Studies in Science and Technology Education. Licentiatavhandling. No. 86

Att lära sig resonera

- om elevers möjligheter att lära sig matematiska resonemang

Johan Sidenvall

Linköpings universitet

Institutionen för samhälls- och välfärdsstudier
Linköpings universitet
Norrköping, 2015

Mönstret på duken, som pryder omslaget, påminner mig om att forska är att försöka upptäcka mönster. Mönstret på duken påminner mig också om att forskning är ett ofullständigt sätt att spegla en komplex verklighet. Konstnär och fotograf Aron Sidenvall.

Att lära sig resonera – om elevers möjligheter att lära sig matematiska resonemang

Copyright © Johan Sidenvall

Linköpings universitet
Institutionen för samhälls- och välfärdsstudier
601 74 Norrköping

ISSN 1652-5051
ISBN 978-91-7519-100-3

Denna licentiatavhandling ingår även i serien: Studies in Science and Technology Education, No 86

Nationella forskarskolan i Naturvetenskapernas, Matematikens och Teknikens didaktik,
FontD, http://www.isv.liu.se/fontd, tillhör Institutionen för samhälls- och välfärdsstudier (ISV) och Styrelsen för utbildningsvetenskap (SUV) vid Linköpings universitet. FontD är ett nätverk av följande medverkande lärosäten: Luleå tekniska universitet, Mälardalens högskola, Mittuniversitetet, Linnéuniversitetet och universiteten i Umeå, Karlstad, Linköping (värd), Göteborg och Lund samt högskolorna i Malmö, Kristianstad, Halmstad och Gävle. FontD publicerar skriftserien Studies in Science and Technology Education, ISSN 1652-5051.

Tryckt av LiU-Tryck, Linköping 2015

Förord

Skolan har ett ansvar för att alla elever ska nå sin fulla potential vad det gäller lärande. Den undervisning som skolan ska tillhandhålla ska vara bästa möjliga. I Sverige, som i många andra länder har vi en lång väg innan vi når en undervisning som präglas av att varje elev utvecklas så långt som möjligt. Denna licentiatavhandling belyser några aspekter av den matematikundervisning som våra elever möter och är en del av. Hur undervisningen utformas har stor betydelse för vad elever lär sig. Undervisningens utformning beror i stor utsträckning på läraren. Den främsta målgruppen för avhandlingens kappa är därför just lärare.

Tack till min huvudhandledare Michael Hörnquist för att du med kunnighet, stor värme och humor har lett mig genom mina studier. Tack till min biträdande handledare och koordinator av Nationella forskarskolan i naturvetenskapernas, teknikens och matematikens didaktik, FontD Konrad Schönborn för din aldrig sinande positiva attityd. Jag upphör aldrig imponeras av din fantastiska blick för text och språk. Tack till biträdande handledare och ordförande för FontD Lena Tibell för allt du stått och står bakom.

De studier som ingår i avhandlingen har varit möjliga tack vare fantastiskt kompetenta personer som jag har fått samarbeta med. Tack Johan Lithner, Umeå universitet för dina avgörande initiativ och för att du alltid gör allt rätt vid rätt tillfälle. Tack Lovisa Sumpter, Dalarnas högskola för din entusiasm och gott samarbete. Tack Jonas Jäder, den ena av två på den matematikdidaktiska filialen i Hälsingland, Linköpings universitet, för att du alltid svarar på Skype, vårt samarbete och för din övertygelse om att allt ska bli bra.

Tack till Centrum för flexibelt lärande, Söderhamns kommun.

Ett speciellt tack till min familj, min fru Stina och barnen Aron, Rut och Frank för att ni alltid tror på mig och att ni ständigt ger mig nya perspektiv.

Idenors-Vi, februari 2015

Avhandlingens studier

Licentiatavhandlingen innehåller följande studier:

Studie 1

Sidenvall, J., Lithner, J. & Jäder, J. (2015). Students' reasoning in mathematics textbook task-solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI 10.1080/0020739X.2014.992986.

Till artikeln är undertecknad huvudförfattare och också den som ansvarat för studien och dess utformning av analysverktyget utifrån ett ramverk, analysprocessen avseende såväl kategorisering av elevresonemang som analys av dessa data, urvalet av elever samt skrivandet av texten till artikeln. Till artikeln finns två medförfattare, Johan Lithner och Jonas Jäder, vars bidrag bestått i ett kontinuerligt samarbete med undertecknad kring studien, utformningen av analysverktyget, visst medkodande för ökad reliabilitet samt aktivt medverkande i skrivprocessen.

Studie 2

Jäder, J., Sidenvall, J. & Sumpter, L. (inskickad). Students' mathematical reasoning and beliefs in non-routine task solving.

Studien som ligger till grund för manuskriptet är ett samarbete där två huvudförfattare, undertecknad och Jonas Jäder, tillsammans jobbat med urval, datainsamling samt analys av data med stöd av Lovisa Sumpter. De tre författarna har tillsammans skrivit manuskriptet.

Studie 3

Jäder, J., Lithner, J. & Sidenvall, J. (inskickad). Reasoning requirements in school mathematics textbooks: an analysis of books from 12 countries.

