med armarna. Färgerna på de flesta blommorna är starka vilket gör att de sticker ut bland gröna blad för att locka till sig insekter eller fåglar. Medvetet försök att systematiskt variera vissa aspekter och hålla vissa aspekter konstanta kan hjälpa människor att urskilja nya aspekter av ett objekt och utveckla ny kunskap om objektet (Lo, 2012).

Medvetenheten om en viss aspekt kan inte existera utan medvetenheten om skillnader mellan aspekten i fråga och andra aspekter (Lo, 2012). En aspekt av något kan inte urskiljas och hamna i förgrunden av vårt medvetande utan att den jämförs med något annat. Det finns ingen urskiljning utan erfaren skillnad, och det finns ingen erfaren skillnad utan en samtidig upplevelse av

åtminstone två saker som skiljer sig åt. I litteraturen beskrivs ofta exemplet där den lärande skall få möjlighet att förstå vad en färg är:

“To help children to discern the colour ‘red’, we need to expose them to other colours that are not red. If hypothetically our world had only one colour – red – then the concept of colour would not exist and red would not be discerned: it would be taken for granted. Fortunately, in our world, we have colours other than red. We can then teach children the concept ‘red’ by pointing to a red ball and saying ‘red’ while pointing to a green ball and saying ‘green’. By contrasting two colours, a dimension of variation (colour) is opened up on which red and green are two values. In this way, we can create a pattern of variation: we keep the ball unchanged while varying the colour.” (Lo, 2012, sid. 30)

För att den lärande skall separera färgen röd från objektet boll måste hon/han erfara andra objekt som är röda t.ex. en röd stol, ett rött bord och en röd bil. På så sätt skulle objekten boll, stol, bord och bil separeras från färgen röd, och den lärande kan generalisera ”rödheten”. Om vi bara visar den som skall lära sig färger ett äpple och säger rött, ett löv och säger grönt och pekar på solen och säger gult blir det svårt att lära sig färgerna eftersom vi inte har medvetet använt lämpliga mönster av variation. För att göra möjligt för den lärande att separera och skilja begreppet färg från andra begrepp och aspekter som är närvarande måste vi vara medvetna om de kritiska aspekterna som skall varieras och de andra aspekterna som skall hållas konstanta.

Kritiska aspekter är de aspekter som är nödvändiga för den lärande att urskilja för att lära sig något nytt men som hon/han ännu inte har urskiljt (Lo, 2012; Marton, 2014). Varje fenomen som vi ser som en odelbar helhet har en mängd aspekter. Alla dessa aspekter är dock inte nödvändiga för att förstå fenomenet på ett visst sätt. När en individ möter ett nytt fenomen eller ställs inför en uppgift byggs dennes uppfattning av helheten på vilka aspekter som fokuseras, vilket är individuellt för varje person (Marton & Booth, 2000; Marton, 2014). Lärande sker när den lärande får syn på nya nödvändiga aspekter, men också när denne kan bortse från alla de möjliga aspekter som inte har betydelse i den aktuella lärandesituationen (Marton, 2014). Det är de kritiska aspekterna som skiljer den tidigare uppfattningen från den som eftersträvas i en lärandesituation.

I en skolsituation räcker det inte att berätta för eleverna om vilka kritiska aspekterna av ett lärandeobjekt är. Det räcker inte heller att vara medveten om dem för att lärande skall uppstå. De kritiska aspekterna måste urskiljas för att eleverna skall ha möjlighet att lära (Marton, Runesson & Tsui, 2004). För att kunna urskilja de kritiska aspekterna måste elever erfara en variation. I skolmiljön måste lärarna göra lärandeobjektet tillgängligt för eleverna genom att avsiktligt skapa mönster av variation som gör det möjligt för eleverna att urskilja de kritiska aspekterna av lärandeobjektet. Vilka möjligheter som erbjuds för eleverna att urskilja aspekter av ett lärandeobjekt beror på vilka *dimensioner av variation* som öppnas. För varje aspekt av lärandeobjektet finns motsvarande dimension av variation (Runesson & Mok, 2004). Att erfara variation i en särskild aspekt betyder att man erfar skillnad i denna dimension av variation (Marton & Pong, 2005). Exempelvis olika sätt att räkna ut en subtraktionsuppgift motsvarar en dimension av variation i Lösningsstrategier att räkna subtraktion. Ett sätt att lösa uppgiften är ett "värde" inom dimensionen av Lösningsstrategier medan ett annat sätt att lösa uppgiften är ett annat "värde" inom samma dimension (Runesson & Mok, 2004).

Om vi vill utveckla en specifik förmåga hos eleverna måste de få uppleva ett visst mönster av variation och invarians för att kunna utveckla denna förmåga. Om detta mönster saknas i undervisningen är det inte möjligt att erfara det. Inte ens om mönstret finns i undervisningen kan vi påstå att elever erfar det eftersom erfandet är tätt sammankopplat med det som är möjligt att erfara under en lektion. Erfandet av variation kan ske på olika sätt. Ett sätt är att eleverna erfar mönstret tack vare tidigare erfarenheter utanför skolan eller genom en kombination av vad de erfar under lektionen och utanför den (Marton, 2005). Ett annat sätt är när skolan möjliggör eleverna att lära genom att erfandet av variation blir tydligt kopplat till det iscensatta lärandeobjektet (Häggström, 2008). På det sättet får eleverna möjlighet att erfara variation. Elevernas erfande av variation är i denna studie direkt relaterad till det iscensatta lärandeobjektet och de *dimensioner av variation* som öppnas i klassrummet. De situationer där eleverna erfar variation genom att jämföra det som sker i undervisningen med sina tidigare erfarenheter är inte möjligt att studera i denna studie.

I undervisningen kan man göra det möjligt för eleverna att erfara en dimension av variation genom olika uppgifter och övningar. Lärare kan skapa olika variationsmönster genom att variera olika aspekter av ett lärandeobjekt. Vilket variationsmönster som skapas och om det skapas beror på de typer av uppgifter som det arbetas med och på ordningen i vilken uppgifterna är presenterade för eleverna (Häggström, 2008). Nedan presenteras några exempel på växande geometriska mönster för att illustrera hur detta kan gå till i praktiken.

I Figur 3.3 är tre växande geometriska mönster presenterade. Vilka dimensioner av variation kan öppnas när man arbetar med dessa uppgifter?

Figur 3.3. Exempel på tre olika växande geometriska mönster.

Alla de ovanstående tre uppgifterna är exempel på växande geometriska mönster. De förändras på ett regelbundet sätt för varje ny figur. De tre första figurerna är presenterade för respektive mönster. Om eleverna skall få i uppgift att diskutera mönstrens fortsättning kommer de att upptäcka att alla de tre mönstren förändras genom att tre byggelement (cirkelar, tändstickor eller trianglar) läggs på den nästkommande figuren. Antalet

byggelement är konstant medan vi använder olika sorters byggelement. En aspekt som kan bli urskild i detta fall är att växande mönster kan se olika ut beroende på vilken byggelement som används för att konstruera det.

Om vi frågar eleverna om det sammanlagda antalet byggelement för figurerna i dessa tre mönster kommer de förhoppningsvis att urskilja att antalet byggstenar i samma figurnummer varierar i de olika mönstren. I första mönstret behövs det sex cirkelar för att bygga figur nummer 2. I andra mönstret behövs det sju tändstickor för att bygga figur nummer 2 medan i tredje mönstret är antalet trianglar fyra i samma figurnummer. Antalet byggelement som mönstren förändras med är invariant. Varje mönster förändras med tre byggelement för varje ny figur. Det sammanlagda antalet byggelement varierar för de olika mönstren. En aspekt som eleverna kan urskilja är att det sammanlagda antalet byggelement i varje ny figur är unikt för varje växande mönster.

I den föreliggande studien är analysen riktad mot de varierade och invarianta aspekterna av iscensatta lärandeobjektet i den observerade undervisningen. Begreppet dimension av variation används för att beskriva vilka aspekter är möjliga att urskilja i de studerade lektionerna.

Variationsmönster

När Marton och Booth (2000) beskriver lärande återkommer de gång på gång till subjektets erfارande av världen där lärandet är förändringen av subjektets sätt att erfara världen. För att subjektet skall kunna erfara världen på ett specifikt sätt måste vissa aspekter av världen urskiljas och finnas fokuserat i hans/hennes medvetande samtidigt. När vi lär oss något urskiljer vi fler och nya aspekter av det lärda innehållet i jämförelse med vad vi kunde urskilja tidigare. För att en aspekt skall kunna urskiljas från en specifik situation måste det finnas en variation som är möjlig att erfara. Enligt variationsteori lägger vi inte märke till saker och ting och dess egenskaper utan till skillnader mellan saker och ting och till skillnader mellan dess egenskaper (Marton, 2005). Den mest framgångsrika strategin för lärare för att bidra för ett möjligt lärande av det intentionella lärandeobjektet skulle således vara att skapa ett mönster av variation som riktar elevernas uppmärksamhet mot de kritiska aspekterna.

Begreppet kritiska aspekter används för att beskriva de aspekterna som är nödvändiga för den lärande att få syn på för att lära sig något nytt men som hon/han ännu inte har urskiljt (Lo, 2012). I en undervisningssituation innebär det att aspekter som betraktas som nödvändiga att erfara, för att förstå ett innehåll på ett visst sätt, enbart är kritiska för dem som ännu inte lyckats urskilja dessa. För att lärande skall möjliggöras måste läraren synliggöra de kritiska aspekterna för eleverna genom ett mönster av variation, så att det kan kopplas till elevens erfarenhet av lärandeobjektet (Kullberg, 2010). De fyra mönster av variation som Marton, Runesson och Tsui (2004) beskriver är: *separation*, *kontrast*, *generalisering*, och *fusion*. Sambandet mellan dessa fyra variationsmönstren beskrivs i följande Figur (3.4):

Figur 3.4. Sambandet mellan fyra mönster av variation efter Marton (2014).

I texten som följer förklaras de fyra variationsmönstren med utgångspunkt från beskrivning av Marton, Runesson och Tsui (2004), Lo (2012) och Marton (2014). Exempelen är hämtade från matematikens värld och området algebra – mönster.

Separation: Variationsmönstret separation möjliggör urskiljningen av en detalj av en tidigare vag helhet. För att kunna erfara en specifik aspekt av något och kunna separera denna aspekt från andra aspekter, måste den specifika aspekten varieras medan de andra aspekterna förblir invarianta. Om två aspekter varierar samtidigt kan dessa inte separeras. För att urskilja något skall det variera medan bakgrunden är invarianta.

Om exempelvis en elev har lärt sig vad mönster där en sekvens upprepas är kan inte separera "mönster" från "sekvens som upprepas". Denna elev kan inte ha samma förståelse för mönster som någon annan som är medveten om att det finns olika sorters

mönster, t.ex. talmönster och växande mönster. I detta exempel är mönster en aspekt som kan beskrivas som en dimension av variation där olika sorters mönster är värden i den dimensionen. För att eleven skall urskilja skillnaden mellan mönster och sekvens som upprepas och för att kunna separera sekvens som upprepas från mönster, behöver hon/han erfara en systematisk variation av olika sorters mönster samtidigt som andra aspekter som t.ex. byggelement hålls invariants.

Separation kan ske genom kontrast eller generalisering.

Kontrast: Kontrast innebär att visa vad något är genom att visa vad det inte är. När två värden i en aspekt jämförs med varandra skapas kontrast. I detta variationsmönster hamnar det som är invariant i bakgrunden medan det som varierar blir synligt. Den lärande ges möjlighet att urskilja skillnader istället för likheter. Om vi skall kunna urskilja en viss aspekt behöver vi erfara variation i denna aspekt genom att värden i samma aspekt varieras. För att erfara vad något är behöver man också erfara vad det inte är. För att exempelvis lära sig vad växande mönster är så jämförs det med ett mönster som inte växer för att synliggöra "växandet". De olika mönstren varieras mot en invariant bakgrund som kan vara samma byggelement som alla mönster konstrueras av.

Generalisering: För att förstå det specifika behöver man uppleva det genom olika representationer och särskilja dessa från egenskaper som är irrelevanta. Det irrelevanta skall variera på ett systematiskt sätt för att visa på bredd. Den genom kontrasten separerade aspekten skall hållas konstant. T.ex. kan olika typer av växande mönster presenteras för att synliggöra mångfalden. Dessa kan vara växande mönster som är uppbyggda med en konstant skillnad mellan figurerna eller växande mönster där skillnaden mellan figurerna ökar med ett, två, tre o.s.v. för varje figur. Det växande mönstret hålls konstant medan sättet de växer på varierar. Det irrelevanta är hur dessa mönster växer. Det viktiga är att de växer. Ett annat exempel är när man bygger, ritar och använder kroppen för att representera ett växande mönster. Det invariants är växande mönstret. Det som varieras är representationsformerna. Ett tredje exempel på generalisering är när antalet tändstickor som olika stickmönster växer med kan vara konstant medan mönstrets utseende varierar beroende på sättet på vilket tändstickorna läggs (Figur 3.5). De lärande kan urskilja att växande mönster växer med

en regelbundenhet och att figurerna ritas en bit ifrån varandra trots att sekvensen i mönstren är olika.

Figur 3.5. Två olika stickmönster men båda växer med fyra tändstickor.

Fusion: Vi antar att det är ett flertal kritiska aspekter som den lärande skall urskilja för att förstå lärandeobjektet på ett kvalitativt bättre sätt. Efter det att alla dessa aspekter har separerats genom kontrast och generalisering måste de urskiljas samtidigt genom fusion.

“Our conjecture is that seeing a certain class of phenomena in terms of a set of aspects that are analytically separated but simultaneously experienced provides a more effective basis for powerful action than a global, undifferentiated way of seeing the same class of phenomena.” (Marton, Runesson & Tsui, 2004, sid. 16-17)

En undervisningssekvens där olika sorters växande och upprepande mönster presenteras kan vara exempel på variationsmönstret fusion. Mönstren kan vara byggda av olika byggelement och växa på olika sätt. Där kan också mönster som inte är matematiskt mönster förekomma.

I det vardagliga livet är det ovanligt att endast en aspekt av ett fenomen varierar (Marton & Tsui, 2004). Vanligtvis sker variation i dagliga livet osystematiskt. Marton och Tsui (2004) menar att en systematisk variation av ett fenomenets kritiska aspekter leder till att fenomenet erfars på ett nytt och kvalitativt annorlunda sätt. Lo och Marton (2011) poängterar vikten av att först möjliggöra de lärande att få en överblick över det de skall lära sig. Efter denna inledande överblick kan dimensioner av variation skapas genom kontrast och generalisering. De kritiska aspekterna separeras och därmed urskiljs med hjälp av kontrast. Generalisering bidrar till att särskilja kritiska aspekter från aspekter som de lärande kan bortse ifrån. När kritiska

aspekter urskiljts är de inte längre kritiska för eleverna, vilket de eventuellt var vid den inledande överblicken. Vid fusion sker en simultan variation av flera tidigare urskiljda aspekter. Möjligheten ges att samtidigt se alla aspekter i relation till varandra och till helheten.

I föreliggande studie diskuteras det iscensatta lärandeobjektet utifrån vilka dimensioner av variation som öppnas i undervisningen och på vilket sätt det sker.

Variationsteoretiska klassrumsstudier

Tonvikten i mitt arbete ligger på att undersöka och beskriva matematikundervisningen om algebra i årskurserna 4-6. I föreliggande studie analyseras och beskrivs hur lärare behandlar innehållet växande geometriska mönster och vad som ges möjligt för eleverna att lära sig. Variationsteori används som analysverktyg.

Exempel på svenska klassrumsstudier som är relevanta att beskrivas utförligare eftersom de ligger inom intresseområdet för min egen studie, d.v.s. matematikdidaktisk forskning med variationsteori som analysverktyg, är Runessons (1999), Emanuelssons (2001), Häggströms (2008) och Kullbergs (2010) doktorsavhandlingar. Gemensamt för dessa forskningsstudier är att de uppmärksammar undervisning och lärande som möjliggörs inom matematik. Alla fyra forskarna använder variationsteorin som ett verktyg för att undersöka det lärande som konstitueras.

Runesson (1999) beskriver i sin studie de skilda sätt varpå lärare behandlar innehållet i undervisningen när de undervisar om tal i bråk- och procentform i årskurserna 6 och 7. Det är vare sig lärares eller elevernas förståelse av detta ämnesinnehåll som behandlas utan hur detta innehåll kommuniceras med eleverna. Syftet med studien är att beskriva variation i sättet att behandla innehållet. Analysen av data sker med avseende på vilka aspekter av undervisningsobjektet som är fokuserade, vilka som hålls konstant respektive varieras och vilka som utgör dimensioner av variation. Studien visar att när lärare kommunicerar innehållet med eleverna fokuserar och tematiserar de vissa aspekter av undervisningsinnehållet och lämnar andra ofokuserade och otematiserade. Runesson (1999) drar slutsatsen att lärare öppnar för variation i vissa dimensioner/aspekter medan begränsar variationen när det

gäller andra. Det visas också att variation spelar en viktig roll i undervisningsprocessen då den möjliggör en variationsrymd som i sin tur utgör ett potentiellt objekt för elevernas lärande.

Emanuelssons studie (2001) beskriver hur lärare med hjälp av sina frågor skapar möjlighet att se vad eleverna verkar förstå. Både elevernas och lärarnas lärande är i fokus eftersom de är aspekter av samma sak, menar Emanuelsson (2001). Han har utvecklat en beskrivningsmodell i form av en tentativ teori som användes för att beskriva och analysera olika lärares undervisning. Resultatet visar att i matematik öppnar lärarna främst upp för lärande om deras elever kommer ihåg fakta och procedurer. En av studiens viktigaste slutsatser är att om lärare skall kunna göra distinktioner beträffande elevernas sätt att förstå och uppfatta något, måste detta något hållas invariant och deras akter av kunskande måste tillåtas variera i förhållande till det invarianta objektet.

Även Häggströms (2008) avhandling visar att lärare ger sina elever möjlighet att urskilja och erfara viktiga aspekter av matematikinnehållet genom att skapa variation på ett systematiskt sätt. I studien jämfördes kinesiska och svenska lärares undervisning av linjära ekvationssystem samt studerades hur matematikämnet hanteras och görs tillgängligt för eleverna i undervisningen. Exempel på det som undersöktes är vilka exempel tas upp och på vilket sätt, vilka aspekter av innehållet betonas och på vilket sätt, vilka uppgifter eleverna arbetar med etc. Det visade sig att en del aspekter ofta hölls konstanta i undervisningen vilket innebär att de togs ej upp eller diskuterades av lärare. Resultatet visar tydliga skillnader i hur innehållet hanterades av lärarna i de olika länderna och vad som gjordes möjligt för eleverna att lära.

Det Kullberg (2010) konstaterar i sin studie är att de elever som genomgått lektionen där alla de fyra kritiska aspekter som identifierats behandlades har bättre resultat på eftertesten än de elever som bara hade fått möjlighet att urskilja en av dessa aspekter. En systematisk variation av innehållet i lärares undervisning genererade kvalitativt olika resultat i elevers lärande. Det visade sig att läraren har mindre betydelse för elevernas lärande än vad lektionsdesignen har. Detta kunde hon komma fram till efter att hon låtit några lärare genomföra två typer av lektionsdesign i olika klasser för att se om detta påverkade elevernas lärande i matematik.

Tillsammans bidrar de fyra studierna som har tagits upp ovan med kunskap om att lärare har möjlighet att påverka vad eleverna kan lära sig och att elevers möjligheter att lära utifrån den undervisning de får skiljer sig åt.

4. Metod

I detta kapitel presenteras studiens datainsamlingsmetod och dess för- och nackdelar diskuteras. Delen redogör för studiens genomförande, datainsamling, urval samt för analysprocessen. Studiens validitet och reliabilitet samt forskningsetiska aspekter diskuteras i slutet av kapitlet.

Datainsamlingsmetoder

En kombination av videoinspelning och fältanteckningar har använts för datainsamling.

För att besvara forskningsfrågorna observerades lärare medan de undervisade. Empiriinsamlingen hade kunnat ske med hjälp av enbart anteckningar från klassrumsobservationer. Videoinspelningar har däremot bidragit till en noggrannare och förfinad analys jämfört med fältanteckningar eller observationer. Enligt Bjørndal (2002) innehåller data som bygger på ljud- och bildinspelning avsevärt mer detaljer som bevaras. Man "konserverar observationer" (Bjørndal, 2002, sid 72) som annars aldrig skulle bli registrerade och därmed gå förlorade. Videoinspelningar ger forskaren en sällsynt möjlighet att minska intryckstempot och repetera intryck på ett sett där forskaren kan se mer än vad hon/han kan göra i en anteckning (Bjørndal, 2002). Val av videoinspelning gav möjlighet att betrakta de inspelade sekvenserna tillsammans med handledare och forskarkollegor i syfte att gemensamt diskutera och analysera.

Trots en rad fördelar med videoinspelning som datainsamlingsmetod skall man inte blunda för det faktum att en sådan inspelning aldrig är en kopia av verkligheten utan bara en representation av den. Representationer i form av videoinspelningar utgör en begränsat och färgat urval av en pedagogisk situation (Bjørndal, 2002). Jordan och Henderson (1995) beskriver operatörens och teknikens begränsningar. Operatören är den personen som sköter videokameran, i denna studie forskaren själv. Genom kamerans placering och inställningar styr operatören vilka ljud som registreras och vilken del av den visuella verkligheten som registreras. Kameravinkeln är avgörande för vilken information

som samlas in. För att ta bort dessa begränsningar till en så stor del som möjligt har i studien används två kameror. En kamera var placerad längst bak i klassrummet och fokuserad hela tiden på läraren. Den andra kameran var placerad längst fram i klassrummet och fångade upp klassens elever. Förutom kamerorna har även tre surfplattor använts för att i första hand komplettera kamerornas ljudupptagning. Dessa var utplacerade nära eleverna på olika ställen i klassrummet. Filmmaterialet från surfplattorna kom till nytta vid flera tillfällen under analysprocessen när lärares eller elevers repliker inte gick att uttyda i kamerornas filmmaterial. Videoinspelningarna kompletterades med observationsanteckningar av sådant som jag bedömde vara värdefullt att fokusera på. Användningen av två kameror och tre surfplattor medförde en mer resurskrävande förberedelse, genomförande och bearbetning än om det användes enbart en kamera för datainsamlingen.

Kameran som stod längst bak i klassrummet var fixerad genom att den placerades på ett stativ. Kameran längst fram i klassrummet stod under hela inspelningen på en hylla eller en hurts. En av fördelarna med en fixerad kameraposition är att forskaren inte är påträngande för individerna som deltar i studien (Heath, Hindmarsh & Luff, 2010). Kameran får på det sättet mindre uppmärksamhet än en handkamera. En annan fördel är att det ger möjlighet för forskaren att anteckna situationer och aktiviteter som inte fångas upp med kameran eller annat som är av vikt att komma tillbaka till senare i forskningsprocessen (Heath, Hindmarsh & Luff, 2010). Exempelvis kunde forskaren i föreliggande studie beskriva och/eller rita av exempel på mönster som eleverna gav och som fanns i de olika klassrummen men inte syntes på bild. Forskaren antecknade även tiden när enstaka dimensioner av variation öppnades i undervisningen.

Vid några enstaka tillfällen har forskaren tagit ur kameran ur stativet för att dokumentera lärares samtal med en elev som satt längre bort från kameran fast plats. Heath, Hindmarsh och Luff (2010) ser en fördel med att ha kameran på en bestämd plats i början av datainsamlingen. Men ovanstående forskare anser att det är rimligt att gå runt med kameran om den inspelade situationen kräver flexibilitet i kamerahanteringen. Ibland har kamerans zoomfunktion används för att få en så tydlig bild som möjligt av det

som skrevs på tavlan. I detta fall har data lyfts fram samtidigt som annan information har hamnat i bakgrunden eller till och med gått förlorad (Jordan & Henderson, 1995).

Under varje lektion som videofilmades fördes anteckningar över sådant som ansågs komplettera filmmaterialet med ytterligare information. Det kunde exempelvis handla om för studien intressanta undervisningssekvenser, lärares frågor eller elevernas svar och kommentarer. Noteringar gjordes också om enstaka begrepp som ansågs viktiga i sammanhanget. I anteckningarna finns även anvisningar om tidpunkten när det nerskrivna hände på lektionen för att snabbt kunna hitta samma innehåll i filmerna. Denna typ av fältanteckningar klassificeras av Bryman (2011) som preliminära anteckningar. Dessa består av korta fraser, citat och/eller nyckelord och fungerar som minnesanteckningar som skall skrivas ner i detalj vid ett senare tillfälle.

Genomförande

Urval

Studien omfattar fyra lärare, deras undervisning om växande geometriskt mönster och elever i klasser som undervisas av dessa lärare. Samtliga lärare undervisar i årskurserna 4-6, en i årskurs 4, två i årskurs 5 och en i årskurs 6. De arbetar på fyra, geografiskt utspridda kommunala skolor som är belägna i en mellanstor kommun i södra Sverige.

För att sätta samman urvalet av lärare har forskarens kännedom om skollärare och lärare som var intresserade av skolutveckling utnyttjats. Tre grundskolor har besökts och forskningsplanen har presenterats på lärarkonferenser. Intresserade lärare har fått anmäla sitt intresse för att delta i studien. Vid början av empiriinsamlingen har gensvaret på förfrågan om medverkan i studien sjunkit från nio till tre lärare på grund av sjukdom, byte av arbetsplats samt ovilja att bli filmad. Den senaste orsaken för bortfall kan förklaras med att lärare av tradition är ovana att bli filmade under lektioner (Svanteson, 2012). Denna begränsade tillgänglighet på lärare genererar ett urval som betecknas som ett bekvämlighetsurval (Bryman, 2011), eftersom alla som ville medverka i studien också fick möjlighet att göra det.

Under datainsamlingsperioden upptäcktes i en av klasserna att undervisning, som skulle kunna påverka studiens resultat men som inte blev videofilmad, har skett. På grund av detta har ytterligare en lärare fallit bort från studien. Det lilla urvalet medförde att det togs mailkontakt med fler lärare som i olika sammanhang uttryckte ett intresse om deltagande. Två lärare lämnade positivt besked. Till slut blev det fyra lärare som medverkade i undersökningen.

Med det primära urvalet av lärare har per automatik det sekundära urvalet av elever som undervisades av dessa lärare skett. Förutom dessa har urval av undervisningsinnehåll samt av tillfällen då forskarens besök genomförts gjorts. En del av dessa val har varit medvetna och möjliga att påverka, andra har jag inte kunnat styra över i någon större utsträckning. Inget av dessa val har varit slumpmässigt i bokstavlig mening. Inför urvalet av observations-tillfällen har lärarna informerats i allmänna ordalag om att intresset av lektionsinspelningen ligger i nyfikenheten att få veta vad som händer på en lektion när det undervisas om ett bestämt innehåll. De har fått föreslå tillfällen då det bäst passade klassen och dem själva att genomföra studien. Tillsammans har vi därefter bestämt lämpliga dagar och tider för besök för att informera eleverna och spela in en lektion.

Det är forskaren som har bestämt undervisningsinnehållet, vilket är växande geometriska mönster. Detta urval grundar sig i undersökningens syfte att analysera och beskriva hur lärare behandlar innehållet i undervisningen i ämnet matematik när de undervisar om växande geometriska mönster. Om detta har lärarna informerats vid planeringsmötet. Lektionsplaneringen, lektionens längd, valet av uppgifter och arbetsmetoder som användes på lektionerna har lärare fått bestämma själva. Lektionsplaneringen kunde påverkas av ett för- och eftertest (bilaga 1) som forskaren har konstruerat och som lärarna har fått se före den inspelade lektionen. För- och eftertestet har genomförts i alla fyra klasser men resultatet från testen används inte i denna studie. Anledningen till att testerna genomfördes i klasserna var forskarens intresse i början av forskningsprocessen att påvisa vad lärares sätt att på ett eller annat sätt behandla innehållet växande geometriska mönster har för betydelse för elevers lärande inom området. Under tiden forskningen fortlöpte visade det sig att frågan om relationen mellan

undervisning och lärande inte var möjlig att besvara inom ramen av studien.

Datainsamling

I början av höstterminen 2012 presenterade jag idén om min studie för lärare och rektorer på tre skolor. Några veckor innan datainsamlingen påbörjades kontaktades lärarna för en överenskommelse om lämpliga tidpunkter för ett besök för att träffa klassen, för genomförandet av förtestet samt för inspelningen av lektionen. Inför det första besöket författades ett informationsbrev till elever och ett till föräldrar (bilaga 2 och 3). Brevet till föräldrar innehöll en blankett där vårdnadshavarens samtycke genom skriftligt tillstånd för elevers medverkan i studien krävdes.

I slutet av höstterminen 2012 och i början av vårterminen 2013 gjordes ett besök i respektive klass. Då informerades eleverna om att jag skulle videofilma en matematiklektion (lärarna informerades om detta redan när de erbjöds att delta i studien). Informationsbrevet lästes upp för och delades ut till eleverna samt skickades hem till föräldrarna. Vid nästa besök när förtestet genomfördes samlades blanketterna om förfrågan om elevers och föräldrars samtycke in. Alla elever fick delta i studien. Det var ett par elever som inte fick bli filmade. Detta löstes på så sätt att dessa elever satt längs bak i klassrummen vid videoinspelningarna. Kamerorna placerades ut i klassrummet så att de inte fångade dessa elever på bild.

Vid varje besök har jag spontant samtalat med lärarna både före och efter de besökta lektionerna. Dessa samtal spelade jag inte in men jag antecknade under och/eller efter samtalen. Anteckningarna gällde lärarnas bedömning av sina elevers matematiska förmågor, områden som klassen har arbetat med på matematiklektionerna det aktuella läsåret och uppgifter om organisatoriska frågor. Denna information används i resultatdelen för att ge läsaren en bild av respektive klass.

En matematiklektion videofilmades i tre klasser och två matematiklektioner i en klass (Tabell 1). I slutet av varje lektion samlades elevernas anteckningar och arbetsblad in och lämnades till mig. Tillsammans utgör det videodokumenterade materialet 309 minuter. Av dessa har fyra lektioner (252 minuter) används i studien eftersom det var under dessa lektioner som växande

geometriska mönster behandlades av lärarna. Den tid som användes för behandling av innehållet i de fyra klasserna skilde sig något i den totala tiden. I Tabell 1 framgår hur tiden har fördelat sig på respektive lärare.

Tabell 1. *De inspelade lektionernas längd i minuter för respektive lärare.*

<i>Lärare</i>	<i>Lektionens längd i minuter</i>
A	67 min
B	57 min ²
	80 min
C	43 min
D	72 min
Totalt	319 min

De fyra lektionsinspelningarna där växande geometriska mönster behandlades transkriberades. Det transkriberade materialet skrevs in i en tabell med tre kolumner. I första kolumnen antecknades tiden då det som skrevs i kolumn två hände på lektionen. Tidsangivelser har lagts till för att snabbt kunna gå tillbaka till motsvarande avsnitt i det filmade materialet. I kolumn tre antecknades forskarens spontana reflektioner och frågor om undervisningen. I den transkriberade texten skrevs ner ordagrant vad lärarna och eleverna sa. Stor bokstav och punkt användes och orden anpassades till skriftspråk och har inte skrivits ut som talspråk. I utskrifterna kan man följa vem som talar och vad som sägs på lektionerna. Alla namn på elever och lärare i det transkriberade materialet är fingerade. I replikerna användes versalen L när en lärare pratar och ett slumpmässigt valt namn när en elev pratar. I den löpande texten benämns lärarna med en av de första bokstäverna i alfabetet, A, B, C eller D. Även lärares kroppsspråk och gester i vissa lektionssekvenser, övergång mellan lektionsmoment samt vilket material som används av lärare och elever skrevs ner. De ickeverbala handlingarna skrevs inom parantes. Ord som betonas ströks under. Pauser och tal som utelämnades vid transkribering markerades med olika symboler som presenteras i Tabell 2.

² Lektion då ett annat innehåll behandlades.

Tabell 2. Transkriptionsnyckel.

Symboler	Innebörd
...	paus i talet, längre än 2-3 sekunder
(...)	utelämnade utsagor som jag bedömer saknar meningsbärande betydelse
(--)	ohörbart tal
(skriver på tavlan)	beskrivning av ickeverbala handlingar
<u>triangel</u>	ord som betonas i den verbala kommunikationen

Analys

Att besvara forskningsfrågorna utifrån empiriska data innebär att data måste tolkas. Datamaterialet, som i denna studie i första hand utgörs av det transkriberade materialet och av videofilmerna men också från fältanteckningarna och de insamlade elevarbetsbladen, måste av forskaren tillskrivas en mening i en kontext. Vid dataanalysen har jag använt variationsteori och variationsteoretiska begrepp som beskrevs i kapitel 3. Med variationsteorin som analysverktyg kunde jag förstå hur lärare behandlar det matematiska innehållet och urskilja de öppnade dimensionerna av variation (DoV).

Tillvägagångssättet för analysen har utvecklats från Häggströms (2008) analysmodell som omfattar följande steg:

- Step 1 – Identifying the content possible to compare
 - Step 2 – Analysing the handling of the mathematics
 - Step 3 – Focusing one object of learning at a time
 - Step 4 – Focusing the aspects 'taken for granted'
- (Häggström, 2008, sid. 74-78)

Den analysmodellen som jag har använt har stora likheter med det analysförfarande som Häggström (2008) redovisar. Skillnaden består i steg 1 eftersom data i min studie innehåller lektioner där

undervisningsinnehållet "växande mönster" bestämdes av mig som forskare innan lektionerna spelades in.

Steg 1

Analys av data har skett löpande under hela forskningsprocessen. Den började under inspelningen av den första lärarens undervisning. Medan lektionen spelades in gjorde jag anteckningar om vad i innehållet läraren varierade respektive höll konstant, om begrepp som ansågs viktiga i sammanhanget och/eller om lärarens frågor var av intresse för studien. Analysen fortsatte när det transkriberade materialet producerades. Att transkribera de videofilmade lektionerna lämnade utrymme för tankeverksamhet som höll analysprocessen i gång hela tiden. Parallellt med arbetet att skriva ner filmmaterialet gjorde jag kommentarer om mina egna reflektioner om lektionen i en kolumn bredvid kolumnen med det transkriberade materialet. Vid varje ny lektionsinspelning ledde mina observationer till nya uppslag, frågor och idéer om vad jag skulle fokusera på vid mina observationer och analyser framöver. De ledde mig också tillbaka att se över materialet av den/de redan inspelade och transkriberade lektionerna och analysera med nya erfarenheter i bagaget.

Steg 2

När fältarbetet hade avslutats och alla transkriberingar gjorts gick jag in i en fas då systematiska bearbetningar av filmerna, det transkriberade materialet, observationsanteckningarna samt reflektionerna gjordes. Jag började med att omsorgsfullt läsa genom hela det transkriberade materialet och se om de inspelade lektionerna utan att stoppa filmerna. Sedan inleddes fasen med att analysera en lärares undervisning åt gången. Som stöd i analysprocessen skapade jag ett antal frågor som skulle hjälpa mig att hålla fokus på forskningsfrågorna. Frågor som ställdes till de skrivna texterna och filmerna var: Vilka mönster av variation används? Vad varierar i den analyserade situationen? Vad hålls konstant? De delar av lektionen som utgjorde en grund för att besvara dessa frågor markerades i texten.

I nästa fas delades de beskrivna lektionerna in i mindre sekvenser. Jag upprepade läsningen av det skrivna materialet och tittandet på de inspelade filmerna för att kunna fastställa var en

lektionssekvens slutade och en annan började. Jag såg om de avgränsade sekvenserna flera gånger efter varandra. Ännu en gång försökte jag utröna vilka aspekter av innehållet som läraren riktade elevernas uppmärksamhet på. Jag försökte svara på frågan vilka dimensioner av variation som öppnades upp. För varje lektionssekvens noterades dimensioner av variation som öppnades. Nya frågor, idéer och nytt sätt att tänka dök upp även i den här fasen. De nya frågorna och idéerna som jag fick vid analysen av en lärares undervisning hjälpte mig att göra en djupare analys av de andra lärarnas undervisningssituationer. Mina erfarenheter från noggrann undersökning av ett klassrum gjorde det lättare att analysera mönster av variation i ett annat klassrum. Detta steg i analysen genererade en preliminär förteckning över potentiellt intressanta dimensioner av variation. Listan med dimensioner av variation skrevs in i en tabell där det också markerades med en kryss i vilken/vilka lärares undervisning dessa dimensioner av variation öppnades.

Steg 3

Uppsättningen av dimensioner av variation hade varit föremål för flera förändringar allt eftersom lektionerna upprepade gånger analyserades. Förändringen gällde både listans utökning med nya dimensioner av variation men även hur dessa benämndes. För att få mer ordning bland det stora antalet DoV använde jag mig av datorns klipp- och klistrafunktion. På detta sätt sorterades de av mig hittade DoV utifrån vad som ges möjligt för eleverna att lära när en viss DoV öppnas. Ur de hittade DoV utkristalliserades fem lärandeobjekt. Successivt började en mer strukturerad lista med DoV växa fram. De DoV grupperades i fem grupper, en för varje lärandeobjekt. Placeringen av en DoV eller en aspekt i en grupp visade sig vara långt ifrån okomplicerad. Ibland är skillnaden mellan aspekterna i olika dimensioner av variation så små att variation av dem kan anses öppna samma DoV. Exempelvis kan aspekten "olika typer av utökningsenheter" och "formen på utökningsenheten" stå för samma sak. Skillnaden består i att när det pratas om olika typer av utökningsenheter anses utökningsenheter konstruerade av olika byggelement. Om formen på utökningsenheten pratas det i sådana sammanhang där byggelementen är

konstant och används för att konstruera växande mönster bestående av olika utökningsenheter.

Att placera DoV i olika grupper när det gäller att relatera till ett lärandeobjekt visade sig långt ifrån vara enkelt och krävde en djup analys och reflektion. Till exempel ett flertal av DoV som motsvarade ett viktigt inslag i lärandeprocessen om att beskriva ett matematiskt mönster var samtidigt en nödvändig förutsättning för att konstruera egna och fortsätta på redan påbörjade matematiska mönster. Sådana DoV är "ett växande mönster består av olika figurer som förändras med en viss regelbundenhet" och "olika sorters matematiska mönster" för att nämna några.

Steg 4

Resultatet från föregående steg i analysen visade att en del av DoV inte öppnades i alla fyra lärares undervisning. Detta skulle kunna betyda att motsvarande aspekter av de fem lärandeobjekt togs för givet och därmed hölls invarianter. I ett nytt försök att verifiera om verkligen så var fallet återvände jag ytterligare en gång till mina data. Jag koncentrerade mig på en DoV åt gången och kontrollerade om den öppnade DoV i en lärares undervisning verkligen aldrig öppnades i de andra lärares undervisning. I det sista steget av analysen fokuserade jag bara de förgivettagna aspekterna. Avslutningsvis tittade jag efter olikheterna i hanteringen av innehållet mellan de fyra klassrummen. Min analys och mina tolkningar har i analysarbetets slutfas gestaltats i två skriftliga berättelser – en där de fyra lärarnas undervisning beskrivs och analyseras och en där likheter och skillnader mellan olika lärares sätt att behandla växande mönster i undervisningen diskuteras.