Till manuskriptet består undertecknads bidrag av ett kontinuerligt samarbete med huvudförfattare Jonas Jäder, samt medförfattare Johan Lithner. Undertecknads bidrag har stärkt det använda ramverket och innefattat delaktighet i processen att utforma analysverktyget, tolkningar av empirin och stöd i utformning av stommen till manuskriptet.

Innehållsförteckning

Förord iii

Avhandlingens studier v

Abstract ix

Sammanfattning xi

DEL I – KAPPA

1. Introduktion och syfte 1

2. Bakgrund 4

2.1 Möjlighet till lärande 4

2.2 Procedurell- och konceptuell förståelse 5

2.3 Matematiska förmågor 9

2.3.1 Reforminriktad matematik 10

2.3.2 Resonemang 11

2.4 Sociomatematiska normer och elevers uppfattningar om matematik 15

2.4.1 Sociomatematiska normer 15

2.4.2 Elevers uppfattningar om matematik 18

2.5 Lärobokens betydelse 21

3. Metodöverväganden och metodologi 25

3.1 Att studera resonemang 25

3.1.1 Att studera elevers resonemang 25

3.1.2 Att studera resonemang i läroboken 27

3.2 Att studera elevers uppfattningar 28

3.3 Etiska hänsyn 29

3.4 Validitet och generaliserbarhet 29

4. Om studierna och resultat 32

4.1 Sammanfattning av studien ”Elevers resonemang i uppgiftlösning av läroboksuppgifter” (studie 1) 32

4.2 Sammanfattning av studien ”Elevers resonemang och uppfattningar om matematik i arbetet med icke-rutinuppgifter” (studie 2) 33

4.3 Sammanfattning studien ”Resonemangskrav i matematikläroböcker: en analys av läroböcker från tolv länder” (studie 3) 34

5. Diskussion 36

5.1 Resonemang, elevers uppfattningar och sociomatematiska normer 36

5.2 Implikationer för undervisningen 40

5.3 Implikationer för läroboken och dess användning 44

5.4 Fortsatt forskning 46

5.5 Ett resonerande klassrum 46

Referenser 48

DEL II – STUDIERNA

Studie 1: Students’ reasoning in mathematics textbook task-solving

Studie 2: Students’ mathematical reasoning and beliefs in non-routine task solving

Studie 3: Reasoning requirements in school mathematics textbooks: an analysis of books from 12 countries

Abstract

Students only learn what they get the opportunity to learn. This means, for example, that students do not develop their reasoning- and problem solving competence unless teaching especially focuses on developing these competencies. Despite the fact that it has for the last 20 years been pointed out the need for a reform-oriented mathematics education, research still shows that in Sweden, as well as internationally, an over-emphasis are placed on rote learning and procedures, at the cost of promoting conceptual understanding. Mathematical understanding can be separated into procedural and conceptual understanding, where conceptual understanding can be connected to a reform oriented mathematics education. By developing a reasoning competence conceptual understanding can also be developed. This thesis, which deals with students' opportunities to learn to reason mathematically, includes three studies (with data from Swedish upper secondary school, year ten and mathematics textbooks from twelve countries). These opportunities have been studied based on a textbook analysis and by studying students' work with textbook tasks during normal classroom work. Students' opportunities to learn to reason mathematically have also been studied by examining the relationship between students' reasoning and their beliefs. An analytical framework (Lithner, 2008) has been used to categorise and analyse reasoning used in solving tasks and required to solve tasks.

Results support previous research in that teaching and mathematics textbooks are not necessarily in harmony with reform-oriented mathematics teaching. And that students indicated beliefs of insecurity, personal- and subject expectations as well as intrinsic- and extrinsic motivation connects to not using mathematical reasoning when solving non-routine tasks. Most commonly students used other strategies than mathematical reasoning when solving textbook tasks. One common way to solve tasks was to be guided, in particular by another student. The results also showed that the students primarily worked with the simpler tasks in the textbook. These simpler tasks required mathematical reasoning more rarely than the more difficult tasks. The results also showed a negative relationship between a belief of insecurity and the use of mathematical reasoning. Furthermore, the results show that the distributions of tasks that require mathematical reasoning are relatively similar in the examined textbooks across five continents.

Based on the results it is argued for a teaching based on sociomathematical norms that leads to an inquiry based teaching and textbooks that are more in harmony with a reform-oriented mathematics education.

Sammanfattning

Elever kan bara lära sig de det de får möjlighet att lära sig. Detta innebär till exempel att elever inte utvecklar sin resonemangs- och problemlösningsförmåga i någon större utsträckning om inte deras undervisning fokuserar på just dessa förmågor. Forskning, nationellt och internationellt visar att det finns en överbetoning på utantillinlärning och på procedurer. Detta verkar ske på bekostnad av en konceptuell förståelse, trots att det under 20 års tid pekats på behovet av en reforminriktad matematikundervisning. Matematisk förståelse kan delas in i procedurell- och konceptuell förståelse där en konceptuell förståelse kan kopplas till en reforminriktad matematikundervisning. Genom att utveckla förmågan att resonera matematiskt utvecklas också den konceptuella förståelsen. Denna avhandling, som inbegriper tre studier (med empiri från gymnasiet år ett och matematikläroböcker från tolv länder) behandlar elevers möjlighet att lära sig att resonera matematiskt. Dessa möjligheter har studerats utifrån att undersöka vilka möjligheter läroboken ger att lära sig matematiska resonemang, dels via en läroboksanalys och dels genom att studera elevers arbete med läroboksuppgifter i klassrumsmiljö. Elevers möjligheter att lära sig att resonera matematiskt har också studerats genom att undersöka relationen mellan elevers matematiska resonemang och deras uppfattningar om matematik. Ett analytiskt ramverk (Lithner, 2008) har används för att kategorisera och analysera resonemang som använts för att lösa uppgifter och som behövs för att lösa en uppgift.