Studiens kvalitet och generaliserbarhet

Kravet på god kompetens och hög kvalitet ställs på all forskning. Kravet gäller både genomförande av forskning och framställande av resultat. Forskare från olika traditioner kan ha olika synsätt på vad kvalitet i en kvalitativ forskning är (Thornberg & Fejes, 2012). En nyckel till att diskutera en forskningsstudies kvalitet kan vara utifrån begreppet intern validitet (Bryman, 2011). Den interna validiteten avser hur väl forskningsresultaten överensstämmer med

den verklighet som har studerats. Den handlar om forskarens tolkning av det som studeras och beskrivning av tillvägagångssättet (Bryman, 2011). Frågan som skulle vara intressant att ställa är om man som forskare har lyckats fånga de kvalitativa skillnaderna i olika lärares sätt att behandla ett matematiskt innehåll som undersökningen syftar till att beskriva.

I denna studie har jag försökt förstärka den interna validiteten genom att klart beskriva hela forskningsprocessen. Jag har också strävat efter att beskriva och problematisera de val och överväganden som har gjorts under studiens genomförande och analysprocess. Att tydligt beskriva tillvägagångssättet i en studie underlättar för läsaren att avgöra hur tillförlitlig och systematisk datainsamlingen och dokumentationen är (Thornberg & Fejes, 2012). För att andra skall kunna bedöma resultatets tillförlitlighet gäller det att som forskare klargöra på ett tydligt sätt hur man har kommit fram till ett resultat. Jag har förankrat resultatet i data och försökt illustrera resultatets innehåll med empiriska exempel. För forskaren handlar det också om att förstå det fenomen som studeras på djupet och att göra rika beskrivningar av det studerade för att ge läsaren möjlighet att värdera och bli övertygad av resultatet (Bryman, 2011). Min ambition är att försöka förstå matematikundervisningen i algebra. Studiens resultat består av noggrann beskrivning av fyra lärares undervisning med variationsteoretiska begrepp som verktyg i beskrivningen. Även det som har varit möjligt för eleverna att lära beskrivs.

I kvalitativ forskning är det forskaren som samlar in och analyserar data. Dessa processer kan påverkas av forskarens personliga erfarenheter (Thornberg & Fejes, 2012). Vår förförståelse påverkar vårt sätt att se och förstå något vilket medför att en tolkning eller observation aldrig kan vara objektiv. Jag vill understryka att jag inte gör anspråk på att skriva fram någon objektiv verklighet. Jag har gjort tolkningar om lärares sätt att behandla ett innehåll och samtidigt försökt vara medveten om mina erfarenheter som lärare, min förförståelse om variationsteorin och mina personliga värderingar. Genom att ensidigt förhålla mig till mina forskningsfrågor har jag medvetet försökt distansera mig till empirin. Variationsteorin har varit ett redskap som bidragit till distanseringen. Om en annan teori som analysverktyg hade använts skulle resultatet se annorlunda ut.

En fråga som ofta diskuteras i samband med en studies kvalitet är huruvida den kunskap som studien producerar påverkar andra och kan användas i andra sammanhang. I vilken utsträckning studiens resultat kan appliceras på andra personer, situationer och miljöer som inte har ingått i studien benämns vanligtvis som studiens generaliserbarhet (Bryman, 2011). Att utifrån ett enskilt fall dra allmänna slutsatser är varken möjligt eller lämpligt i denna studie. Fyra lärare kan inte vara representativa för samtliga andra lärare i Sverige. Den generella relevans som denna studie har faller under den form av generalisering som kallas för generalisering på metanivå (Thornberg & Fejes, 2012). Den innebär att lärare kan reagera på resultatet på ett sätt som innebär att hon/han kan känna igen sig själv eller andra eller kan förstå sig själv eller sin undervisning på ett nytt sätt. I en sådan situation överförs forskarens tolkning genom lärarens egen tolkning på hennes/hans undervisningssituation. Insikten om hur en annan lärare behandlar ett innehåll kan generaliseras genom läsarens tolkningsprocess och förhoppningsvis får den läsande lärare hjälp att förstå sin egen undervisning. Men med tanke på att de variationer i sättet att behandla undervisningsinnehållet som beskrivs i studien skulle kunna generaliseras på annat innehåll i matematikundervisningen, på andra ämnesinnehåll samt på olika nivåer i utbildningssystemet kan studien ändå antas ha en viss generaliserbarhet.

Ett kvalitetskriterium i kvalitativ forskning är studiens etiska värde (Larsson, 2005). Forskaren skall följa en god forskningsetik.

Forskningsetiska överväganden

Forskaren har ett ansvar gentemot de som deltar i undersökningen om deras beteende studeras eller om de ombeds att uttrycka sina åsikter (Silverman, 2006). För att uppnå god etisk forskning skall ställning tas för ett antal mål beskrivna i lagar och deklARATIONER. Enligt Silverman (2006) handlar dessa mål om att försäkra deltagarna om deras frivilliga deltagande i en forskningsstudie, om att deras handlingar och kommentarer behandlas konfidentiellt av forskaren, om att de skyddas från skador och kränkning samt om att ömsesidig tillit skapas mellan forskaren och deltagarna i undersökningen. De krav som är beskrivna av Vetenskapsrådet (2011) för humanistisk och samhällsvetenskaplig forskning liknar dessa mål. I skriften

”Forskningsetiska principer” (Vetenskapsrådet, 2011) kallas kraven för individskyddskrav och konkretiseras i fyra allmänna huvudkrav för forskningen. *Informationskravet* handlar om att informera de som berörs av forskningen om dess syfte. Enligt *samtyckeskravet* har deltagare i en studie rätt att själva bestämma över sin medverkan. *Konfidentialitetskravet* handlar om offentlighets- och sekretessfrågor. Regeln att de insamlade uppgifter får endast användas för forskningsändamål omfattas av *nyttjandekravet*.

Dessa krav och etiska aspekter har beaktats och noga övervägts i studiens forskningsprocess. I samband med den första kontakten med lärare och rektorer presenterade jag mig och undersökningen. Jag informerade dem kortfattat om syftet med studien och om datainsamlingsmetoderna. Lärarna upplystes om det frivilliga deltagandet och om att de när som helst har rätt att avbryta sin medverkan. När jag berättade om vad studien kommer att handla om för de deltagande lärarna var jag noggrann med att de skulle få tillräckligt mycket information.

De elever som omfattas av studien och deras vårdnadshavare fick skriftlig information om studien. Även de upplystes om att deltagandet är frivilligt och kunde avbrytas när som helst. Vårdnadshavarens samtycke genom skriftligt tillstånd för elevers medverkan i studien krävdes och sparades. Vårdnadshavarens och elevernas önskan om deltagande har respekterats genom att elever som ville delta i studien utan att bli filmade satt utanför kamerans upptagningsområde. Lärare, elever och vårdnadshavare informerades om att det insamlade materialet kommer att användas enbart för avhandlingens syfte och förvaras säkert utan att någon annan förutom jag själv kan komma åt det.

Namnen på de i studien ingående skolorna skrevs inte ut. Alla namn på elever och lärare i det transkriberade materialet ändrades så att en identifikation av deltagarna i studien uteslöts. I den korta beskrivningen av varje klassrum och lektion i resultatkapitlet utelämnades en hel del detaljer. Tillsammans kan detta bidra till att det blir svårare för kollegor, elever och andra läsare att känna igen och koppla ihop dessa klassrum med de medverkande lärarna och eleverna samt med en viss skola. Däremot återstår dilemmat huruvida de deltagande lärarna känner igen sig själva och sin undervisning. De detaljerade beskrivningarna av varje lärares undervisning kan medföra vissa konsekvenser för enskilda

individer. Som jag ser det kan den analys som presenteras upplevas av de deltagande lärarna på två olika sätt. De kan tycka att deras undervisning kritiserats eller att bilden som skapas är felaktig vilket kan leda till besvikelse och/eller minskat självförtroende (Runesson, 1999). Men det är också möjligt att studiens resultat ses som positivt för den egna och den kollegiala professionella utvecklingen eftersom den kan vara ett bidrag till självreflektion och underlag för didaktiska diskussioner.

5. Resultat

Resultatkapitlet visar hur lärare behandlar innehållet växande geometriska mönster på en matematiklektion utifrån en variationsteoretisk analys. I kapitlet presenteras vad som är möjligt för elever att lära. Identifierade likheter och skillnader mellan lärares sätt att behandla undervisningsinnehållet beskrivs i slutet av kapitlet. Beskrivningarna utgår ifrån lärares undervisning och exemplifieras med flera excerpt från de beskrivna undervisningssekvenserna.

Varje lärares undervisning i respektive klass presenteras för sig. Delarna inom resultatkapitlet inleds med en kort beskrivning av klassen och lektionen för att hjälpa läsaren skapa en bild av det som beskrivs senare i texten. Efter detta återfinns analysen av lärares sätt att behandla undervisningsinnehållet om växande geometriska mönster. Behandlingen av det matematiska innehållet följs genom lektionerna och redovisas i kronologisk ordning. Redogörelsen innebär en detaljerad beskrivning av olika undervisningssekvenser. Undervisningssekvenserna är av varierade längd och är utformade på grundval av den typ av aktivitet och innehåll som behandlas under sekvensen. Där beskrivs vilka aspekter av undervisningens innehåll som varierar respektive hålls invarianta och vilka dimensioner av variation som öppnas. De variationsteoretiska begrepp som redovisas i kapitel 3 används som analytiska verktyg för att beskriva hur lärarna kommunicerar och presenterar undervisningsinnehållet för eleverna.

Dimensioner av variation som öppnas i en lärares undervisning samlas i en tabell. I samma tabell presenteras de lärandeobjekt som konstituerades i interaktion mellan eleverna och en lärare i undervisningen. Lärandeobjekten (LO) följs i tabellen av en siffra. Siffran uttrycker den ordning som de fem lärandeobjekten presenteras senare i resultatdelen.

Kapitlet avslutas med en sammanfattning av de öppnade dimensionerna av variation och en redovisning av likheter och skillnader i de fyra lärarnas sätt att behandla växande geometriska mönster. Denna del innehåller en diskussion om de tre lärandeobjekt som hör till matematikområdet algebra och växande mönster. Diskussionen sker för ett lärandeobjekt i taget.

Behandlingen av det matematiska innehållet jämförs i termer av det iscensatta lärandeobjektet. Beroende på hur innehållet behandlades på de olika lektionerna antingen varieras aspekter av lärandeobjektet eller tas för givet och hålls invariants. Undervisningen jämförs beträffande vilka dimensioner av variation som öppnades och inte öppnades i respektive lärares undervisning och vad det kan ha för betydelse för elevernas lärande.

Lärare A

Klassen och lektionen

Det är 19 elever som går i lärare A:s klass och som undervisas av lärare A i alla ämnen förutom i bild, slöjd, idrott och engelska. Lärare A är klassföreståndare i klassen. Elevgruppen som deltar på den beskrivna matematiklektionen är heterogent sammansatt och består av elever med olika prestationsförmåga i matematik. Förutom lärare A brukar en annan lärare vara med på lektionerna. Elevernas bord är placerade i riktning mot den interaktiva tavlan och skrivtavlan (whiteboard) och de sitter parvis eller fyra i rad i klassrummet. De har tillgång till ett stort grupprum som ligger vägg i vägg med klassrummet. Det är för första gången som innehållet växande geometriska mönster behandlas i klassen, enligt läraren.

Den 1h 7 min långa inspelade lektionen startas upp med en kort introduktion. Det följs av en genomgång och enskilt arbete. Under genomgången står lärare A framför skrivtavlan och använder den för att rita och anteckna. Hon bygger olika växande mönster genom att sätta upp färgade glasspinnar på skrivtavlan. Eleverna bygger samma mönster på sina bord med hjälp av färgade tändstickor som läraren har delat ut till var och en. När lärare A ställer en fråga uppmanar hon eleverna att småprata med varandra och komma fram till ett gemensamt svar. Efter en liten stund får ett par elever berätta vad de har kommit fram till medan de andra uppmanas att reagera om de inte håller med. Efter elevernas svar ställer lärare A antingen några följdfrågor eller bekräftar elevernas svar genom att upprepa det. Lektionen avslutas med en sammanfattning av resultaten på uppgiften som eleverna arbetade med enskilt eller i par.

Två tredjedelar av lektionstiden arbetar eleverna med att fortsätta lösa en uppgift som har påbörjats under genomgången. Medan eleverna arbetar går lärare A runt och hjälper elever genom att ställa frågor, visa hur de kan lösa uppgiften genom att bl.a. rita mönstret och samtala med eleverna. De sista åtta minuterna av lektionen ägnas åt att gemensamt titta på vad eleverna har kommit fram till i uppgiften. Eleverna är aktiva under lektionen och följer lärarens instruktioner.

Lärare A:s undervisning

Undervisningssekvens 1 (0:0-3.30) – begreppet mönster introduceras

Lektionen inleds med att eleverna får veta att de skall jobba med mönster på den här matematiklektionen. Lärare A påminner eleverna om att de är väldigt bra på att se mönster. Hon berättar att mönster finns överallt och frågar eleverna om de kan se något mönster i klassrummet. Eleverna är snabba med att ge ett flertal exempel på mönster där en sekvens upprepas på en penna, lärares tröja, på pärm, kaklet på väggen o.s.v. Eleverna får möjlighet att erfara olika sorters mönster där en sekvens upprepas oändligt många gånger. Genom variationsmönstret generalisering visas på en bredd inom aspekten mönster som upprepas. Eleverna uppmärksammas på att ett mönster som upprepas kan se olika ut. En dimension av variation, mönster som upprepas, öppnas.

Ett mönster beskrivs av lärare A som något återkommande, som något som blir lika efter ett tag och som något som vi vet hur det skall fortsätta. Hon pratar om regelbundenheten i förändringen i ett mönster. Men det diskuteras inte att förändringen i mönstret kan innebära regelbundenheten i exempelvis antalet byggelement, färgen på byggelementen och/eller sättet som byggelementen placeras på.

När en elev ger golvet som exempel på ett mönster berättar lärare A att det är ett oregelbundet mönster. Det oregelbundna mönstret beskrivs av läraren som något man inte kan se hur det fortsätter, man ser inget återkommande. Ett regelbundet och ett oregelbundet mönster kontrasteras på så sätt mot varandra. Därmed öppnas en dimension av variation – i ett matematiskt mönster upprepar sig en sekvens på ett regelbundet sätt.

De exempel som ges av elever är en blandning av mönster i vardagen och matematiskt mönster. Lärare A accepterar elevernas alla exempel och ett matematiskt mönsters egenskaper bearbetas inte ytterligare. Att det är mönster inom matematiken som är en regelbunden upprepning medan att det vardagliga mönstret saknar regelbundenheten tas för givet. Det ges inget exempel på ett växande mönster varken av elever eller av läraren. Lärare A tar troligen för givet att de exempel på mönster där en sekvens upprepas som tas upp av elever räcker som grund för att bygga på nya kunskaper om växande geometriska mönster.

Undervisningssekvens 2 (3:50-15.40) - första exemplet på ett mönster behandlas

Det första exempel med växande mönster som det arbetas kring på lektionen är ett stickmönster bestående av fyra tändstickor (Figur 5.1). Lärare A presenterar detta mönster genom att sätta upp fyra stora tändstickor på tavlan. Eleverna ombeds att bygga motsvarande mönster på sina bord med hjälp av de färgade tändstickor som lärare A delar ut till varje elev. Frågan "hur många tändstickor det går åt att bygga den här figuren" besvaras snabbt av eleverna. Alla ser att figuren är uppbyggd av fyra tändstickor.

Figur 5.1. Första figuren i växande mönstret i uppgift 1.

I nästa steg uppmanar lärare eleverna att bygga på med en tändsticka på varje arm så att armarna blir dubbelt så långa. Både lärare A och eleverna bygger på fyra nya tändstickor på den redan byggda figuren (Figur 5.2). De gör det samtidigt, läraren på tavlan och eleverna på sina bord. Även på nästa fråga om antalet stickor i den nya figuren svarar eleverna snabbt och utan något behov av tid till fundering. Läraren vill även veta hur många stickor eleverna lägger till i den nya figuren. Eleverna svarar i kör att det är fyra. Läraren upprepar elevernas svar och konstaterar att det nu är åtta stycken tändstickor i den byggda figuren samt skriver talet åtta under den.

Figur 5.2. Bilden visar hur mönstret ser ut efter att lärare och elever har lagt på fyra nya tändstickor.

Från början är detta en bygguppgift. När läraren frågar hur många stickor som användes för att bygga figurerna flyttas fokus

från byggandet till antalet tändstickor. Figurens form är det samma i de två figurerna medan storleken varierar. Det ges möjlighet att urskilja att det är olika antal byggelement i olika stora figurer. Eleverna har möjlighet att erfara förändringen i storleken som beror på det antalet stickor som läggs till i den nya figuren. En dimension av variation, storleken på en figur i ett växande geometriskt mönster varierar, öppnas.

Lärare A använder begreppet figur några gånger när hon pratar om de olika mönstren som hon och elever bygger. Detta ord varken skrivs upp på tavlan eller bearbetas dess innebörd under lektionen. Det tas för givet att begreppet figur står för figurnumren som har ett stigande numeriskt värde i ett växande (geometriskt) mönster.

Storleken på kryssmönstret som byggs upp under lektionssekvensen förändras ytterligare två gånger. Först skall eleverna fundera på och diskutera hur många tändstickor de skall behöva om de vill bygga figuren med fyra stickor i varje arm. När de väl svarar på frågan och säger att det är 16 tändstickor vill läraren att de skall bygga figuren i fråga för att kontrollera om de hade tänkt rätt. Elevernas byggda figurer bekräftar deras svar. Lärare A ritar upp figuren med fyra streck, som representerar tändstickor, i varje arm bredvid den byggda figuren med två stickor i varje arm och skriver talet 16 under den. Formen på mönstret är fortfarande den samma medan storleken på figuren och sättet att representera den på varieras. Medan eleverna har den byggda figuren med 16 tändstickor på sina bord får de nu möjlighet att se samma figur uppritad på tavlan. Det möjliggörs för dem att erfara samma figur i olika representationer. En dimension av variation, olika sätt att representera ett mönster, öppnas. Elevernas uppmärksamhet riktas mot den ritade figuren genom att läraren informerar eleverna om att ritningen är en bild av den byggda figuren (excerpt A1). Hon gör detta samtidigt som hon ritar.

Excerpt A1

1. L: Nu ritar jag det som ni har lagt. (...) Det går lite fortare. Nu har jag ritat det ni har lagt. Och det går nästan lika bra, eller hur? (...) Det är väldigt bra. Det man har gjort här (pekar på ett bord) kan man också rita.

Den sista frågan till detta mönster blir att lista ut hur många tändstickor det behövs om man har åtta tändstickor i varje arm. När eleverna skall bygga figuren med åtta stickor i varje arm och sammanlagt 32 stickor, får de möjlighet att erfara ytterligare en variant på storleken av samma mönster. När mönstret hålls invariant och storleken på de olika figurerna i mönstret varierar görs det möjligt för eleverna att erfara hur mönstret förändras genom generalisering av aspekten storlek. En dimension av variation, storleken på figurerna i ett mönster varierar, öppnas.

Undervisningssekvens 3 (15.50-21:10) – andra exemplet på ett mönster behandlas

Undervisningen går vidare och ett nytt mönster presenteras för eleverna (se Figur 5.3). Precis som i föregående uppgift bygger lärare A figuren på tavlan först och eleverna på sina bord efter exemplet på tavlan. Det används tre stickor i samma färg (lila) för att bygga figuren.

Figur 5.3. Första figuren i växande mönster i uppgift 2.

Fokus från byggandet flyttas över till antalet stickor när läraren frågar hur många tändstickor som användes från början (excerpt A2, rad 1). Läraren fortsätter att utöka mönstret med ytterligare en triangel som sitter ihop med den första. Den nya triangeln pekar nedåt med spetsen och har en gemensam sida med den första triangeln (Figur 5.4). För att bygga den nya triangeln använder sig läraren av två orangea stickor.

Figur 5.4. Bilden visar hur mönstret ser ut efter att lärare A lagt på två nya tändstickor.

Eleverna bygger motsvarande figur på sina bord. Därefter skall eleverna fundera på hur många tändstickor till som behövs för att få två trianglar. I första uppgiften talade läraren om hur många stickor eleverna skulle lägga på den redan byggda figuren. Här ser eleverna den färdiga figuren och skall försöka upptäcka det antal tändstickor, som i detta fall är två, som går åt att utöka mönstret med en sekvens (excerpt A2, rad 4). För en triangel behövs det tre tändstickor. För två trianglar behövs det fem tändstickor. Mönstret är invariant och det totala antalet stickor som används för att bygga de olika figurerna varierar, vilket medför att storleken på mönstret också varierar. Eleverna får möjlighet att erfara hur ett mönster kan bli upplagt i termer av antalet byggelement som behövs för att bygga mönstret.

Excerpt A2

1. L: Hur många tändstickor hade vi från början?
2. Marcus: Tre.
3. L: Tre (läraren skriver talet 3 på tavlan).
4. L: Hur många lade vi på för att det skulle bli två trianglar i det här mönstret som vi lägger för att det skulle bli större?
5. Johanna: Två.
(Läraren skriver $+ 2 =$ på tavlan efter talet 3 och under figuren.)
6. L: Hur många blev det?
7. Linnéa: Fem. (Läraren skriver talet 5 efter likhetstecknet. Nu står det $3 + 2 = 5$ på tavlan.)

I undervisningssekvensen där det arbetas med mönstret som består av trianglar uppmanas eleverna att svara på frågorna hur många tändstickor de hade från början och hur många tändstickor de lade till för att bygga två trianglar (excerpt A2, rad 1 och 4). Elevernas muntliga svar skrivs upp med matematiska symboler på tavlan. Trots att beskrivningen består enbart av ökningen antalet tändstickor i aritmetiska termer är det möjligt för eleverna att urskilja en variation i beskrivningen hur ett och samma mönster förändras. Läraren öppnar en dimension av variation beträffande beskrivningssätt när eleverna ges möjlighet att erfara en variation mellan verbalt och numeriskt sätt att beskriva ett och samma mönster.

Under lektionen arbetas det med två olika mönster. Båda är stickmönster men medan i den ena bildas ett kryss av tändstickor bildas det trianglar i det andra (se Figur 5.1 och 5.3). Krysset och triangeln är mönstersekvenser som består av tändstickor som byggelement. Eleverna får möjlighet att erfara att med samma byggelement, tändstickor i detta fall, kan det skapas olika sorters mönstersekvenser som används för att bygga olika sorters mönster. I den ena lägger de stickorna så att de bildar ett kryss. I den andra utgår mönstret från en triangel byggd av tre tändstickor. En dimension av variation, olika sorters mönster, öppnas och olika typer av mönstersekvens används för att bygga mönstren.

För att rikta elevernas uppmärksamhet mot de olika mönstersekvenserna används både bilder men också olika begrepp i undervisningen. Rad 1 och 3 i excerpt A3 visar att lärare A benämner delarna i krysset för armar. Mönstersekvensen i det andra mönstret benämns med matematiska begreppet triangel (excerpt A3, rad 4 och 5).

Excerpt A3

1. L: Kan vi kalla de för armar, de sticker ut så här (sträcker upp armarna)?
2. Flera elever: Ja.
3. L: Förstår ni vad jag menar då? Armarna (pekar på och drar handen längs de fyra armarna på krysset).
4. L: Ni ska bygga en helt annan form. Vi ska göra ett mönster som växer nu också. Och vad ska vi utgå ifrån nu? Jo, vi ska utgå ifrån det här (lägger upp tre stickor som bildar en triangel på tavlan). (...) En, (...) triangel, eller tre tändstickor som sitter ihop.
Lite senare:
5. L: Vi ska bygga på den här triangeln så att det blir ett mönster.

Undervisningssekvens 4 (21:40-59:30) – det andra exemplet på mönster behandlas i ny uppgift

Eleverna har fått var sitt A3-papper som de skall vika två gånger på mitten för att få ett papper med fyra rutor (Figur 5.5).

Figur 5.5. Exempel på elevernas rutblad.

I första rutan (papprets fjärdedel längst upp till vänster) skall de rita mönstret med två trianglar, liknande som de redan har byggt tillsammans och som finns byggt och beskrivet på tavlan. I andra rutan (papprets fjärdedel längst upp till höger) skall de rita och beskriva mönstret som har fyra trianglar. I tredje rutan (papprets fjärdedel längst ner till vänster) skall de rita och beskriva mönstret med tio trianglar. I den fjärde rutan (papprets fjärdedel längst ner till höger) skall de skriva ner antalet tändstickor som behövs för att bygga femton trianglar och berätta hur de har kommit fram till det samt hur de tänkt när de löste uppgiften. Eleverna bygger var sitt mönster och skriver på varsitt papper.

Innan eleverna skall bygga, rita och beskriva själva byggs mönstret med två trianglar på tavlan (undervisningssekvens 3). Det beskrivs med det matematiska uttrycket $3 + 2 = 5$. När lärare A säger att eleverna skall skriva under den ritade figuren att det var tre tändstickor från början och att det sammanlagt blev fem tändstickor efter att två tändstickor lades till uppmärksammas eleverna på ett sätt att beskriva förändringen i det växande mönstret. Sättet att beskriva förändringen med matematiska symboler kontrasteras mot sättet att med ord förklara detsamma. Uppmaningen att i kvantitativa termer beskriva hur mönstret med trianglar förändras kvarstår även när eleverna skall fortsätta bygga figurer med fyra, tio och femton trianglar i samma mönster (excerpt A4).

Excerpt A4

1. L: Jag tänkte att ni skulle fortsätta nu själva, men jag vill att ni skriver ner lite för det är intressant att se hur ni tänker och hur ni gör.
(...)

2. L: I den första rutan vill jag att du ritar den första som vi har gjort här. Den som ser ut så (pekar på den byggda figuren på tavlan). Och skriver under att vi hade tre från början och så la vi till två så fick vi fem. Att vi skriver det under här (pekar på pappret) eller hur? Och sen vill jag att du ökar mönstret till 4 trianglar, och att du ritar hur det ser ut och att du skriver under hur många du har lagt på, och hur det blev.

Någon minut senare.

3. L: Men först då, rita den första rutan (pekar på första rutan) och så rita hur det blev med fyra och förklara lite, skriver hur många du la till (pekar på andra rutan), så gör du samma sak här (pekar på den tredje rutan) på ditt sätt, ritar och förklarar hur många du la till, och sen här (pekar på den fjärde rutan), hur många (...) tändstickor går det åt för femton (skriver 15 i högra nedersta hörnet av den fjärde rutan) trianglar.

Några elever arbetar enskilt och några väljer att diskutera uppgiften med klasskompisen som sitter närmast. När eleverna får möjlighet att diskutera hur de skulle kunna beskriva ett mönster och när de ser varandras beskrivningar som skiljer sig från varandra (se exempel i Figur 5.6) får de möjlighet att urskilja de olika sätt att beskriva hur ett mönster förändras. I en sådan situation öppnas en dimension av variation upp enbart för dessa elever.

Figur 5.6. Exempel på elevernas beskrivning med hjälp av ord och matematiska symboler.

Lärare A går runt i klassrummet under det enskilda arbetet. Hon samtalat, hjälper och uppmanar eleverna att beskriva förändringen i mönstret med ord (Excerpt A5, rad 1 och 5).

Excerpt A5

1. L: Vet du vad jag skulle tycka var intressant? Att du förklarar hur du har tänkt. Varför har du skrivit elva plus tjugoett där?
2. Pontus: För det här är ju tio (pekar på trianglarna), och det är tjugoett.
3. L: Ja. (...)
4. Pontus: Så det är fyra där (pekar på trianglarna) och det är nio, så jag har lagt till en till triangel där.
5. L: Ja. Skulle du kunna tänka dig att skriva det? (...) Skriv bara som du sa.

De elever som uppmanas att beskriva mönstret med ord har redan beskrivit hur mönstret växer med matematiska symboler. Läraren A uppmärksammar dem på att det finns flera sätt att beskriva ett mönster och vill att eleverna också använder ord för att beskriva. En dimension av variation, olika sätt att beskriva ett mönster, öppnas för enskilda elever.

Undervisningssekvens 5 (59:30-67:06) – sammanfattning av elevernas svar på uppgiften

Lektionen avslutas med en gemensam genomgång. Eleverna får berätta om antalet stickor som de har kommit fram till att det går åt att bygga två, fyra, tio och femton trianglar. Klassen är överens om svaren som blev fem, nio, 21, och 31. En elev berättar att hon har upptäckt att det behövs alltid två tändstickor för att bygga en ny triangel förutom för den första då det behövs tre. Lärare A ber om alla elevers uppmärksamhet och upprepar det eleven sa. Hon visar på det uppritade mönstret med fyra trianglar att det är tre tändstickor från början men att man behöver lägga på två tändstickor för att bygga en ny triangel. Först håller hon handen på den första triangeln bland de fyra i mönstret som är uppritat på tavlan och sedan flyttar hon sin hand till höger och uppehåller den vid varje triangel.

En elev får frågan att räkna ut hur många stickor behövs för 20 trianglar. I samtalet mellan lärare A och eleven Marcus ligger fokus på enstaka siffror (Excerpt A6). Samtalet handlar egentligen om att det behövs två tändstickor för att bygga varje triangel förutom för den första. För att bygga den allra första triangeln i mönstret behövs det tre tändstickor. Det totala antalet tändstickor kan räknas ut

genom att multiplicera antalet trianglar med två och addera ett till produkten, kommer läraren och eleverna Marcus, Jacob och Ellen fram till. Under samtalet pekar läraren på de fyra uppritade trianglarna på tavlan. Det är ingen som nämner ordet "triangel" medan de samtalar. Eleverna kan inte heller se mönstret med 20 trianglar. Det sker än så länge ingen variation som skulle möjliggöra för eleverna att urskilja vad de olika siffrorna står för. Lärare A tar för givet att eleverna har förstått vad talen 20 och 2 representerar när hon säger "Ska vi testa med femton? Femton gånger två ..." (Excerpt A6, rad 12). Hon tar inte heller detta exempel till vara för att visa att det går att uttrycka antalet tändstickor generellt om man använder bokstäver istället för siffror. Att antalet trianglar skulle vara identiska med figurnummer i ett växande geometriskt mönster nämns inte.

Excerpt A6

1. Marcus: Okej, vad ska jag ta ... tjugo gånger ... vad då?
2. L: Ja, vad då? Hur många behövde man för varje?
3. Marcus: Ööööö, två typ.
4. L: Två typ?
5. Marcus: Två eller tre.
6. L: Två eller tre? (tittar på Marcus)
7. Marcus: Tre först och sedan två.
8. L: Om vi vill ha tjugo, tjugo gånger två (skriver $20 \cdot 2$ på tavlan) då har du gjort de här, eller hur (pekar i mönstret på tavlan på de tändstickorna som lades på för att bygga den andra, tredje och fjärde triangeln i mönstret).
9. Jacob: 40.
10. L: 40, ja.
11. Ellen: Men det blir 41.
12. L: Men det blir 41. Man måste alltid börja med den (ringar in den allra första tändstickan i mönstret). Den måste vi ha med också. ... Så det är alltså tjugo gånger två plus en (skriver $+ 1 = 41$ efter $20 \cdot 2$ så det står nu $20 \cdot 2 + 1 = 41$ på tavlan). Okej. Ska vi testa nu med femton? Femton gånger två (skriver på tavlan samtidigt som hon pratar), vad är femton gånger två Albin?

Detta sätt att räkna ut antalet tändstickor i ett mönster testas med mönsterexemplen med 20, 15 och fyra trianglar i. Till slut står tre uttryck på tavlan under varandra (Figur 5.7).

$20 \cdot 2 + 1 = 41$ $15 \cdot 2 + 1 = 31$ $4 \cdot 2 + 1 = 9$

Figur 5.7. Matematiska uttryck som visar hur antalet tändstickor i ett visst mönster kan räknas ut.

I dessa tre uttryck varierar antalet trianglar (20, 15 och 4). Antalet stickor i varje triangel ($\cdot 2$) samt den tredje stickan i första triangeln ($+ 1$) är invariant. Det sammanlagda antalet stickor som är beroende av antalet trianglar varierar också (41, 31 och 9). Det möjliggörs för eleverna som har förstått vad de olika talen står för att urskilja att det finns ett samband mellan antalet byggelement och antalet trianglar i ett mönster. En dimension av variation, antalet byggelement är en beroende variabel, öppnas. Det tas för givet att antalet trianglar är samma som figurernas nummer i ett växande geometriskt mönster samt att figurnumret kan användas för att räkna ut antalet stickor i en avlägsen figur.

Dimensioner av variation som öppnas upp i lärare A:s undervisning

Av översikten i Tabell 3 nedan framgår vilka dimensioner av variation som har öppnats i lärare A:s undervisning och vad som har givits möjligt för eleverna i klassen att lära. Dessa ger svar på studiens första och andra forskningsfråga för lärare A. De öppnade dimensioner av variation presenteras i första kolumnen. I den andra, tredje och fjärde kolumnen sammanfattas det som undervisningshandlingar och lärande är riktat mot samt förmåga som möjliggörs att eleverna i klassen skall utveckla, d.v.s. lärandeobjektet (LO). Lärandeobjekten är antingen medvetet eller omedvetet valda av lärare A. I lärare A:s undervisning ges möjligt att lära att a) beskriva ett mönster (LO1), b) fortsätta redan påbörjade mönster och konstruera egna mönster (LO2) samt att c) generellt uttrycka hur ett mönster växer med matematiskt symbolspråk (LO3). Vad som ges möjligt att lära när en specifik dimension av variation öppnas markeras med ett kryss i Tabellen (3).

Tabell 3. *Dimensioner av variation i lärare A:s undervisning.*

<i>Dimension av variaton</i>	<i>LO1</i>	<i>LO2</i>	<i>LO3</i>
I ett matematiskt mönster upprepar sig en sekvens på ett regelbundet sätt	X	X	
<ul style="list-style-type: none"> Ett regelbundet och ett oregelbundet mönster jämförs med varandra 			
Olika sätt att representera ett mönster	X		
<ul style="list-style-type: none"> Samma figur i olika representationer (bild och ord) 			
Olika sätt att beskriva ett mönster	X		
<ul style="list-style-type: none"> Muntligt och med matematiskt symbolspråk 			
Mönster som upprepas	X	X	
<ul style="list-style-type: none"> Ett mönster som upprepas kan se olika ut 			
Storleken på figurerna i ett växande geometriskt mönster förändras	X	X	
<ul style="list-style-type: none"> Olika antal byggelement i olika stora figurer 			
Olika sorters matematiskt mönster	X	X	
<ul style="list-style-type: none"> Olika typer av mönstersekvens 			
Antalet byggelement är en beroende variabel			X
<ul style="list-style-type: none"> Det finns samband mellan antalet mönstersekvenser och antalet byggelement i ett mönster 			

Lärare B

Klassen och lektionen

I lärare B:s tjänst ingår undervisning och klassföreståndarskap i klassen. Hon delar ansvaret för eleverna och för undervisningen i klassen med en annan lärare. Förutom i matematik undervisar hon i svenska och samhällsorienterade ämnen. Elevgruppen som deltar på den beskrivna matematiklektionen är heterogent sammansatt och består av elever med olika prestationsförmåga i matematik. Eleverna i klassen är 27 till antalet. De sitter i grupper om 4-6 elever. Det är första gången som klassen arbetar med växande geometriska mönster, enligt läraren.

Lärare B:s lektion är 1h och 20 min lång. Läraren har förberett olika uppgifter i datorprogrammet ActivInspire. Bilderna som kallas för flipcharts visas på en interaktiv skrivtavla. En flipchart liknar en PowerPoint-bild med den skillnaden att innehållet på flipcharten kan förflyttas och förändras med en anpassad penna. I programmet finns det tillgång till olika funktioner, verktyg, bilder, ljud, mallar m.m. som kan användas vid arbetet med innehållet på flipcharten. Förutom den interaktiva tavlan använder lärare B skrivtavlan under lektionen. Tavlorna hänger bredvid varandra längst fram i klassrummet.

På lärare B:s lektion ges eleverna möjlighet att arbeta själva eller i par med en fråga eller en uppgift. Efter det diskuteras uppgiften eller frågan gemensamt i helklass under lärares ledning. Eleverna har tillgång till konkret material i form av tändstickor och knappar. De har var sin bunt med små lappar med texten figur nr. 1, figur nr. 2, figur nr. 3 o.s.v. upp till figur nr. 10. Eleverna antecknar och ritar på lösa, rutiga blad.

Lärare B:s undervisning

Undervisningssekvens 1 (00.00-16.40) – olika sorters mönster jämförs med varandra

Lektionen inleds med att nio bilder av en mängd mönster visas på den interaktiva tavlan (se Figur 5.8).

Figur 5.8. Bilder på mönster som lektionen inleds med.

Bland bilderna finns exempel på mönster som upprepas, växande mönster, oregelbundet mönster och symönster. Några av bilderna representerar ett matematiskt mönster där det finns en regelbundenhet i sättet att konstruera mönstret och kan förutsägas och andra ett vardagsmönster där det inte finns någon systematik. På detta sätt kontrasteras matematiskt mönster mot vardagsmönster. De minsta beståndsdelarna som mönstren är uppbyggda av varierar mellan kvadrater, blommor, färger, cirkular, m.m. Riktningarna på hur ett mönster skall fortsätta är cirkulär, vertikal (upp och ner) eller horisontell (höger och vänster). Flera aspekter av mönster varierar samtidigt i de presenterade exemplen. När innehållet i undervisningen presenteras på detta sätt görs det möjligt för eleverna att samtidigt urskilja aspekterna olika sorters mönster, olika byggelement, regelbundenhet i mönster, riktningen på hur mönstret fortsätter, symmetri i mönster och ställen där mönster kan hittas.

Eleverna arbetar i par med att diskutera och besvara frågorna om vilka av de presenterade exemplen som är mönster respektive inte är ett mönster. Läraren nöjer sig inte med att eleverna sorterar bilderna i en grupp med mönster och en med icke mönster. De skall dessutom komma överens om ett argument som styrker varför de tycker att en bild är exempel på mönster. Lärare B instruerar eleverna inför pararbetet genom att säga att "Jag skulle vilja att ni (...) kommer överens för varje ... varje bild här ... är det här ett mönster, (...) eller är det inte ett mönster" (excerpt B1). På så sätt uppmärksammas eleverna på att det finns en variation vad gäller svaren på frågorna. Därmed öppnas för en variation angående vad ett mönster är. Denna variation skall presenteras och diskuteras i par och till slut skall eleverna vara överens om ett svar på frågorna.