Resultaten från studierna har givit stöd åt tidigare forskning vad gäller att undervisning och läroböckerna inte nödvändigtvis harmonierar med en reforminriktad matematikundervisning. Och att elever har uppfattningar om matematik som bygger på osäkerhet, förväntan på ämnet och sin egen förmåga samt motivation och att dessa uppfattningar delvis kan kopplas till att eleverna inte använder matematiska resonemang för att försöka lösa icke-rutinuppgifter. Det vanligaste sättet att lösa läroboksuppgifter var att välja andra strategier än att använda sig av matematiska resonemang. Ett vanligt sätt att lösa uppgifter var att låta sig guidas, av främst en annan elev. Eleverna arbetade framförallt med de enklare uppgifterna i läroböckerna. Bland dessa enklare uppgifter var det mer sällsynt med uppgifter som krävde matematiska resonemang för att lösas relativt de svårare uppgifterna. Resultaten visade även att det fanns en negativ relation mellan en uppfattning av osäkerhet hos elever och ett användande av matematiska resonemang. Resultaten visade vidare att fördelningen av uppgifter som krävde matematiska resonemang var relativt lika i alla undersökta läroböcker från fem världsdelar.

Utifrån resultaten argumenteras för en förändrad undervisning mot en undersökande undervisning och läroböcker som är mer i harmoni med en reforminriktad matematikundervisning.

DEL I

KAPPA

1. *Introduktion och syfte*

Omfattande forskning visar att ett av skälen till elevers svårigheter i matematik är att det finns en för stor betoning på utantillinlärning (Cox, 1994; Hiebert, 2003; Schoenfeld, 1991; Tall, 1996; Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000). Elever har endast i begränsad omfattning djupare kunskap och förståelse (Hiebert, 2003). Ett sätt för elever att hantera matematiken, när den blir för svår att behärska, är att fokusera på rutinuppgifter. Detta kan leda till att elever fastnar i att enbart kunna göra rutinuppgifter (Tall, 1996). Läraren kompenserar denna brist hos eleverna genom att låta eleverna arbeta med uppgifter och prov som endast kräver rutinkunskaper (Tall, 1996), "and the vicious circle of procedural teaching and learning is set in motion" (Tall, 1996, s. 306). I ett kort perspektiv är utantillinlärning effektivt, men förödande för ett matematiskt lärande på längre sikt (Boesen, Lithner, & Palm, 2010; Boesen, 2006; Skemp, 1978).

> En elev frågar:
>
> Är $a^5 \cdot a^3 = a^{15}$ rätt? Jag har för mig att det har någonting att göra med att addera eller multiplicera baser och exponenter, men jag kan inte komma ihåg vilket (Lithner, 2003, s. 29, förf. övers.).

Exemplet ovan lyfter fram två aspekter av utantillinlärningens baksida. Dels att det är svårt att komma ihåg allt som man behöver komma ihåg, och dels anledningen till varför eleven inte vänder sig till grunderna för potensräkning, det vill säga att $a^5 \cdot a^3$ betyder $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ som även kan skrivas a^8 (Lithner, 2003). Skälet kan vara att eleven inte kan resonera sig fram till hur uppgiften kan lösas eller att eleven tror att det enda sättet att lösa uppgiften är att komma ihåg en regel. Att kunna regler eller algoritmer utantill är inte negativt i sig, tvärtom är det nödvändigt för att göra matematiken effektiv (Gravemeijer & van Galen, 2003). Ett problem inom matematikundervisning är däremot den överbetoning som finns på att enbart lära sig procedurer utan någon tät koppling till matematisk förståelse. För att elever ska få lära sig lösa uppgifter där det inte finns färdiga lösningsmetoder, behöver de få möjlighet att utveckla sådana förmågor som stöttar dem i detta. Sammanfattande för avhandlingens studier är att de har undersökt elevers möjligheter att lära sig att lösa uppgifter utan färdiga lösningsmetoder. För att kunna lösa sådana uppgifter behöver man kunna resonera matematiskt. I studierna har uppgifter och uppgiftslösning kategoriserats med hjälp av ett analytiskt ramverk (Lithner, 2008) för att undersöka vilken typ av matematisk kunskap och vilka strategier som kan ligga till grund för elevers val vid uppgiftslösning. Med hjälp av ramverket (Lithner, 2008) kan elevers lösningsstrategier delas in i två huvudgrupper. Den ena lösningsstrategin innebär att en

uppgift kan lösas med en på förhand känd metod eller som ges av någon annan (t.ex. en elev eller lärobok). Den andra lösningsstrategin innebär att en ny och matematiskt förankrad lösningsmetod används. Matematiska resonemang är nära besläktat med matematisk problemlösning. Det finns en relativt god bild av vad som gör elever till goda problemlösare inom matematik. Att utveckla en god problemlösningsförmåga avgörs av tre generella faktorer: kognition, affekt ("affect") och kontext (Schoenfeld, 1985, 1992).