Excerpt B1

1. L: Nu skulle jag vilja att ni i början på den här lektionen ... tittar på de här olika bilderna och två och två, så som ni sitter, kommer överens för varje ... varje bild här ... (pekar på de olika mönsterexemplen) är det här ett mönster ... ja det är ett mönster. Då måste ni också vara säkra på varför det är ett mönster, eller är det inte ett mönster, nej det är det inte därför att ... Och jag vill att ni, ni kommer inte alls att få lång tid utan ni kommer att göra det här ganska fort, konstatera om det här är ett mönster, det här, det här och det här (pekar på de olika mönsterexemplen), hela den här bilden (gör en cirkulär rörelse runt bilderna). Två och två surrar ni om detta lite. Direkt. Vad är mönster, vad är inte mönster, varför och varför inte.

Efter ca 2 minuter bryter läraren pardiskussionen som därefter följs av en ca 13 minuters lång lärarledd helklassdiskussion. Läraren pekar på en bild i taget och ber några elever berätta vad de har kommit fram till.

Figur 5.9. Det första mönsterexemplet.

När det första exemplet (Figur 5.9) diskuteras berättar en elev att hon och klasskompisen har kommit fram till att det här är ett mönster. När läraren ber henne förklara varför de tycker det har hon svårt att uttrycka sig med ord och vill komma fram till tavlan för att visa (excerpt B2). Väl framme vid tavlan visar hon med kroppen och berättar med ord hur mönstret är uppbyggt. Läraren använder också både ord och sin kropp för att beskriva mönstret i fråga.

Excerpt B2

1. L: Emmie och Felicia, vad har ni sagt om den här (pekar på mönstret som ser ut som en trasmatta)? ...
2. Emmie: Det är ett mönster.

3. L: Det är ett mönster. Då får ni motivera varför.
4. Emmie: För att ... liksom ... först är det ju så här ... det är svårt att förklara men kan jag komma fram.
5. L: Ja det får du gärna. ...
Eleven kommer fram till tavlan
6. Alltså först så är det sådan här (pekar på de första tre ränderna i mönstret) sen är det vitt (pekar på den vita randen) och så streck (pekar på den bruna randen), vitt (pekar på den vita randen) och så blått (pekar på den blåa randen). Alltså det går så hela tiden.
7. L: Ja, det går så hela tiden. Så du menar att det kommer tillbaka (drar ett finger längst mönstret)
8. Emmie: Alltså ... det upprepar sig.
9. L: Det upprepar sig. Det upprepar sig någonting (visar med armarna). Då kan man säga att det är ett mönster.

Både eleven och läraren använder olika representationer för ett och samma mönster. En dimension av variation öppnas i sättet att representera mönster. Mönstret hålls konstant och värden i aspekten representationer varierar från bild till ord och kroppsspråk. Eleven får möjlighet att erfara tre representationer av samma mönster samtidigt. Denna dimension av variation öppnas vid beskrivning av de andra mönsterexemplen också. Det sker i form av att elever och lärare beskriver mönstret som de ser på bild med ord samtidigt som de använder kroppen för att förtydliga det som sägs.

Läraren försöker tillsammans med eleverna få fram en definition av matematiskt mönster och hur det skiljer sig från mönster i vardagen. Hela klassen är överens om att mönstret i Figur 5.9 är ett mönster eftersom mönstersekvenserna upprepar sig (excerpt 2, rad 8 och 9). Efter det diskuteras mönstret i Figur 5.10. Eleven tycker inte att denna bild är ett exempel på mönster eftersom detta mönster saknar den upprepade sekvensen (excerpt B3, rad 7).

Figur 5.10. Det andra mönsterexemplet.

I denna undervisningssekvens erfar elever samtidigt ett mönster som är regelbundet och kan förutsägas och ett mönster i vilket det inte finns någon systematik. I excerpt B3 kontrasterar läraren matematiskt mönster mot något som inte är matematiskt mönster, samt begreppet mönster mot begreppet mönstrad (rad 18). Det som varierar i denna situation är de exempel på mönster som jämförs. I det ena mönstret (se Figur 5.9) riktas elevernas uppmärksamhet mot sekvensen som upprepas på ett regelbundet sätt (excerpt B2, rad 6-9). I det andra (se Figur 5.10) saknas den upprepade sekvensen (excerpt B3, rad 8-10). En dimension av variation, i ett matematiskt mönster upprepar sig en sekvens på ett regelbundet sätt, öppnas. Det diskuteras inte vidare att mönstret som saknar den regelbundet upprepade sekvensen kan i vardagen benämnas som dekoration. Det tas också för givet att begreppet mönstrad kan användas som motsats till begreppet enfärgad.

Excerpt B3

1. L: Vi hoppar vidare dit (pekar på bilden som syns i Figur 5.10). Vad har Johan och Aymen kommit fram till?
Eleverna viskar med varandra.
2. L: Ni får inte sitta och viska.
3. Aymen: Men vi vet inte.
4. L: Är ni lite osäkra?
5. Johan och Aymen: Ja.
6. L: Vad är ni osäkra på Johan?
7. Johan: Ett mönster upprepar ju sig ... men den gör inte det riktigt.
8. L: Vad är det du saknar för att det ska upprepa sig (ritar cirkelar med handen runt den aktuella bilden)?
9. Johan: Samma grej som ...
10. L: Samma grej som syns någon annanstans. Är det så du menar?
11. Johan: Ja.
12. L: Och det här är (ritar cirkelar med handen runt den aktuella bilden) ... ställer till lite.
13. Johan: Ja.
14. L: Känns det här lite huller om buller?
15. Johan och Aymen: Ja.
16. L: Här är det ingen ordning och reda på något vis. Är det så ni tänker?
17. Johan och Aymen: Ja.

(...)

18. L: Det här är faktiskt så att om man pratar om mönster så kan det vara en mönstrad tröja. Då kan det vara mönster som är huller om buller. Men nu kommer det här som är lite speciellt idag. Nu har vi ju matematik här nu då. Och i matematik så är kanske mönster ... då får de inte vara huller om buller. Men på en tröja då ... Är det någon som har ett huller om buller mönster? (...) Man skulle faktiskt kunna säga att Christian har en huller om buller mönster på sig idag. Lite huller om buller. Det är svårt att kunna säga hur detta skulle fortsätta här eller här (pekar ner och upp). Vissa mönster på kläder är mönster. De är mönstrade men mönster kan vara lite huller om buller. Men om vi tänker mönster i matematiken så måste mönstret ... så får det inte vara huller om buller, utan då ska man kunna se lite ordning och reda, man ska kunna se någon regel, som liksom så här blir det (visar med kroppen och händerna). Är ni med på skillnaden?

Nästa bild som diskuteras är ett exempel på ett växande geometriskt mönster (Figur 5.11).

Figur 5.11. Det tredje mönsterexemplet.

Lärare B samtalar med Ellen och Markus kring bilden på växande geometriskt mönster (excerpt B4). Lärare B ställer frågor men också förtydligar Ellens svar. Eleverna ser regelbundenheten i mönstret (excerpt B4, rad 4) och Ellen kan uttrycka det med ord. Lärare B bekräftar Ellens svar och förtydligar att detta mönster är ett växande mönster genom att prata om figurer som växer med en kvadrat (excerpt B4, rad 5). Läraren uppehåller sin hand vid varje figur när hon pratar om dem. Hon uppmärksammar också eleverna på växande mönstrets oändliga natur (excerpt B4, rad 7).

Excerpt B4

1. L: Men här då? Den här tycker jag är lite häftig (pekar på det växande geometriska mönstret med kvadrater). Vad säger Ellen och Markus om det här mönstret med kvadraterna här (pekar på mönstret igen). Eller är det ett mönster? Nu sa jag att det var ett mönster. Vad tycker ni?
2. Ellen: Jag tycker det.

3. L: Du tycker det. Varför tycker du att det är ett mönster?
4. Ellen: För att det kommer ... man sätter alltid på en ny.
5. L: Ja. Man sätter alltid på en ny, en ny för varje figur här (pekar på en figur åt gången) om man nu väljer att kalla de här för figurer så kommer det till en kvadrat. Det ökar med en kvadrat kan man säga. Ja. Men du, då är det frågan vad händer här nu då (pekar på den platsen där figur nummer 5 skulle kunna ritas)?
6. Ellen: Det blir fem.
7. L: Ah! En, två, tre, fyra, fem (pekar på en figur åt gången), det växer liksom. Frågan är finns det något stopp?
8. Ellen: Nej.
9. L: Nej säger Ellen. Det finns inget stopp här. Ett växande mönster. Visst.

Eleverna i klassen kan samtidigt se det växande mönstret där varje figur växer med en bestämd utökningsenhet, en kvadrat i detta fall (Figur 5.11), och mönstret där en sekvens upprepas, som i exemplet är ränder av olika färg och bredd (Figur 5.9). Mönster som upprepas kontrasteras mot växande mönster. Det möjliggörs för eleverna att lära sig att det finns olika sorters matematiska mönster när denna dimension av variation öppnas.

Vid en första anblick ser nästa exempel på mönster i Figur 5. 12 ut som ett växande geometriskt mönster. Men om man analyserar mönstret lite mer ingående kan man lägga märke till att det byggs ut med tre rutor i varje ny figur men på ett osystematiskt och oregelbundet sätt.

Figur 5.12. Det fjärde mönsterexemplet.

På grund av att det inte finns en regelbundenhet i mönstret är det omöjligt att förutse hur en figur längre fram i sekvensen skall se ut. Eleverna upptäcker både att det är endast antalet rutor som är möjligt att förutse (excerpt B5, rad 8) och att de tre nya klossarna placeras på olika platser varje gång (excerpt B5, rad 1). Med sina

frågor "Vad händer här?" samt "Skulle du kunna rita upp den där (en figur längre fram i mönstret som inte syns)?" riktar lärare B elevernas uppmärksamhet mot att man i ett växande geometriskt mönster måste kunna förutse hur figurerna längre fram i mönstret ser ut för att kunna fortsätta bygga eller rita mönstret (excerpt B5, rad 2 och 11). För det behöver man upptäcka mönstrets regelbundenhet som innebär att klossarna läggs på ett regelbundet sätt. För att förutse antalet byggelement, i detta fall klossar, räcker regelbundenheten i antalet byggelement som ett mönster växer med. Det senare jämför läraren med ett talföljd (excerpt B5, rad 13). Mönstret i Figur 5.12 kan göras om till en aritmetisk talföljd 1, 4, 7, 10 ..., där varje nytt tal ökar med en konstant värde i förhållande till det föregående talet.

Excerpt B5

1. Johanna: Kolla liksom, här (kommer fram till tavlan och pekar på figur nummer tre), de bygger kanske på men de gula bitarna flyttar sig hela tiden till olika ställen. Där (pekar på figur nummer fyra) vet jag inte ens vad de kommer ifrån och så flyttar den sig hela tiden. Där (pekar på figur nummer fem) nu var den här (pekar på den gula klossen längst ner i figuren) och sen flyttar den sig hit (pekar på den gula klossen längst upp på den sjätte figuren).
2. L: Och vad händer här då (pekar på platsen där figur nummer sju skulle kunna byggas eller ritas)?
3. Johanna: Ingen aning.
4. L: Ingen aning. Varför har du ingen aning?
5. Ted: Jag måste bara.
6. Johanna: För att de gula flyttar sig hela tiden.
7. L: De flyttar sig inte efter något speciellt mönster utan här flyttar de sig så, sen flyttar de sig så, sen så och sen så och sen vet vi inte (pekar på en figur i taget och vrider och väder på händerna). Ted?
8. Ted: Titta här! Här bygger de på tre (kommer fram till tavlan och pekar på figur nummer två), här bygger de på tre, bygger de på tre (pekar samtidigt på de gula klossarna i de olika figurerna i mönstret), bygger på tre, bygger på tre.
9. L: Och då tycker du att det är ett mönster för?
10. Ted: Att de bygger på. Det är likadant här, fast här bygger man på ett (pekar på det växande mönstret med kvadrater som växer med en ruta för varje ny figur).

11. L: Just det! Är det här som du tycker är ett mönster så ökar det med tre för varje steg (pekar på en figur åt gången). Men Ted, skulle du kunna rita upp den där (pekar på platsen där figur nummer sju skulle kunna byggas eller ritas)? Skulle du kunna veta hur den såg ut?

12. Ted: Nej.

13. L: Nej. Men vet du vad du säger? Du säger att det ökar med tre hela tiden. Då är det ökningen i antalet mönster, men så här som den här, som nå'n nu har gjort, den borde ha gjort den här påbyggnaden på ett regelbundet sätt så att man kunde se att de tre nyaste hela tiden hamnar längs ut eller... Så det är alldeles rätt. Ni har rätt båda två. Man ser inte vad som kommer att hända här (pekar efter figur nummer sex), då blir det inget mönster, men du har kommit fram till att ett mönster i antal istället, i hur många klossar som ökar hela tiden. Det är som ett talmönster istället.

Ett regelbundet växande geometriskt mönster kontrasteras mot ett oregelbundet växande geometriskt mönster som är ett talmönster när exempel på dessa behandlas efter varandra i undervisningen. Att mönstret är ett växande geometriskt mönster hålls konstant. Antalet byggelement ökar med ett konstant värde i de två växande geometriska mönstren som eleverna kan se samtidigt på tavlan. I den ena byggs ut figurerna på ett regelbundet sätt medan i den andra finns ingen regelbundenhet i hur figurerna byggs. Ett växande geometriskt mönster måste byggas ut med en regelbundenhet både när det gäller antalet byggelement som varje ny figur växer med och sättet som byggelementen organiseras i varje ny figur. En dimension av variation – ett växande mönster består av olika figurer som förändras med en viss regelbundenhet – öppnas. Eleverna ges möjlighet att urskilja att både förändringen i antalet byggelement och sättet som de placeras på måste vara regelbundet i ett växande geometriskt mönster.

Undervisningssekvens 2 (16:50-44:20) – första exemplet på ett växande geometriskt mönster behandlas

I de uppgifterna med växande geometriskt mönster som klassen arbetar vidare med på lektionen utgår lärare B ifrån de tre första figurerna i mönstret. I Figur 5.13 kan vi se första uppgiften som behandlas på lektionen.

Figur 5.13. En uppgift med växande geometriskt mönster.

Mönsterfigurerna i uppgiften är byggda en bit ifrån varandra så att det syns tydligt var en figur avslutas och var nästa figur börjar. Ovanför de ritade figurerna är figurens nummer skrivet. Det påvisar figurens ordinala nummer i det växande mönstret. Elevernas uppgift är att först bygga i par och sedan enskilt rita av den första, andra, tredje, fjärde och den femte figuren. Medan eleverna arbetar går läraren runt i klassrummet. Ett par elever har byggt ett antal romber utan något mellanrum. När läraren upptäcker detta hjälper hon eleverna att bygga mönstret så att figurerna kommer en bit ifrån varandra.

Excerpt B6 illustrerar hur kommunikationen går till när lärare B gör eleverna Ted och Oliver observanta om att bygga ett växande geometriskt mönster. Lärare B tydliggör att lappen med texten "figur nr. 1" skall ligga ovanför den första figuren i det växande mönstret, lappen med texten "figur nr. 2" ovanför den andra figuren o.s.v. (excerpt B6, rad 2). Oliver visar att han har förstått när han själv lägger lappen med texten "figur nr. 3" ovanför den tredje figuren i det växande mönstret och säger "och det här är trean" (excerpt B6, rad 3). Sedan visar och beskriver Lärare B eleverna Ted och Oliver två olika sätt att bygga ett växande geometriskt mönster (excerpt B6, rad 4). När hon säger "allting hänger ihop" samt "du måste dela upp lite" samtidigt som hon pekar på två mönster som är byggda på olika sätt visar hon skillnaden i att bygga figurerna i ett växande geometriskt mönster tätt intill varandra eller en bit ifrån varandra.

Excerpt B6

Läraren har tidigare sagt till Ted att han måste bygga om sina figurer.

1. Ted: Nu då? Är du nöjd?

2. L: Ja. Ganska nöjd. Nu är det lite mer struktur här. ... (Lägger lappen med texten "figur nr. 1" ovanför första byggda figuren). En. ... (Lägger lappen med texten "figur nr. 2" ovanför andra byggda figuren). Detta är tvåan då. ... Så.
3. Oliver: Och det här är trean (sträcker sig till Teds sida av bordet och lägger lappen med texten "figur nr. 3" ovanför tredje byggda figuren).
4. L: Jag tror att det här ser ut som om allting hänger ihop. Så här måste du dela upp lite (pekar på mönsterraden som Oliver har byggt).
5. Oliver: Sure!

I denna situation kontrasteras för eleverna Ted och Oliver två olika sätt att bygga ett växande geometriskt mönster – med figurerna tätt intill varandra och med figurerna en bit ifrån varandra. Därmed öppnas för dessa elever en dimension av variation – ett växande mönster består av olika figurer som sitter en bit ifrån varandra. Denna aspekt tas däremot för givet i förhållande till hela klassen eftersom den inte varierar för alla elever.

När eleverna i klassen är klara med de tre första figurerna fortsätter de att bygga och rita den fjärde och femte figuren i mönstret. Samtidigt som byggandet av de nya figurerna pågår ser eleverna de tre första figurerna som är både byggda och avbildade. De olika figurerna finns både på tavlan och på elevernas egna bord. Eleverna får möjlighet att erfara ett och samma mönster som en bild och som ett med laborativt material byggt mönster. En dimension av variation, olika sätt att representera ett mönster, öppnas.

Lärare B påpekar flera gånger för eleverna att hon vill att de lägger lapparna med de olika figurnumren ovanför sina byggda figurer. När det är dags att rita av mönstret skall eleverna skriva figurnumret ovanför varje ritad figur. När hon ger instruktionerna visar lärare B på tavlan hur hon vill att eleverna skall göra genom att skriva upp figur nr. 1, figur nr. 2 o.s.v. till figur nr. 5. Hon ritar upp de två första figurerna under respektive markering av figurens ordningstal och skriver antalet tändstickor i första och andra figuren. Hon upprepar att hon vill att eleverna skall skriva figurernas nummer på en rad på pappret när de ritar av mönstret. I denna undervisningssekvens är det figurernas nummer som fokuseras. Figurernas nummer används simultant på flipcharten, på tavlan, på lapparna som elever använder när de själva bygger

mönstret och på elevernas ritningar. En dimension av variation, varje figur har ett nummer, öppnas. Frågan om att ett figurnummer bestämmer figurens plats i mönstret berörs inte. Figurernas ordinala aspekt tas för givet.

Liksom lärare B har gjort på tavlan skall även eleverna skriva under den ritade figuren antalet tändstickor som det har gått åt att bygga figuren. Detta skall göras för figur nummer 1, 2, 3, 4 och 5 i mönstret. Under denna aktivitet kan eleverna finna ett mönster i hur antalet tändstickor förändras från figur till figur. Mönstret är invariant och det totala antalet stickor som används för att bygga de olika figurerna ökar från fyra till åtta och sedan till 12, 16 o.s.v., vilket medför att storleken på figurerna också förändras. I denna situation öppnas en dimension av variation - storleken på figurerna i ett växande geometriskt mönster förändras.

När byggandet och avbildning av de första fem figurerna i mönstret är avklarat får eleverna i uppgift att räkna ut hur många stickor det behövs till den tionde figuren. Nu får eleverna inte bygga denna figur. De skall med hjälp av mönstret som de har sett i de första fem figurerna försöka tänka ut antalet tändstickor i den tionde figuren. Först får eleverna diskutera i par och sedan följer en gemensam genomgång ledd av läraren. Genomgången börjar med att lärare B vill veta hur många tändstickor det behövs till varje ny figur (excerpt B7, rad 1). Elevernas uppmärksamhet riktas mot figurerna som förändras med en viss regelbundenhet när det gäller antalet byggelement som varje ny figur växer med. Sedan skall eleverna beskriva hur mönstret växer med ord (excerpt B7, rad 3-8).

Från den konkreta muntliga beskrivningen går lärare B vidare till en mer abstrakt representation och så småningom beskrivs mönstret också med matematiska symboler (excerpt B7, rad 9). Eleverna har kvar det byggda mönstret på sina bord, både de och läraren har ritat mönstret och mönstret beskrivs med ord och matematiskt symbolspråk. Mönstret studeras i olika former och översättningar mellan olika representationsformer så som fysisk, bildmässig, verbal, numerisk och symbolisk fokuseras. Det växande mönstret hålls konstant medan sätten att beskriva det växande mönstret varieras. Eleverna ges möjlighet att urskilja olika sätt att beskriva ett och samma mönster.

Eleverna beskriver mönstret med ord genom att fokusera på antalet byggelement och utökningseenhet som varje ny figur växer

med (excerpt B7, rad 2 och 4), på relationen mellan figurnummer och antalet utökningsenheter i figuren (excerpt B7, rad 6) samt på relationen mellan figurnummer och antalet byggelement/tändstickor i figuren (excerpt B7, rad 8). I samma växande mönster beskrivs förändringen i hur mönstret växer på olika sätt. En dimension av variation, olika sätt att beskriva ett mönster, öppnas.

Efter att Lovisa berättar att antalet romber i figur nummer 1 och figur nummer 4 överensstämmer med den aktuella figurens nummer (excerpt B7, rad 6) ger lärare B också fyra exempel på detta (excerpt B7, rad 7). Figurernas nummer varierar medan figurnumret och antalet romber i varje figur är samma. På detta sätt fokuseras samband mellan olika figurnummer och figurens utseende. Det möjliggörs för eleverna att se en länk mellan figurernas nummer i mönstret med antalet utökningsenheter i figuren.

Excerpt B7

1. L: Jag vill veta hur många fler tändstickor behöver du alltid till nästa figur i det här mönstret, det vill jag först veta. Hur många stickor behöver du alltid till nästa figur?
2. Johanna: Fyra.
3. L: Man behöver fyra till varje ny figur. Okej. Då skulle jag vilja att någon här beskriver hur detta mönster växer, beskriva med ord. Hur det här mönstret växer för varje figur, Daniella.
4. Daniella: Mönstret växer alltid med en romb.
5. L: Aha, mönstret växer alltid med en romb för varje figur. Är det någon som tänker säga på något mer sätt? Lovisa?
6. Lovisa: Att figur ett är det en romb och figur fyra är det fyra.
7. L: Ååå. Du har sett ett samband. Lyssna nu noga! Nu måste ni verkligen lyssna på varandra. Nu säger Lovisa att på figur fyra är det alltid fyra romber, på figur tre är det alltid tre, på figur två är det alltid två på figur ett är det en (pekar på varje figurnummer och figur). Är det så du menar? Du ser kopplingen mellan figurnumret och hur många romber det är. Okej. Är det någon som vill uttrycka på något mer sätt? ... Vem var det som sa att det ökade med fyra stickor? Daniella. Om du använder det då vad skulle du kunna säga om det då?
8. Daniella: Alltså, varje gång man tar tre figurer då ökar det alltid med tre fyror, då kan man bara tänka tre gånger fyra.
9. L: Här menar du (pekar på figur nummer 3)? Det här skulle man kunna räkna ut tre gånger fyra på stickorna. Stickorna är lika med

tre gånger fyra. (läraren skriver samtidigt på tavlan under figur nummer 3 $S = 3 \cdot 4$) För på varje sådan här (pekar på en romb) så är det fyra. Hur många stickor är det i trean? Stämmer det med det du säger?

10. Daniella: Tolv.

11. L: Stickorna lika med tolv. (Samtidigt skriver läraren på tavlan under figur nummer 3 $S = 12$) Men, om man hoppar hit då (pekar på figur nummer 2). Vad skulle man kunna säga om man använder det sättet Daniella hade här (pekar på figur nummer 3)? Här var det tre stycken med fyra i varje, tre gånger fyra. Vad säger Gustaf?

Daniella beskriver samma växande mönster som Lovisa genom att uttrycka en relation mellan ett figurnummer och antalet byggelement i figuren. Samma exempel på växande geometriskt mönster beskrivs på två olika sätt och en dimension av variation, olika sätt att beskriva ett matematiskt mönster, öppnas. Daniellas exempel gäller figur nummer 3. Hon berättar att eftersom varje romb (utökningsenhet) består av fyra tändstickor (byggelement) kan det totala antalet stickor i en figur räknas ut genom att multiplicera figurens nummer med fyra. Lärare upprepar Daniellas exempel och ger ytterligare tre nya. De nya exemplen gäller figur nummer 2, figur nummer 5 samt figur nummer 10. Läraren är noga med att berätta att figurens nummer är samma som antalet romber i figuren samt att varje romb består av fyra tändstickor.

Antalet tändstickor beskrivs med matematiskt symbolspråk för de uppritade figurerna ett till fem och figur nummer 10. För att beteckna antalet tändstickor används versalen S . Antalet sammanlagda tändstickor i en figur räknas ut genom att multiplicera antalet romber med fyra. Siffran fyra står för antalet tändstickor som går åt att bygga en romb. Således blir antalet tändstickor i figur nummer tio $S = 10 \cdot 4$.

Läraren går tillbaka till det sambandet som Lovisa berättade om (excerpt B7, rad 6) att antalet romber i en figur är lika med figurens nummer. Detta samband som eleverna har funnit beskrivs för varje figur med symboler. Lärare B ringar in figurnumret och numret som visar antalet romber i det matematiska uttrycket för varje figur uppritad på tavlan och kopplar ihop dessa två inringade tal med ett streck emellan ringarna (se Figur 5.14). Bokstaven S och talet fyra hålls konstant för de sex ovan nämnda figurer. Talen som representerar figurnumret varierar. Eleverna ges möjlighet att se att

med ökat figurnummer ökar även antalet tändstickor i mönstret. Dimension av variation, antalet byggelement är en beroende variabel, öppnas och eleverna ges möjlighet att lära sig att det totala antalet byggelement i en figur har ett samband med figurens nummer.

Läraren går vidare med att ge en ny fråga till eleverna om en avlägsen figur i mönstret. Hon undrar hur många tändstickor det behövs för att bygga figur nummer 105. Eleverna diskuterar i par för att komma fram till svaret. Efter en stund får eleven Daniella berätta vad hon har kommit fram till. Daniella använder sig av det hon vet om antalet tändstickor i figur nummer 10 (excerpt B8, rad 2). Hon delar upp figurnumret 105 på figurnummer 100 och figurnummer 5. Hon vet att tio gånger tio är hundra och tror att om figurnumret är tio gånger mer i figur nummer 100 än i figur nummer 10 så är antalet stickor också det. Det stämmer i just denna uppgift men är ingen generell regel som kan användas till alla växande mönster. Hon multiplicerar antalet tändstickor från figur nummer tio, som är 40, med 10. Produkten 400 adderar hon med 20 som hon har fått fram genom att multiplicera 5 med fyra.

Lärare B hänger med på elevens resonemang (excerpt B8, rad 3 och 5). Hon verkar inte vara helt nöjd med detta svar och vill veta hur många som använder sig av det de vet från figurerna med lägre nummer istället för att använda figurnumret 105 (excerpt B8, rad 9). Lärare B rör sig från individ- till gruppnivå när hon vill veta hur många i klassen har använt sig av samma resonemang som Daniella.

Excerpt B8

1. L: Vad säger Daniella? Har ni ... alltså jag bara gör så här nu, figur nummer etthundrafem (skriver "figur nr. 105" på tavlan).
2. Daniella: Öh. ... Eftersom i figur 10 är det 40 (pekar mot tavlan i den riktningen där uppgifter om figur nummer fyra är uppskrivna), så gånger tio det blir fyrahundranågonting, ja fyrahundra blev det, och så ...
3. L: Ni visste att figur nummer tio hade fyrtio (pekar på "figur nr. 4" och talet 40) och hundra det är tio sådana figurer eller?
4. Daniella: Ja.
5. L: Ni tänkte tio gånger fyrtio (skriver $10 \cdot 40$ på tavlan). Okej och det blev fyrahundra (skriver = 400).

6. Daniella: och så tänkte vi fem figur ... femman att det är fyra gånger fem är tjugo.
7. Lärare: Fyra gånger fem (skrifer $4 \cdot 5 = 20$ på tavlan) ... lika med tjugo. Okej.
8. Daniella: Och sen fyra hundra plus tjugo. Något sådant.
9. L: Okej. Hur många var det som gjorde så här? Alltså gjorde så här att räkna ut fyrahundra plus tjugo på olika sätt? ... Några stycken. Hur många var det som utgick ifrån det ni visste på tian (gör cirkulära rörelser runt figur nummer tio)? Räck upp handen är ni snälla. Hur många var det som utgick ifrån det här som ni hade fått reda på här (gör cirkulära rörelser runt figur nummer tio)? Inte så många men ändå när jag går runt och tittar så är det rätt många som har räknat ut det här med fyrahundra först. Är det någon som har använt figurnumret 105 någonstans (gör ett frågande min med ansiktet)?

Hon upprepar två gånger frågan och är tydlig med sitt kroppsspråk när hon pekar på figur nummer 10. Att antalet tändstickor i figur nummer 10 används för att räkna ut antalet tändstickor i figur nummer 105 fokuseras i undervisningssekvensen men tas inte riktigt om hand av läraren. Hon nöjer sig med att konstatera att det är några elever som använder sig av den här metoden och går vidare med sin undervisning. I undervisningen tas för givet att eleverna urskiljer att proportionaliteten mellan två figurers nummer inte kan överföras på relationen mellan antalet tändstickor i dessa figurer. Man kan inte fördubbla antalet tändstickor i figur nummer 2 för att få antalet tändstickor i figur nummer 4 i alla växande geometriska mönster. Eleverna som eventuellt har använt ett annat sätt att räkna ut antalet tändstickor i figur nummer 105 har fått möjlighet att se ytterligare ett sätt att lösa samma uppgift. Uppgiften är invariant medan sättet att lösa det varierar. En dimension av variation, olika sätt att räkna ut antalet byggelement i en figur, öppnas för de elever som har använt ett annat sätt att lösa uppgiften.

En annan elev, Josefine, har upptäckt en regel som hon har använt sig av för att räkna ut antalet tändstickor i figur nummer 105 (excerpt B9, rad 9-11). Hon visar att hon har en förmåga att generalisera när hon använder sig av kunskapen hon har om figur nummer 3 för att svara på frågan om figur nummer 105.

Excerpt B9

1. Josefine: Jag tog 4 gånger 105, och då tänkte jag först ... det blir typ, jag tänkte typ fyra gånger 105 det blir typ 400.
2. L: 4 gånger etthundrafem (skriver på tavlan).
3. Josefine: Jag vet inte alltså.
4. L: Men, du har bara räknat ut det. Vad kom du fram till?
5. Josefine: 420
6. L: 420 (skriver på tavlan) (...) Josefine hon har använt ... Vad fick du 105 ifrån då?
7. Josefine: Det var figurnumret.
8. L: Figurnumret? Och då har du tagit det gånger fyra. Varför har du gjort det?
9. Josefine: För att, t.ex. figur nummer tre, det är tre gånger fyra.
10. L: Figur nummer tre, det är tre gånger fyra. (Läraren pekar på figur nummer tre medan hon upprepar vad eleven har berättat)
11. Josefine: Det är samma sak fast det blir 105 gånger fyra.
12. L: Oh! Då vänder jag på det då, så att det blir precis som du säger. (Läraren suddar $4 \cdot 105$ och skriver $105 \cdot 4$) Det är samma sak fast du har tagit 105 gånger 4 för att få fram antal stickor och S är samma sak som 420 (skriver på tavlan $S = 420$). Alltså vet du vad du har gjort? (läraren vänder sig till eleven) Du har kommit på en formel. ... Det är sant! Du har kommit på en formel. Och den formeln ser ut så här Josefine. Stickor (skriver S på tavlan och vänder sig till klassen) alltså antal stickor, det vet vi inte det är det vi vill ta reda på ... på figurnummer 105. (Vänder sig mot tavlan och skriver $S = F \cdot 4$) Antal stickor och det är samma sak som figurnumret gånger fyra. (vänder sig till eleven) Och då har du bytt ut figurnumret mot 105 (pekar på tavlan), och 105 gånger fyra är 420 (vänder sig till klassen).
13. Helena: A men vad enkelt!
14. L: Eller hur? Den här formeln kan man använda att räkna ut precis vilken figur som helst i det här mönstret. Så nu vill jag veta ... jag vill veta hur många stickor det går åt till figur nummer 250. Varsågod! Använd formeln!

Lärare B tar till vara Josefines sätt att uttrycka det generella i mönstret med ord och gör om det till en formel. Hon pratar om fördelen att använda sig av formel när man vill uttrycka sig generellt med matematiska uttryckssätt (excerpt B9, rad 14). Formeln testas med figur nummer 105 och figur nummer 250. På tavlan är formeln $S = F \cdot 4$ uppskrivet samt matematiska uttryck för

hur man räknar ut det totala antalet stickor för figur nummer 1, 2, 3, 4, 5, 10 och 105 (se Figur 5.14).

Figur 5.14. Tavlans utseende.

Bokstaven S och siffran 4 hålls konstant när formeln används för att räkna ut det totala antalet tändstickor i en figur. Figurnumren varierar. En dimension av variation, en formel är ett generellt uttryck, öppnas. Eleverna får möjlighet att urskilja att en formel som uttrycker antalet byggelement i en figur gäller för fler än en figur i ett växande mönster.

Undervisningssekvens 3 (44:30- 46:50) – begreppet "formel" fokuseras

På den interaktiva tavlan syns olika formler som används för att räkna ut en rektangelns respektive en triangelns area och omkrets. Figuren nedan är en kopia av lärare B:s bild.

Formler

Arean av en rektangel = basen $\cdot$ höjden

$$A = b \cdot h$$

Omkretsen av en rektangel = $2 \cdot$ basen + $2 \cdot$ höjden

$$O = 2b + 2h$$

Area av en triangel = $\frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2}$

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Omkretsen av en triangel = $a + b + c$

$$O = a + b + c$$

Figur 5.15. Bilden med olika formler.

Lärare B kopplar det nya innehållet, som handlar om formler, till ett för eleverna redan känt innehåll inom området geometri. Hon berättar om formeln för rektangelns area som något man kan använda när man vill ta reda på hur stor en rektangelns yta är. Hon säger också att "den här formeln kan man använda på vilken rektangel som helst, det är det som är grejen med formler". Hon presenterar en formel som ett problemlösningssverktyg, som en användbar modell samt som något man använder för att generalisera. Lärare B ger exempel på två rektanglar, en stor och en liten, och byter ut basen och höjden i formeln för rektangelns area mot längden av rektangelarnas sidor. Hon visar att formeln anger ett systematiskt samband mellan två ospecificerade storheter som kan tänkas anta alla värden. Eleverna ges möjlighet att erfara att formeln för rektangelns area gäller fler än en rektangel. I denna sekvens öppnas dimensionen av variation – en formel är ett generellt uttryck.

På frågorna vad eleverna har för tankar om formler och vad de tänker på när de hör ordet "formel" svarar en elev att hon tänker på häxor när de använder trollformler. Betydelsen av begreppet "formel" inom algebra jämförs med dess användning inom geometri och inom trolldom. I och med att läraren uppmärksammar denna tanke ger hon möjlighet för eleverna att erfara användningen av begreppet "formel" inom tre olika kontexter. Därmed öppnas en dimension av variation – begreppet "formel" i olika sammanhang.

Undervisningssekvens 4 (47:00-65:10) – andra exemplet på ett växande geometriskt mönster behandlas

Under denna undervisningssekvens arbetar eleverna med ett nytt växande geometriskt mönster (Figur 5.16).

Figur 5.16. En uppgift med växande geometriskt mönster.

Precis som i förra uppgiften med det växande geometriska mönstret skall eleverna även nu bygga i par och sedan enskilt rita av den första, andra, tredje, fjärde och den femte figuren i mönstret. De blir påmindas om att lägga rätt lapp med texten som talar om figures plats i mönstret över rätt figur. Under varje figur skall eleverna skriva antalet små runda träbitar som betecknas med versalen T. För att räkna ut antalet träbitar i figur nummer 10 får eleverna varken bygga eller rita utan använda sig av det sedda mönstret i de föregående figurerna. Under det enskilda och pararbetet pågår i en grupp en diskussion mellan tre elever. De samtalar om hur man kan gå till väga för att räkna ut antalet tändstickor i figur nummer 10. För att komma fram till det sammanlagda antalet träbitar i figur nummer 10 fördubblar två elever antalet tändstickor i figur nummer 5 (excerpt B10, rad 2 och 5) medan en elev multiplicerar figurnumret 10 med antalet armar i figuren som är tre (excerpt B10, rad 3). Lovisas och Josefs idé om att dubbla antal byggelement om figurnummer dubbleras tycker inte Daniella om (excerpt B10, rad 9). Hon berättar om sitt sätt att räkna ut antalet träbitar i figur nummer 10.

Excerpt B10

1. L: Hur många träpluttar behövs till figur nummer 10? ...
2. Lovisa (sitter mitt emot Daniella och Josef): Okej. Man kan ta två gånger ... eller femton plus femton.

3. Daniella: Så. Det är tre gånger tio. ... Vad gör du (till Josef som sitter bredvid henne)?
4. Josef: (---)
5. Daniella: Jaha (skratt). Du skriver femton plus femton lika med trettio.
6. Josef: Ja.
7. Daniella: Varför gör du det?
8. Josef: (---)
9. Daniella: Nej, men det ska vi inte göra.

Samma uppgift (invariant) löses på två olika sätt (variant). I denna situation har en dimension av variation, olika sätt att räkna ut antalet byggelement i en figur, öppnats för Josef och Daniella.

Det enskilda och pararbetet följs av en genomgång. Först frågar läraren hur många träbitar som alltid behövs för att bygga en ny figur. Elevernas uppmärksammas på regelbundenheten i antalet byggelement som varje ny figur växer med, d.v.s. att varje ny figur växer med tre träbitar. Sedan vill lärare B att någon beskriver hur mönstret växer för varje figur. Mönstret beskrivs på olika sätt. Först muntligt med ord, sedan med ett matematiskt uttryck och sist med en formel.

Eleverna berättar att de har sett att det är tre armar i varje figur och att antalet träbitar i varje figur överensstämmer med figurens nummer. De skriver $T = 1 \cdot 3$ för figur nummer 1, $T = 2 \cdot 3$ för figur nummer 2 o.s.v. fram till figur nummer 5. T står för det sammanlagda antalet träbitar i en figur. Talet tre representerar de tre armarna i mönstret. Denna kunskap kan de använda när de räknar ut antalet träbitar i figur nummer 10. Läraren skriver upp figurnumren på tavlan, ritar upp figurerna under rätt figurnummer och skriver de matematiska uttrycken under varje figur (se Figur 5.17).

Figur nr 1	Figur nr 2	Figur nr 3	Figur nr 4	Figur nr 5
$T = 1 \cdot 3$	$T = 2 \cdot 3$	$T = 3 \cdot 3$	$T = 4 \cdot 3$	$T = 5 \cdot 3$
$T = 3$	$T = 6$	$T = 9$	$T = 12$	$T = 15$

Figur 5.17. De matematiska uttrycken på tavlan

Läraren berättar och visar genom att peka på respektive uttryck att talen 1, 2, 3, 4 och 5 i de matematiska uttrycken står för antalet träbitar i en av armarna i mönstret och att det är samma tal som figurens nummer. Versalen T och siffran tre i uttrycken är invarianta. Siffrorna som står för antalet träbitar i en av armarna och figurenas nummer varierar, likaså det totala antalet träbitar i en figur. Med ökat figurnummer ökar även det totala antalet träbitar i mönstret. Eleverna får möjlighet att erfara att antalet byggelement i en figur har ett samband med figurens nummer. En dimension av variation, antalet byggelement är en beroende variabel, öppnas

Eleverna kommer själva med förslag på en formel som kan användas för att räkna ut antalet träbitar i vilken figur som helst i mönstret. De enas om formeln $T = F \cdot 3$, där bokstaven T är antalet träbitar, bokstaven F är figurnummer och talet 3 de tre armarna i mönstret. Formeln testas på figur nummer 4 och figur nummer 203 och det visas att formeln gäller för fler än en figur i mönstret.

I denna uppgift väljer läraren att använda versalen T för att representera antalet träbitar jämfört med versalen S som användes för att representera antalet stickor i första uppgiften. Versalen F, som används för figurnumret i båda uppgifterna, hålls konstant. Bokstäverna T, S och F är variabler som används för att formulera ett samband mellan figurnumret F och antalet byggelement T eller S i en figur. I de två exemplen av växande geometriska mönster är sambandet uttryckt i formlerna $S = F \cdot 4$ och $T = F \cdot 3$ för beräkning av antalet stickor respektive träbitar som funktion av figurnumret. Versalen F som står för figurnummer är konstant medan versalerna S och T som står för byggelementen varierar. När läraren visar att olika bokstäver kan användas för variabler i en formel öppnas en dimension av variation.

Undervisningssekvens 5 (65:20–79:40) – tredje exemplet på ett växande geometriskt mönster behandlas

Den sista uppgiften som arbetas med på lektionen är ett nytt exempel på växande geometriskt mönster med tändstickor och finns i Figur 5.18. Skillnaden mellan denna uppgift och de två föregående är att i denna finns redan angivna formler som beskriver hur mönstret förändras medan i de andra två fick eleverna själva komma på en formel. Bland de formlerna som finns skall eleverna hitta den rätta formeln.

Figur 5.18. En uppgift med växande geometriskt mönster.

I de fyra angivna formlerna som visas på den interaktiva tavlan är versalerna S och F samt multiplikationstecknet invariants. S representerar det totala antalet tändstickor i en figur medan F representerar figurernas nummer. Hur formeln fortsätter efter multiplikationstecknet varierar. Siffrorna som används i formlerna representerar antalet stickor i första figuren (siffran 5), antalet stickor som läggs på i varje ny figur (siffran 4) samt den allra första stickan till vänster i den första figuren (siffran 1). En dimension av variation, en formel kan se olika ut, öppnas. Eleverna ges möjlighet att erfara att i en formel kan användas en eller två olika räknesätt samt en eller flera olika siffror.

Eleverna skall inte bygga detta mönster utan bara rita upp figur nummer 1, 2, 3, 4 och 5. Uppgiften går ut på att komma fram till antalet stickor som mönstret växer med för varje figur och hitta den rätta formeln. Lärare B vill att eleverna arbetar i par med denna uppgift. Under tiden eleverna arbetar går lärare B runt och hjälper eleverna. Då ser hon att några elever har avbildat mönstret på ett felaktigt sätt. De har ritat varje hus för sig utan den gemensamma väggen som varje ny hus delar med det föregående som på bilden i Figur 5.18. Detta sätt att rita mönstret skulle innebära att varje hus är byggd av fem tändstickor. I mönstret på bilden i Figur 5.18 är första huset byggd av fem tändstickor och varje kommande hus av fyra tändstickor eftersom de delar en vägg.

Lärare B ritar upp det växande mönstret med husen tätt intill varandra och en bit ifrån varandra. Dessutom beskriver hon de två

olika sätten att rita samma växande mönster med ord (excerpt B11, rad 1). När hon säger "Ni får inte dela upp dem i ett hus för sig." samt "De sitter ihop" (excerpt B11, rad 1) får eleverna höra hur mönstret skall ritas respektive inte ritas. Eleverna får också möjlighet att se dessa två sätt att rita samma växande mönster.

Lärare B markerar utökningsenheten som mönstret växer med i figur nummer 2 med en annan färg än den färgen som figuren var uppritad med från början. Samtidigt som hon gör det berättar hon för eleverna varifrån tändstickorna i figur nummer två kommer ifrån (excerpt B11, rad 6). Då får eleverna möjlighet att urskilja att figur nummer 2 i mönstret består av figur nummer 1 och den utökningsenheten som varje ny figur skall växa med. I det mönstret som läraren tänkte att de skall arbeta med växer mönstret med de fyra markerade tändstickorna. Om man ritar husen en bit ifrån varandra behövs det fem tändstickor för varje ny figur. Sättet att rita ett mönster påverkar hur formeln skall se ut.

Excerpt B11

1. L: Ni måste rita dem precis så här (pekar på de uppritade figurerna på tavlan). Lyssna noga! ... Ni får inte dela upp dem i ett hus för sig, om man nu tänker att det är ett hus. Det sitter ihop här (pekar på husens gemensamma vägg). Så ni som har gjort så här på era ritningar (ritar upp två hus för sig) ... lyssna nu. ... Det får ni inte göra! För det är inte så det ser ut. Det är jätteviktigt att ni uppmärksammar det. Det är inte så det ser ut här (pekar på bilden på den interaktiva tavlan). Det är någonting som händer på ... på den här andra som redan finns (pekar på figur nummer 2) ... för nästa figur. Så ni som har gjort sådana måste ändra.

...

2. L: Ni som nu har delat på dem (pekar på figur nummer 2 på tavlan) varför fick ni inte göra det? Vad var det som hände när ni delade på dem Daniella?

3. Daniella: Då blir det en mer för varje figur.

4. L: Då blir det en mer för varje figur. Då blir det fem (ritar ett hus på tavlan), och så blir det fem (ritar ett hus till på tavlan en bit från det första huset). Men det är inte sant, eller? För hur mycket ökar ... hur många fler stickor behöver man alltid för nästa figur Daniella?

5. Daniella: Fyra.

6. L: Man behöver alltid fyra. Och då tittar jag på tvåan först (pekar på figur nummer 2 på tavlan). ... De här fyra (ritar över de fyra

tändstickorna som man la på på figur nummer 2 med en annan färg) är ju ditlagda ifrån den här (pekar på figur nummer 1). Okej?

Lärare B visar hur mönstret i detta fall skall avbildas med husen som delar en vägg med det föregående men också hur det inte skall avbildas med husen en bit ifrån varandra. Hon ritar upp båda mönstren på tavlan och jämför dessa. Ur ett variationsteoretiskt perspektiv är detta exempel på variationsmönstret kontrast. Eleverna får möjlighet att urskilja skillnaderna mellan två sätt att avbilda samma mönster. En dimension av variation, ett mönster kan ritas på olika sätt, öppnas.

Det är flera elever som har löst uppgiften och hittat formeln som beskriver mönstret. Oliver kommer fram till tavlan och berättar för de andra hur han har tänkt när han arbetade med uppgiften. Han har sett att mönstret förändras med fyra tändstickor för varje ny figur. Då skall man ha figurens nummer gånger fyra i formeln, alltså $F \cdot 4$. Men han har också sett att de fyra tändstickorna inte räcker till att bygga figur nummer 1 som är byggd av fem tändstickor. Därför måste man ha en extra tändsticka vilket uttrycks i formeln som $+1$. Den rätta formeln för detta mönster är $S = F \cdot 4 + 1$.

Lektionen avslutas med öppningen av dimensionen av variation - olika sätt att hitta rätt formel. Lärare B berättar för eleverna att man antingen ser en "översättning" från det ritade mönstret till formeln eller så kan man arbeta med uteslutningsmetoden (excerpt 9, rad 1 och 9). Uteslutningsmetoden innebär att man testar alla formler genom att sätta in figurnumret och det totala antalet stickor i figuren istället för bokstäverna F och S i formeln och tar bort de formlerna som inte ger en rätt ekvation. Uppgiften och mönstret hålls konstant. Sättet att komma fram till rätt formel varierar.

Excerpt B12

1. L: Ja ... Om man inte kommer på det här som Oliver har kommit på nu, tack så mycket Oliver, finns det, om ni skulle få de här fyra stycken (pekar på formlerna på bilden) skulle man kunna utesluta dem? Alltså skulle man kunna få bort nå'n bara? Hur gör man då? ... Hur gör man för att få bort dem? Om man, om man testar funkar denna (pekar på första formeln). Kan man testa det? Om den funkar? Hör ni?
2. Flera elever: Ja, ja.

3. L: Hur då Marica? Om jag tar den här formeln S är lika med F gånger 4. Då tar jag och stoppar in vad då för nå'nting?
4. Marica: Öh. (---) Ett exempel?
5. L: Ja. Ta figur nummer tre till exempel (pekar på figur nr 3).
6. Marica: Öh, S lika med tre gånger fyra är tolv plus ett tretton.
7. L: Det blir tretton. Då har du kollat att den stämmer (pekar på formeln $S = F \cdot 4 + 1$). Men om man hade tagit den här då (pekar på formeln $S = F \cdot 4$)? Tre gånger fyra var det för figur nummer tre. Tre gånger fyra är ... tolv.
8. Marica: Hm.
9. L: Stämmer det överens med det då? Nej. Det funkar inte. Bort med den! (...) Men det som jag ville testa med dig Marica, det var ju att om man inte kan tala om vilken formel som passar här att man faktiskt kan testa det genom att stoppa in det här figurnumret här (pekar på formlerna) och se vad som stämmer Marica. Är du med? Ja. Så man kan prova vilken det är som blir rätt faktiskt ifall man inte kan klura ut det vilken formeln det ska vara så kan man testa. Och de som inte stämmer de plockar man bort.

Under lektionen arbetas med växande geometriska mönster som är konstruerade av olika byggelement och där formen på utökningsenheten varierar. Det ges möjlighet för eleverna att erfara olika typer av växande geometriska mönster även när det gäller antalet byggelement och typen av utökningsenheten som varje ny figur förändras med men också antalet byggelement i den första figuren. Detta sätt att undervisa öppnar dimensioner av variation olika sorters matematiska mönster samt hur ett växande mönster förändras är unikt för varje nytt exempel.

Dimensioner av variation som öppnas upp i lärare B:s undervisning

När jag presenterar sammanställningen av de öppnade DoV och vad som gavs möjligt för eleverna att lära under lärare B:s undervisning besvarar jag de två första forskningsfrågorna för lärare B. Dimensioner av variation som har öppnats i lärare B:s undervisning presenteras i första kolumnen i Tabell 4. I de tre andra kolumnerna sammanfattas det som undervisningshandlingar och lärande är riktat mot samt förmåga som möjliggörs att eleverna i klassen skall utveckla, d.v.s. lärandeobjektet som är medvetet eller omedvetet valt av lärare B. Det framgår i Tabell 4 att lärare B:s

undervisning ger möjlighet för eleverna att lära sig att a) beskriva ett mönster (LO1), b) fortsätta redan påbörjade mönster och konstruera egna mönster (LO2) samt c) uttrycka generellt hur ett mönster växer med matematiskt symbolspråk (LO3). När en dimension av variation öppnas ges det möjligt för eleverna att lära ett eller flera av ovan beskrivna lärandeobjekt, vilket markeras med ett kryss i Tabell 4.

Tabell 4. Dimensioner av variation i lärare B:s undervisning.

<i>Dimensioner av variation</i>	<i>LO1</i>	<i>LO2</i>	<i>LO3</i>
I ett matematiskt mönster upprepar sig en sekvens på ett regelbundet sätt <ul style="list-style-type: none"> Ett regelbundet och ett oregelbundet mönster jämförs med varandra 	X	X	
Hur ett växande mönster förändras är unikt för varje nytt exempel <ul style="list-style-type: none"> Antalet och typen av byggelement i utökningsenheten varierar Formen på en utökningsenhet varierar 	X	X	
Ett växande mönster består av olika figurer som förändras med en viss regelbundenhet <ul style="list-style-type: none"> Ett regelbundet växande geometriskt mönster jämförs med ett oregelbundet växande geometriskt mönster 	X	X	
Varje figur i ett växande geometriskt mönster har ett nummer <ul style="list-style-type: none"> Figurnummer används i både ritade och byggda mönster 		X	X
Olika sätt att representera ett mönster <ul style="list-style-type: none"> Samma mönster i olika representationer (bild, ord och kroppsspråk) Samma växande geometriska mönster i olika representationer (bild och konkret/laborativt material) 	X		
Olika sätt att beskriva ett mönster <ul style="list-style-type: none"> Muntligt och med matematiskt symbolspråk Genom att ange antalet byggelement/utökningsenhet samt genom att beskriva relationen mellan figurnummer och antalet byggelement/utökningsenheter 	X	X	
Olika sorters matematiska mönster <ul style="list-style-type: none"> Mönster där en sekvens upprepas jämförs med ett växande geometriskt mönster Olika typer av utökningsenhet Samma byggelement – olika växande mönster 	X	X	
Storleken på figurerna i ett växande geometriskt mönster förändras <ul style="list-style-type: none"> Olika antal byggelement i olika stora figurer 	X	X	

Olika sorters växande mönster	X	X
<ul style="list-style-type: none"> Olika byggelement och olika form på utökningsenheten 		
Ett växande mönster kan ritas/byggas på olika sätt		X
<ul style="list-style-type: none"> Varje ny utökningsenhet kan ritas en bit ifrån den föregående eller tätt inpå Ett växande mönster består av olika figurer som sitter en bit ifrån varandra 		
Antalet byggelement/utökningsenheter är en beroende variabel		X
<ul style="list-style-type: none"> Det finns samband mellan figurernas nummer i ett växande mönster och antalet byggelement/utökningsenheter i figuren. 		
En formel är ett generellt uttryck		X
<ul style="list-style-type: none"> En formel gäller för fler än en figur i ett växande mönster Formeln för en rektangels area gäller fler än en rektangel 		
Begreppet "formel" kan användas i olika sammanhang		X
<ul style="list-style-type: none"> Betydelsen av begreppet "formel" inom algebra jämförs med dess användning inom geometri och inom trolldom 		
Olika sätt att räkna ut antalet byggelement i en figur		X
<ul style="list-style-type: none"> Dubblera antal byggelement om figurnummer dubbleras jämförs med att använda figurnumret i ett generellt uttryck 		
Olika bokstäver kan användas för variabler i en formel		X
<ul style="list-style-type: none"> Versalerna S, T och F används 		
En formel kan se olika ut		X
<ul style="list-style-type: none"> I en formel kan användas en eller två olika räknesätt I en formel kan användas en eller flera olika siffror 		
Olika sätt att hitta rätt formel		X
<ul style="list-style-type: none"> Att uttrycka förändringen i mönstret med matematiskt symbolspråk jämförs med att använda uteslutningsmetoden. 		

Lärare C

Klassen och lektionen

Lärare C är klassföreståndare i klassen och undervisar eleverna i matematik, teknik och naturorienterade ämnen. Elevgruppen som deltar på den beskrivna matematiklektionen är heterogent sammansatt och består av elever med olika prestationsförmåga i matematik. Det går 19 elever i lärare C:s klass. Eleverna sitter två och två. De flesta bord är placerade parvis i tre rader och är vända mot tavlan. Några enstaka bord är placerade mot fönstret respektive mot väggen mittemot fönstren. Klassen har börjat arbeta med algebra några lektioner tidigare. Materialet som de använder ingår i ett skolutvecklingsprogram för grundskolan och kallas för Naturvetenskap och teknik för alla (NTA). Temat "Mönster och algebra", som klassen arbetar med, har utvecklats med fokus på matematik och är ett av ett flertal teman i NTA.

Matematiklektionen som har spelats in i klassen är 43 min lång. Läraren har skrivit "Mönster och Algebra" på tavlan medan eleverna var på rast. När eleverna kommer in till klassrummet tittar de efter vad som står på tavlan och hämtar sina så kallade algebraskrivböcker och sätter sig på sina platser. De antecknar i sina skrivböcker under lektionen.

Den största delen av lektionstiden (ca 38 minuter) arbetas det med ett problem. Under denna del av lektionen visar först några elever med vägledning av läraren hur de löser problemet praktiskt och sedan arbetar eleverna parvis med uppgiften. De använder sig av laborativt material under pararbetets gång. Till sist leder lärare C en genomgång där hon i ständigt samtal med eleverna arbetar fram en värdetabell och kommer fram till en formel som beskriver mönstret i problemet de arbetar med. Lärare C använder skrivtavlan under genomgången.

De sista 5 minuterna av lektionen behandlas ett växande geometriskt mönster. Lärare C ritar upp mönstret på tavlan och eleverna gör detsamma i sina skrivböcker. Precis som vid förra uppgiften skriver lärare C in olika värden i en tabell. Under genomgången ställer hon frågor och enstaka elever svarar på dem. Med stöd av talen i tabellen beskrivs sambandet mellan figurnumren och antalet byggelement i figurerna med en formel.

Eleverna antecknar hela tiden i sina skrivböcker det som lärare C skriver på tavlan.

Lärare C:s undervisning

Undervisningssekvens 1 (0:20–8:50) - en problemlösningsuppgift introduceras

Lektionen börjar med en kort sammanfattning av vad som kommer att hända på lektionen. Eleverna får veta att de kommer att arbeta med att lösa ett problem på den här lektionen. De blir informerade om att en grupp först kommer att visa praktiskt/dramatisera hur de löser problemet och sedan kommer alla andra att arbeta med det i par. Elevernas uppgift blir att lösa problemet och att skriva hur de har kommit fram till lösningen.

Läraren går genom uppgiften och visar konkret/laborativt materialet som eleverna skall använda. I laborationen ingår vita A4 papper, träfigurer i två storlekar som representerar vuxna och barn och tändsticksaskar som representerar båtar. Läraren berättar att varje par kommer att behöva 7 stora trägubbar (vuxna), 2 små trägubbar (barn), en båt och ett A4 papper som föreställer en flod. Eleverna får också veta att materialet kommer att delas ut efter dramatiseringen medan lappen med uppgiften (Figur 5.19) delas ut till alla elever före.

Sju vuxna och två barn ska ta sig över en flod. Till sin hjälp har de en enkel gummibåt. Båten klarar bara av att ta med sig ett eller två barn eller en vuxen men inte en vuxen och ett barn, heller inte två vuxna.

Hur ska gruppen göra för att ta sig över floden? Använd gubbarna och båten.

Vilket är det minsta antal roddturer som krävs för att sju vuxna och två barn ska komma över floden?

Figur 5.19. Problemlösningsuppgift "Ta er över floden".

Efter introduktionen möbleras det om i klassrummet för att få plats för dramatiseringen. Läraren väljer ut en grupp elever som skall praktiskt demonstrera lösningen på denna uppgift. Sju pojkar blir utvalda att spela vuxna, två flickor blir utvalda för att spela barn och tre elever skall bilda en cirkel genom att hålla varandra i

händerna och representera en båt. Det fria klassrumsgolvet längst bak i klassrummet är en flod som de skall ta sig över. Läraren går genom reglerna som gäller vad båten klarar av att ta med sig. Eleverna skall komma fram till lösningen på den första frågan i uppgiften (Figur 5.19). Frågan handlar om tillvägagångssättet de skall använda sig av för att ta sig över floden. Under dramatiseringen pågår ett ständigt samtal mellan läraren och eleverna om hur de skall gå till väga för att komma över floden. En elev upptäcker att de har gjort fel någonstans efter att gruppen har genomfört några turer (excerpt C1, rad 10). Läraren väntar med att avbryta aktiviteten då båten är på väg över floden med den andra vuxna. Nu finns det två vuxna men inga barn på ena sidan floden, d.v.s. den sidan som alla skall vara på när problemet är löst, och 5 vuxna och två barn på andra sidan floden.

Excerpt C1

1. L: Hur ska ni göra nu för att få över någon till den andra sidan? Hur skulle ni börja med? Vad tycker du?
2. Helen: Två barn.
3. L: Två barn säger hon. Okej. Då tar ni två barn och för över dit. (...) Ja, och då lämnar ni båda barnen där.
4. Helen: Och så ska en köra båten tillbaka.
5. L: Ja, då sticker ni över. Ska någon, ett barn med eller?
6. Helen: Ja, alltså för att köra båten.
7. L: Ja just det. Då hoppar hon in där, det lilla barnet och hämtar en vuxen kanske. ... Ja, titta vad de gör! Nu tar ni en vuxen och kör över hit. ... Och vad gör vi nu?
8. Elin: Ett barn ska dit.
9. L: Ett barn. Hej då! (klassen skrattar) ...
10. Madelen: Vad konstigt det blir.
11. L: Nej. Var med på vad de gör. Nu tar de en ny vuxen och kör över. ... Men, men vänta lite nu. Vad ska ni göra nu?
12. Elinor: Det skulle vara två barn som skulle över.
13. Adam: Ja.
14. L: Det blir något fel, va? Därför att vi börjar nu få tillbaka de vuxna, va. Ja, då får ni gå tillbaka och börja om igen.

Eftersom det bara är ett eller två barn respektive en vuxen som båten klarar av att ta med sig och den kan inte förflytta sig utan

någon människa ombord måste samma vuxen som nyss har kommit över åka tillbaka. Då har båten kört två onödiga turer. För att klara av uppgiften måste alltid ett barn vara över på andra sidan floden. Detta barns uppgift är att hela tiden hämta det andra barnet. Vid det här laget är det flera elever som visar intresse för att komma med förslag på lösningen. Även de som är åskådare uppmuntras till att ge förslag. Gruppen börjar om från början och med hjälp av flera klasskamratar lyckas de ta tre vuxna över floden. Då vill läraren avbryta aktiviteten eftersom flera elever signalerar om att de vet hur uppgiften skall lösas (excerpt C2, rad 2). Men efter önskemål från elevernas sida att fortsätta (excerpt C2, rad 3), tar de alla sju vuxna och de två barnen över floden. Innan de fortsätter uppmanar läraren eleverna att se efter mönster utan att precisera vad för slags mönster som skall upptäckas (excerpt C2, rad 4).

Excerpt C2

1. Zanna: Nu vet vi hur det ska vara.
2. L: Ja. Är ni nöjda så?
3. Flera elever: Nej!
4. L: Vi gör hela. Det går rätt fort nu. Titta nu om ni kan se något mönster!
5. Zanna: två barn, ett barn, en vuxen, ett barn, två barn (pekar med armen fram och tillbaka).

Läraren låter eleverna göra på ett sätt som kräver onödigt många antal turer att köra personerna över floden en gång innan tillvägagångssättet som kräver minst antal turer tillämpas. Uppgiften är invariant medan tillvägagångssättet att lösa den varierar. Ett mindre effektivt sätt att lösa uppgiften kontrasteras mot ett mer effektivt sätt. En dimension av variation, olika tillvägagångssätt att lösa samma problem, öppnas. Elevernas uppmärksamhet riktas mot barnen och vuxna som skall in i och ut ur båten. Flera elever har funnit ett mönster för personerna som sitter i båten. Zanna kan uttrycka detta mönster verbalt genom att med siffror och ord benämna personerna som sitter i båten och deras antal (excerpt C2, rad 5).

Undervisningssekvens 2 (9:00-32:40) - problemlösningssuppgiften behandlas

Efter att eleverna har sett ett dramatiserat exempel på hur lösningen kan se ut fortsätter de arbeta i par med samma uppgift. De får låna konkret material i form av sju stora trägubbar (vuxna), två små trägubbar (barn), en båt som är en tändsticksask och ett papper som föreställer en flod. I excerpten C3 uppmanas eleverna att hitta ett mönster gällande antalet båtturer som gruppen bestående av sju vuxna och två barn skall ha för att ta sig över floden. Vidare vill lärare C att eleverna skall anteckna sina resultat som de kommer att använda som grund senare vid den gemensamma genomgången.

Excerpt C3

1. L: Titta om ni kan se något mönster hur många gånger man måste köra för att få över alla vuxna. Anteckna gärna så kommer vi att repetera ert resultat.

Fokus i undervisningssekvensen när eleverna praktiskt visade lösningen på uppgiften var riktad på att hitta ett effektivt sätt att ta sig över floden. Nu ligger fokus på att diskutera hur många gånger båten användes eller om det finns något system för hur antalet turer kan beräknas. De närmaste tolv minuterna ägnas åt pararbete. Läraren går runt i klassen och hjälper enstaka elever. För att beskriva hur människorna som tar sig från den ena sidan av floden till den andra börjar många elever att rita pilar, streck och symboler för de vuxna respektive barnen.

Den gemensamma sammanfattningen börjar med att läraren skriver upp varje pars förslag på minsta möjliga antal turer som behövs för att ta alla nio personerna över floden. Elevernas förslag hamnar på 26, 28 och 29 turer. När alla förslag är uppskrivna på tavlan tycker läraren att de måste ha ett bevis för det rätta svaret. Läraren undrar hur de skall gå till väga och föreslår att de skall använda sig av en tabell (excerpt C4, rad 1 och 4).

Excerpt C4

1. L: Om vi tittar här då så ser det ut som, 29 har fått högsta antal grupper, och sedan två 26 och två 28. Men 26 är ju den som skulle vinna för det var ju ... Men vi måste också bevisa att det faktiskt går. Och hur ska vi göra det? ... Har ni hört att man kan skriva en tabell?
2. Flera elever: Nej.
3. Flera elever: Öhöm.

4. L: Om allihopa gör så här som jag så ska vi se om vi kan redovisa på detta sätt.

Läraren går vidare med att redovisa resultatet i en värdetabell. Hon ritar en tabell på tavlan och uppmanar eleverna att göra likadant i sina skrivböcker. Tabellen består av två kolumner – en för antal vuxna och en för antal turer (Figur 5.20). Samtidigt som resultatet skrivs in i tabellen ritas också ett antal rader i den (Figur 5.20). Data ställs upp i storleksordning, d.v.s. läraren börjar med att undersöka hur många turer det behövs för att få över en vuxen, sedan två vuxna, tre vuxna o.s.v.

Mönster och Algebra	
antal vuxna	antal turer
1	5
2	9
3	13

Figur 5.20. Tavlans utseende när lärare C redovisar resultatet i en värdetabell och hur hon använder sig av pilar, siffror och bokstäver för att visa antal turer som behövs för att en vuxen skall tas över floden.

Samtidigt som läraren redovisar resultatet i tabellen dokumenterar hon genom att rita på tavlan händelseförloppet med turerna som tas över floden. Hon använder sig av pilar, siffror och bokstäver för att visa hur många vuxna respektive barn befinner sig på vilken sida av floden efter ett bestämt antal turer (Figur 5.20). Det är ett invecklat förlopp och kräver en stor dos av koncentration för att hänga med i det. Ibland tappar vissa elever den röda tråden och påpekar detta för läraren som går tillbaka i redovisningen och upprepar förloppen för eleverna.

Antal turer fylls i i tabellen för en, två och tre vuxna. Eleverna kan läsa av i tabellen att för att ta en vuxen över floden behövdes det fem turer, för två vuxna nio turer och för tre vuxna 13 turer. När antalet turer är ifyllt för tre vuxna i tabellen frågar läraren eleverna om de kan se ett mönster i hur antalet turer utvecklas (excerpt C5, rad 1).

Excerpt C5

1. L: Kan vi se ett mönster redan nu?
2. Alexander: Det går så här: fyra, fyra, fyra, fyra.
3. Julia: Ja.
4. L: Vad sa du?
5. Daniel: Det är fyra hopp.
6. Benyamin: Första gången var ju fem.
7. L: Det är fy ... Ja, första gången var det fem.
8. Alexander: Men de andra blir det fyra.
9. L: Och sen blir det fyra hopp. Ser alla att det blir det?
10. Flera elever: Ja.
11. L: Skulle vi kunna säga redan nu hur många det ska bli på den fjärde vuxna?
12. Yasmin: Ja.
13. Alexander: Jag vet.
14. Yasmin: Sjutton.
15. L: Då kommer det att bli sjutton, det blir plus fyra igen (skriver in antalet vuxna och antalet turer i tabellen). Ni har ju sett att det ökar på här, plus fyra hela tiden.

Eleverna uppmärksammas på talserien 5, 9, 13 som framträder i kolumnen "antal turer" (excerpt C5, rad 11). Några elever ser direkt att differensen mellan antal turer är fyra hela tiden (excerpt C5, rad 2, 5 och 8). En elev uppmärksammar att det behövdes fem turer för att få över den första vuxna (excerpt C5, rad 6).

Läraren skriver +4 vid högra kanten av tabellen på varje rad. För en stund så är det just det, att plussa på fyra, som blir fokus i undervisningen. Läraren både skriver upp det på tavlan och säger det flera gånger när de fyller i antalet turer för fyra, fem, sex och sju vuxna i tabellen. Eleverna svarar nu i kör på frågan om hur många turer det behövs för varje vuxen. Momentet avslutas med att konstatera att det rätta svaret var 29, eftersom det har bevisats nu att det är minsta möjliga antal roddturer för att få över sju vuxna och två barn över floden.

Undervisningssekvens 3 (32:40-37:50) - den generella lösningen uttrycks i en formel

Nästa undervisningssekvens introduceras med att lärare C pratar om mönsters egenskaper som regelbundenhet (excerpt C6, rad 1).

Hon berättar om nackdelen med att på det tidigare sättet räkna ut antal turer för ett större antal vuxna. Ett smidigare sätt, får eleverna veta, är att hitta en generell regel som skall skrivas med hjälp av en formel (excerpt C6, rad 1). Lärare C presenterar formel som en regel, som en användbar modell och något som man kan använda för att generalisera.

Excerpt C6

1. L: Och det är så här. Om man lär sig det här, för alla mönster som ni kommer att se är uppbyggda med en regelbundenhet. Så att man kan räkna ut. Okej, vi ska se om vi kan hitta något mönster, om vi skulle kunna bestämma, om jag frågar hur många turer måste vi åka för tjugo vuxna. ... Då ska vi inte behöva hålla på så här och skriva utan vi kan hitta en generell regel. Nu ska vi se om vi kan förklara vad det är. Om vi skriver antal vuxna, vi kallar de för ... ska vi kalla dem för x ?
2. Oscar: Nej, v .
3. L: V. Vi kallar dem för v (skriver på tavlan). (...) Och antal turer, ska vi kalla det till t . Ja, t är lika med antal turer (skriver på tavlan).

Lärare C bestämmer tillsammans med eleverna ett namn för de två variablerna de har arbetat med. Lärarens förslag att kalla variabeln "antalet vuxna" för x godtas inte av eleverna utan en elev ger ett eget förslag (excerpt C6, rad 2). Den oberoende variabeln "antalet vuxna" får namnet i form av bokstaven v (v = vuxen) och den beroende variabeln "antalet turer" får namnet i form av bokstaven t (t = antal turer) (excerpt C6, rad 3). Detta skrivs upp längs till vänster på tavlan av läraren och eleverna antecknar i sina skrivböcker.

Läraren lotsar eleverna med sina frågor vilket leder till att formeln $t = v \cdot 4 + 1$ växer fram på tavlan (excerpt C7). Frågorna som ställs utgår ifrån resultatet i tabellen i Figur 5.20.

Excerpt C7

1. L: Nu ska vi göra en generell re..., ööö, en formel kan man säga för att vi ska kunna räkna ut tjugo så småningom. (...) Då ska vi se här. Vad är det vi ska räkna ut? Ju vi ska se hur många turer det tar att få över ett antal vuxna... och vuxna hette ju v . (Läraren skriver v efter $t=$) Kan ni se hur många blir det för varje vuxen? Hur många turer var man tvungen att göra för varje vuxen?

2. Andreas: Fyra.
3. L: Fyra. Då kan vi ta v gånger fyra, va? (Skriver på tavlan $\cdot 4$ efter $t = v$) ...
4. Julia: Ööö, gånger?
5. L: Ju för om jag tar en vuxen ...
6. Andreas: Gånger fyra?
7. L: En gånger fyra, så tar det fyra turer för en vuxen att åka över. Är du med? Om jag tar två vuxna, ... två gånger fyra blir åtta (pekar på formeln på tavlan). ... Är du med? Men, det stämmer inte riktigt! Första där, om vi tar en där så blir det fem. Ser alla det?
8. Melvin: Vad sa du?
9. L: Jo, men titta här (pekar på siffror som står för antalet vuxna och antalet turer i första raden i tabellen). En vuxen åker över... så tog det fem turer. Och ett gånger fyra (pekar på formeln) är bara fyra. Vad saknas det då?
10. Johanna: Plus ett.
11. L: Plus ett (skriver $+1$ efter $t = v \cdot 4$ på tavlan). Då testar vi. Alltså man få ju testa sig fram så här och se.

Tidigare har lärare C uppmärksammat eleverna på den talserie som framträder i kolumnen "antal turer". Det har konstaterats att skillnaden mellan talen i talföljden är fyra. Nu riktas elevernas uppmärksamhet mot relationen mellan antalet vuxna som har åkt över floden och antalet turer som behövdes för det (excerpt C7, rad 9). Således får eleverna möjlighet att erfara både relationen längs de vertikalt inskrivna värden men också relationen mellan talparen inskrivna i de horisontella raderna. I denna situation kan en variation av två sätt att läsa värden i en och samma tabell erfaras – vertikalt och horisontellt, och en dimension av variation, olika sätt att läsa en tabell, öppnas.

Formeln testas med några olika värden som representerar antalet vuxna som har kommit över floden. I samtal med elever sätter lärare C in tre, fem och 50 vuxna istället för variabeln v i formeln $t = v \cdot 4 + 1$ och beräknar antalet turer som behövs för att ta över dessa till andra sidan floden. När bokstaven v ersätts med tre och fyra vuxna skrivs inte detta upp på tavlan utan lärare C pekar växelvis på de olika termerna i formeln och på de aktuella värdena i tabellen. Vid beräkningen av antalet turer för 50 vuxna skrivs $t = 50 \cdot 4 + 1$ upp på tavlan. Läraren leder samtalet genom att ställa följdfrågor till eleverna och genom att peka på de olika bokstäverna i formeln. I

denna situation varierar värdet på variabeln v d.v.s. antalet vuxna medan formeln hålls konstant. En dimension av variation, en formel är ett generellt uttryck, öppnas. Eleverna ges möjlighet att urskilja att med hjälp av formeln kan man räkna ut antal turer för vilket antal vuxna som helst. Lärare C avslutar denna undervisningssekvens med att prata om fördelen att använda sig av formel när man vill uttrycka sig generellt med matematiska uttryckssätt.

Hittills har klassen arbetat med samma uppgift på lektionen. Eleverna har haft möjlighet att erfara hur tillvägagångssättet att lösa en och samma uppgift kan variera. Det möjliggjordes för dem att arbeta praktiskt/fysiskt genom att dramatisera, bildmässigt genom att rita, verbalt genom att uttrycka sig med ord, numeriskt genom att föra in data i tabell och symboliskt genom att använda sig av en formel. En dimension av variation, olika tillvägagångssätt att lösa samma problem, öppnas.

Undervisningssekvens 4 (38:00-43:00) - ett växande geometriskt mönster behandlas

Lärare C berättar att hon skall rita ett nytt mönster och undrar om eleverna skall kunna se hur detta mönster fortsätter. Med detta introducerar hon nästa undervisningssekvens. Läraren ritar de tre första figurerna i ett växande mönster på tavlan (Figur 5.21).

Figur 5.21. Bilden visar det växande geometriska mönstret och tabellen som lärare C har ritat på tavlan.

I figur nummer 1 i mönstret är det två smileysar, i figur nummer 2 är det fyra smileysar och i figur nummer 3 är det sex smileysar. Vänster om mönstret ritar lärare C en tabell med två kolumner. Eleverna uppmanas att rita av mönstret och tabellen samt att fylla i figurnumret och antalet smileysar i den. Figurnumret fylls i den vänstra kolumnen i tabellen och antalet smileysar i den högra.

Det är inga problem för eleverna att fylla i de olika värdena i tabellen. De kan se på tavlan antalet smileysar för de tre första

figurerna i mönstret. Även på lärares fråga om de ser något mönster svarar eleverna snabbt att de ser talmönstren 1, 2, 3 och 2, 4, 6 som de hittar i de olika kolumnerna i tabellen. Läraren uppmärksammar talmönstret i den högra kolumnen där antalet smileysar står och frågar efter ökningen mellan talen. Det ges möjligt för eleverna att erfara att värden i tabellen kan läsas vertikalt. Eleverna är överens om att det ökar med två hela tiden som de uttrycker som "två hopp". Läraren översätter det sagda till det matematiska symbolspråket och skriver $+2$ i högra kanten av tabellen.

En elev påpekar att värdet i högra kolumnen är dubbelt så mycket som värdet i vänstra kolumnen. Lärare C bekräftar det och visar med armen de två talen som är inskrivna på samma rad när hon i tal upprepar relationen mellan dem. Sättet att läsa en tabell vertikalt kontrasteras mot att läsa den horisontellt. Tabellen och värden i den är invariants medan sättet att läsa tabellen varierar. I denna situation öppnas en dimension av variation – olika sätt att läsa en tabell.

Läraren uppmanar sina elever att säga en formel som skall beskriva antalet smileysar i en figur. Det är flera elever som kan i ord uttrycka relationen mellan talet som representerar ett figurnummer och talet som representerar antalet smileysar i den. De använder sig av uttryck som "jag ska bara ta dubbelt så mycket" och "gånger två". De kan också använda sig av de kunskaperna de har av figur nummer 1, 2 och 3 och generalisera det på figur nummer 100. Men lärare C nöjer sig inte med det utan vill att eleverna skall beskriva mönstret med en formel som innehåller bokstäver (excerpt C8).

Excerpt C8

1. L: Men hörde ni vad Helen sa. Hon sa så här, figur tre blir dubbelt så många smileysar (pekar på siffrorna i tabellen). Ser ni att det stämmer hela tiden. Då kan man enkelt säga på figur nummer hundra, måste bli dubbelt så många, då blir det två hundra. Men kan vi skriva en formel?
2. Julia: Så här, gånger två.
3. L: Vad sa du?
4. Julia: Gånger två.
5. L: Någonting gånger två. Och då ska vi ta figurer.

Till sist säger läraren att det är figurnumret som skall multipliceras med två. Tillsammans kommer de överens om att använda bokstaven F för figurnumret och bokstaven A för antalet smileysar. Formeln $A = F \cdot 2$ växer fram på tavlan (Figur 5.22). Formeln testas med figur nummer 3. Siffran tre sätts in istället för bokstaven F och svaret som blev sex kontrolleras med antalet smileysar i figur nummer 3 i det uppritade mönstret på tavlan.

Figur	Antal
1	2
2	4 ⁺²
3	6 ⁺²

$A = F \cdot 2$

Figur 5.22. Bilden visar hur en del av tavlan ser ut när formeln $A = F \cdot 2$ skrivs upp.