Matematiklärande är komplext (Niss, 1999), det är därför svårt att avgöra vilken aktivitet som leder till ett visst lärande eller vilka faktorer som påverkat ett visst lärande. Avhandlingen gör inte anspråk på att undersöka lärandet i sig eller i vilken omfattning som lärande sker utan vilka möjligheter till att lära sig att resonera matematiskt som elever får i förhållande till utantillinlärning. Utantillinläring har belysts i stor utsträckning, och i relation till problemlösning i tidigare forskning. Däremot har utantillinlärning sällan relaterats till matematiska resonemang (Lithner, 2008). För att lära sig något (i detta fall matematiska resonemang), behöver man få möjligheter att lära sig detta (i detta fall matematiska resonemang) (Hiebert, 2003). Avhandlingens tre studier har haft för avsikt att undersöka dessa möjligheter utifrån tre utgångspunkter:

1. Det är viktigt att undersöka klassrumspraktiken.
2. Elevers uppfattningar om matematik påverkar elevers lärande.
3. Läroboken har en central betydelse för hur matematikundervisningen ser ut.

Till största delen får eleverna erfara den formella matematiken genom klassrumsundervisningen (Schoenfeld, 1992, 2012). Läroboken har en central roll inom matematikundervisningen både internationellt (Kajander & Lovric, 2009; Love & Pimm, 1996; Schmidt et al., 2001; Törnroos, 2005; Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt, & Houang, 2002) och nationellt (Jablonka & Johansson, 2010; Skolinspektionen, 2010). Matematikuppgifter är en hörnsten i elevers arbete med matematik och påverkar dem genom att rikta deras uppmärksamhet på innehållsliga aspekter likväl som på vilket sätt en uppgift ska processas (Doyle, 1983). I denna avhandlings studier är det därför lärobokens uppgifter som har varit föremål för analys för att undersöka på vilket sätt läroboken kan ge elever möjligheter att lära sig att resonera matematiskt. När man studerar läroboken bör det göras i ljuset av hur den används (Valverde et al., 2002). Det finns ett uppdämt behov av forskning om lärobokens användning eftersom att det är svårt att finna metoder som genererar data om hur läroboken används (Love & Pimm, 1996). Eftersom elever framförallt erfar formell matematik i klassrummet är det angeläget att undersöka hur den matematik är som elever får tillgång till inom ramen för klassrumsundervisning och hur lärobokens uppgifter används där. Elevers lärande påverkas av andra faktorer än de rent

kognitiva. Elevers lärande påverkas även av affektiva faktorer, däribland deras uppfattningar av och förväntningar på matematik (Furinghetti & Pehkonen, 2002). Traditionellt har forskningsstudier om elevers matematiska kunskap främst behandlat elevers kognition och i mindre omfattning deras uppfattningar och i än mindre omfattning kopplingen mellan kognition och elevers uppfattningar (Goldin, 2002). När man studerar aspekter av elevers uppfattningar av matematik är det enligt Zan, Brown, Evans och Hannula (2006) viktigt att försöka förstå relationen mellan elevers uppfattningar och deras kognition. Den forskning som gjorts om relationen mellan elevers kognition och uppfattningar om matematik har framförallt gjorts på högskole- och universitetsstudenter och i mindre utsträckning på skolelever (Francisco, 2013). Elevers uppfattningar är kopplade till den kontext som eleverna befinner sig i (Boaler, 1998; Francisco, 2013; Yackel & Rasmussen, 2002). För att med större säkerhet kunna säga något om svenska gymnasieelevers uppfattningar relaterat till deras användande av matematiska resonemang behöver man därför studera elever i en svensk gymnasiekontext.

För att uppfylla det övergripande syftet med avhandlingen har elevers kontext undersökts ur två aspekter, dels läroböcker och dels elevers arbete med läroböcker i klassrumsundervisning. Dessutom har en svensk lärobok och läroböcker från ytterligare elva länder analyserats. För att undersöka kognitiva respektive affektiva faktorer, har det undersökts vilka typer av lösningsstrategier, däribland matematiska resonemang, som elever använder vid uppgiftslösning respektive de uppfattningar om matematik som elever uppvisar. De frågeställningar som avhandlingens studier har haft för avsikt att besvara är:

- Studie 1: Vilka lösningsstrategier använder elever när de löser läroboksuppgifter i klassrummet och i vilken utsträckning lyckas eleverna lösa uppgifterna?
- Studie 2: Vilka uppfattningar om matematik uppvisar elever i relation till de lösningsstrategier som använts då de arbetar med icke-rutinuppgifter?
- Studie 3: I vilken utsträckning räcker det med de lösningsstrategier givna i läroboken för att lösa dess uppgifter? Vilka möjligheter till att lära sig resonera matematiskt erbjuder läroböcker utifrån hur dess författare har valt att strukturera uppgifter i förhållande till varandra? Frågorna till studie 3 gäller läroböcker från tolv länder.