Lärare C nöjer sig med att testa formeln endast med figur nummer 3. Eleverna får ej möjlighet att urskilja att en formel som uttrycker antalet byggelement i en figur gäller för fler än en figur i ett växande mönster. Det tas för givet att en formel är ett generellt uttryck. Denna dimension av variation öppnas inte.

Eleverna kan i tabellen se att differensen mellan siffrorna i vänstra kolumnen är ett medan differensen mellan siffrorna i högra kolumnen är två. Det diskuteras på lektionen att den högra siffran är dubbelt så stor som den vänstra siffran på samma rad i tabellen. Lärare C berättar för eleverna att siffrorna som står i vänstra kolumnen är figurernas nummer samtidigt som hon ringar in på tavlan de tre figurernas nummer. Men eleverna pratar inte om dessa siffror som figurnummer eller antal smileysar utan som "en sida och den andra sidan" och som "siffror". På lektionen behandlas inte ett annat växande geometriskt mönster där figurnumren är samma men antalet smileysar ökar med exempelvis tre. Att det är just antalet smileysar i mönstret som ökar med ökat figurnummer tas för givet. Eleverna erbjuds inte möjlighet att lära sig att det totala antalet byggelement i en figur har ett samband med figurens nummer. De kan inte urskilja aspekten att antalet byggelement är en

beroende variabel eftersom denna dimension av variation inte öppnas i undervisningen.

Det växande geometriska mönstret som behandlas i undervisningssekvensen beskrivs med bild, ord, tabell och formel. Mönstret hålls konstant och sättet att beskriva det varierar från det bildmässiga till verbala, numeriska och symboliska. Samtidigt kan eleverna erfara samma mönster i två olika representationer – med bild och ord. Dimensioner av variation som öppnas är olika sätt att beskriva ett mönster samt olika sätt att representera ett matematiskt mönster.

Det är två olika formler som arbetas med på denna matematiklektion, $t = v \cdot 4 + 1$ och $A = F \cdot 2$. I den ena formeln används gemena v och t och i den andra används versaler A och F . De bokstäver som används för att benämna en variabel varierar både när det gäller vilka bokstäver som används men också om dessa bokstäver är gemena eller versaler. Eleverna får möjlighet att se att variabler i en formel kan betecknas med olika bokstäver och därmed öppnas för ytterligare en dimension av variation.

Dimensioner av variation som öppnas upp i lärare C:s undervisning

Nedan besvaras forskningsfrågorna ett och två för lärare C:s undervisning. I första kolumnen i Tabell 5 sammanfattas de dimensioner av variation som har öppnats i lärare C:s undervisning. I de fyra kolumnerna längst till höger sammanfattas det som undervisningshandlingar och lärande är riktat mot samt förmåga som möjliggör att eleverna i klassen kan utveckla, d.v.s. lärandeobjektet som är antingen medvetet eller omedvetet valt av lärare C. Det framgår i Tabell 5 att lärare C:s undervisning ger möjlighet för eleverna att lära sig att a) beskriva ett mönster (LO1), b) uttrycka generellt hur ett mönster växer med matematiskt symbolspråk (LO3), c) utveckla strategier för matematisk problemlösning i vardagliga situationer (LO4) samt d) tolka data i tabeller (LO5).

Tabell 5. *Dimensioner av variation i lärare C:s undervisning.*

<i>Dimensioner av variation</i>	<i>LO1</i>	<i>LO3</i>	<i>LO4</i>	<i>LO5</i>
En formel är ett generellt uttryck		X		
<ul style="list-style-type: none"> En formel för att räkna ut antal turer gäller för vilket antal vuxna som helst 				
Olika bokstäver kan användas för variabler i en formel		X		
<ul style="list-style-type: none"> Olika bokstäver samt gemena och versaler används (v och t samt A och F) 				
Olika tillvägagångssätt att lösa samma problem			X	
<ul style="list-style-type: none"> Ett mindre effektivt sätt att lösa uppgiften kontrasteras mot ett mer effektivt sätt 				
Olika tillvägagångssätt att lösa samma problem			X	
<ul style="list-style-type: none"> Praktiskt, bildmässigt, verbalt, numeriskt och symboliskt 				
Olika sätt att beskriva ett matematiskt mönster	X			
<ul style="list-style-type: none"> Bildmässigt, verbalt, numeriskt och symboliskt 				
Olika sätt att läsa en tabell				X
<ul style="list-style-type: none"> Vertikalt och horisontellt 				

Lärare D

Klassen och lektionen

Lärare D arbetar i klassen tillsammans med en annan lärare och är huvudansvarig för matematikundervisningen. Lärarna brukar dela klassen i två grupper och undervisa samtidigt i var sitt ämne och i var sin halvklass. Elevgruppen som deltar på den beskrivna matematiklektionen är heterogent sammansatt och består av elever med olika prestationsförmåga i matematik. Det är 17 elever i gruppen. De är placerade parvis i klassrummet och är vända åt samma håll med ansikten mot tavlan. Klassen har arbetat med växande mönster tidigare under läsåret. Arbetet har innefattat att de byggde och ritade redan påbörjade växande mönster. Förutom i skolan har eleverna jobbat med mönster hemma när de har fått läxor.

Lektionen varar i 1h 12 min. Den startas upp med en kort introduktion ledd av läraren följt av genomgång och enskilt eller pararbete. Lektionen avslutas med en repetition av lektionsinledningen. Lärare D har förberett en PowerPoint (PP) presentation som används som stöd under lektionen. PP-bilderna visas på storbildsskärmen som sitter på väggen längst fram i klassrummet, till vänster om tavlan. Läraren står framför tavlan under introduktionen och genomgången. Under genomgången ställer läraren frågor som besvaras av enstaka elever när dessa har räckt upp handen och fått ordet av läraren.

En stor del av undervisningen sker genom att eleverna arbetar med uppgifter på ett kopierat arbetsblad enskilt och i par. Under detta moment lämnar läraren sin plats framför tavlan, går runt i klassrummet och hjälper eleverna. De elever som vill kan använda konkret material som hjälp för att lösa uppgifterna. De kan hämta färgade stickor som ligger i en kartong på ett bord längst fram i klassrummet.

Lärare D:s undervisning

Undervisningssekvens 1 (0:20–3:00) – vad växande mönster är behandlas

Lärare D inleder lektionen med att fråga eleverna vad växande mönster är. Eleverna uppmanas att definiera begreppet "växande mönster". Först ger några elever sina egna beskrivningar av vad växande mönster kan vara. Enligt eleverna är växande mönster "ett

mönster som växer och hela tiden blir större och större", "det växer hela tiden med en rad" och "det kan dubblas och bli mer" (excerpt D1, rad 2, 4, 6). Läraren presenterar sedan en egen definition av växande mönster "där figurer skapas genom att de följer ett visst mönster och att varje figur växer enligt ett visst mönster" (excerpt D1, rad 8).

Excerpt D1

1. L: Vad är växande mönster?

(Några elever räcker upp handen. Bland dessa väljer läraren en elev som ska svara.)

2. Elias: Ett mönster som växer och hela tiden, alltså blir större och större.

3. L: Någoting som växer och blir större och större säger Elias. Hur tänker Alexander?

4. Alexander: Det växer hela tiden med en rad, extra liksom.

5. L: Det växer hela tiden med en extra rad.

6. Johanna: Det kan dubblas, och alltså bli mer.

7. L: Kan dubblas och bli mer. (Blir tyst ett ögonblick och nickar mot eleven.)

(Läraren bläddrar till PP bild 2 och visar eleverna olika definitioner på växande mönster.)

8. L: Så här står det i mina matematikböcker, där jag kan få lite extra kunskap om jag behöver. Växande mönster är där figurer skapas genom att de följer ett visst mönster och att varje figur växer enligt ett visst mönster. Det är en förklaring till växande mönster. Och där är en bild på växande mönster. Just det här mönstret växer på många olika plan. Eller hur? (...) Men det måste följa ett speciellt mönster. Det måste öka på samma sätt för varje figur.

De ord som eleverna förknippar med växande mönster är "växer hela tiden", (excerpt D1, rad 2 och 4), "blir större" (excerpt D1, rad 2) samt "kan dubblas" och "bli mer" (excerpt D1, rad 6). I lärarens beskrivning används också begreppet "växer" men läraren ger även information om och preciserar att det är figurer som skapas och växer (excerpt D1, rad 8).

Figur 5.23. Exempel på växande geometriskt mönster som behandlas i undervisningen.

När både elever och läraren har gett sina definitioner tar lärare D fram en bild på växande geometriskt mönster (Figur 5.23). Läraren undrar om någon med ord kan förklara hur detta mönster växer fram. Frågan leder in eleverna på att med ord beskriva de olika mönstren de ser. Exemplet beskrivs som ett mönster där antalet kvadrater ökar för varje figur (excerpt D2, rad 2 och 3). Även om det antalet som eleverna föreslår inte diskuteras vidare fokuseras i undervisningen det sätt som ett växande mönster kan förändras på. Ett annat sätt att beskriva mönstret är att fokusera förändringen som sker genom att det läggs på extra rader i varje figur (excerpt D2, rad 5) så att figurerna blir högre (excerpt D2, rad 9). Ett tredje sätt att beskriva är att se förändringen i ramen som består av de vita kvadraterna (excerpt D2, rad 7).

Excerpt D2

1. L: Hur växer det här (mönstret)? Någon som med ord kan förklara hur detta mönster växer fram?
2. Tobias: Det ökas med sju, eller åtta (...) (räknar tyst och pekar med ett finger mot bilden).
3. Eric: Det växer med tre. Det ökas med tre.
4. L: Det ökas med tre.
5. Angelica: Det blir så här extra rader.
6. L: Kommer extra rader (visar på bilden).
7. Angelica: Det blir extra rader på kanterna.
8. L: På kanterna (pekar på den vita ramen i figur nummer fyra).
9. Alma: De blir högre, varenda alltså ...
10. L: På höjden (visar på bilden), de ökar på höjden. (...) Just det här mönstret växer på många olika ... plan. Eller hur? Det här är ett växande mönster (pekar på de mörka kvadraterna i mitten av varje figur) och ramen är ett växande mönster (pekar på de vita kvadraterna i fjärde figuren), höjden som Alma var inne på är ett mönster, bredden är ett växande mönster (visar på figur nummer

fyra). ... Men det måste följa ett speciellt mönster. Det måste öka på samma sätt ... för varje figur.

Det växande geometriska mönstret beskrivs både till form och med tanke på antalet byggelement som det förändras med för varje figur. Det diskuteras inte huruvida dessa beskrivningar är riktiga eller felaktiga. Fokus ligger på att möjliggöra för elever att erfara variationen i figurernas utseende i ett och samma mönster. Mönstret är invariant. Det totala antalet byggelement i figurerna, höjden på figurerna och förändringen i de olika delarna av figurerna varierar. En dimension av variation, förändringen i figurerna i ett växande mönster kan ske på olika sätt, öppnas.

Eleverna får i denna undervisningssekvens möjlighet att erfara ett växande geometriskt mönster i bild och ord samt genom kroppsspråk. Det sker i form av att elever och lärare beskriver mönstret som de ser på bild med ord samtidigt som läraren använder kroppen för att förtydliga det som sägs. Representationen av ett växande mönster varierar medan mönstret hålls konstant. När läraren på detta sätt visar hur det är möjligt att beskriva ett mönster öppnar hon en variation inom aspekten "beskrivningssätt".

Undervisningssekvens 2 (3:00–11.50) – växande mönster jämförs med mönster som inte är växande

I nästa undervisningssekvens presenteras och diskuteras två olika mönster som inte är växande mönster (Figur 5.24). När det i undervisningen ges möjlighet för denna typ av diskussion öppnas det för ytterligare en dimension av variation - olika sorters matematiska mönster. För att eleverna skall lära sig vad ett växande mönster är möjliggörs för dem att erfara mönster som inte kan klassificeras som växande. Eleverna kan jämföra ett växande mönster, som diskuterades i undervisningssekvensen, med något som inte är ett växande mönster och se skillnader mellan dessa.

Figur 5.24. Två exempel på vad som inte är växande mönster.

I diskussionen kommer det fram att de exempel som presenteras i Figur 5.24 inte är växande mönster. Det vänstra exemplet definieras som en bild skapad av olika figurer. Det högra exemplet i Figur 5.24 definieras som ett mönster där en sekvens upprepas. Både ord och bild används i beskrivningarna också när ett mönster som inte är växande beskrivs. Eleverna uppmanas att förklara vad det är som gör att mönstret som upprepas inte är ett växande mönster. Nu beskrivs vad ett växande mönster inte är med både ord och bild. Återigen öppnas dimensionen av variation olika sätt att representera ett mönster.

I excerptet som följer kan vi se att två elever har urskiljt att det finns olika figurer i ett växande mönster och att de utseendemässigt skiljer sig från varandra. Dessa elever har upptäckt att figurerna i ett växande mönster sitter en bit ifrån varandra (excerpt D3, rad 2). Till skillnad från ett växande mönster sitter sekvenserna i ett mönster som upprepas ihop och ser likadana ut (excerpt D3, rad 6 och 8).

Excerpt D3

1. L: Vad är det som gör att det här inte är ett växande mönster (pekar på bilden med mönster som upprepas)? (...) Malin?
2. Malin: De är isär varandra (---), det kan man typ mönstret (---).
3. L: Jag tror att du menar att i ett växande mönster så är det figurer som är isär från varandra (pekar med båda händerna mot bilden och visar med kroppsspråket).
4. Malin: Ja.
5. L: Och det är inte här. Det är skillnad.
6. Oliver: De ser hela tiden olika ut. Jag menar det ser alltid samma ut.
7. L: Det ser alltid lika ut, det upprepar sig, det kommer tillbaka.
8. Adonis: De är lika stora. Alltså, de (pekar mot bilden).
9. L: De växer inte, helt enkelt.

Att erfara de upprepade sekvenserna i ett mönster kan ha hjälpt eleverna att se de regelbundet växande figurerna i ett växande mönster.

En elev beskriver mönstret till höger i Figur 5.24, genom att använda sig av begreppen stjärna och cirkel. Eleven säger namnen på formerna så många gånger som de används i mönsterkonstruktionen (excerpt D4, rad 2). Klasskamraterna får möjlighet att höra att, när man vill beskriva ett mönster, kan man även

använda sig av benämningen av de byggelement som används för att konstruera mönstret.

Excerpt D4

1. L: Om du skulle berätta för någon som inte ser det här mönstret framför sig nu och så ska du säga med ord (pekar på mönstrets olika sekvenser) vad är det som händer i bilden vad skulle du säga då?
2. Donjeta: Stjärna, cirkel, cirkel, stjärna, cirkel, cirkel, stjärna, cirkel, cirkel.

När lärare D tar fram nästa PP bild kan eleverna se ett exempel på växande geometriskt mönster som läraren har konstruerat av stjärnor och ellipser (Figur 5.25).

Figur 5.25. Lärares exempel på växande mönster.

Under några minuter pågår återigen en diskussion om växande mönster. Frågan vad det är som händer på bilden besvaras snabbt av eleverna genom att de berättar hur varje kommande figur växer med ett antal stjärnor och ellipser.

Excerpt D5

1. L: Det här är ett växande mönster.
2. Flera elever: Ja.
3. L: Hur skulle du med ord förklara det här mönstret? Vad händer på bilden Anna?
4. Anna: Det blir fler mönster. ...
5. L: Det blir fler för varje figur (pekar på de olika figurerna i mönstret). Precis. Lukas?
6. Lukas: De ökar alltid med en stjärna och en cirkel.
7. L: Här är det fler (pekar på andra figuren) här är det ytterligare en till på nästa figur. Jenny?
8. Jenny: Det plussas på varje gång med en stjärna och en cirkel.
9. L: Det plussas på varje gång med en stjärna och oval.
10. Christina: Den första är en liten cirkel och en stjärna, och sen är det två stycken och då blir cirkeln och stjärnor lite större, och sen är det tre stycken. (---) alltså man ser att det ökar i storlek också.

11. L: Det som Christina ser här nu det är nog mer en datateknisk finess när jag har skapat det här att alla stjärnor och ovaler har inte blivit lika stora, för det hör inte till det växande mönstret, att storleken kanske inte är exakt (visar med ovalernas höjd). Jag tror att jag faktiskt har kopierat det första och gjort fler, men man kan uppleva det på bilden ändå att liksom storleken på stjärnan och ovalen faktiskt blir större (pekar hela tiden på mönstrets olika delar). (---) Men det är inte ... det växande mönstret, utan det är det som flera andra har pratat om här inne innan, att det ... ökas ... för varje figur (pekar först på figur nummer 1, sedan på figur nummer 2 och sist på figur nummer 3).

Eleverna kan uttrycka att antalet byggelement ökar samt att det ökar med ett konstant värde (excerpt D5, rad 4, 6 och 8). Dessa elever kan också urskilja byggelementen som använts för att konstruera mönstret samt sekvensen som varje ny figur växer med. En elev berättar att hon ser en förändring från en figur till en annan vad gäller byggelementens storlek (excerpt D5, rad 10). Lärare D tar vara på denna elevs iakttagelse för att öppna en dimension av variation som gäller sättet som figurerna i ett växande mönster förändras på. Ett sätt som figurerna i ett växande mönster brukar förändras på kontrasteras mot ett sätt som inte förändringen i figurerna brukar ske. Elevernas uppmärksamhet riktas mot att det är antalet byggelement i de olika figurerna och inte storleken på byggelementen som spelar roll när ett växande geometriskt mönster konstrueras.

Läraren jämför figurerna med närmast föregående figur för att eleverna skall få syn på den regelbundenheten i antalet och typen av byggelement som mönstret växer med. Att figurer förändras på ett speciellt och regelbundet sätt i ett växande mönster fokuseras. Hon uttrycker med ord det som tillkommer i varje ny figur, d.v.s. en stjärna och en ellips. Genom att läraren pekar ut varje figur i mönstret riktas elevernas uppmärksamhet i undervisningen mot mellanrummet mellan figurerna. Det tas varken för givet att eleverna ser systematiken i hur ett växande mönster förändras eller att de ser att figurerna i ett växande mönster sitter en bit ifrån varandra. Byggelementen och utökningsenheten är invarianta medan figurernas utseende varierar. Den dimension av variation som öppnas är att storleken på figurerna i ett växande mönster förändras. Det som tas för givet i denna situation är att regelbundenheten måste även gälla sättet som byggelementen

placeras på. Om stjärnan och ellipsen inte placeras i nästkommande figur så att exempelvis stjärnan hamnar ovanför ellipsen rubbas regelbundenheten i sättet att placera byggelementen. Ett sådant mönster kan inte kallas för ett växande matematiskt mönster eftersom det blir svårt att förutse en figur längre fram i sekvensen.

När det växande geometriska mönstret som är uppbyggd av stjärnor och ellipser (Figur 5.25) beskrivs av eleverna, används begreppen fler (excerpt D6, rad 2), ökar (excerpt D6, rad 4) och plussas (excerpt D6, rad 6). Begreppen varierar men alla syftar till att uttrycka att ett mönster växer. Det växande mönstret hålls konstant medan orden som beskriver förändringen i det växande mönstret varierar. En dimension av variation, olika sätt att beskriva ett mönster, öppnas.

Excerpt D6

1. L: Hur skulle du med ord förklara det här mönstret? Vad händer på bilden?
2. Ludwig: Det blir fler mönster. (...)
3. L: Det blir fler för varje figur (pekar på de olika figurerna i mönstret).
Precis.
4. Emil: De ökar alltid med en stjärna och en cirkel.
5. L: Här är det fler (pekar på andra figuren) här är det ytterligare en till på nästa figur.
6. Julia: Det plussas på varje gång med en stjärna och en cirkel.
7. L: Det plussas på varje gång med en stjärna och oval.

Precis som vid beskrivningen av mönstret där en sekvens upprepas (höger bild i Figur 5.24) använder sig eleverna även vid beskrivning av det växande mönster som består av stjärnor och ellipser (Figur 5.25) av benämningen på de byggelement som används för att konstruera mönstret (excerpt D6, rad 4 och 6). Eleverna använder sig också av räkneord som visar på det antalet stjärnor och ellipser som varje figur i mönstret ökar med, precis som de gjorde när de försökte beskriva det växande mönstret som består av vita och svarta kvadrater (Figur 5.23). I undervisningssekvensen som beskrivs ovan varierar beskrivningarna av mönster. Genom denna behandling av innehållet möjliggörs för eleverna att erfara ett antal olika sätt att med ord beskriva samma mönster. Det öppnas en dimension av variation - olika sätt att beskriva ett mönster. Mönstret är invariant och sättet att beskriva det varierar. Denna

variation omfattar ett antal nivåer. En nivå gäller mönstrets form. En annan nivå är när antalet byggelement som mönstret förändras med för varje ny figur beskrivs med räkneord. Nästa nivå avser de termer som använd för att namnge byggelement, exempelvis stjärna och ellips. Ytterligare en nivå avser de termer som uttrycker förändringen i mönstret, exempelvis fler och ökar.

I ovan beskrivna exemplen görs en kontrastering för att få eleverna att förstå innebördet av begreppet växande mönster. Ett mönster som växer jämförs med två andra som inte växer. Det som varierar i denna situation är de mönster som jämförs. Stjärnan och ellipsen, som används att bygga dessa olika mönster med, hålls konstant. I undervisningen kontrasteras växande mönster mot något som inte är ett växande matematiskt mönster. När detta görs av läraren är det möjligt för eleverna att erfara att det finns olika sorters mönster.

Genomgången i denna undervisningssekvens består av att lärare och eleverna samtalar kring de tre olika mönstren som presenteras ovan; ett växande mönster, ett mönster där en sekvens upprepas och en bild som är skapad av stjärnor och ellipser. I samtalet får eleverna olika uppgifter av läraren i form av frågor som de enskilt skall fundera på och besvara när de har fått ordet av läraren. I en av uppgifterna vill lärare D att eleverna själva skall formulera en fråga eller en uppgift som de exempel på mönster som behandlas skulle kunna vara svar på. Eleverna verkar vara vana vid sådana frågor och detta sätt att arbeta på eftersom ganska snabbt efter lärares uppmaning kommer upp flera händer i luften. Läraren pekar på bilden av de olika mönstren (se Figur 5.24 och Figur 5.25) samtidigt som hon ställer frågan "Hur skulle en uppgift kunna se ut i matteboken om det här blir ditt svar?". Elevernas egna förslag som de bidrar med till undervisningen kan sammanfattas i följande beskrivningar. Gör en figur av olika mönster, använd dig av tre stjärnor och sex cirklar och gör ett upprepande mönster samt gör ett växande mönster med stjärna och cirkel. Den första beskrivningen är ett exempel på uppgift där någon med hjälp av stjärnor och ellipser kan skapa ett ansikte. Andra och tredje beskrivningen är exempel på uppgifter som skulle instruera elever att skapa ett mönster som upprepas respektive ett växande mönster genom att använda stjärnor och ellipser.

Figur 5.26. Lärares exempel på uppgifter som har de olika mönstren som lösning.

Efter det att eleverna har delat med sig av sina egna idéer och förslag på möjliga uppgifter visar lärare D sina egna exempel (Figur 5.26). De tre uppgifterna ser nästan identiska ut med den skillnaden att uttrycken "en bild", "ett mönster som upprepar sig" och "ett växande mönster" används beroende på vilken sorts mönster som är tänkt att skapas. Sättet att skriva uppgiften på liksom byggelementen stjärnan och ellipsen, som skall användas för att skapa mönstren, hålls konstant. Begreppen som beskriver mönstret som skall konstrueras varierar beroende på vad som skall skapas. Med detta sätt att behandla undervisningsinnehållet separeras de olika begreppen som syftar till olika sorters mönster i uppgiften. En dimension av variation som öppnas är olika sorters mönster. Beroende på vilket av begreppen "bild", "mönster som upprepas" eller "växande mönster" som står i en uppgift vet eleverna vilken sorts mönster de är ombudade att konstruera. De konstruerade mönstren kan se olika ut trots att byggelementen är samma.

Undervisningssekvens 3(12:00-13:20) – repetition av vad växande mönster är

Övergången till en ny undervisningssekvens sker genom att lärare D klickar fram nästa PP bild. Rubriken "Återigen..." visas på skärmen. Det syftar till en kort repetition av det de har kommit fram till om växande mönster.

I replikväxlingen som förekommer mellan lärare D och två elever i excerpt D7 fokuseras två av växande mönsters egenskaper: a) att ett växande mönster består av olika figurer (rad 4 och 5) samt b) att varje ny figur i ett växande mönster förändras på ett regelbundet sätt (rad 3). Lärare D har skrivit dessa två meningar om växande mönster i sin PP presentation och klickar fram dessa. Även det första exemplet på växande geometriskt mönster bestående av vita och svarta kvadrater (Figur 5.23) visas en gång till för eleverna.

Excerpt D7

1. L: Vad är det då ett växande mönster? Vi repeterar. Vad är ett växande mönster? Hur kan du förklara ordet växande mönster? Alexander?
2. Alexander: Ett mönster som växer med ett speciellt, alltså ... hur ... speciellt ...
3. L: (nickar mot eleven) Det kan ju inte växa hur som helst eller hur Alexander? Nej. Det måste följa ett visst mönster. Är det något annat ni vill ha med i det här? Johanna?
4. Johanna: De är inte ihopsatta de är isär ... mönstren.
5. L: Det är olika figurer ... som är delade från varandra (förstärker med kroppsspråket).

Undervisningssekvens 4 (13:20-34:55) – ett nytt exempel på ett växande geometriskt mönster behandlas

Innan lektionen började delade Lärare D ut ett häfte med flera uppgifter i till eleverna. Undervisningen fortsätter nu med att gemensamt arbeta med den första uppgiften i häftet. Det växande geometriska mönstret som uppgiften handlar om är konstruerad av stjärnor (Figur 5.27).

Figur 5.27. Exempel på växande geometriskt mönster med stjärnor som byggelement.

De första tre figurerna i mönstret är färdigritade. Elevernas uppgift är att rita figur nummer 4 och besvara frågan om hur många stjärnor det är i denna figur. De skall också komma fram till antalet stjärnor i figur nummer 10 och förklara med ord eller bild hur de har kommit fram till sitt svar. Elevernas enskilda arbete med uppgiften föregås med en kort introduktion i form av samtal mellan läraren och enstaka elever. Samtalet handlar om att beskriva mönstret, om vad det är som ändras från en figur till nästa och att beskriva förändringen. De frågorna som lärare D ställer syns även på PP bilden.

Excerpt D8

1. L: Framför er så har ni tre figurer av stjärnor. Beskriv de Malin till någon som inte ser. Hur ser de här stjärnorna, hur ser figurerna ut?
2. Malin: ... Det är så här tre stjärnor ...
3. L: Ska Oliver göra ett försök? Hur ser figurerna ut?
4. Oliver: Det ser ut som en stjärna.
5. L: Stjärnor, hm. Hur ser figur ett ut?
6. Oliver: Det är tre stjärnor.
7. L: Figur ett består av tre stjärnor. Hur ser figur två ut? Antony?
8. Antony: Består av sex stjärnor.
9. L: Består av sex stjärnor. Hur ser figur tre ut (pekar på Jonathan)?
10. Jonathan: Nio stjärnor.
11. L: Nio stjärnor. Hur kommer då figur fyra att se ut om det ska följa ett visst mönster? Joanna?
12. Joanna: (--) Nej tolv!
13. L: Tolv stjärnor eller hur? ... Hur kan du veta det? Att det är tolv stjärnor?
14. Joanna: Plussar på tre.
15. L: Plussar på tre varje gång. För du har sett att det är så som händer (--). ... Hur många fler stjärnor behövs det alltid till en ny figur? Olivia?
16. Olivia: Tre.
17. L: Tre. Det här är ju viktigt att upptäcka i det växande mönstret. Hade inte du sett det här (pekar på den sist ställda frågan på PP bilden) hur det växer fram, hur det förändras för varje ny figur hade det varit jättesvårt för dig att lista ut både hur figur fyra ser ut och ännu svårare att göra figur nummer tio.

Eleverna beskriver mönstret i termer av antalet stjärnor som behövs till de olika figurerna (excerpt D8, rad 6, 8, 10 och 12). Elevernas uppmärksamhet riktas mot det ökade antalet stjärnor för varje ny figur. Det växande mönstret och typen av byggelement hålls invariant och antalet byggelement varierar. När de ges möjlighet att urskilja att det är olika antal byggelement i olika stora figurer öppnas en dimension av variation storleken på figurerna i ett växande mönster förändras. Förändringen i det växande mönstret beskrivs med begreppet "plussas på" och med talet tre som antalet stjärnor ökar med från en figur till nästa (excerpt D8, rad 14). Regelbundenheten när det gäller antalet byggelement i ett växande geometriskt mönsters figurer uppmärksammas. Däremot

att sättet som de placeras på måste också ske på ett regelbundet sätt tas för givet.

Efter denna introduktion får eleverna arbeta en kort stund på egen hand med att skriva ner svaren om figur nummer 4 samt besvara frågan om figur nummer 10. När svaret på frågan om figur nummer 10 sammanfattas leder lärare D in eleverna med sin fråga att återigen beskriva figuren genom att ange hur många stjärnor som finns i den. Eleverna verkar ha lätt för denna fråga eftersom nästan alla räcker upp handen när läraren ställer den. Några elever har kommit fram till svaret genom att plussa på tre för varje figurnummer. Några har ritat figur nummer 10. Några elever har gjort en tabell där de skrev in figurnumren i en rad och antalet stjärnor för respektive figur i en annan rad under figurnumren. Lärare D använder sig av en elevs redovisning om sin tabell för att gå vidare med uppgiften. Hon ber alla elever bläddra till nästa sida i häftet där de skall fylla i sina resultat i en tabell som syns i Figur 5.28.

Figur nr	Antalet stjärnor	Antalet stjärnor som en addition	Antalet stjärnor som en multiplikation
1			
2			
3			
4			
...			
10			
x			

Figur 5.28. Tabellen som arbetas med i undervisningssekvens 4.

Lärare D går genom vad siffrorna, punkterna och bokstaven i första kolumnen betyder.

Aktiviteten att samla resultatet i tabellen börjar med att eleverna skriver in uppgifterna för figur nummer 1 till figur nummer 10 i tabellens olika kolumner. En elev undrar om de själva skall bestämma antalet stjärnor. Då förtydligar lärare D att det är resultatet från första sidan som skall skrivas in i tabellen.

Det korta enskilda arbetet med tabellen bryts för en gemensam genomgång. Läraren visar en PP bild med en ifylld tabell (Figur

5.29). Hon berättar att eleverna har fyllt i tabellen på olika sätt och att hennes exempel är ett av de olika sätten.

Figur nr	Antalet stjärnor	Antalet stjärnor som en addition	Antalet stjärnor som en multiplikation
1	3	3	1·3
2	6	3+3	2·3
3	9	3+3+3	3·3
4	12	3+3+3+3	4·3
...			
10	30	3+3+3+3+3+3+3+3+3+3	10·3
X			

Figur 5.29. Den ifyllda tabellen som visas i undervisningen.

Additionen visar hur mönstret växer fram, berättar lärare D. Hon pratar om kolumnen med addition som en hjälp för att komma fram till sättet att beskriva hur mönstret växer med multiplikationen. Hon vill att eleverna koncentrerar sig på den sista kolumnen med multiplikation. Hon undrar om eleverna kan lista ut varifrån faktorerna i multiplikationsuttrycken kommer ifrån. Svaret skall eleverna hitta någonstans i tabellen. I excerpten visas att Alma har sett sambandet mellan figurnumren och multiplikationsuttrycken som beskriver hur det växande mönstret med stjärnor förändras (excerpt D9, rad 2). Lärare D visar kopplingen mellan den ena faktorn i multiplikationsuttrycket och figurens nummer i figur nummer 4 genom att hålla det högra pekfingeret på den ena siffran fyra och den vänstra pekfingeret på den andra fyran på femte raden i tabellen. Samtidigt berättar hon för eleverna vad de olika siffrorna kommer ifrån (excerpt D9, rad 3). Således erbjuds eleverna att urskilja relationen mellan data inskriven i de horisontella raderna i tabellen.

Excerpt D9

1. L: Varifrån kommer de här ... siffrorna? Varför använder jag mig just av de här multiplikationerna? Hur har det här blivit en

multiplikation? (pekar hela tiden på sista kolumnen i tabellen) ... Alma?

2. Alma: Tre är ju talet man ska plussa med och om det är figur fyra, då är det tre gånger fyra. (Läraren håller handen vid den raden som eleven pratar om på PP bilden och nickar mot eleven.)

3. L: Alma hittar det här (pekar på multiplikationen $4 \cdot 3$) att fyran kommer igen där (visar var i tabellen finns figurnummer 4), i figurens nummer. Trean, det är så mycket som man ska öka med hela tiden. ... Men var kommer fyran ifrån? ... Det är figurens nummer (pekar växelvis på fyran i multiplikationsuttrycket och mot fyran i första kolumnen). ... Men vad var finessen med att använda det här mellansteget (pekar på kolumnen med addition i tabellen) hela tiden.

4. Alma: (---)

5. Pontus: Det växer tre gånger på trean, fyra gånger på fyran.

6. L: Precis att det är fyra treor.

Sättet att skriva in antalet stjärnor som addition och multiplikation i tabellen hålls konstant för de fem figurerna. Trean som representerar stjärnornas ökning i antal från figur till figur hålls också konstant i sista kolumnen. Talen som representerar figurnumret varierar. Eleverna ges möjlighet att se att figurnumret kan användas för att uttrycka antalet stjärnor som en multiplikation. En dimension av variation, olika sätt att räkna ut antalet byggelement i en figur, öppnas. Att multiplikationen uttrycker det totala antalet stjärnor i en figur nämns inte under denna samtalssekvens. Det tas för givet att det totala antalet byggelement i en figur har ett samband med figurens nummer.

Eleverna kan både se i tabellen och höra läraren säga att antalet stjärnor kan skrivas även som addition. Lärarens avsikt med att skriva antalet stjärnor som addition var att tydligt visa hur många rader med tre stjärnor i finns i de olika figurerna (excerpt D9, rad 5 och 6). Det elever i denna situation kan urskilja är att antalet stjärnor kan skrivas som en addition. Siffran tre och plustecknet är invarianta och används för att uttrycka antalet stjärnor i en figur som addition. Antalet på siffran tre och plustecknet varierar genom att öka med ett för varje ny figur. Även i denna situation öppnas dimensionen av variation olika sätt att räkna ut antalet byggelement i en figur när eleverna ges möjlighet att urskilja att antalet byggelement kan uttryckas som en addition.

Överskriften på nästa PP bild är "Vi skriver en formel". Med ett påstående om att kunna räkna ut antalet stjärnor i en avlägsen figur går lärare D vidare i undervisningen till att tillsammans med eleverna arbeta fram en formel. Samtalet som presenteras i utdraget nedan inleds med lärare D:s fråga om hur många stjärnor det behövs för att konstruera figur nummer 36. Eleverna verkar inte ha några problem med att räkna ut hur många stjärnor det behövs för figur nummer 36. Läraren vill att de kontrollerar de givna svaren genom att använda sig av en formel. Formeln skall de arbeta fram med hjälp av uppgifter i tabellen i Figur 5.29. Lärare D pratar om en formel som en användbar modell för att ta reda på det okända samt något man kan använda för att generalisera (excerpt D10, rad 6). Hon presenterar bokstäverna X och S som är variabler som kommer att användas för att formulera ett samband mellan figurnumret X och antalet byggelement S, som i detta fall är stjärnor, i en figur.

Excerpt D10

1. Tobias: Svaret hundraåtta, för det är tre gånger trettiosex.
2. Eric: (---)
(Läraren hyschar eftersom det blir pratigt i klassen.)
3. Angelica: A men vad lätt!
4. L: Vi ska kontrollera om Tobias och Eric och de andra som börjar räkna nu tänker rätt. För jag påstår att man ska kunna räkna ut hur många stjärnor det behövs för figur nummer 36, ... utan att behöva rita upp 36 figurer.
5. Alma: Ta uppställning.
6. L: Ja för att räkna ut, det skulle man kunna göra. ... Vi ska använda oss av den tabellen som ni har framför er nu och så ska vi jobba fram en formel. För att formel är någonting som, det har vi pratat om innan, det kan vi använda för att ta reda på någonting som är okänt. ... Och det vi ska jobba fram är vilken formel ... man kan tala om hur antalet stjärnor är i figur nummer x. Alltså en okänd figur, vilken figur som helst. Hur kan vi skriva en sådan formel? ... När vi skriver det här så måste vi komma överens så att man använder samma symboler. ... X ... har jag bestämt för att det ska vara figurens nummer. ... Och så har jag också bestämt att S använder vi för stjärnor. ... Vi använder samma symboler.

Lärare D visar en förändrad tabell på nästa PP bild (Figur 5.30). Hon vill att eleverna skall skriva i versalerna X som står för

figurernas nummer och S som står för antalet stjärnor i sina tabeller enligt det de ser i lärarens tabell.

Figur nr (X)	Antalet stjärnor (S)	Antalet stjärnor som en multiplikation	Formel
1	3	1·3	$S=1\cdot3$
2	6	2·3	$S=2\cdot3$
3	9	3·3	$S=3\cdot3$
4	12	4·3	$S=4\cdot3$
...			
10	30	10·3	$S=10\cdot3$
X	S	X·3	$S=X\cdot3$

Figur 5.30. Den förändrade tabellen.

I den förnyade tabellen finns inte kolumnen som visar antalet stjärnor som en addition med. Lärare D har valt att bara ha med kolumnen med multiplikation. Den sista kolumnen är ny i denna tabell och har inte funnits med i den förra. Det är just denna kolumn som fokuseras i undervisningen. Följande excerpt visar hur innehållet i tabellen förtydligas i samtal med elever.

Excerpt D11

1. L: Och ska man skriva ihop det här nu då, figurnummer 1 (pekar på kolumnen med figurnummer och sedan på $S = 1 \cdot 3$ på första raden i sista kolumnen). Vad betyder S?
2. Donjeta: Formel.
3. L: Nej. Vad betyder S Ludwig?
4. Ludwig: Stjärnor.
5. L: Antalet stjärnor är lika med. Det här är platsen för vad då (pekar på ettan i formeln $S = 1 \cdot 3$)? Vad betyder ettan Emil?
6. Emil: X, alltså figurnummer ett.
7. L: Precis, figurens nummer. Här är det X platsen, figurnummer där är figurnummer ett, multiplicerat med tre. Och vad var den trean

nu igen? Hur kom vi fram till det? Varför multiplicerar vi med tre Julia?

8. Julia: Multiplicerar med tre?

9. L: Hm. Varför gör vi det? ... Anna?

10. Anna: (---)

11. L: (tittar på Julia) Det är så mönstret växer, med tre varje gång. Om man för in den här figuren i formeln (pekar på rad två i tabellen). Vad betyder S här? Vad står det för Lukas?

Lärare D går igenom vad bokstaven S samt siffrorna ett och tre står för i uttrycket $S = 1 \cdot 3$ i samtal med eleverna (excerpt D11). Samtidigt uppehåller hon sin hand på första raden och sista kolumnen i tabellen och pekar på bokstaven S och siffrorna 1 och 3 en i taget. Hon gör likadant för uttrycken $S = 2 \cdot 3$ och $S = 3 \cdot 3$. Bokstaven S som representerar antalet stjärnor i en figur, multiplikationstecknet och siffran tre som representerar antalet stjärnor som varje figur växer med hålls konstanta. Siffrorna 1, 2 och 3 som representerar figurernas nummer varierar. Nu möjliggörs för eleverna att se att det finns samband mellan figurernas nummer i ett växande mönster och antalet byggelement i figuren. Läraren öppnar dimensionen av variation antalet byggelement är en beroende variabel.

Undervisningssekvensen avslutas med att läraren visar hur formeln kan användas och att den kan användas för vilken figur som helst.

Excerpt D11

1. L: Vad kan jag göra med det här nu? Med X-et här? Det kommer jag inte så långt med. (Formeln $S = X \cdot 3$ kommer fram i en grön ruta i PP bildens högra nedersta hörn.) Hur kan jag använda det här Elias?

2. Elias: Du kan utveckla X till ett tal.

3. L: Ja. Och hur skulle jag kunna använda den här formeln nu då för att räkna ut hur många stjärnor det behövs för trettiosjätte figuren, figur nummer trettiosex (tittar frågande på eleverna)? (---) Hur ska jag skriva? Hur kan man använda den här Johanna (pekar på formeln)?

4. Johanna: Ööö, X-et, att det där, det är ett på det första och sen tar vi två, och sen tre, sen fyra sen där det står tio tror jag att det ska vara trettiosex.

5. L: Om jag vill ta reda på hur många stjärnor det är i figur 36, vad gör jag med X-et då Lukas?
6. Lukas: Lägga till att X är 36.
7. L: (Nickar mot eleven.) Byta ut det mot talet 36. Om jag vill ta reda på hur många stjärnor det är i figur nummer 328, vad gör jag då Emil?
8. Emil: $328 \cdot 3$.
9. L: Byter ut X-et mot 328. Här för jag in figurens nummer (pekar på bokstaven X i formeln), för att ta reda på hur många stjärnor det är.

Formeln testas med figur nummer 1, 2, 3, 36 och 328 genom att variabeln X byts ut mot dessa nummer. Figurnumren varierar medan formeln hålls konstant. Eleverna ges möjlighet att urskilja att en formel gäller för fler än en figur i ett växande mönster. En dimension av variation, en formel är ett generellt uttryck, öppnas.

I början av undervisningssekvensen beskrivs det växande mönstret som är konstruerat av stjärnor med bild. Sedan följer en beskrivning i ord. I tabellerna beskrivs samma mönster med matematiskt symbolspråk och generellt med bokstäver. När det växande mönstret är konstant och sättet varpå det beskrivs varierar ges eleverna möjligheter att urskilja att ett matematiskt mönster kan beskrivas på olika sätt.

Undervisningssekvens 5 (35:10-64:40) - olika stickmönster behandlas

När halva lektionen har gått tar lärare D fram den sista PP bilden med instruktioner och frågor som stöd för elevernas enskilda eller pararbetet med de fyra sista uppgifterna på arbetsbladet. Följande text syns på storbildsskärmen:

"Arbeta med stickmönster 1, 2, 3 och 4. Använd dig av stickor och lägg figurerna. Var uppmärksam! Vad händer i stickmönster 2, 3 och 4? Hur många stickor är det i första figuren? Med hur många stickor växer varje figur?"

Läraren berättar vad eleverna skall göra och vad de skall vara uppmärksamma på i uppgifterna. Särskilt uppmärksammar lärare eleverna på att stickmönster 1 skiljer sig från de andra. För att upptäcka skillnaden skall eleverna vara extra uppmärksamma på

antalet stickor i den första figuren och antalet stickor som varje figur växer med. Eleverna uppmanas att arbeta laborativt genom att använda färgade stickor för att lägga de mönstren som finns i uppgifterna och/eller genom att rita upp mönstren. Några elever arbetar enskilt men de flesta arbetar i par och resonerar tillsammans med klasskompisen som sitter närmast om vad de har skapat och hur de skall gå vidare i arbetet med uppgiften.

Figur 5.31. Två exempel på växande stickmönster från arbetsbladet.

Det är fyra olika växande stickmönster som eleverna arbetar med (se två av dessa i Figur 5.31). Gemensamt för alla uppgifter är att de första tre figurerna i mönstret är synliga. Dessa figurer är markerade med ordet figur samt en siffra som antyder figurens plats i hela mönstret. Eleverna skall bygga den 4:e och den 5:e figuren i alla uppgifter. Antalet figurer i ett växande mönster som eleverna skall arbeta vidare med och vilka figurer i ordningen eleverna skall bygga hålls konstanta.

En liten stund efter att det enskilda arbetet sätts igång undrar en elev, Johanna, om hon skall fortsätta bygga på när hon har ritat första figuren. Läraren tar vara på denna situation och lyfter upp Johannas fråga till en helklassdiskussion (excerpt D12, rad 1). Vad växande mönster är repeteras. Att figurerna i ett växande mönster sitter en bit ifrån varandra uppmärksammas (excerpt D12, rad 7).

Excerpt D12

1. L: Joanna ställde en viktig fråga här framme. Ska jag bara bygga på, när hon har ritat det första. Ska hon bara bygga på?
2. Jonathan: Nej!
3. L: Varför inte? (...) Vad är ett växande mönster?
4. Olivia: Ett mönster som växer.
5. L: Ja. Och hur växer det? (Pekar på en elev.)
6. Pontus: Med samma fast en gång till. På ett visst sätt.
7. L: Det är olika delar och olika figurer som växer.

I den här situationen kan för Joanna som först har byggt alla figurer i det växande mönstret ihop och sedan byggt samma figurer isär öppnas en dimension av variation - ett växande mönster kan ritas/byggas på olika sätt. Även för de elever som eventuellt har byggt på samma sätt som Joanna, sett hur Joanna har byggt eller kunde se en bild av de två sätten att bygga ett växande mönster på som beskrivs ovan kan denna dimension av variation öppnas.

Som det nämndes tidigare är det olika växande mönster som eleverna arbetar med i ett häfte. Det är olika hur eleverna skall bygga nästkommande figurer och hur många fler stickor de behöver använda för det. Formen på utökningsenheten som de växande mönster förändras med och antalet stickor som varje figur växer med varierar. De fyra mönstren förändras genom att man behöver lägga till en kvadrat, två kvadrater, en romb eller ett hus. Hur formen på en utökningsenhet blir beror på hur byggelementen placeras. Antalet byggelement som i dessa fall är tändstickor varierar i de olika mönstren från 3 till 4 eller 5. Alla mönster byggs genom att använda stickor. Eleverna skall i varje uppgift bygga figur nr 4 som består av figur nr 3 och den utökningsenheten som alla figurer växer med, liksom figur nr 5 som består av figur nr 4 och den utökningsenheten som alla figurer växer med o.s.v. Tillvägagångssättet och byggelementet är invariants medan varje ny figurs storlek förändras. Aspekten som eleverna får möjlighet att genom undervisningen urskilja är att varje figur består av den föregående figuren och den utökningsenheten som byggs på enligt ett särskilt mönster. I detta fall öppnas för en dimension av variation hur ett växande mönster förändras är unikt för varje nytt exempel.

Efter att eleverna har byggt den 5:e figuren i de växande mönstren skall de fylla i en värdetabell för alla fyra stickmönster. Tabellerna är identiska från början och består av två rader samt sex kolumner. I första raden är figurernas nummer redan ifyllda. På andra raden skall eleverna fylla i antal stickor i de tomma cellerna (se Figur 5.32).

Figurens nummer	1	2	3	4	5	10
Antal stickor						

Figur 5.32. Exempel på en tabell som finns på arbetsbladen.

När tabellen ritas åt detta håll, horisontellt, är det nödvändigt att se sambandet mellan figurnummer och antalet stickor för att i nästa steg kunna välja den formeln som stämmer med hur det aktuella exemplet på växande mönster förändras. Detta samband kan hittas om man läser tabellen vertikalt. Under föregående lektionssekvens arbetades det med tabeller som ritades vertikalt. Det medför att värdena i tabellen lästes horisontellt. Det är möjligt att en dimension av variation, olika sätt att läsa en tabell, har öppnats på en tidigare mattelektion. På den här lektionen tas det för givet att eleverna har erfarenhet av variation i sättet att läsa en tabell. Det kan ha för konsekvenser att eleverna endast letar efter relationen mellan värden som är inskrivna på samma rad. Samtidigt så öppnas en ny dimension av variation, olika sätt att skriva in värden i en tabell. Detta sker när tabell används konstant för att redovisa figurnummer och det totala antalet byggelement i en figur samtidigt som riktningen på hur värden skrivs in i en tabell varierar (horisontellt eller vertikalt).

Sista deluppgiften för varje stickmönsterexempel går ut på att välja den formeln som beskriver förändringen i det aktuella mönstret. För varje stickmönster kan eleverna välja bland fyra olika formler. Exempel på de olika formlerna presenteras i Figur 5.33.

Stickmönster 1		Stickmönster 2	
$T = x \cdot 2$	$T = x + 4$	$T = x \cdot 4$	$T = x \cdot 4 + 1$
$T = x \cdot 4$	$T = x \cdot 2 + 2$	$T = x \cdot 5$	$T = x \cdot 5 + 1$

Figur 5.33. Exempel på givna formler för två växande stickmönster.

I de åtta formlerna som visas i Figur 5.33 är versalen T , likhetstecknet, gemena x samt multiplikationstecknet invarianta. T representerar det totala antalet tändstickor i en figur medan x

representerar figurernas nummer. Hur formeln fortsätter efter multiplikationstecknet varierar. En dimension av variation, en formel kan se olika ut, öppnas. Eleverna ges möjlighet att erfara att i en formel kan användas en eller två olika räknesätt samt en eller flera olika siffror.

På lektionen visas att olika bokstäver kan användas för variabler i en formel och därmed öppnas en dimension av variation. I en tidigare uppgift valde läraren att använda versalen S för att representera antalet stjärnor jämfört med versalen T som användes i uppgifterna på arbetsbladen för att representera antalet tändstickor. Bokstaven x , som används för figurnumret i de olika uppgifterna, hålls konstant. Bokstäverna T, S och x är variabler som används för att formulera ett samband mellan figurnumret x och antalet byggelement T eller S i en figur. I de behandlade exemplen av växande geometriska mönster är sambandet uttryckt i formlerna $S = x \cdot 3$, $T = x \cdot 4$, $T = x \cdot 5$, $T = x \cdot 2$ o.s.v. för beräkning av antalet stickor respektive stjärnor som funktion av figurnumret. Bokstaven x som står för figurnummer är konstant medan versalerna S och T som står för byggelementen varierar.

Tidigare i undervisningen har växande mönster kontrasterats mot mönster där en sekvens upprepas och eleverna getts möjlighet att urskilja växande geometriska mönster. I senaste beskrivna lektionssekvens får eleverna möjlighet att erfara olika sorters växande mönster. Genom variationsmönstret generalisering visas på en bredd inom aspekten växande mönster och sättet på hur olika växande geometriska mönster fortsätter varierar för att erfaras. Eleverna får även möjlighet att under lektionen erfara växande geometriska mönster konstruerade av olika byggelement och av olika typer av utökningsenheter. De kan erfara växande mönster i form av figurtal (rektangeltal i växande mönstret med stjärnor), stickmönster och växande mönster konstruerade med hjälp av stjärnor och ellipser. Dimensioner av variation "olika sorters växande mönster" och "hur ett växande mönster förändras är unikt för varje nytt exempel" öppnas. Den senaste dimensionen av variation gäller antal byggelement och hur de placeras i den nya figuren.

Undervisningssekvens 6 (69:00-72:10) – avslutande repetition

Efter det enskilda arbetet samlar lärare D eleverna till en gemensam avslutande repetition. Frågan "Vad är växande mönster" besvaras av 10 elever, en elev i taget. De beskriver ett växande mönster som något som växer, blir större och som något som växer med olika antal byggelement på varje figur. Det finns också elever som beskriver ett växande mönster som ett mönster som ökar med ett speciellt antal från figur till figur. De ger ett exempel på att när tre nya byggelement sätts på varje ny figur så förändras det totala antalet byggelement från tre till sex och sedan till nio. Eleverna i klassen får möjlighet att erfara olika beskrivningar av växande mönster.

Dimensioner av variation som öppnas upp i lärare D:s undervisning

I Tabell 6 sammanställs de 13 dimensioner av variation som har öppnats i lärare D:s undervisning. Dessa kan läsas i kolumnen längst till vänster. Dessutom beskrivs det vad som görs möjligt att lära när dessa dimensioner av variation framträder. De olika lärandeobjekten som konstitueras i interaktion mellan eleverna och läraren D i undervisningen är a) beskriva ett mönster (LO1), b) fortsätta redan påbörjade mönster och konstruera egna mönster (LO2), c) uttrycka generellt hur ett mönster växer med matematiskt symbolspråk (LO3) samt att d) tolka data i tabeller (LO5). Med hjälp av översikten i Tabell 6 besvaras första och andra forskningsfrågan för lärare D:s undervisning.

Tabell 6. Dimensioner av variation i lärare D:s undervisning.

Dimensioner av variation	LO1	LO2	LO3	LO5
Hur ett växande mönster förändras är unikt för varje nytt exempel.	X	X		
<ul style="list-style-type: none"> • Antalet byggelement i en utökningsenhet varierar • Formen på en utökningsenhet varierar 				
Olika sätt att representera ett mönster		X		
<ul style="list-style-type: none"> • Samma mönster i olika representationer (bild, ord och kroppsspråk) • Samma växande geometriska mönster i olika representationer (bild och konkret/laborativt material) 				
Olika sätt att beskriva ett mönster	X			
<ul style="list-style-type: none"> • Bildmässigt, verbalt, numeriskt och symboliskt • Begrepp som beskriver förändringen i det växande mönstret varierar • Begrepp som uttrycker mönstrets form, antal byggelement, namnet på byggelementen och förändringen i mönstret varierar 				
Olika sorters matematiska mönster	X	X		
<ul style="list-style-type: none"> • Mönster där en sekvens upprepas jämförs med ett växande geometriskt mönster • Olika typer av utökningsenhet • Samma byggelement – olika växande mönster • Olika byggelement och olika form på utökningsenheten 				
Storleken på figurerna i ett växande geometriskt mönster förändras	X	X		
<ul style="list-style-type: none"> • Olika antal byggelement i olika stora figurer 				
Förändringen i figurerna i ett växande mönster kan ske på olika sätt	X	X		
<ul style="list-style-type: none"> • Det totala antalet byggelement i figuren, höjden på figuren eller förändringen i de olika delarna av figuren • Antalet byggelement i de olika figurerna och inte storleken på byggelementen som spelar roll 				
Antalet byggelement/utökningsenheter är en beroende variabel			X	

<ul style="list-style-type: none"> • Det finns samband mellan figurernas nummer i ett växande mönster och antalet byggelement/utökningsenhet i figuren. • Att uttrycka antalet byggelement i en figur med multiplikation har ett samband med figurens nummer 	
En formel är ett generellt uttryck	X
<ul style="list-style-type: none"> • En formel gäller för fler än en figur i ett växande mönster 	
Olika sätt att räkna ut antalet byggelement i en figur	X
<ul style="list-style-type: none"> • Figurernas nummer kan användas för att uttrycka antalet byggelement i en figur med multiplikation • Antalet byggelement kan uttryckas som en addition 	
Olika bokstäver kan användas för variabler i en formel	X
<ul style="list-style-type: none"> • Olika bokstäver samt gemena och versaler används 	
En formel kan se olika ut	X
<ul style="list-style-type: none"> • I en formel kan användas en eller två olika räknesätt • I en formel kan användas en eller flera olika siffror 	
Olika sätt att skriva in värden i en tabell	X
<ul style="list-style-type: none"> • Vertikalt och horisontellt 	

Likheter och skillnader i innehållets behandling

I första delen av kapitel 5 beskrevs utifrån en variationsteoretisk analys hur fyra lärare behandlar innehållet växande geometriska mönster på en matematiklektion. I den här delen besvaras den tredje forskningsfrågan genom att resultatet från analysen av de fyra lektionerna sammanfattas samt likheter och skillnader i de iscensatta lärandeobjekten diskuteras. De fyra lärarnas undervisning jämförs i termer av likheter och skillnader i sättet att behandla innehållet om växande geometriska mönster i matematikundervisningen. Jämförelsen görs med hjälp av dimensioner av variation (DoV) som öppnats i undervisningen. De öppnade dimensionerna av variation bildade en rymd för vad som var möjligt för eleverna att erfara under de fyra lektionerna.

Lärarna var ombedda att på de analyserade lektionerna lära ut samma matematiska innehåll – växande mönster – utifrån sitt eget sätt att tolka vilka förmågor eleverna behöver utveckla för att lära sig detta innehåll. Analysen av lektionerna visade att fem olika lärandeobjekt konstitueras i interaktion mellan eleverna och läraren i undervisningen. Dessa benämns i studien som:

1. *Att beskriva ett matematiskt mönster*
2. *Att fortsätta på redan påbörjat matematiskt mönster och konstruera egna matematiska mönster*
3. *Att generellt uttrycka hur ett mönster växer med matematiskt symbolspråk*
4. *Att förstå och använda strategier för matematisk problemlösning i vardagliga situationer*
5. *Att presentera och tolka data i tabeller*

De tre första lärandeobjekten faller under området "algebra" i kursplanens centrala innehåll (Skolverket, 2011a). De återstående två lärandeobjekten kan däremot hittas bland områden "problemlösning" samt "sannolikhet och statistik". Eftersom de öppnade dimensionerna av variation som är relaterade till de två sista lärandeobjekten inte hör till det matematikområdet som är i fokus i denna studie har jag valt att inte presentera dem mer ingående. Anledningen till mitt val var att dessa dimensioner av variation öppnades på en lektion där läraren var ombedd att undervisa om algebra och växande mönster. I texten som följer

diskuteras likheter och skillnader av hur de fyra lärarna öppnar dimensionerna av variation som är relaterade till de tre första lärandeobjekten. Ett lärandeobjekt i taget diskuteras.

Att beskriva ett matematiskt mönster

Jag har funnit nio DoV som är relaterade till innehållet beskriva ett matematiskt mönster. Dessa öppnades i åtminstone en av de analyserade lektionerna och är av tre olika kategorier. Den första kategorin som är relaterad till matematiska mönsters egenskaper består av fyra DoV. Den andra kategorin, med en DoV, avser beskrivningssätt. Kategorin beträffande utseende är den tredje och innehåller fyra DoV. Tabell 7 visar skillnaderna i hur innehållet "beskriva ett matematiskt mönster" hanterades av de fyra lärarna A, B, C och D. De tre kategorierna är centrerade i tabellen och är skrivna med kursiv stil. I de ljusgrå raderna står dimensionerna av variation. Den mörkgrå färgen indikerar att dimensionen av variation öppnades och X indikerar de varierade värdena av respektive aspekt (efter Häggström, 2008).

Den DoV som öppnas i alla fyra lärares undervisning är "olika sätt att beskriva ett matematiskt mönster" (DoV nummer fem). Elever i alla klassrum ges möjligheter att urskilja att ett matematiskt mönster kan beskrivas på olika sätt. Trots att det är samma DoV som öppnas skiljer sig sättet att öppna den bland de fyra lärarna. Skillnader består i att någon lärare öppnar dimensionen genom att variera endast ett värde inom aspekten beskrivningssätt medan andra varierar fler värden. För elevernas lärande kan det betyda att exempelvis lärare A:s elever får möjlighet att lära sig att beskriva ett mönster endast verbalt och numeriskt. För lärare B:s elever ges också möjlighet att lära sig att beskriva ett mönster verbalt och numeriskt. Dessutom kan de lära sig att beskriva ett mönster bildmässigt och symboliskt men också genom att ange antalet byggelement/utökningsenheter samt genom att beskriva relationen mellan figurnummer och antalet byggelement/utökningsenheter. När en lärare öppnar en DoV på olika sätt ges även eleverna fler möjligheter att lära sig än om samma DoV öppnas endast på ett sätt.

Tabell 7. Det iscensatta lärandeobjektet "Att beskriva ett matematiskt mönster"

	Lärare	A	B	C	D
<i>Dov beträffande (växande matematiska mönsters) egenskaper</i>					
1 I ett matematiskt mönster upprepar sig en sekvens på ett regelbundet sätt					
1a. Ett regelbundet och ett oregelbundet mönster jämförs med varandra	X	X			
2 Hur ett växande mönster förändras är unikt för varje nytt exempel					
2a. Antalet och typen av byggelement i utökningseenheten varierar		X		X	
2b. Formen på en utökningseenhet varierar		X		X	
3 Ett växande mönster består av olika figurer som förändras med en viss regelbundenhet					
3a. Ett regelbundet växande geometriskt mönster jämförs med ett oregelbundet växande geometriskt mönster		X			
4 Varje figur i ett växande mönster har ett nummer					
4a. Figurnummer används i både ritade och byggda mönster		X			
<i>DoV beträffande beskrivningssätt</i>					
5 Olika sätt att beskriva ett matematiskt mönster					
5a. Verbalt och numeriskt		X			
5b. Genom att ange antalet byggelement/utökningseenhet samt genom att beskriva relationen mellan figurnummer och antalet byggelement/utökningseenheter			X		
5c. Bildmässigt, verbalt, numeriskt och symboliskt		X	X	X	
5d. Begrepp som beskriver förändringen i det växande mönstret varierar					X
5e. Begrepp som uttrycker mönstrets form, antal och namn på byggelementen samt förändringen i mönstret varierar					X
<i>DoV beträffande utseende</i>					
6 Mönster som upprepas					
6a. Ett mönster som upprepas kan se olika ut		X			
7 Storleken på figurerna i ett växande mönster förändras					
7a. Olika antal byggelement i olika stora figurer		X	X		X
8 Olika sorters matematiska mönster					
8a. Olika typer av mönstersekvens		X			
8b. Mönster där en sekvens upprepas jämförs med ett växande geometriskt mönster		X		X	
8c. Olika typer av utökningseenhet		X		X	
8d. Samma byggelement – olika växande mönster		X		X	
8e. Olika byggelement och olika form på utökningseenheten					X
9 Förändringen i figurerna i ett växande mönster kan ske på olika sätt					
9a. Det totala antalet byggelement i figuren, höjden på figuren eller förändringen i de olika delarna av figuren				X	
9b. Antalet byggelement i de olika figurerna och inte storleken på byggelementen som spelar roll					X

I Tabell 7 kan vi se att det finns DoV som bara öppnas i en lärares undervisning. Ett exempel på detta är när DoV "ett växande mönster består av olika figurer som förändras med en viss regelbundenhet" (DoV nummer tre) öppnas. När denna aspekt tas för givet i undervisningen får eleverna inte möjlighet att urskilja att både antalet byggelement som mönstret växer med utan också hur dessa byggelement placeras är avgörande när man skall visa att man förstår hur ett mönster växer. Det räcker inte att elevernas uppmärksamhet riktas endast mot regelbundenheten i antalet byggelement som varje ny figur i ett växande mönster förändras med. När lärare B öppnar denna DoV i undervisningen jämförs ett regelbundet växande geometriskt mönster med ett oregelbundet växande geometriskt mönster. I båda dessa mönster hålls antalet byggelement som mönstren växer med konstant men sättet de placeras på skiljer sig åt i de två exemplen. Elevernas uppmärksamhet riktas då mot regelbundenheten beträffande sättet som byggelementen placeras i varje ny figur i ett växande geometriskt mönster. Detta exempel visar också att beroende på vilka aspekter i ett lärandeobjekt som varierar respektive är invarianta i undervisningen ges eleverna olika möjligheter att lära.

Ett annat exempel på att en lärare är ensam om att öppna en DoV i undervisningen är DoV "varje figur i ett växande mönster har ett nummer" (DoV nummer fyra). Lärare B:s medvetenhet om öppningen av denna DoV speglas i sättet att behandla denna del i innehållet. Hon har i förväg förberett lappar med texten om figurernas nummer och i samtalet och diskussionen på lektionen fokuseras detta innehåll ett flertal gånger. Figurernas nummer används simultant på flipcharten, på tavlan, på lapparna som elever använder när de själva bygger mönstret och på elevernas ritningar. På detta sätt ges eleverna möjlighet att få syn på aspekten figurernas nummer vilket är en viktig del i lärandet om växande geometriska mönster. I de andra lärares undervisning används termen figurnummer mer eller mindre frekvent men eleverna ges möjlighet att endast se uttrycken antingen på tavlan eller i arbetshäftet och aldrig samtidigt. Lärare D är inte konsekvent för hon skriver ibland ut figurernas nummer och ibland inte. Lärare C visar ett exempel på växande geometriskt mönster under lektionen då hon använder sig av figurnummer. I lärare A:s undervisning nämns termen figur några enstaka gånger men den skrivs aldrig upp på tavlan. I lärare A:s, C:s och D:s undervisning öppnas inte figurnummer som en

dimension av variation som i lärare B:s. Dessutom är skillnaden i hur innehållet behandlas av fyra lärare att Lärare B ställer i förväg genomtänkta frågor som tillsammans med variationsmönstret används på ett systematiskt sätt för att möjliggöra för eleverna att få syn på figurnummer i ett växande geometriskt mönster.

Om antalet kryss analyseras i Tabell 7 blir det uppenbart att vissa lärare öppnar fler DoV än andra. Om DoV öppnas kan det erbjuda andra möjligheter för eleverna att lära sig lärandeobjektet (Kullberg, 2010). Det är viktigt att påpeka att fler öppnade dimensioner av variation inte skapar per automatik bättre undervisning som leder fram till elevernas lärande. Det avgörande är vilka aspekter av innehållet varieras och hur variationen går till. När DoV "mönster som upprepas" som har fått nummer sex i Tabell 7 öppnas i lärare A:s undervisning varieras utseendet av olika mönster där en sekvens upprepas. Denna variation blir ett tydligt exempel på variationsmönstret generalisering och eleverna ges möjlighet att lära sig att ett mönster där en sekvens upprepas kan se olika ut. Frågan är om denna kunskap är viktig när målet med undervisningen är att lära sig om växande geometriska mönster. Samtidigt som DoV "mönster som upprepas" öppnas tas det för givet att växande mönster ser annorlunda ut och har andra egenskaper än ett mönster där en sekvens upprepas. I ett mönster som upprepas byggs oförändrade mönstersekvenser på varandra vilket medför att mönstret blir längre men det består av ett enda stycke. Till skillnad från denna sorts matematiskt mönster är växande mönster uppbyggt av utökningssekvenser som förändras varje gång den upprepas. Eleverna förväntas urskilja dessa skillnader på egen hand.

Likaså ges eleverna i lärare A:s undervisning tillfälle att lära sig att man kan ha olika mönstersekvenser när man bygger eller ritar mönster där en sekvens upprepas när DoV "olika sorters matematiska mönster" öppnas. Återigen riktas fokus på mönster där en sekvens upprepas samtidigt som växande geometriska mönster lyser med sin frånvaro. Trots att det är två DoV som öppnas i undervisningen har de inte avsevärt bidragit till elevernas lärande om växande geometriska mönster.

Det finns skillnader i de fyra lärarnas sätt att behandla innehållet växande geometriska mönster men som inte syns enbart genom analysen av tabellens innehåll. En sådan skillnad består i huruvida

en lärare medvetet riktar elevernas uppmärksamhet mot en aspekt eller om dimensionen av variation öppnas av en eller flera elever. I Tabell 7 framgår att den första DoV "i ett matematiskt mönster upprepar sig en sekvens på ett regelbundet sätt" öppnas i två lärares undervisning. Både i lärare A:s och i lärare B:s undervisning jämförs ett regelbundet mönster med ett oregelbundet för att möjliggöra för eleverna att förstå innebörden av termen regelbunden. Skillnaden som inte syns i Tabell 7 ligger i att i lärare A:s undervisning är det en elev som öppnar denna DoV med sitt exempel på mönster. Lärare B riktar med eget valda mönsterexempel medvetet elevernas uppmärksamhet mot sekvensen som upprepas på ett regelbundet sätt. Detta jämförs med ett annat mönsterexempel där den upprepade sekvensen saknas. Frågorna om huruvida lärare A skulle medvetet öppna denna DoV eller ta den för givet utan elevens exempel förblir obesvarade.

Att fortsätta på redan påbörjat matematiskt mönster och konstruera egna matematiska mönster

Under analysarbetet visade sig att DoV nummer 1, 2, 3, 7, 8 och 9 (se Tabell 7) som motsvarade ett viktigt inslag i lärandeprocessen om att beskriva ett matematiskt mönster var samtidigt en nödvändig förutsättning för att kunna konstruera egna och fortsätta på redan påbörjade matematiska mönster. Dessa två lärandeobjekt iscensattes samtidigt i vissa undervisningssekvenser. För att undvika upprepning valdes att diskutera dessa DoV bara i delen om lärandeobjektet "beskriva ett matematiskt mönster". Konsekvensen av detta val är att i denna del där DoV relaterade till det iscensatta lärandeobjektet "fortsätta på redan påbörjat matematiskt mönster och konstruera egna matematiska mönster" diskuteras finns bara två DoV. Endast öppningen av dessa två DoV är långt ifrån tillräckligt för att möjliggöra för elever att lära sig konstruera egna och fortsätta på redan påbörjade matematiska mönster. Skillnaderna i hur innehållet "fortsätta på redan påbörjat matematiskt mönster och konstruera egna matematiska mönster" hanterades av de fyra lärarna presenteras i Tabell 8.

Tabell 8. Det iscensatta lärandeobjektet "Att fortsätta på redan påbörjat matematiskt mönster och konstruera egna matematiska mönster".

	Lärare	A	B	C	D
1 Olika sätt att representera ett matematiskt mönster					
1a. Samma figur i olika representationer (bild och konkret/laborativt material)		X			
1b. Samma mönster i olika representationer (bild, ord och kroppsspråk)			X		X
1c. Samma växande geometriska mönster i olika representationer (bild och konkret/laborativt material)			X		X
1c. Samma växande geometriska mönster i olika representationer (bild och ord)				X	
2 Ett växande mönster kan ritas/byggas på olika sätt					
2a. Varje ny utökningsenhet i en figur kan ritas en bit ifrån den föregående enheten eller tätt inpå			X		
2b. Ett växande mönster består av olika figurer som sitter en bit ifrån varandra			X		X

När det gäller lärandeobjektet "att kunna fortsätta på redan påbörjat matematiskt mönster och konstruera egna matematiska mönster" är det fler DoV som öppnas i lärare B:s och i lärare D:s undervisning än i lärare A:s och C:s. Fler öppnade dimensioner av variation implicerar att fler möjligheter till lärande ges förutsatt att aspekter av innehållet som eleverna inte tidigare har urskiljt varierar. Eleverna i lärare B:s och D:s klass ges möjlighet att urskilja a) att sättet som ett växande mönster förändras på är unikt för varje nytt exempel, b) att ett växande mönster består av olika figurer som förändras med en viss regelbundenhet, c) att storleken på figurerna i ett växande mönster förändras, d) att det finns olika sorters växande mönster, e) att förändringen i figurerna i ett växande mönster kan ske på olika sätt, f) att det finns lika sätt att representera ett matematiskt mönster på samt g) att ett växande mönster kan ritas/byggas på olika sätt. Om eleverna i lärare B:s och D:s klass inte hade fått syn på dessa aspekter innan undervisningen då är chansen att de har lärt sig fortsätta på redan påbörjat matematiskt mönster och konstruera egna matematiska mönster i den beskrivna undervisningen ganska stor.

Den första DoV i denna grupp avser vilka representationer som används för att uttrycka ett mönster. I alla klassrum finns variation i detta avseende med några skillnader. Det är både ett mönster men också en figur som uttrycks i olika representationer. Även mönstren

som eleverna kan erfara i olika representationer skiljer sig från att vara ett mönster där en sekvens upprepas och ett växande mönster. Vilka av representationsformerna bild, ord, kroppsspråk och/eller konkret material som mönstren uttrycks med skiljer sig också åt från lektion till lektion.

En gemensam nämnare för lärare B:s och lärare D:s undervisning om växande geometriska mönster är att DoV "ett växande mönster kan ritas/byggas på olika sätt" öppnas i båda lärarnas undervisning. Detta skiljer dessa två lärares undervisning från de andra två där denna DoV inte öppnas. De aspekterna som varierar för att urskiljas växer fram ur enskilda elevers uppfattningar som fångas upp av lärare B och lärare D. I analysen av hur innehållet behandlas av lärare B och lärare D när denna DoV öppnas utkristalliserade sig att en liten förändring i hur innehållet behandlas i undervisningen leder till att eleverna får möjlighet att lära sig olika saker. När aspekten "varje ny utökningsenhet i en figur kan ritas en bit ifrån den föregående enheten eller tätt inpå" urskiljs har några elever i lärare B:s klass ritat varje ny figur med en tändsticka för mycket. Den nya utökningsenheten hamnade en bit ifrån föregående istället för tätt inpå den. Att rita mönstret på elevernas sätt skulle innebära att ett helt nytt mönster konstruerades. Det nya växande mönstret skulle behöva beskrivas med en helt annan formel än det ursprungliga mönstret. Beroende på om eleverna får eller inte får möjlighet i undervisningen att urskilja att varje ny utökningsenhet i en figur kan ritas på två olika sätt - en bit ifrån den föregående enheten eller tätt inpå - lär de sig olika sätt hur ett växande mönster kan ritas och/eller konstrueras.

Aspekten "ett växande mönster består av olika figurer som sitter en bit ifrån varandra" ges möjligt att urskilja i lärare D:s undervisning tack vare en fråga från en elev. Eleven undrar om hon skulle börja om när hon byggde figur nummer 2 eller om hon skulle bygga på den nya figuren på den föregående. När eleverna får möjlighet att erfara ett och samma mönster med den skillnaden att mönstret konstrueras först genom att varje ny figur byggs en bit ifrån varandra och sedan att den nya figuren byggs tätt intill den föregående figuren ges det möjligt för dem att urskilja viktiga egenskaper hos växande geometriska mönster. Om eleverna får möjlighet att endast erfara det första sättet att bygga figurerna i mönstret, d.v.s. en bit ifrån varandra, blir möjligheten att urskilja att

ett växande geometriskt mönster består av olika figurer som sitter en bit ifrån varandra inte lika tydlig för dem. Ser eleverna bara ett sätt att bygga figurerna på erfar de ingen variation i sättet att bygga varje ny figur och aspekten blir troligen inte urskild. För att möjliggöra urskiljandet av denna aspekt är det viktigt att kontrastera ett sätt att bygga en ny figur med ett annat. Likaså kan eleverna endast erfara att figur nummer 2 byggs direkt på figur nummer 1. I detta fall blir det inte heller lika tydligt för eleverna att urskilja att varje ny figur i ett växande mönster byggs en bit ifrån den föregående figuren. Det görs inte möjligt för dem att erfara var gränsen för de olika figurerna går. De lär sig inte att se de olika instanserna av ett växande geometriskt mönster och de får svårigheter när de skall föreställa den n :te figuren. För att kunna urskilja det är det nödvändigt för eleverna att *samtidigt* se minst tre på varandra följande figurer i ett växande geometriskt mönster. De skall också ges möjlighet att erfara skillnaden mellan detta sätt att konstruera ett växande geometriskt mönster och det andra sättet att konstruera samma mönster där figurerna sitter ihop och som blir identiskt ett mönster där en sekvens upprepas. Dessa två exempel bör eleverna se *samtidigt* för att erfara skillnaden mellan dem.

Att generellt uttrycka hur ett mönster växer med matematiskt symbolspråk

När det gäller det tredje lärandeobjektet i de analyserade lektionerna har jag hittat sju DoV som öppnades i åtminstone ett av klassrummen (se Tabell 9). Lärandeobjektet som diskuteras i detta avsnitt är relaterat till förståelse av och förmågan att kunna uttrycka generellt hur ett mönster växer med matematiskt symbolspråk. Detta lärandeobjekt är annorlunda än de två föregående. De två första objekten för lärande är relaterade till förståelsen av hur logiska mönster byggs upp och hur man kan kommunicera kring dessa. Detta tredje lärandeobjekt avser förmågan att kunna föra generella resonemang och använda matematiska modeller.

Tabell 9. *Det iscensatta lärandeobjektet "Att generellt uttrycka hur ett mönster växer med matematiskt symbolspråk".*

	Lärare	A	B	C	D
1 Antalet byggelement/utökningsenheter är en beroende variabel					
1a. Det finns samband mellan figurernas nummer i ett växande mönster och antalet byggelement/utökningsenhet i figuren.		X			X
1b. Det finns samband mellan antalet mönstersekvenser och antalet byggelement i ett mönster		X			
1c. Att uttrycka antalet byggelement i en figur med multiplikation har ett samband med figurens nummer					X
2 En formel är ett generellt uttryck					
2a. En formel gäller för fler än en figur i ett växande mönster		X			X
2b. En formel för rektanglars area gäller fler än en rektangel		X			
2c. En formel för att räkna ut antal turer gäller för vilket antal vuxna som helst				X	
3 Begreppet "formel" i olika sammanhang					
3a. Betydelsen av begreppet "formel" inom algebra jämförs med dess användning inom geometri och inom trolldom		X			
4 Olika sätt att räkna ut antalet byggelement i en figur					
4a. Dubblera antal byggelement om figurnummer dubblas jämförs med att använda figurnumret i ett generellt uttryck		X			
4b. Figurernas nummer kan användas för att uttrycka antalet byggelement i en figur med multiplikation					X
4c. Antalet byggelement kan uttryckas som en addition					X
5 Olika bokstäver kan användas för variabler i en formel					
5a. Versalerna S, T och F används		X			
5b. Olika bokstäver samt gemena och versaler används (v och t samt A och F) (S, T, X och x)				X	X
6 En formel kan se olika ut					
6a. I en formel kan användas ett eller två olika räknesätt		X			X
6b. I en formel kan användas en eller flera olika siffror		X			X
7 Olika sätt att hitta rätt formel					
7a. Att uttrycka förändringen i mönstret med matematiskt symbolspråk jämförs med att använda uteslutningsmetoden.		X			

Det är i lärare B:s och i lärare D:s undervisning som de flesta DoV öppnas när lärandeobjektet "att kunna uttrycka generellt hur ett mönster växer med matematiskt symbolspråk" konstitueras i undervisningen. Om lärandet definieras som att erfara ett fenomen på ett nytt sätt då det i undervisningen ges möjlighet för eleverna att urskilja fler och nya aspekter av ett fenomen i jämförelse med vad de

kunde urskilja tidigare så är det eleverna i lärare B:s och lärare D:s klass som har fått störst möjlighet att lära sig att uttrycka generellt hur ett mönster växer med matematiskt symbolspråk.