De exakt formulerade forskningsfrågorna återfinns i respektive artikel eller manuskript i Del II av avhandlingen.

2. *Bakgrund*

Detta kapitel behandlar viktiga förutsättningar för att elever ska kunna lära sig att resonera matematiskt och bygga en konceptuell förståelse av matematik. Nedan behandlas begreppet *möjlighet till lärande*, det görs en distinktion mellan två sätt att ha en matematisk förståelse: *procedurell* respektive *konceptuell förståelse*. Vidare belyses kopplingen mellan konceptuell förståelse och de matematiska förmågorna och då speciellt med avseende på förmågan att föra matematiska resonemang. Kapitlet avslutas med en beskrivning av på vilket sätt lärmiljö, elevernas uppfattningar om matematik och läroboken kan påverka deras möjligheter till lärande.

2.1 Möjlighet till lärande

Enligt Hiebert (2003) krävs det mer än att få information om vad som ska läras för att lära sig det. Om elever i årskurs ett i grundskolan lyssnar till en föreläsning om matematisk analys så kommer dessa elever troligtvis inte lära sig mycket om analys utan de kanske snarare lär sig att sitta tysta och lyssna på sådant som de inte förstår. Skälet till att de lär sig detta och inte analys är att de bara kan lära sig sådant som de har möjlighet att lära sig. Att få möjligheter att lära sig något innebär att det ska vara rätt förutsättningar för att kunna lära sig det avsedda. Det handlar exempelvis om elevers lärmiljö, ingångskunskaper, karaktären på uppgifterna som ska lösas eller aktiviteterna som ska utföras, graden av engagemang som krävs. Konsekvensen av ovanstående är att för att elever ska kunna lära sig resonera matematiskt behöver de involveras i sådana aktiviteter som kräver matematiska resonemang och i sådan lärmiljö som möjliggör detta.

I en longitudinell studie (Boaler, 1998) har två högstadie- och gymnasieskolor i Storbritannien undersökts. Den ena skolan, Amber hill hade en matematikundervisning inriktad på utantillinlärning, med fokus på att komma ihåg regler och metoder snarare än att undersöka när och hur en viss regel användes. Undervisningen på Amber Hill gav inte eleverna någon större möjlighet att utveckla en förmåga att resonera matematiskt, utan troligtvis gavs det snarare möjligheter att lära sig regler utantill. Den andra skolan, Phoenix park, hade en matematikundervisning som präglades av att eleverna fick arbeta med uppgifter av problemlösningskarakär. Vidare syftade matematikundervisningen på Phoenix park till att eleverna skulle använda matematiken i situationer som var realistiska och meningsfulla för dem. Undervisningen var undersökningsbaserad i den meningen att eleverna till exempel diskuterade hur de skulle angripa en uppgift och vad som var nästa steg för att lösa uppgiften. Detta sätt att undervisa kan sägas ha givit eleverna möjligheter att lära sig att lösa problem och resonera matematiskt. En uppföljningsstudie (Boaler, 2012) av eleverna på skolorna Amber hill och

Phoenix park gjordes åtta år senare. I uppföljningsstudien visade det sig att det sig att de personer som hade gått på Amber hill generellt sett visade ett intresse för matematik, men det begränsade sig till ett intresse inom ämnet, som till exempel att lösa sudoku. De relaterade matematik till ett visst innehåll till exempel tal, procent och trigonometri och såg inte att matematik hade någon praktisk användning i deras vardagliga liv. De personer som gått på Phoenix park såg å andra sidan matematik som något användbart. Deras berättelser handlande om att de använde matematik som ett verktyg för att lösa problem. De menade att deras matematikundervisning hade utvecklat deras förmåga att inte ge upp när de skulle lösa ett problem, sträva efter att finna en lösning och hitta vägar runt en aktuell svårighet. När de talade om matematik så handlade det inte främst om innehåll utan om andra dimensioner av ämnet. Deras berättelser innebar att de hade en känsla av agens, auktoritet och egenansvar för att kunna lösa matematiska problem. Resultaten från uppföljningsstudien visade vidare att personerna som gått på skolan Phoenix park hade relativt sett fått en mer gynnsam socioekonomisk situation jämfört med personerna som gått på skolan Amber hill, detta trots att utgångsläget då personerna gick i skolan var det omvända. Resultat kopplat till socioekonomiska faktorer relaterade Boaler snarare till den sammantagna skolmiljön i respektive skola snarare än enbart matematikundervisningen, som dock påpekas var en integrerad del av den totala skolmiljön.

2.2 Procedurell- och konceptuell förståelse

När Sverige fick en sammanhållen gymnasieskola 1970 infördes också nya kursplaner i matematik. Dessa läroplaner hade lite olika tyngdpunkt beroende vilken linje som avsågs. För de tre- och fyråriga linjerna, ekonomisk-, humanistisk-, naturvetenskaplig-, samhällsvetenskaplig och teknisk linje var de övergripande målen inom matematikämnet detsamma. Målen för dessa var att eleven skulle ”skaffa sig kunskap om några väsentliga begrepp och metoder […], uppöva färdigheter […] samt orientera sig i matematikens användning inom andra ämnesområden” (Skolöverstyrelsen, 1970, s. 257). Läroplanen hade innehållsmål som innebar att elever skulle tillgodogöra sig begrepp och lära sig procedurer. Inom den matematikdidaktiska forskningstraditionen har man också länge beskrivit matematiskt förståelse genom en uppdelning mellan en begreppsförståelse eller konceptuell förståelse och en procedurell förståelse. Begreppet ”konceptuell” kan dock sägas med tiden ha givits en rikare innebörd än begreppet ”begrepp” som användes i läroplanen från 1970.

Hiebert och Carpenter (1992) karaktäriserar ”förståelse” (”understanding”) utifrån hur den är representerad och strukturerad. En matematisk idé, procedur eller fakta är förstådd om den är del av ett internt nätverk. Matematiken kan sägas vara förstådd om de mentala representationerna är kopplade i ett nätverk av representationer. Graden av förståelse beror på antalet och styrkan hos

dessa kopplingar. Andra termer för förståelse som används i forskningslitteraturen är till exempel ”kunskap” och ”tänkande” (Engelbrecht, Bergsten, & Kågesten, 2009). Det är svårt att ge en beskrivning av vad matematisk förståelse ytterst består i och ge en vattentät definition (Sfard, 1991). Samtidigt kan man fastslå att det finns en allmän intuitiv insikt om att man *kan* ha en matematisk förståelse och att denna förståelse också kan variera i omfattning. Det vill säga det är inte någon antingen-eller-relation för en persons förståelse, utan en persons grad av förståelse kan ses som ett kontinuum mellan icke-förståelse och förståelse (Hiebert & Carpenter, 1992). Matematisk förståelse kan delas upp i *procedurell förståelse* och *konceptuell förståelse*. Den förståelse som Hiebert och Carpenter (1992) karaktäriserar benämns här konceptuell förståelse. ”En enhet” av konceptuell förståelse kan inte vara en isolerad del av information, utan är per definition endast en del av en konceptuell förståelse om den som har informationen låter den relateras till andra delar av information i nätverket av kunskap (Hiebert & Lefevre, 1986). Att inneha procedurell förståelse definierar Hiebert och Lefevre (1986) som att vara bekant med symboler som representerar matematiska idéer och att ha en medvetenhet om de syntaktiska reglerna för att skriva symboler i accepterad form och dessutom ha kännedom om regler, algoritmer och procedurer för att lösa matematikuppgifter. Att ha en procedurell kunskap är viktigt för att göra arbetet med matematik effektivt. Att använda procedurer är effektivt för att lösa uppgifter i bekanta situationer och kräver begränsad mental ansträngning. Matematiken skulle bli ohanterlig om det inte fanns procedurer som kunde göra den effektiv. Att inte ha tillgång till procedurer skulle till exempel kunna innebära att man ständigt skulle behöva gå tillbaka till grundläggande räknelagar när man skulle lösa en differentialekvation. Samtidigt bör byggandet av procedurell förståelse alltid vara kopplad till konceptuell förståelse. Betrakta nedanstående exempel:

En elev hade lärt sig att multiplicera decimaltal med varandra genom att först bortse från decimaltecknet, multiplicera som hela tal, för att sedan föra tillbaka decimaltecknet så att samma antal decimaler finns i produkten som det fanns totalt i faktorerna. Det är en bra metod, om man vet hur den fungerar. Eleven applicerade, inte ologiskt, även regeln på division av decimaltal också. Genom denna metod angav eleven kvoten 0,08 för $\frac{4,8}{0,6}$ (Fritt efter Skemp (1978)).

Att en elev gör som i exemplet ovan, menar Skemp (1978) är på ett sätt är rationellt, att helt enkelt extrapolera det som eleven redan lärt sig. Genom att använda sig av konceptuell förståelse hade eleven kunnat undersöka om metoden att räkna decimaler fungerar både för produkter och kvoter och tillåtit eleven att relatera denna metod till andra, nya uppgifter. Om man bara besitter procedurell kunskap blir man tvungen att memorera vilka uppgifter en viss metod fungera på och vilka den inte fungerar på. Det innebär alltså att man måste lära sig en ny metod för varje typ av

uppgift. Konceptuell förståelse är nödvändig genom att den skapar relationerna mellan procedurerna (Skemp, 1978). Med konceptuell förståelse kan man navigera friare, hitta fler vägar i det matematiska landskapet. Skemp jämför de två typerna av förståelse med två olika personer som kan sina omgivningar olika bra. Den ene personen (konceptuell förståelse) känner till omgivningarna och hittar obehindrat dit personen vill komma. Den andre personen (procedurell förståelse) hittar bara från ett ställe till ett annat genom specifika instruktioner. Skemp kan på ett plan se fördelar med procedurell förståelse av matematik, dessa är:

1. Inom sin kontext är procedurell matematik ofta lättare att förstå. Multiplikation av två negativa tal eller division av två bråktal har enkla regler kopplat till sig, men kräver mer för att förstå dessa relationellt. Om man vill ha en hel sida med korrekta svar kan procedurell matematik ge detta lätt och snabbt, om uppgifterna tillåter detta.
2. Belöningarna är mer direkta och uppenbara. Förutsatt att uppgifterna kan lösas med procedurer kan det kännas bra att relativt snabbt åstadkomma en hel rad korrekta lösningar.
3. Det är lättare att få fram ett svar, där proceduren är given. Detta eftersom procedurell matematik på ett sätt innebär ett förenklande av matematiken.