Den första DoV - antalet byggelement/utökningsenheter är en beroende variabel - öppnas i tre lärares undervisning. Detta är en av likheterna i hur lärare A, lärare B och lärare D behandlar innehållet växande geometriska mönster i sin undervisning. Skillnaden är att det är värden i två olika aspekter som varieras. Lärare B och D möjliggör i sin undervisning för elever att urskilja aspekten antalet byggelement respektive utökningsenhet i en figur har ett samband med figurens nummer. I lärare A:s undervisning öppnas för den aktuella DoV genom att det arbetas med olika matematiska uttryck som visar hur det totala antalet tändstickor i ett visst mönster kan räknas ut.

Även om lärare B och lärare D öppnar samma DoV och synliggör samma aspekt av innehållet för eleverna finns det några skillnader i hur de behandlar det matematiska innehållet i sin undervisning. De små förändringarna i hur innehållet behandlas i undervisningen ger olika möjligheter för eleverna på lärare B:s och lärare D:s lektion att lära. Variationsmönstret i lärare B:s undervisning möjliggör för eleverna att urskilja att det totala antalet byggelement i en figur har ett samband med figurens nummer. För att förtydliga detta utgår jag ifrån exemplet i Figur 5.14 där byggelementen är tändstickor och utökningsenheten romber. Antalet tändstickor beskrivs med matematiskt symbolspråk för de uppritade figurerna ett till fem och figur nummer 10. För att beteckna antalet tändstickor används versalen S. Antalet sammanlagda tändstickor i en figur räknas ut genom att multiplicera antalet romber med fyra. Siffran fyra står för antalet tändstickor som går åt att bygga en romb. Således blir antalet tändstickor i figur nummer tio $S = 10 \cdot 4$. Lärare B är noga med att berätta att figurens nummer är samma som antalet romber i figuren samt att varje romb består av fyra tändstickor. Detta samband som eleverna har funnit beskrivs för varje figur med symboler. Läraren ringar in figurnumret och numret som visar antalet romber i det matematiska uttrycket för varje figur uppritad på tavlan och kopplar ihop dessa två inringade tal med ett streck emellan ringarna. Bokstaven S och talet fyra hålls konstant för de sex ovan nämnda figurer. Talen som representerar figurnumret varierar. Eleverna ges möjlighet att se att med ökat figurnummer ökar även antalet

tändstickor i mönstret. Dimension av variation, antalet byggelement är en beroende variabel, öppnas och eleverna ges möjlighet att lära sig att det totala antalet byggelement i en figur har ett samband med figurens nummer. Detta samband påvisas i olika figurer både skriftligt på tavlan och genom att lärarna använder sig av kroppsspråk. Eleverna har möjlighet att samtidigt se ett växande geometriskt mönster och det generella algebraiska uttrycket som beskriver förändringen i mönstret.

Om det växande geometriska mönstret inte syns för eleverna då de arbetar fram en formel, vilket är fallet i lärare D:s undervisning, kan det innebära att möjligheten att simultant kunna se det uppritade mönstret och de matematiska uttrycken tas bort för dem. I detta fall är det troligt att eleverna fokuserar på att räkna samtidigt som vetenskapen om att de räknar antalet byggelement i ett bestämt växande mönster hamnar i bakgrunden och blir förlorad. Trots att läraren fokuserar på sambandet mellan figurnumret och det matematiska uttrycket som visar hur mönstret växer blir sambandet inte lika tydligt eftersom det uppritade mönstret inte syns samtidigt på tavlan.

I lärare A:s undervisning har eleverna byggt tre mönster med fyra, 15 och 20 trianglar. I de matematiska uttrycken har de beskrivit med enbart siffror att för varje triangel behövs det två tändstickor och en till tändsticka som är den allra första i mönstret. Det totala antalet tändstickor kan räknas ut genom att multiplicera antalet trianglar med två och addera ett till produkten, konstateras det i klassen. Eleverna ges möjlighet att urskilja att det finns samband mellan antalet mönstersekvenser och det totala antalet byggelement i mönstret. Figurernas nummer som varierar i formeln finns inte med i undervisningen överhuvudtaget. Även i detta fall möjliggör man som lärare för eleverna att lära sig att antalet byggelement är en beroende variabel. Skillnaden blir att de urskiljer att det totala antalet byggelement i en figur har ett samband med antalet utökningsenheter och inte med figurens nummer. Detta är helt rätt men kan skapa svårigheter och förvirring hos eleverna när de skall lära sig generalisera sina kunskaper till nya sammanhang. Att kunna upptäcka hur det totala antalet byggelement i en figur förhåller sig till antalet utökningsenheter är enklare att se i vissa växande mönster men svårare att se i andra. Om man som elev erfar att antalet utökningsenheter är samma som figurens nummer har man skapat

förutsättningar för att höja sina matematiska kunskaper till en mer generell nivå.

Skillnaderna i hur lärare A, B, C och D behandlar innehållet består även i att någon lärare är ensam om att öppna en DoV. Detta är fallet med DoV "begreppet formel i olika sammanhang" som enbart öppnas i lärare B:s undervisning. Hon möjliggör för eleverna att urskilja att betydelsen av begreppet kan vara olika i olika sammanhang. Betydelsen av termen "formel" inom algebran jämförs med hur den används inom geometri och trolldom. Själva begreppet "formel" användes i alla fyra lärares undervisning. Det varken utvecklas en diskussion eller skapas någon variation kring begreppet på ett sådant sätt att en dimension av variation öppnas. Detta skulle kunna betyda att det tas för givet i tre lärares undervisning att eleverna har kunskaper om att begreppet formel kan användas i olika sammanhang.

Sammanfattning

Det visade sig i studien att lärare öppnar ett flertal dimensioner av variation när de undervisar om växande geometriska mönster. Nedan sammanfattas de dimensioner av variation som öppnas när det i undervisningen skapas en variation i en av aspekten av växande geometriska mönster. Dessa dimensioner av variation benämns i studien som:

1. I ett matematiskt mönster upprepar sig en sekvens på ett regelbundet sätt
2. Hur ett växande mönster förändras är unikt för varje nytt exempel
3. Ett växande mönster består av olika figurer som förändras med en viss regelbundenhet
4. Varje figur i ett växande mönster har ett nummer
5. Olika sätt att beskriva ett matematiskt mönster
6. Mönster som upprepas
7. Storleken på figurerna i ett växande mönster förändras
8. Olika sorters matematiska mönster
9. Förändringen i figurerna i ett växande mönster kan ske på olika sätt
10. Olika sätt att representera ett matematiskt mönster

11. Ett växande mönster kan ritas/byggas på olika sätt
12. Antalet byggelement/utökningsenheter är en beroende variabel
13. En formel är ett generellt uttryck
14. Begreppet "formel" i olika sammanhang
15. Olika sätt att räkna ut antalet byggelement i en figur
16. Olika bokstäver kan användas för variabler i en formel
17. En formel kan se olika ut
18. Olika sätt att hitta rätt formel

När det öppnas för en dimension av variation i en undervisningssituation konstitueras ett potentiellt objekt för elevernas lärande. Resultatet visar att det formas olika lärandeobjekt i de fyra lärarnas undervisning, trots att lärarna undervisar om samma innehåll. Vissa av dessa lärandeobjekt kan relateras till innehållet växande mönster. Dessa lärandeobjekt benämns i studien som 1. *Att beskriva ett matematiskt mönster*, 2. *Att fortsätta på redan påbörjat matematiskt mönster och konstruera egna matematiska mönster* samt 3. *Att generellt uttrycka hur ett mönster växer med matematiskt symbolspråk*. Två lärandeobjekt hör till annat matematiskt innehåll och benämns i studien som 4. *Att förstå och använda strategier för matematisk problemlösning i vardagliga situationer* samt 5. *Att presentera och tolka data i tabeller*.

Det är fler skillnader än likheter mellan hur fyra olika lärare behandlar innehållet växande geometriska mönster som identifierades. En av likheterna är att samma variationsmönster iscensätts i olika lärares undervisning. Exempelvis skapar lärare variationsmönstret kontrast när de diskuterar ett växande geometriskt mönster och ett mönster där en sekvens upprepas samtidigt och jämför dessa med varandra. En annan likhet är att flera lärare öppnar samma dimension av variation. Vissa dimensioner av variation öppnas i alla fyra lärares undervisning. Även om det är samma dimension av variation som öppnas i de olika klasrummen är det olika aspekter i en och samma dimension som varieras. Det kan bidra till att eleverna förstår samma ämnesinnehåll på olika sätt.

En annan skillnad som hittades i studien är att det är olika dimensioner av variation som öppnas av respektive lärare när de behandlar samma lärandeobjekt. Beroende på vilken dimension av variation som öppnas i undervisningen är det olika aspekter av

lärandeobjektet som fokuseras och eleverna erbjuds att erfara ett ämnesinnehåll med skilda innebörder. Sättet att öppna en och samma dimension av variation skiljer sig åt i de olika lärares undervisning.

Vissa lärare öppnar fler dimensioner av variation än andra. Fler öppnade dimensioner av variation kan bidra till en större möjlighet till elevernas lärande. Lärande förutsätter att urskiljningen av aspekter sker i samband med variation i undervisningen och med öppning av en dimension av variation.

Studien visar att lärare antingen medvetet eller omedvetet öppnar för variation i vissa dimensioner och begränsar variationen vad gäller andra aspekter. I vissa klasser är det lärare som riktar elevernas uppmärksamhet mot en aspekt genom att variera värden inom aspekten. I andra klasser är det elever som öppnar en dimension av variation.

Några lärare är ensamma om att öppna en dimension av variation. En oöppnad dimension av variation kan innebära att läraren tar den för givet eller att han/hon ännu inte själv har erfart en variation av aspekten i fråga.

Dimensioner av variation som verkar vara av stor betydelse för att eleverna skall lära sig beskriva, fortsätta på redan påbörjat och konstruera egna matematiska mönster är:

- I ett matematiskt mönster upprepar sig en sekvens på ett regelbundet sätt
- Ett växande mönster består av olika figurer som förändras med en viss regelbundenhet
- Varje figur i ett växande mönster har ett nummer
- Olika sätt att beskriva ett matematiskt mönster
- Olika sorters matematiska mönster
- Ett växande mönster kan ritas/byggas på olika sätt

För att lära sig uttrycka generellt hur ett mönster växer med matematiskt symbolspråk verkar öppningen av följande dimensioner av variation ha betydelse:

- Antalet byggelement/utökningsenheter är en beroende variabel
- En formel är ett generellt uttryck
- Olika bokstäver kan användas för variabler i en formel
- En formel kan se olika ut

6. Diskussion

I detta avslutande kapitel presenteras studiens bidrag till forskningssamhället samt studiens slutsats. Resultatet diskuteras i relation till de tidigare ställda forskningsfrågorna som studien har sökt svar på. Studiens resultat jämförs med andra variations-teoretiska studier och studier om växande geometriska mönster. Därefter resoneras kring de metodologiska överväganden som har gjorts samt kring studiens metodologiska möjligheter och brister. Det förs en diskussion om hur den beskrivna undervisningen om växande geometriska mönster kan bidra till förändring av matematikundervisningen i den svenska skolan. Sist redovisas några idéer kring fortsatt forskning som studien skulle kunna vara en språngbräda till.

Det finns flera anledningar till varför frågor om matematikundervisning och om växande geometriska mönster bör diskuteras. En är att undervisningen har en direkt påverkan på elevernas lärande (Creemers, 1994; Creemers & Kyriakides, 2008; Emanuelsson, 2001; Hattie, 2009; Kullberg, 2010; Muijs & Reynolds, 2000; Nuthall, 2005; Reynolds, 2007). Svårigheterna som eleverna har med att lära sig algebra beror på begränsningar av de undervisningsmetoder som lärare använder sig av (Lee, 1996; Moss och Beatty, 2006; Måsøval, 2011; Noss, Healy & Hoyles, 1997; Stacey & MacGregor, 2001). En annan är att det saknas forskning för att synliggöra och förstå vad lärare gör i sin undervisning som främjar elevers resultat (Kyriakides m.fl., 2013). En tredje är att det behövs ytterligare studier inom området algebra i synnerhet om hur undervisningen kan hjälpa elever att uttrycka växande geometriska mönster med matematiskt symbolspråk (Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2007; Persson, 2010; Radford, 2000). En fjärde och sista anledning är att det är brist på studier som genomförts med hjälp av observation och analys av hur algebraundervisningen går till (Häggström, 2008; Kieran, 2007) eftersom det saknas lämpliga modeller för observation och analys av undervisning (Kieran, 2007).

Studien har resulterat i analys och beskrivning av hur lärare behandlar innehållet växande geometriska mönster i sin undervisning. Det beskrivs även hur lärare i sin undervisning möjliggör lärande när de fokuserar vissa aspekter av

undervisningsinnehållet och låter andra vara ofokuserade. Att använda sig av variationsteori har visat sig vara ett kraftfullt verktyg i analysen av klassrumsundervisning. Lärares undervisning har observerats, analyserats och beskrivits genom att vid analysen använda variationsteoretiska begrepp. Således bidrar studien med kunskap om hur algebraundervisning när innehållet växande geometriska mönster behandlas kan genomföras för att främja elevernas lärande. Den är ett tillskott till de få studier inom matematikdidaktisk forskning som använder empiri från autentiska klassrum. Studien bidrar även till mångfalden i den nationella matematikdidaktiska forskningen när det gäller det matematiska innehållet, forskningsinriktningen samt åldern på elever. Studien är också en modell för hur undervisning kan undersökas.

Slutsats

Studien har resulterat i variationsteoretisk analys och beskrivning av hur fyra lärare behandlar innehållet när de undervisar om växande geometriska mönster. Studien visar att samtliga lärare behandlar det matematiska innehållet på ett sådant sätt att de åstadkommer, medvetet eller omedvetet, någon form av innehållsvariation. Beroende på vilka aspekter av växande geometriska mönster varieras och vilka hålls konstant öppnas olika dimensioner av variation i undervisningen. De öppnade dimensionerna av variation resulterar i en skillnad när det gäller karaktären av de olika lärandeobjekten som konstitueras i undervisningen om samma innehåll - växande geometriska mönster.

Eleverna kan lära sig om växande geometriska mönster när det ges möjlighet för dem att urskilja nya nödvändiga aspekter av växande geometriska mönster jämfört med vad de kunde urskilja tidigare. Det som eleverna kan urskilja är beroende av den variation i en aspekt som skapas i en undervisningssituation. När i undervisningen möjliggörs en variation i en aspekt öppnas en dimension av variation. De olika dimensioner av variation, som antingen öppnas eller inte öppnas i undervisningen och som analyseras i denna studie, ger olika möjligheter för eleverna att lära. Elevernas förståelse av växande geometriska mönster är starkt kopplad till variation eller icke variation av aspekterna som de ges

möjlighet att erfara i undervisningen och som rör detta matematiska innehåll.

Undervisning om växande mönster

Undervisning i allmänhet och inom ämnet matematik i synnerhet är ett mycket komplext fenomen. I en studie som denna reduceras komplexiteten till några enstaka faktorer som jag som forskare har valt att undersöka. Denna studie fokuserar på hur lärare behandlar ett undervisningsinnehåll och beskriver vilka exempel arbetas med på de analyserade lektionerna, vilka begrepp används, vad i innehållet som behandlas fokuseras samtidigt, vilka dimensioner av variation öppnas och vad görs möjligt för eleverna att lära. Detta sätt att se, tolka och beskriva den studerade verksamheten är bara ett av många möjliga. Diskussionen om resultatet är begränsad till de i studien fokuserade faktorerna.

I resultatkapitlet visades att det är olika dimensioner av variation som har öppnats i fyra lärares undervisning. Det finns också skillnader angående vilka aspekter av lärandeobjektet som har gjorts möjligt för eleverna att urskilja. Detta innebär att det som blev möjligt för eleverna att lära enligt den variationsteoretiska analysen skiljer sig i de olika klassrummen.

Huruvida de aspekter som varierar när en dimension av variation öppnas är kritiska eller inte kan inte besvaras med denna studies resultat. Kritiska aspekter är de aspekter som är nödvändiga för den lärande att urskilja för att lära sig något nytt men som hon/han ännu inte har urskiljt (Lo, 2012; Marton, 2014). För att kunna säga om en aspekt var kritisk i någon av klasserna skulle jag behöva data om de deltagande elevers kunskaper före och efter de genomförda lektionerna. Men jag vågar påstå att ett flertal av de aspekter som varierades på de analyserade lektionerna kan vara kritiska.

Vissa dimensioner av variation öppnas i de fyra lärarnas undervisning genom att lärare medvetet riktar elevernas uppmärksamhet mot aspekter som av lärare anses vara viktiga att urskilja för att lära innehållet växande geometriska mönster. Andra dimensioner av variation öppnas av eleverna. Sättet på hur ett innehåll behandlas påverkar elevernas möjlighet att ta till sig nya innebörder (Häggström, 2008; Kullberg, 2010; Lo, 2012; Runesson,

1999). Lärarens kunskaper om undervisningens innehåll och om sättet som eleverna kan förstå detta innehåll ökar möjligheten att eleverna lär och utvecklas så mycket som möjligt (Thorsten, 2014). En framgångsrik undervisning förutsätter att innebörden i lärandeobjektet och de kritiska aspekterna har definierats och specificerats. Det är lärarens uppgift att få syn på vad eleverna behöver lära sig och vad som behöver synliggöras i klassrummet. Att förlita sig på att elever själva skall lyfta det som behöver framkomma i undervisningen räcker inte långt på vägen mot bättre matematikkunskaper.

I de fyra lärarnas undervisning förekommer det att två lärare öppnar samma dimension av variation med skillnaden att den ena gör det medvetet medan den andra omedvetet. Exempel på det är när lärare A och lärare B öppnar DoV "I ett matematiskt mönster upprepar sig en sekvens på ett regelbundet sätt". Medvetenheten syns i de valda exempel som behandlas i undervisningen. Väl strukturerade och genomtänkta sätt att behandla ett matematikinnehåll leder till en ökad möjlighet för eleverna att urskilja och erfara viktiga aspekter av det undervisade innehållet (Häggström, 2008). En sådan viktig aspekt i undervisningen om växande geometriska mönster är att i ett matematiskt mönster upprepar sig en sekvens eller en utökningsenhet på ett regelbundet sätt. Genom att på ett systematiskt sätt skapa kontraster mellan ett regelbundet och oregelbundet matematiskt mönster samt variation i hur ett regelbundet mönster kan byggas kan lärare ge sina elever möjlighet att urskilja viktiga aspekter av växande geometriska mönster. Regelbundenheten i hur ett mönster konstrueras är en av de grundläggande kunskaperna som eleverna behöver för att kunna se ett mönsters struktur (Papic & Mulligan 2007; Warren 2005). Förmågan att kunna identifiera mönstrets struktur är i sin tur nödvändig för att kunna lösa uppgifter med mer komplexa växande mönster. Om aspekter som utgör grunden i ett lärandeobjekt inte ges möjligt att urskilja för eleverna i undervisningen kan det begränsa eleverna i deras kunskapsutveckling (Lo, 2012). Ibland kan det även leda till missuppfattningar och skapa svårigheter för elevernas lärande.

Förmågan att på ett medvetet och systematiskt sätt variera innehållet i undervisningen för att lyfta fram aspekter hos lärandeobjektet så att dessa blir möjliga för eleverna att urskilja

utgör en viktig del av en lärares kompetens. Enligt Runesson (1999) kan en lärares förmåga att presentera ett innehåll på ett visst sätt speglas i hans/hennes förmåga att se innehållet på ett visst sätt. Grunden till skillnaderna i de fyra lärarnas sätt att behandla växande geometriska mönster i denna studie kan troligen vara att de inte har en identisk uppfattning om vad växande geometriska mönster är. De har förmodligen olika idéer om vad elever behöver lära sig för att kunna beskriva och konstruera växande geometriska mönster samt uttrycka förändringen i mönstret med en formel. Detta reflekteras i de iscensatta lärandeobjekten som konstituerades i de fyra lärarnas undervisning samt i de olika öppnade dimensionerna av variation. Det finns skillnad och variation i de fyra lärarnas förmåga att omsätta sina idéer om växande geometriska mönster i undervisningen både när det gäller undervisningens syfte och mål men också hur de tänker att undervisningen skall genomföras.

En liten förändring i hur innehållet behandlas i undervisningen kan orsaka en stor förändring i mönstret av variation som leder till att det som möjliggörs för eleverna att lära skiljer sig avsevärt från varandra (Lo, 2012). Flera exempel i studiens resultat visar detta. Kunskaper om variationsteorin och kritiska aspekter kan vara till stor hjälp för att som lärare bli medveten om vad i innehållet som behöver varieras för att möjliggöra för eleverna att lära sig växande geometriska mönster. Exempelvis kan kunskaper om variationsteorin bidra till att den undervisade läraren förstår att en variation i de visade sätten som ett mönster byggs på har stor betydelse för vad eleverna lär sig om att fortsätta redan påbörjade och konstruera egna växande geometriska mönster.

Tidigare variationsteoretiska studier som undersöker matematikundervisningen indikerar att det finns ett samband mellan vilka aspekter av lärandeobjektet som varierar respektive är invarianta i undervisningen och vilken möjlighet som ges för eleverna att lära (Häggström, 2008; Kullberg, 2010; Runesson, 1999; Runesson & Mok, 2004). Ett exempel från studien på detta är när lärare öppnar dimensionen av variation "i ett växande mönster förändras figurerna på ett regelbundet sätt". Om läraren enbart varierar aspekten "regelbundenhet i antalet byggelement" eller aspekten "regelbundenheten i sättet att placera byggelement" möjliggörs eleverna att lära sig olika saker. I båda exemplen ges

möjlighet för eleverna att urskilja att figurerna i ett växande geometriskt mönster förändras på ett regelbundet sätt. Men beroende på vad som varierar möjliggörs för eleverna att urskilja regelbundenheten antingen på antalet byggelement som varje ny figur i ett växande mönster förändras med eller regelbundenheten i byggelementens placering i varje ny figur. Det senare utvecklar elevernas förmåga att se ett mönsters struktur. För att utveckla elevernas generella kunskaper om växande geometriska mönster behöver deras uppmärksamhet riktas mot båda dessa aspekter. Att undervisning om mönstrets struktur främjar elevernas kunskapsutveckling om växande mönster har även andra forskare visat, exempelvis Papic & Mulligan (2005; 2007) samt Warren (2005).

Oavsett vilka mönster av variation som erbjuds i undervisningen kan det inte finnas några garantier för vad eleverna faktiskt lär sig. Även om det öppnas för elevernas lärande avgörande aspekter kan det fortfarande vara möjligt att eleverna inte har lärt sig det som var lärarens avsikt. Eleverna kan tappa koncentrationen eller drömma sig bort för ett ögonblick och på det sättet missa att urskilja den i undervisningen varierade aspekten.

I denna studie har fyra lärare behandlat innehållet växande geometriska mönster på olika sätt. I de fyra lärarnas undervisning har ett flertal aspekter av innehållet varierats och olika dimensioner av variation öppnats. En och samma dimension av variation har öppnats i flera lärares undervisning. Vissa dimensioner av variation öppnades av enstaka lärare medan andra har tagit dem för givet. Fem olika lärandeobjekt har konstituerats på de fyra lektionerna och eleverna har fått möjlighet att lära sig olika saker. Tidigare har Runesson (1999) och Häggström (2008) visat att lärare behandlar ett och samma matematikinnehåll på skilda sätt. Även de har hittat att när lärare kommunicerar ett innehåll med eleverna varierar de vissa aspekter av innehållet medan andra tas för givet. De dimensioner av variation som de deltagande lärarna i dessa två studier öppnar bildar olika rymd för vad som blir för eleverna möjligt att lära under lektionerna.

Analysen i min studie visade att växande mönster beskrevs i de fyra klasserna med bild, ord, siffror, matematiska symboler och bokstäver. Jag kunde se att eleverna uttryckte sig först med ord och gester innan de kunde uttrycka sig med det abstrakta matematiska symbolspråket. Även Radford (2012) skriver om att elever i hans

studie använde sig av ord och sin kropp istället för matematiska symboler för att beskriva ett växande mönster.

Det medvetna arbetet med figurnummer främjar elevernas algebraiska tänkande. Att arbetet med positionskort understödjer elevernas lärande om växande mönster har observerats av Moss, m. fl. (2006) samt Radford (2012). Om lärare tar för givet att eleverna ser de olika figurerna och är omedvetna om figurnumren kan det leda till att eleverna uppfattar ett växande geometriskt mönster som ett mönster där en sekvens upprepas. Detta var fallet med lärare A i denna studie. Hon byggde inte varje figur i ett växande mönster för sig utan byggde figur nummer 2 direkt på figur nummer 1. Eleverna i hennes klass fick inte möjlighet att urskilja viktiga aspekter hos växande geometriska mönster såsom att växande mönster består av olika figurer som sitter en bit ifrån varandra och förändras med en viss regelbundenhet.

Förmågan att kunna förlänga ett växande mönster med nästa figur förutsätter att man förstår regelbundenheten i mönstret som enligt Radford (2012) involverar kopplingen av två olika strukturer; en rumslig och en numerisk. Den rumsliga strukturen hjälper elever att se rektanglarnas, cirkelnas, stickornas m.m. spatiala positioner, medan deras antal framträder från den numeriska strukturen. I lärare B:s undervisning möjliggörs för eleverna att skilja mellan ett mönsters rumsliga och numeriska struktur när dimensionen av variation "ett växande mönster består av olika figurer som förändras med en viss regelbundenhet" öppnas. Eleverna får möjlighet att se att både antalet byggelement men också sättet som byggelementen placeras på måste vara regelbundet i ett växande geometriskt mönster. Eleverna i Radfords (2012) studie lyckades med att se båda strukturerna först när läraren diskuterade mönstersekvensen/utökningssenheten med dem och hänvisade till de två horisontella raderna i mönstret på ett tydligt sätt.

I lärare C:s och lärare D:s undervisning dokumenteras resultatet av hur två olika mönster växer i en tabell. Lärare C erbjuder för eleverna att erfara både relationen längs de vertikalt inskrivna värdena men också relationen mellan paren inskrivna i de horisontella raderna samtidigt. Lärare D tar för givet att eleverna kan läsa värden i en tabell på olika sätt. Att ställa upp data i storleksordning i en tabell utan att läraren riktar eleverna uppmärksamhet mot det horisontella mönstret i tabellen stimulerar

inte elevernas algebratänkande visade sig i Warrens och Coopers (2008) studie. Eleverna hittar relationen längs de vertikala talföljderna istället för att hitta relationen mellan talparen som läses horisontellt i tabellen.

Alla fyra lärare i denna studie öppnar dimensionen av variation - olika sätt att beskriva ett matematiskt mönster. Bland de olika sätten varierar det verbala i alla lärares undervisning. Andra forskare har observerat att genom att träna på att beskriva mönster i ord blir man bättre på att se mönster (Radford, 2012; Bergsten m. fl., 1997). Att verbalt uttrycka förändringen i ett mönster kan hjälpa eleverna att på språkets grund matematiskt uttrycka mönstrets uppbyggnad (Bergsten m. fl., 1997).

Metoddiskussion

I studien har fyra lärares undervisning om växande geometriska mönster inom ämnet matematik videofilmats och analyserats. Det analyserade materialet består av en lektion för respektive lärare. En lektion är alldeles för lite data för att kunna dra några generella slutsatser om lärares normalt förekommande matematikundervisning om växande geometriska mönster. Den videofilmade lektionen kan inte heller vara ett bevis på hur skicklig en lärare är. Däremot kan materialet användas för att dra slutsatser om undervisningen på just den inspelade lektionen.

Det lilla urvalet i studien kan vara problematiskt ur ett forskningsteoretiskt perspektiv där det efterfrågas resultat som är representativa och kan generaliseras. Resultatet från studien skulle kunna generaliseras utöver den specifika undersöknings-kontexten trots att urvalet är litet eftersom i en studie som denna är forskningsintresset fokuserat på kvalitativa skillnader i det sätt på vilka lärare behandlar ett innehåll. Därmed inte sagt att resultatet skulle kunna generaliseras på alla lärares sätt att undervisa i den svenska grundskolan. En begränsning av det lilla urvalet skulle kunna vara att jag eventuellt skulle kunna hitta fler dimensioner av variation som öppnades i undervisningen om jag hade analyserat fler lärares undervisning.

Forskning som genomförs i den komplexa skolmiljön medför vissa problem. I en studie som denna kan inte alla påverkans-faktorer samt variabler som skulle kunna ha betydelse för resultatet

tas med vilket påverkar studiens trovärdighet. En av de mängder faktorer som kan ha påverkat studiens resultat var min närvaro på de videofilmade lektionerna. Även om forskaren intog rollen som fullständig observatör skulle förmodligen både undervisningens genomförande samt elevernas beteende sett annorlunda ut om inte forskaren satt med i klassrummen. Kamerornas närvaro kunde också vara av betydelse för lärarnas och elevernas beteende.

Öppningarna av en dimension av variation har i studien givits en tämligen statisk beskrivning. Komplexiteten att i analysprocessen identifiera en öppning av en dimension av variation har inte alltid framgått i beskrivningarna. Det kan verka enkelt att se och hitta de öppnade dimensionerna av variation när det beskrivs på detta sätt. I praktiken är det mycket mer komplext och svårt att se när och hur en dimension av variation öppnas. En situation i en lektionssekvens kan vara mycket komplicerad när dimensioner av variation öppnas. Dimensioner av variation är dynamiska till sin karaktär (Runesson, 1999). Ibland är det väldigt svårt att avgöra vilken dimension av variation som öppnas i en situation som analyseras. Det kan bero på svårigheten att separera alla aspekter ifrån varandra eftersom de samvarierar. Ibland är skillnaderna mellan de varierade aspekterna i olika dimensioner av variation ytterst små. Ibland öppnas och sluts dimensioner av variation i stort sätt hela tiden i undervisningen. Ibland löper flera dimensioner av variation parallellt.

Under tiden jag gjorde denna undersökning har jag arbetat både som lärare och forskare. Som lärare har man fokus på aktivitet och man skapar personliga relationer med eleverna, har ett normativt perspektiv som innebär att man gör det som är bäst för eleverna, utgår i undervisningen ifrån varje enskild elevs förutsättningar och har närhet till det som händer. Att vara forskare handlar om analys och reflektion, att ha förmågan att tolka och ta fram argument och resultat som strider mot ens egna uppfattningar, att låta utveckla generella regler och ha förmågan att distansera sig från data. Att ha dessa två roller har både varit en tillgång men också en utmaning i forskningsprocessen. Mina tidigare kunskaper och erfarenheter har jag haft stor nytta av under flera faser i forskningsprocessen. Mina ämnesdidaktiska kunskaper tillsammans med variationsteorin var en tillgång i analysprocessen. Jag kan också se mina förkunskaper och förståelsen som ett hinder då det finns en risk att de delar som var självklara för mig kanske inte uppmärksammades i

studien. Det var en utmaning att ständigt vara medveten om mitt eget perspektiv för att kunna förhålla mig kritiskt och distanserat till data. Mina vedertagna uppfattningar och värderingar har behövt medvetandegöras och ifrågasättas både vid genomförandet av studien och vid analysen.

Jag har strävat efter att beskriva varje lärares undervisning i detalj vilket har genererat en stor mängd text. Den noggranna presentationen av data som analysen bygger på är ett av flera sätt att uppfylla generaliseringsanspråket i kvalitativa studier. Detta kvalitetskriterium benämns av Larsson (2005) som kontextlikhet eller innebördsrikedom. Kriteriet förutsätter att forskaren ger rika beskrivningar så att läsaren av forskningsrapporten själv kan avgöra om den egna kontexten är tillräckligt lik den som beskrivs. Det innebär att de erfarenheter som den beskrivna undervisningen ger uttryck för utifrån sin kontext kan tänkas återfinnas hos andra lärare som undervisar i en liknande kontext. Det unika som lyfts fram i en studie kan generaliseras till liknande kontexter. Nyttan ligger i att någon tar del av studien och använder den sedan i sitt eget sammanhang (Larsson, 2005).

Analysen av hur innehållet behandlades har i huvudsak riktat uppmärksamhet mot undervisningen i helklass. Det förekom många samtal mellan lärare och enskilda elever på lektionerna. Samtliga har inte analyserats i detalj eftersom det var svårt att höra dessa samtal i de inspelade filmerna. Dessutom innebär dessa samtal eventuella öppningar av dimensioner av variation endast för enstaka elever vilket också innebär att dessa aspekter är förgivettagna i förhållande till hela gruppen. Det förekom också att vissa dimensioner av variation öppnades i samtal mellan elever. Dessa dimensioner av variation var mestadels utanför lärarnas kontroll och långt ifrån alla elever i klassen fick erfara dem. Resultatet från analysen i studien gäller i huvudsak det som var möjligt att lära på klassrumsnivå och inte på individnivå, även om några av de i studien öppnade dimensioner av variation är av karaktären som beskrivs ovan.

Didaktiska implikationer

Studien avser att ge ett ämnesdidaktiskt bidrag inom matematik och har i sin uppläggning utgått från undervisningens innehåll. Delar av resultatet kan vara direkt relaterade till hur ett specifikt

matematikinnehåll – växande mönster – skulle kunna undervisas om. I studien beskrivs ingående hur dimensioner av variation öppnas på många olika sätt när innehållet växande mönster behandlas. Detta kan inspirera andra lärare om möjliga sätt att behandla det beskrivna innehållet. Andra lärare kan pröva att i sin undervisning öppna dimensioner av variation som öppnas av lärarna i studien. De skulle kunna reflektera över resultatet tillsammans med kollegor när de planerar sin undervisning som skall vila på vetenskaplig grund.

Ett av skolans uppdrag är att främja elevernas lärande (Skolverket, 2011a). I den svenska skolan får inte eleverna alltid möjlighet att lära sig matematik om man skall tro de internationella utvärderingarna TIMMS och PISA (Skolverket, 2008, 2009, 2013). Det är inte självklart att eleverna lär sig det vi lärare vill och har en intention om att de skall lära. Det är inte heller självklart att lärare har helt klart för sig vad eleverna skall lära sig och vad som behöver synliggöras i undervisningen. Det räcker inte med att på ett ytligt plan veta vad undervisningen skall handla om. Innehållet behöver analyseras ur ett pedagogiskt perspektiv utifrån vad kunskandet i sig innebär och det behöver också relateras till elevernas förkunskaper. En viktig del av lärarens kompetens ligger i förmågan att problematisera sin undervisning genom att aktualisera de aspekter som är viktiga för eleverna att urskilja inom ett visst område (Häggström, 2008).

Föreliggande studie bidrar med ny kunskap om vad ett specifikt kunnande innebär när det gäller att lära sig beskriva och konstruera växande geometriska mönster samt uttrycka sig generellt med matematiska uttryckssätt. De olika aspekter av växande geometriska mönster som beskrivs i studien kan hjälpa lärare att få insikt och kunskap om elevernas föreställningar och missuppfattningar inom detta område. Lärares medvetenhet om elevernas föreställningar och om svårigheter med innehållet kan resultera i en undervisning som främjar lärandet (Häggström, 2008).

Studiens resultat bidrar med kunskaper om hur man i undervisningen möjliggör för eleverna att lära sig växande geometriska mönster, kunskap som är relevant för den verksamma läraren. När lärare får bevis på att något fungerar kan det vara en språngbräda i förändringsprocessen där de utvecklar sitt eget sätt att undervisa.

Lärare som tar del av studien kan bli medvetna om sina egna erfarenheter när han/hon skall undervisa om växande mönster och jämföra det med andra möjliga sätt. Förhoppningsvis kan några av de av mig hittade dimensionerna av variation komplettera andra lärares sett att se vad som är nödvändigt för eleverna att få syn på för att lära sig om växande mönster.

Även om resultatet behandlar ett begränsat undervisnings-innehåll – växande geometriska mönster – skulle det kunna vara möjligt att generalisera vissa upptäckter till andra innehåll inom matematikundervisningen. Exempelvis kan kunskap och insikt om öppnade dimensioner av variation ge idéer om hur man generellt kan variera aspekter och därmed möjliggöra lärande av andra undervisningsinnehåll. Beskrivningen av sättet som de i studien deltagande lärare varierar aspekter av ett innehåll på kan inspirera andra lärare till medveten och systematisk variation av innehållet i andra ämnen och i andra årskurser.

Studien bidrar med sina resultat till framtida learning studies inom området växande mönster. De dimensioner av variation som hittades i denna studie skulle kunna vara en användbar källa för potentiella kritiska aspekter i andra klasser.

Förutom att föreliggande studie kan direkt vara användbar för verksamma lärare kan den ha relevans även för lärarstuderande. Genom att ta till sig studiens resultat kan studenterna både lära sig de ämneskunskaper de behöver inför sitt yrkesliv men också hur de skall skapa goda möjligheter så att eleverna bättre skall kunna lära sig matematik. Förmågan att som lärare kunna urskilja och variera viktiga aspekter av ett innehåll är bl. a. beroende av lärares kunskap om ämnesinnehållet och om elevers föreställningar om det aktuella lärandeobjektet (Häggström, 2008; Runesson, 1999). Denna förmåga bör lärare utveckla redan under sin utbildning. För att få kunskaper om vad växande mönster är samt om elevernas uppfattningar om växande mönster kan lärarstudenter föra en diskussion kring de aspekter av växande geometriska mönster som beskrivs i studien. För att lära sig planera och genomföra matematikundervisning där viktiga aspekter av växande geometriska mönster görs möjliga för elever att urskilja kan de i studien beskrivna aspekter och dimensioner av variation vara till hjälp. En reflektion kring studiens resultat kan leda fram till förståelsen av hur man som lärare skulle

kunna undervisa om växande geometriska mönster så att dimensioner av variation som möjliggör elevernas lärande öppnas.

Idéer om framtida forskning

Arbetet med studien har onekligen förstärkt mitt intresse och motivation för forskning. Den har också väckt nya frågor och tankar som skulle kunna besvaras och belysas genom fortsatt forskning.

En fråga som känns angelägen att bli föremål för vidare forskning är vilken betydelse lärares olika sätt att behandla innehållet växande geometriska mönster har för elevernas lärande. Spelar det någon roll för elevers lärande i vilken ordning de möter de olika lärandeobjekten? En studie med kvasiexperimentell design, där lektioner jämförs genom att två olika lektionsdesigner tillämpas, skulle kunna visa vilka dimensioner av variation är av betydelse för elevers lärande om växande geometriska mönster. En intervjustudie med elever i olika åldrar skulle kunna ge svar på vilka de potentiella kritiska aspekterna är för lärande om växande geometriska mönster. Undervisningen om växande geometriska mönster i yngre respektive äldre åldrar skulle kunna studeras. Att genomföra en learning study där kunskaperna från denna studie tas till vara i lärarnas kollegiala lärande skulle också vara intressant.