Antag en undervisning som präglas av en procedurinriktad matematik och läraren ska undervisa om areor. Läraren talar om att triangelns area ges av $\frac{basen \cdot höjden}{2}$ och visar detta med flera exempel och för olika typer av trianglar (Fritt efter Skemp, 1978). På detta sätt kan eleverna lära sig proceduren att beräkna trianglars areor. Däremot är det högst osäkert om eleverna konceptuellt förstår varför formeln har den utformning den har, även om det på kort sikt är lättare att lära sig en formel utantill än att ha konceptuell förståelse kring den. Att lära sig på detta procedurella sätt innebär att eleverna måste lära sig separata regler för exempelvis rektanglar, parallellogram och trapetser. Ett konceptuellt sätt att undervisa om areor skulle kunna vara att relatera olika typer av areor med varandra. Genom att visa på kopplingarna mellan formlerna skulle det på detta sätt bli enklare att komma ihåg och också använda dem (Skemp, 1978). Konceptuell förståelse av matematik har enligt Skemp större och tyngre fördelar än procedurell förståelse:

1. Det är lättare att överföra kunskaper till andra, nya uppgifter. När man har kunskap om varför något fungerade i en situation kan man överföra denna kunskap till nya situationer och anpassa efter behov, så kallad ”transfer”.

2. Det är lättare att komma ihåg. Genom att eleven alltid kan falla tillbaka på konceptuell kunskap för att komma ihåg en procedur, är det också lättare att komma ihåg själva proceduren.
3. Konceptuell förståelse underlättar arbetet med matematik och kan skapa en vilja att få ökad konceptuell förståelse och därmed ett vidgat nätverk av kunskap.

Att en person bara skulle inneha en typ av kunskap, antingen procedurell eller konceptuell är dock ovanligt, om det ens förekommer (Silver, 1986). Sfard (1991) beskriver att utvecklingen av en matematisk förståelse är att gå från process till objekt. Denna process kallar Sfard *refikation*. Efter refikationen kan båda tillstånden, process och objekt, utnyttjas. Dessa två tillstånd beskrivs av Sfard som ”två sidor av samma mynt”. Sfards begrepp process och objekt är inte ekvivalent med procedurell- och konceptuell förståelse, men man kan relatera dessa begreppspar till varandra (Pettersson, 2008). Sfard menar att process och objekt är relaterade genom matematiska begrepp (t.ex. triangelns area). Begreppet kan få sin innebörd genom den procedur som är kopplat till den. Samtidigt kan begreppet kopplas till andra begrepp (t.ex. rektanglar, parallellogram och trapetser) och på så sätt inordnas i en struktur. På så viss vidgas och stärks också nätverket av kunskap och den konceptuella förståelsen. Genom att förstå ett matematiskt begrepp både som process och som objekt har man gjort begreppet till sitt, och kan fritt röra sig mellan dessa tillstånd (Sfard, 1991). Gray och Tall (1994) benämner att man då har ”procept”-förståelse (bildat av engelskans ”process” och ”concept”), det vill säga att man kan röra sig obehindrat mellan konceptuell och procedurell förståelse av ett matematiskt begrepp. Genom ett proceptuellt förhållningssätt kan personen därmed använda matematiken på det för tillfället mest effektiva sättet.

Enligt Hiebert och Grouws (2007) kan man identifiera två centrala aspekter för att elever ska kunna utveckla konceptuell förståelse. Dels måste läraren och eleverna explicit fokusera på det som ska läras och dels behöver eleverna utsätta sig för viss ansträngning (”struggle”) vid uppgiftslösande. Motsatsen till att anstränga sig är att få informationen serverad (Hiebert & Grouws, 2007). Att explicit fokusera på det som ska läras kan enligt Hiebert och Carpenter (1992) göras genom att bland annat arbeta med olika representationsformer. På detta sätt kan fler kopplingar göras i nätverket av kunskap, fler och rika kopplingar genererar i sin tur en bättre konceptuell förståelse. Att elever behöver utsätta sig för en ansträngning, möta motstånd, kan liknas vid det som Vygotskij (1978) kallar för att elever befinner sig i den proximala zonen. Detta innebär att elever ska utmanas att ta sig an uppgifter som är inom räckhåll, men som är utmanande nog så att något nytt måste listas ut eller en ny koppling göras för att lösa uppgiften.

En av lärarens roller blir därmed att låta elever arbeta med uppgifter som ger motstånd. Boaler (1998) identifierade tre orsaker till att eleverna på skolan Phoenix park utvecklade en konceptuell förståelse: (I) en vilja och förmåga att förstå och tolka olika situationer och skapa mening genom dem, (II) en tillräcklig förståelse för procedurer för att lämpliga procedurer ska kunna väljas och (III) en säkerhet som tillät eleverna att ändra på procedurer så att de skulle passa in i en ny situation. Eleverna utvecklade en god transfer, det vill säga en god förmåga att applicera sina kunskaper på nya situationer. Enligt Hiebert och Carpenter (1992) är en god transfer kopplad till just förmågan att lösa uppgifter som kräver nya lösningsmetoder eftersom god transfer förutsätter rika kopplingar inom nätverket av kunskap.