Litteraturförteckning

- Ahlström, R., Bergius, B., Emanuelsson, G., Emanuelsson, L., Holmquist, M., Rystedt, E., & Wallby, K. (1996). *Nämnamnaren TEMA: Matematik ett kommunikationsämne*. Göteborg: Nationellt centrum för Matematikutbildning.
- Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (Eds.). (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Berg, C. (2009). *Developing algebraic thinking in a community of inquiry: Collaboration between three teachers and a didactician*. Doktorsavhandling. Kristiansand: Universitetet i Agder.
- Bergsten, C., Häggström, J., & Lindberg, L. (1997). Mönster och generaliseringar. I G. Emanuelsson, B. Rosén, R. Ryding & K. Wallby (red.), *Nämnamnaren TEMA: Algebra för alla* (s. 79-104). Göteborg: Nationellt centrum för Matematikutbildning.
- Bjørndal, C.P.R. (2002). *Det värderande ögat. Observation, utvärdering och utveckling av undervisning och handledning*. Stockholm: Liber.
- Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. J. Hoynes & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceeding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 135-142). Oslo.
- Boero, P. (2001). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 99-119). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. (Uppl. 2). Malmö: Liber.
- Cai, J. F., & Moyer, J. (2008). Developing algebraic thinking in earlier grades: some insights from international comparative studies. *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics. The 2008 yearbook*. Reston, VA: NCTM.
- Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer.

- Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 37, No. 2, 87-115.
- Carraher, D.W., & Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol 2. pp. 669-705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Creemers, B. P. M. (1994). *The effective classroom*. London: Cassell.
- Creemers, B. P. M., & Kyriakides, L. (2008). *The dynamics of educational effectiveness*. London: Routledge.
- Emanuelsson, J. (2001). *En fråga om frågor. Hur lärares frågor i klassrummet gör det möjligt att få reda på elevernas sätt att förstå det som undervisningen behandlar i matematik och naturvetenskap*. Göteborg Studies in Educational Sciences 168. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Friel, S. N. & Markworth, K. A. (2009). A Framework for Analyzing Geometric Pattern Tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15, 24-33.
- Hattie, J. A. (2009). *Visible Learning - A Synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement*. London and New York: Routledge.
- Heath, C., Hindmarsh, J. & Luff, P. (2010). *Video in qualitative research: Analysing social interaction in everyday life*. London: Sage.
- Häggström, J. (2008). *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: What is made possible to learn?* Gothenburg Studies In Educational Sciences 262. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Jordan, B. & Henderson, A. S. (1995). Interaction analysis: Foundations and practice. *Journal of the Learning Sciences*, 4, 39-103.
- Kaput, J. J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I: Transforming task structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study Conference* (Vol. 1, pp. 344-351). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

- Kaput, J., Carraher, D., & Blanton, M. (Eds.). (2008). *Algebra in the early grades*. New York: Routledge.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York, USA: Macmillan Publishing Company.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades. What is it? *The Mathematics Educator*, 8, 139-151.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Kilhamn, C. (2013). *Hidden differences in teachers' approach to algebra - a comparative case study of two lessons*. Konferensbidrag. CERME8, Antalya Turkey.
- Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: NCM, Göteborgs universitet.
- Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned. Professional insights gained and shared by teachers of mathematics*. Gothenburg Studies in Educational Sciences 293. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Kullberg, B. (2004). *Etnografi i klassrummet*. Lund: Studentlitteratur.
- Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London, UK: John Murray.
- Kyriakides, L., Christoforou, C., & Charalambous, C. Y. (2013). What matters for student learning outcomes: A meta-analysis of studies exploring factors of effective teaching. *Teaching and Teacher Education*, 36, 143-152.
- Larsson, S. (2005). Om kvalitet i kvalitativa studier. *Nordisk Pedagogik*, 25 (1), 16-35.
- Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). Dordrecht: Kluwer.

- Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Gothenburg Studies In Educational Sciences 323. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Lo, M. L. & Marton, F. (2011). Towards a science of the art of teaching: using variation theory as a guiding principle of pedagogical design. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1, 7-22.
- Lo, M. L., Pong, W. Y. & Chik, P. P. M. (red). (2005). *For each and everyone: Catering for individual differences through learning study*. Hong Kong: Hong Kong University Press.
- Markworth, K. A. (2012). Growing patterns: Seeing beyond Counting. *Teaching Children Mathematics*, 19, 254-262.
- Marton, F. (1981). Phenomenography – describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*, 10, 177-200.
- Marton, F. (2005). Om praxisnära grundforskning. I *Forskning av denna världen II – om teorins roll i praxisnära forskning*, (s. 105-122). Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Marton, F. (2014). *Necessary conditions of learning*. New York, N Y: Routledge.
- Marton, F. & Pong, W. Y. (2005). On the unit of description in phenomenography. *Higher Education Research and Development*, 24, 335-348.
- Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.
- Marton, F. & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning Sciences*, 15, 193-220.
- Marton, F., Runesson, U. & Tsui, A. B. M. (2004). The Space of Learning. In Marton, F. & Tsui, A. B. M. (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, pp. 3-40.
- Marton, F. & Tsui, A. B. M. (2004). *Classroom Discourse and the Space of Learning*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ.
- Moss, J., & Beatty, R. A. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning (ijCSCL)*, 1, 441-466.
- Moss, J., Beatty, R. McNab, S. L., & Eisenband, J. (2006). *The potential of geometric sequences to foster young students' ability to generalize*

- in mathematics*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. San Francisco.
- Muijs, D., & Reynolds, D. (2000). School effectiveness and teacher effectiveness in mathematics: Some preliminary findings from the evaluation of the Mathematics Enhancement Programme (Primary). *School Effectiveness and School Improvement*, 11, 273–303.
- Mulligan, J. T., English, L. D., Mitchelmore, M. C., & Robertson, G. (2010). Implementing a Pattern and Structure Mathematics Awareness Program (PASMAT) in Kindergarten. In L. Sparrow, B. Kissane & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 796-803). Freemantle: MERGA.
- Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21, 33–49.
- Måsøval, H. S. (2011). *Factors constraining students' appropriation of algebraic generality in shape patterns: A case study of didactical situations in mathematics at a university college*. (Unpublished doctoral dissertation). University of Agder, Kristiansand, Norway.
- Måsøval, H. S. (2013). Shortcomings in the *milieu* for algebraic generalisation arising from task design and vagueness in mathematical discourse. In Margolinas, C. (Ed.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (Vol.1). Oxford.
- Noss, R., Healy, L. and Hoyles, C. (1997). The Construction of Mathematical Meanings: Connecting the Visual with the Symbolic. *Educational Studies in Mathematics* 33, 203-233.
- Nuthall, G. (2005). The Cultural Myths and Realities of Classroom Teaching and Learning: A Personal Journey. *Teachers College Record*, 107, 895–934.
- Olteanu, C., Grevholm, B., & Ottosson, T. (2003). Algebra in upper secondary school a study of teachers' teaching and student learning, *Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*.
- Papic, M., & Mulligan, J. (2005). Pre-schoolers' mathematical patterning. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Building*

- connections: Research, theory and practice*. (Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne, pp. 609-616). Sydney: MERGA.
- Papic, M., & Mulligan, J. T. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice*. (Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart), Vol. 2, pp. 591-600. Adelaide: MERGA.
- Persson, P-E. (2010). *Räkna med bokstäver: en longitudinell studie av vägar till en förbättrad algebraundervisning på gymnasienivå*. Doktorsavhandling. Luleå: Luleå tekniska universitet.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 237-268.
- Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 111-126.
- Radford, L. (2012). *Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues*. ICME-12 Regular Lecture. Seoul, South Korea. July 8-15, 2012.
- Redden, T. (1996). "Wouldn't it be good if we had a symbol to stand for any number". In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Group for Psychology of Mathematics Education* (pp.195-202). Valencia, Spain: International Group for Psychology of Mathematics Education.
- Reynolds, D. (2007). School effectiveness and school improvement (SESI): Links with the international standards/accountability agenda. In T. Townsend (Ed.), *International Handbook of School Effectiveness and Improvement* (Part 2, pp. 471-484). Dordrecht: Springer.
- Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2005). Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11, 198-203.
- Robson, C. (2011). *Real world research: a resource for users of social research methods in applied setting*. 3rd ed. West Sussex, UK: John Wiley and Sons, Ltd.
- Rojano, T. (1996). The role of problems and problem solving in the development of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee

- (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 52-62). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll*. Göteborg Studies in Educational Sciences, 129. Acta Universitatis Gothoburgensis, Göteborg.
- Runesson, U. (2006). What is it Possible to Learn? On Variation as a Necessary Condition for Learning. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 50, 397-510.
- Runesson, U. (2011). Lärares kunskapsarbete - exemplet learning study: I S. Eklund (red.), *Forskning om undervisning och lärande* (s. 7-17). Stockholm: Stiftelsen SAF i samverkan med Lärarförbundet.
- Runesson, U. & Mok, I. A. C. (2004). Discernment and the Question, "What can be learned?". In Marton, F. & Tsui, A. B. M. (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, pp. 63-87.
- Sfard, A., & Linchevsky, L. (1994). The gains of and the pitfalls of reification: the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.
- Silverman, D. (2006). *Interpreting Qualitative Data* (3 ed.). London: Sage.
- Skolverket. (2005). *En sammanfattning av TIMSS 2003*. Skolverkets rapport 255. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2007). *15-åringars förmåga att förstå, tolka och reflektera – naturvetenskap, matematik och läsförståelse*. Skolverkets rapport 306. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2008). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007. En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer*. Analysrapport till 323. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2009). TIMSS Advanced 2008. Svenska gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i ett internationellt perspektiv. Rapport 336. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011b). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket.

- Skolverket. (2013). *PISA 2012. 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap*. Rapport 398. Stockholm: Skolverket.
- Skott, J., Hansen, H.C., Jess, K., & Schou, J. (2010). *Matematik för lärare, Ypsilon, Bd 2, Grundbok*. Malmö: Gleerups.
- Solem, H. I., Alseth, B., & Nordberg, G. (2011). *Tal och tanke: matematikundervisning från förskoleklass till årskurs 3*. Lund: Studentlitteratur.
- Stacey, K., & MacGregor, M. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Educational Research Journal*, 7, 69-85.
- Stacey, K. & MacGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 141-153). Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, The Netherlands.
- Stacey, K., Chick, H. & Kendal, M. (2004). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer.
- Statens Offentliga Utredningar, SOU. (2004:97). *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens. Betänkande av matematikdelegationen*. Stockholm 2004.
- Statens Offentliga Utredningar, SOU. (2008:109). *En hållbar lärarutbildning*. Stockholm 2008). Hämtad 27 april 2014, från <http://www.sweden.gov.se/content/1/c6/11/67/37/b4b3b355.pdf>.
- Steen, L. (1990). *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy*. Washington, DC: National Academy Press.
- Svanteson, J. (2012). Learning study - kompetensutveckling med matematik i fokus. I Skolverket, *Tid för matematik. Erfarenheter från Matematiksatsningen 2009-2011* (s. 77-81). Stockholm: Skolverket.
- Thornberg, R. (2011). Forskning om effektiva skolor. I R. Thornberg & K. Thelin (red.), *Med ansiktet vänt mot Europa: Perspektiv på skolutveckling* (s. 38-66). Stockholm: Lärarförbundet, Sveriges Skolledarförbund, Skolverket.
- Thornberg, R., & Fejes, A. (2012). Kvalitet och generaliserbarhet i kvalitativa studier. I A. Fejes & R. Thornberg (red.), *Handbok i kvalitativ analys* (s. 216-235). Stockholm: Liber.

- Thorsten, A. (2014). *Perspektiv och problemlösning i berättelseskrivande. Vad elever behöver lära sig och hur det kan synliggöras i undervisningen* (Licentiatuppsats). Högskolan för lärande och kommunikation: Jönköping.
- Vetenskapsrådet. (2011). *Forskningsetiska principer: Inom humanistisksamhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Warren, E. (2000). Visualisation and the development of early understanding in algebra. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 273-280). Hiroshima: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Warren, E. (2005). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce & A. Roche (Eds.), *Building connections: Research, theory and practice*. (Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne, pp. 759-766). Sydney: MERGA.
- Warren, E., & Cooper, T. J. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds thinking. *Education Studies in Mathematics*, 67, 171-185.
- Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of Patterns: The Tension Between Algebraic Thinking and Algebraic Notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379-402.

Bilagor

Namn och datum: _____

1. Sara och Jonas ska lägga ett mosaikgolv i sitt badrum med svarta och vita mosaikbitar enligt det mönster som bilden visar.

Figur nummer 1

Figur nummer 2

Figur nummer 3

Figur nummer 4

a) Hur många svarta mosaikbitar går det åt till att bygga figur nummer 4?

b) Hur många svarta mosaikbitar går det åt till att bygga figur nummer 10?
Visa hur du löser uppgiften.

c) Beskriv hur mönstret växer med figurernas nummer.

d) Mönstret kan beskrivas med en formel. Ringa in den formel som passar för att räkna ut antalet svarta mosaikbitar (S) i en figur med nummer x .

$$S = 5 + x$$

$$S = 4 \cdot x + 1$$

$$S = 2 \cdot x + 4$$

$$S = x + 4$$

Beskriv hur du kom fram till ditt svar.

2. Rita nästa figur i dessa tre växande mönster. Varför ska nästa figur se ut så som du ritar den? Skriv under bilderna.

3. Använd dessa två figurer och gör två egna växande mönster. Tänk dig att en klasskompis ska fortsätta rita dina mönster. Det ena mönstret ska vara lätt och det andra ska vara en utmaning för kompisen.

4. a) Fyll i de figurerna som saknas.

Figur
nummer 1

Figur
nummer 2

Figur
nummer 3

Figur
nummer 4

Figur
nummer 5

Figur
nummer 10

b) Beskriv hur mönstret växer.

c) Mönstret kan beskrivas med en formel. Skriv formeln med hjälp av att använda bokstaven **H** för antalet hjärtan och x för en figurs nummer.

d) Tänk dig att din kompis inte förstår hur din formel beskriver mönstret. Hur skulle du förklara det för kompisens?

2012-11-22

1 (2)

Bilaga 2

Information till målsman

Jag, som skriver det här brev, heter Klara Kerekes och är licentiand i matematikdidaktik på FontD forskarskola vid Linköpings universitet. Jag kommer att genomföra en studie under läsåret 2012/2013 i mellanstadieklaser vid ett antal olika skolor varav Ditt barns skola är en.

Målet med studien är att förbättra matematikundervisningen och öka måluppfyllelsen i ämnet genom att studera, analysera och beskriva vad som händer på ett antal matematiklektioner. För att göra detta behöver jag studera hur undervisning och lärande går till i praktiken. Ett sätt att göra det är att göra inspelningar i klassrummet, samt att samtala med lärare och elever om det som händer under lektionerna.

Eftersom Ditt barns lärare kommer att delta i studien innebär det att även ditt barn kan komma att filmas. För det behöver jag ditt samtycke i form av underskrift för Ditt barns medverkan i studien. Deltagandet är helt frivilligt och Du eller Ditt barn har rätt att när som helst avbryta deltagandet utan att behöva motivera detta. Jag hoppas emellertid att ni vill ställa upp på denna undersökning som är viktig för att ge kunskap om hur undervisningen ska förbättras så att eleverna lättare förstår vad den syftar till.

I eventuella beskrivningar i min avhandling eller kommande studier kommer personer på videon inte att kunna identifieras av utomstående. Materialet ska endast användas för forskningsändamål.

På bifogad blankett ber jag Dig ange på vilket sätt Du ger tillstånd till att Ditt barn deltar i studien. Jag frågar först huruvida jag får filma i klassrummet för att samla datamaterial som endast jag som forskare får ta del av. Därefter frågar jag om jag får ta del av Ditt barns kunskaper genom att be henne/honom samtala med mig och lösa olika uppgifter.

Om Du har frågor angående undersökningen är Du välkommen att kontakta mig.

Med vänliga hälsningar

Klara Kerekes

E-post: klara.kerekes@liu.se

2012-11-22
2 (2)

Godkännande för medverkan i forskningsarbete

- ☐ Jag tillåter att mitt barn deltar i studien och filmas under några lektioner.
- ☐ Jag tillåter att mitt barn deltar i studien, men ej visas på filmen.
- ☐ Jag vill ej att mitt barn deltar i studien.

Målsmans underskrift:

Barnets namn: _____

Skola: _____

Klass/grupp: _____

Blanketten lämnas till barnets klassföreståndare senast den XXX.

Tack!

Klara Kerekes

Linköpings universitet

Institutionen för beteendevetenskap och lärande

581 83 Linköping

www.ibl.liu.se

2012-11-22

1 (1)

Bilaga 3

Information till elever

Jag, som skriver detta brev, heter Klara Kerekes och arbetar på Linköpings universitet. Jag är intresserad av vad som bidrar till att elever lär sig matematik. Jag undrar också vad lärare undervisar om på mattelektionerna. För att veta mer om detta kommer jag att vilja vara med på olika mattelektioner och träffa elever som går på mellanstadiet, precis som du, och göra en undersökning.

Om du vill så får du vara med i den undersökningen, och då kommer du att träffa mig några gånger. Jag kommer att spela in en av mattelektionerna som din klass har. Du kommer att arbeta med några matteuppgifter. Jag kommer också att välja ut några elever i din klass och prata med dem om hur de gör när de löser olika matteuppgifter.

Du väljer helt själv om du vill vara med i undersökningen. Om du väljer att vara med kan du ändå när som helst säga till om du inte vill vara med längre. Filmen som jag kommer att spela in är det bara jag som får se. Hur du löser uppgifterna och vad du säger kommer jag att hålla hemligt, så att ingen annan förutom mig och din lärare får veta något om det.

När undersökningen är klar och jag berättar vad jag har kommit fram till, så kommer ingen att veta att du har varit med.

Om du har några frågor kan du själv maila eller be en vuxen maila mig (se adressen nedan).

Med vänliga hälsningar

Klara Kerekes

E-post: klara.kerekes@liu.se

Linköpings universitet

Institutionen för beteendevetenskap och lärande
581 83 Linköping
www.ibl.liu.se

TIDIGARE UTGIVNA RAPPORTER

- 238 Colnerud, Gunnel (red). SKOLANS MORALISKA OCH DEMOKRATISKA PRAKTIK. Värdepedagogiska texter I. Juni 2004.
- 239 Tjellander, Bengt. HUR JAG BLEV LÄRARES LÄRARE. Den förändrade lärarrollen – den forskande pedagogiska processhjälparen och vetandeskapandet. En didaktikfilosofisk betraktelse. Juli 2004. (Licentiatarbete)
- 240 Westlund, Ingrid. LÄXBERÄTTELSE. Läxor som tid och uppgift. Oktober 2004.
- 241 Pedersen, Jens. VÄGAR TILL VÄRDERINGAR OCH VÄRDEN. Skolans sociala fostran i läroplanstexter och pedagogisk praktik. Oktober 2004. (Licentiatarbete)
- 242 Colnerud, Gunnel & Hägglund, Solveig (red). ETISKA LÄRARE – MORALISKA BARN. Forskning kring värdefrågor i skolans praktik. Värdepedagogiska texter II. November 2004.
- 243 Matwejeff, Susanna. SVENSKFÖDDA ADOPTERADES SÖKPROCESS. Januari 2005. (Licentiatarbete)
- 244 Samuelsson, Joakim. LÄRARSTUDENTERS ERFARENHETER AV MATEMATIKUNDERVISNING. Vad händer med elever när de inte förstår? Maj 2005.
- 245 Öfverström Christel. UPPELVELSE, INLEVELSE OCH REFLEKTION - drama som en aktiv metod i lärandet. September 2006. (Licentiatarbete) ISBN: 91-85643-71-8
- 246 Eriksson Gustavsson Anna-Lena, Samuelsson, Joakim. DIDAKTISKA SAMTAL I SPECIALPEDAGOGISKA KONTEXTER. En studie av undervisning i grundläggande svenska och matematik. Februari 2007. ISBN: 978-91-85715-68-8
- 247 Österström, Stefan. OM KONSTEN ATT ÖVERBRYGGA GRÄNSER. En fallstudie om kommunal äldreomsorg och samspelet med andra organisationer. Maj 2007. ISBN: 978-91-85895-04-5.
- 248 Engström, Arne, Magne, Olof. MEDELSTA-MATEMATIK IV. En empirisk analys av Skolverkets förslag till mål att uppnå i matematik för årskurs 3. Mars 2008. ISBN: 978-91-7393-918-8.
- 249 Thornberg, Robert. Vilka värden elever enligt lärare ska få med sig från skolan. April 2008. ISBN: 978-91-7393-909-6.
- 250 Colnerud, Gunnel Karlsson, Ingrid Szklarski, Andrzej. ALLTID REDO Lärarstudenters handlingsberedskap för varierande uppgifter i klassrummet. 2008. ISBN: 978-91-7393-784-9
- 251 Szczepanski, Anders. HANDLINGSBUREN KUNSKAP Lärares uppfattningar om landskapet som lärandemiljö. 2008. ISBN: 978-91-7393-889-1.
- 252 Thornberg, Robert. Ett resursteams samverkan med skola, elever och föräldrar – förtjänster, hinder och utmaningar. 2009. ISBN: 978-91-7393-599-9 (Finns bara i Pdf-format).

- 253 Hammar Chiriac, Eva. SLÄPP TANKARNA LOSS – DET ÄR NYTT. Kvalitetsgranskning av ett reformarbete. Ny speciallärarutbildning. 2009. ISBN: 978-91-7393-541-8
- 254 Eriksson Gustavsson, Anna-Lena, Holme Lotta. ATT GÖRA OLIKA LIKA. Universitetslärares uppfattningar om och erfarenheter av undervisning av funktionshindrade studenter. 2009. ISBN: 978-91-7393-529-6
- 255 Lönebrink, Thomas. PROCESSER I VÄXELVERKAN. En grundad teoretisk modell om landstingskommunal samverkan för personer med psykiska funktionshinder. 2010 (Licentiatarbete). ISBN: 978-91-7393-242-4
- 256 Harlin, Eva-Marie. Överraskning och Reflektion. Lärarstudenters lärande från egen undervisning. 2010 (Licentiatarbete). ISBN: 978-91-7393-228-8
- 257 Eriksson Gustavsson, Anna-Lena. ”Det är tufft att plugga... men jag känner att jag klarar det”. En studie om akademiska studier och skriftspråkliga svårigheter. 2011. ISBN: 978-91-7393-183-0
- 258 Samuelsson, Joakim. Den skicklige matematikläraren. 2013. ISBN: 978-91-7519-609-1
- 259 Fredriksson Mårtensson, Åsa. Handledare och handledning - gymnasial yrkesutbildning på förskola. 2014 (Licentiatarbete). ISBN: 978-91-7519-269-7
- 260 Wallin, Jessica. Formulering och transformering av GY11 inom gymnasieskolans hantverksprogram. 2014 (Licentiatarbete). ISBN: 978-91-7519-263-5
- 261 Alm, F, Jungert, T och Thornerg, R: Nyantagna lärarstudenters motiv, motivation, självtillit och akademiska engagemang. 2014. ISBN: 978-91-7519-384-7 (finns bara i elektronisk version).

1. Margareta Enghag (2004): MINIPROJECTS AND CONTEXT RICH PROBLEMS – Case studies with qualitative analysis of motivation, learner ownership and competence in small group work in physics. (licentiate thesis) Linköping University
2. Carl-Johan Rundgren (2006): Meaning-Making in Molecular Life Science Education – upper secondary school students' interpretation of visualizations of proteins. (licentiate thesis) Linköping University
3. Michal Drechsler (2005): Textbooks', teachers', and students' understanding of models used to explain acid-base reactions. ISSN: 1403-8099, ISBN: 91-85335-40-1. (licentiate thesis) Karlstad University
4. Margareta Enghag (2007): Two dimensions of Student Ownership of Learning during Small-Group Work with Miniprojects and context rich Problems in Physics. ISSN: 1651-4238, ISBN: 91-85485-31-4. (Doctoral Dissertation) Mälardalen University
5. Maria Åström (2007): Integrated and Subject-specific. An empirical exploration of Science education in Swedish compulsory schools. (Licentiate thesis) Linköping university
6. Ola Magntorn (2007): Reading Nature: developing ecological literacy through teaching. (Doctoral Dissertation) Linköping University
7. Maria Andreé (2007): Den levda läroplanen. En studie av naturorienterande undervisningspraktiker i grundskolan. ISSN: 1400-478X, HLS Förlag: ISBN 978-91-7656-632-9 (Doctoral Dissertation, LHS)
8. Mattias Lundin (2007): Students' participation in the realization of school science activities. (Doctoral Dissertation) Linköping University
9. Michal Drechsler (2007): Models in chemistry education. A study of teaching and learning acids and bases in Swedish upper secondary schools ISBN 978-91-7063-112-2 (Doctoral Dissertation) Karlstad University
10. Proceedings from FontD Vadstena-meeting, April 2006.
11. Eva Blomdahl (2007): Teknik i skolan. En studie av teknikundervisning för yngre skolbarn. ISSN: 1400-478X, HLS Förlag: ISBN 978-91-7656-635-0 (Doctoral Dissertation, LHS)
12. Iann Lundegård (2007): På väg mot pluralism. Elever i situerade samtal kring hållbar utveckling. ISSN: 1400-478X, HLS Förlag: ISBN 978-91-7656-642-8 (Doctoral Dissertation, LHS)
13. Lena Hansson (2007): "Enligt fysiken eller enligt mig själv?" – Gymnasieelever, fysiken och grundantaganden om världen. (Doctoral Dissertation) Linköping University.
14. Christel Persson (2008): Sfärernas symfoni i förändring? Lärande i miljö för hållbar utveckling med naturvetenskaplig utgångspunkt. En longitudinell studie i grundskolans tidigare årskurser. (Doctoral Dissertation) Linköping University
15. Eva Davidsson (2008): Different Images of Science – a study of how science is constituted in exhibitions. ISBN: 978-91-977100-1-5 (Doctoral Dissertation) Malmö University
16. Magnus Hultén (2008): Naturens kanon. Formering och förändring av innehållet i folkskolans och grundskolans naturvetenskap 1842-2007. ISBN: 978-91-7155-612-7 (Doctoral Dissertation) Stockholm University

17. Lars-Erik Björklund (2008): Från Novis till Expert: Förtrogenhetskunskap i kognitiv och didaktisk belysning. (Doctoral Dissertation) Linköping University.
18. Anders Jönsson (2008): Educative assessment for/of teacher competency. A study of assessment and learning in the "Interactive examination" for student teachers. ISBN: 978-91-977100-3-9 (Doctoral Dissertation) Malmö University
19. Pernilla Nilsson (2008): Learning to teach and teaching to learn - primary science student teachers' complex journey from learners to teachers. (Doctoral Dissertation) Linköping University
20. Carl-Johan Rundgren (2008): VISUAL THINKING, VISUAL SPEECH - a Semiotic Perspective on Meaning-Making in Molecular Life Science. (Doctoral Dissertation) Linköping University
21. Per Sund (2008): Att urskilja selektiva traditioner i miljöundervisningens socialisationsinnehåll – implikationer för undervisning för hållbar utveckling. ISBN: 978-91-85485-88-8 (Doctoral Dissertation) Mälardalen University
22. Susanne Engström (2008): Fysiken spelar roll! I undervisning om hållbara energisystem - fokus på gymnasiekursen Fysik A. ISBN: 978-91-85485-96-3 (Licentiate thesis) Mälardalen University
23. Britt Jakobsson (2008): Learning science through aesthetic experience in elementary school science. Aesthetic judgement, metaphor and art. ISBN: 978-91-7155-654-7. (Doctoral Dissertation) Stockholm university
24. Gunilla Gunnarsson (2008): Den laborativa klassrumsverksamhetens interaktioner - En studie om vilket meningsskapande år 7-elever kan erbjudas i möten med den laborativa verksamhetens instruktioner, artefakter och språk inom elementär ellära, samt om lärares didaktiska handlingsmönster i dessa möten. (Doctoral Dissertation) Linköping University
25. Pernilla Granklint Enochson (2008): Elevernas föreställningar om kroppens organ och kroppens hälsa utifrån ett skolsammanhang. (Licentiate thesis) Linköping University
26. Maria Åström (2008): Defining Integrated Science Education and putting it to test (Doctoral Dissertation) Linköping University
27. Niklas Gericke (2009): Science versus School-science. Multiple models in genetics – The depiction of gene function in upper secondary textbooks and its influence on students' understanding. ISBN 978-91-7063-205-1 (Doctoral Dissertation) Karlstad University
28. Per Högström (2009): Laborativt arbete i grundskolans senare år - lärares mål och hur de implementeras. ISBN 978-91-7264-755-8 (Doctoral Dissertation) Umeå University
29. Annette Johnsson (2009): Dialogues on the Net. Power structures in asynchronous discussions in the context of a web based teacher training course. ISBN 978-91-977100-9-1 (Doctoral Dissertation) Malmö University
30. Elisabet M. Nilsson (2010): Simulated "real" worlds: Actions mediated through computer game play in science education. ISBN 978-91-86295-02-8 (Doctoral Dissertation) Malmö University

31. Lise-Lotte Österlund (2010): Redox models in chemistry: A depiction of the conceptions held by upper secondary school students of redox reactions. ISBN 978-91-7459-053-1 (Doctoral Dissertation) Umeå University
32. Claes Klasander (2010): Talet om tekniska system – förväntningar, traditioner och skolverkligheter. ISBN 978-91-7393-332-2 (Doctoral Dissertation) Linköping University
33. Maria Svensson (2011): Att urskilja tekniska system – didaktiska dimensioner i grundskolan. ISBN 978-91-7393-250-9 (Doctoral Dissertation) Linköping University
34. Nina Christenson (2011): Knowledge, Value and Personal experience – Upper secondary students' use of supporting reasons when arguing socioscientific issues. ISBN 978-91-7063-340-9 (Licentiate thesis) Karlstad University
35. Tor Nilsson (2011): Kemistudenters föreställningar om entalpi och relaterade begrepp. ISBN 978-91-7485-002-4 (Doctoral Dissertation) Mälardalen University
36. Kristina Andersson (2011): Lärare för förändring – att synliggöra och utmana föreställningar om naturvetenskap och genus. ISBN 978-91-7393-222-6 (Doctoral Dissertation) Linköping University
37. Peter Frejd (2011): Mathematical modelling in upper secondary school in Sweden An exploratory study. ISBN: 978-91-7393-223-3 (Licentiate thesis) Linköping University
38. Daniel Dufåker (2011): Spectroscopy studies of few particle effects in pyramidal quantum dots. ISBN 978-91-7393-179-3 (Licentiate thesis) Linköping University
39. Auli Arvola Orlander (2011): Med kroppen som insats: Diskursiva spänningsfält i biologiundervisningen på högstadiet. ISBN 978-91-7447-258-5 (Doctoral Dissertation) Stockholm University
40. Karin Stolpe (2011): Att uppmärksamma det väsentliga. Lärares ämnesdidaktiska förmågor ur ett interaktionskognitivt perspektiv. ISBN 978-91-7393-169-4 (Doctoral Dissertation) Linköping University
41. Anna-Karin Westman (2011) Samtal om begreppskartor – en väg till ökad förståelse. ISBN 978-91-86694-43-2 (Licentiate thesis) Mid Sweden University
42. Susanne Engström (2011) Att värdsamt värdesätta eller tryggt trotsa. Gymnasiefysiken, undervisningstraditioner och fysiklärares olika strategier för energiundervisning. ISBN 978-91-7485-011-6 (Doctoral Dissertation) Mälardalen University
43. Lena Adolfsson (2011) Attityder till naturvetenskap. Förändringar av flickors och pojkars attityder till biologi, fysik och kemi 1995 till 2007. ISBN 978-91-7459-233-7 (Licentiate thesis) Umeå University
44. Anna Lundberg (2011) Proportionalitetsbegreppet i den svenska gymnasie-matematiken – en studie om läromedel och nationella prov. ISBN 978-91-7393-132-8 (Licentiate thesis) Linköping University
45. Sanela Mehanovic (2011) The potential and challenges of the use of dynamic software in upper secondary Mathematics. Students' and teachers' work with integrals in GeoGebra based environments. ISBN 978-91-7393-127-4 (Licentiate thesis) Linköping University

46. Semir Becevic (2011) Klassrumsbedömning i matematik på gymnasieskolans nivå. ISBN 978-91-7393-091-8 (Licentiate thesis) Linköping University
47. Veronica Flodin (2011) Epistemisk drift - genbegreppets variationer i några av forskningens och undervisningens texter i biologi. ISBN 978-91-9795-161-6 (Licentiate thesis) Stockholm University
48. Carola Borg (2011) Utbildning för hållbar utveckling ur ett lärarperspektiv – Ämnesbundna skillnader i gymnasieskolan. ISBN 978-91-7063-377-5 (Licentiate thesis) Karlstad University
49. Mats Lundström (2011) Decision-making in health issues: Teenagers' use of science and other discourses. ISBN 978-91-86295-15-8 (Doctoral Dissertation) Malmö University
50. Magnus Oscarsson (2012) Viktigt, men inget för mig. Ungdomars identitetsbygge och attityd till naturvetenskap. ISBN: 978-91-7519-988-7 (Doctoral Dissertation) Linköping University
51. Pernilla Granklint Enochson (2012) Om organisation och funktion av människokroppens organsystem – analys av elevsvar från Sverige och Sydafrika. ISBN 978-91-7519-960-3 (Doctoral Dissertation) Linköping University
52. Mari Stadig Degerman (2012) Att hantera cellmetabolismens komplexitet – Meningsskapande genom visualisering och metaforer. ISBN 978-01-7519-954-2 (Doctoral Dissertation) Linköping University
53. Anna-Lena Göransson (2012) The Alzheimer A β peptide: Identification of Properties Distinctive for Toxic Prefibrillar Species. ISBN 978-91-7519-930-6 (Licentiate thesis) Linköping University
54. Madelen Bodin (2012) Computational problem solving in university physics education - Students' beliefs, knowledge, and motivation. ISBN 978-91-7459-398-3 (Doctoral Dissertation) Umeå University
55. Lena Aretorn (2012) Mathematics in the Swedish Upper Secondary School Electricity Program: A study of teacher knowledge. ISBN 978-91-7459-429-4 (Licentiate thesis) Umeå University
56. Anders Jidesjö (2012) En problematisering av ungdomars intresse för naturvetenskap och teknik i skola och samhälle – Innehåll, medierna och utbildningens funktion. ISBN 978-91-7519-873-6 (Doctoral Dissertation) Linköping University
57. Thomas Lundblad (2012) Simulerad verklighet i gymnasieskolans fysik: en designstudie om en augmented reality simulering med socio-naturvetenskapligt innehåll. ISBN 978-91-7519-854-5 (Licentiate thesis) Linköping University
58. Annie-Maj Johansson (2012) Undersökande arbetssätt i NO-undervisningen i grundskolans tidigare årskurser. ISBN 978-91-7447-552-4 (Doctoral Dissertation) Stockholm University
59. Anna Jobér (2012) Social Class in Science Class. ISBN 978-91-86295-31-8 (Doctoral Dissertation) Malmö University

60. Jesper Haglund (2012) Analogical reasoning in science education – connections to semantics and scientific modeling in thermodynamics. ISBN 978-91-7519-773-9 (Doctoral Dissertation) Linköping University
61. Fredrik Jeppsson (2012) Adopting a cognitive semantic approach to understand thermodynamics within science education. ISBN 978-91-7519-765-4 (Doctoral Dissertation) Linköping University
62. Maria Petersson (2012) Lärares beskrivningar av evolution som undervisningsinnehåll i biologi på gymnasiet. ISBN 978-91-7063-453-6 (Doctoral Dissertation) Karlstad University
63. Henrik Carlsson (2012) Undervisningsform, klassrumsnormer och matematiska förmågor. En studie av ett lokalt undervisningsförsök för elever med intresse och fallenhet för matematik. ISBN 978-91-86983-89-5 (Licentiate thesis) Linnaeus University
64. Anna Bergqvist (2012) Models of Chemical Bonding. Representations Used in School Textbooks and by Teachers and their Relation to Students' Understanding. ISBN 978-91-7063-463-5 (Licentiate thesis) Karlstad University
65. Nina Kilbrink (2013) Lära för framtiden: Transfer i teknisk yrkesutbildning. ISBN 978-91-7063-478-9 (Doctoral Dissertation) Karlstad University
66. Caroline Larsson (2013) Experiencing Molecular Processes. The Role of Representations for Students' Conceptual Understanding. ISBN 978-91-7519-607-7 (Doctoral Dissertation) Linköping University
67. Anna-Karin Carstensen (2013) Connect Modelling Learning to Facilitate Linking Models and the Real World through Labwork in Electric Circuit Courses for Engineering Students ISBN 978-91-7519-562-9 (Doctoral Dissertation) Linköping University
68. Konferensproceeding: 10-year Anniversary Meeting with the Scientific Committee
69. Marie Bergholm (2014) Gymnasieelevers kommunikativa strategier i matematikklassrummet. En fallstudie av ett smågruppsarbete om derivata ISBN 978-91-7519-306-9 (Licentiate thesis) Linköping University
70. Ingrid Lundh (2014) Undervisa Naturvetenskap genom Inquiry – En studie av två högstadielärare. ISBN 978-91-7519-285-7 (Licentiate thesis) Linköping University
71. Nils Boman (2014) Personality traits in fish - implications for invasion biology ISBN:978-91-7601-097-6 (Licentiate thesis) Umeå University
72. Torodd Lunde (2014) När läroplan och tradition möts - lärarfortbildning och syften med undersökande aktiviteter inom den laborativa NO-undervisningen i grundskolans senare del. ISBN: 978-91-7063-577-9 (Licentiate thesis) Karlstad University
73. Martin Eriksson (2014) Att ta ställning - gymnasieelevers argumentation och beslutsfattande om sociovetenskapliga dilemman. ISBN 978-91-7063-588-5 (Licentiate thesis), Karlstad University
74. Annalena Holm (2014) Mathematics Communication within the Frame of Supplemental Instruction. Identifying Learning Conditions. ISBN 978-91-7623-112-8 (Licentiate thesis) Lund University

75. Daniel Olsson (2014) Young people's 'Sustainability Consciousness' – Effects of ESD implementation in Swedish schools. ISBN 978-91-7063-594-6. (Licentiate thesis) Karlstad University
76. Marlene Sjöberg (2014) Möjligheter i kollegiala samtal om NO-undervisning och bedömning. <https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/24063> (Licentiate thesis) Gothenburg University.
77. Teresa Berglund (2014) Student 'Sustainability Consciousness' and Decision-Making on Sustainability Dilemmas. Investigating effects of implementing education for sustainable development in Swedish upper secondary schools. ISBN 978-91-7063-599-1 (Licentiate thesis) Karlstad University
78. Elisabet Mellroth (2014) High achiever! Always a high achiever? A comparison of student achievements on mathematical tests with different aims and goals. ISBN 978-91-7063-607-3 (Licentiate thesis) Karlstad University
79. Jenny Green (2014) Elevers användande av formativ återkoppling i matematik. ISBN 978-91-7519-164-5 (Licentiate thesis) Linköping University
80. Klara Kerekes (2014) Undervisning om växande geometriska mönster-en variationsteoretisk studie om hur lärare behandlar ett matematiskt innehåll på mellanstadiet. ISBN: 978-91-7519-135-5 (Licentiate thesis) Linköping University