2.3 Matematiska förmågor

Ett annat sätt att beskriva en matematisk förståelse är att utrycka förståelsen i matematiska förmågor eller kompetenser. "*Mathematical competence* […] means the ability to understand, judge, do, and use mathematics in a variety of intra- and extra-mathematical contexts and situations in which mathematics plays or could play a role" (Niss, 2003, s. 6f). Att besitta matematiska förmågor är alltså att ha verktyg så att man kan arbeta med matematik och i matematiska situationer. Det råder i stort sett konsensus om vilka förmågorna är, även om betoningarna kan skilja något (jämför National council of teachers of mathemtics (NCTM, 2000), Niss (2003) och Skolverket (u.å.a)). Enligt 2011 års ämnesplan för gymnasieskolans matematikundervisning ska följande förmågor utvecklas av eleverna: problemlösnings-, resonemangs-, kommunikations-, procedurs-, modellerings-, begrepps-, och relevansförmåga (Skolverket, u.å.a). De matematiska förmågorna går in i varandra (Niss, 2003) och har beröringspunkter vilket gör att man kan utveckla flera förmågor samtidigt (Lithner, 2008), exempelvis genom att elever tränar sin resonemangsförmåga, så tränar de också sin problemlösnings- och begreppsförmåga. Att beskriva matematisk förståelse som ett bemästrande som förmågor är att lyfta fram processen i lärandet och utövandet av matematik. Att beskriva bemästrandet av matematik som innehav av förmågor är en fokusförskjutning som gjorts på grund av att man har sett det som otillräckligt att i matematikundervisningen endast se till matematikens innehåll (t.ex. aritmetik, algebra, geometri, statistik) (Bergqvist et al., 2010). Vikten av att fokusera på processerna, utvecklandet av de matematiska förmågorna, inom lärandet av matematik är att jämföra med att lyfta fram processerna i lärandet av ett språk (Niss, 2003). Niss menar att på samma sätt som en person kan ett språk, det vill säga kunna tolka och förstå tal och text likväl som att själv uttrycka sig i tal och text, behöver man kunna matematikens processer. Processerna är lika, för både försteklassare och professorer i matematik, men innehållet som processerna behandlar är olika (Niss, 2003).

2.3.1 Reforminriktad matematik

De två senaste decennierna har det funnits en internationell trend att tydligare beskriva processerna inom lärandet av matematik. Ett fokus på dessa processer och hur de kan utformas brukar kännetecknа vad som kallas en reforminriktad matematik (Bergqvist et al., 2010; Boesen et al., 2014). Denna trend är också det svenska skolväsendet en del av. Från 1994 ingår förmågorna som mål tillsammans med innehållsmålen i gymnasieskolans styrdokument (Skolverket, u.å.b). Att matematikundervisningen både ska nå innehållsmål och förmågemål blev ytterligare tydligare i och med 2011 års ämnesplan för matematikämnet (Skolverket, u.å.a). Generellt kan dock sägas att en reforminriktad matematik har haft svårt att få fäste ända ut i klassrummen. Om en läroplan föreskriver innehållsmål, till exempel aritmetik så undervisas det i aritmetik, men om en läroplan också föreskriver processmål, att exempelvis förmågan till problemlösning ska utvecklas, har det visat sig att en undervisning som fokuserar på problemlösning varierar stort i omfattning (Boesen et al., 2014). En förklarning, som ges av flera studier till ovan beskrivet fenomen är att lärarna bara tar in ytliga aspekter av reformbudskapet och tolkar det utifrån sina befintliga uppfattningar istället för att faktiskt ändra sina uppfattningar och sin undervisning (Boesen et al., 2014). Även i den svenska gymnasieskolan har en reforminriktad matematik haft svårt att få genomslag och konsekvenserna av förmågemålen har varit begränsade för lärandemiljön (Bergqvist & Lithner, 2012; Palm, Boesen, & Lithner, 2011). I en av Skolinspektionens årsrapporter (Skolinspektionen, 2014) om svenska skolan framgår det att:

> I flera fall undervisas eleverna endast i delar av ämnets centrala innehåll och bara vissa förmågor utvecklas […]. Det kan handla om att matematikundervisningen har ett alltför stort fokus på mekaniskt räknande i läroboken på bekostnad av att eleverna inte ges möjlighet att resonera och argumentera och att utveckla centrala ämnesförmågor som problemlösning och att se samband. Följaktligen får inte alla elever en undervisning som ger dem verktyg att förstå matematik eller att använda och utnyttja hela sin förmåga. (s. 9).

Bergqvist et al.:s (2010) kvalitetsgranskning av gymnasieskolans matematikundervisning indikerar att vissa gymnasielärare anser att mer lågpresterande elever inte tillräckligt väl kan tillgodogöra sig andra kompetensaktiviteter än procedurhantering, och anpassar undervisningen efter detta. För att lärare ska kunna undervisa utifrån ett reformperspektiv behöver lärare rätt utbildning och fortbildning. Enligt Hiebert (2003) behöver lärare, precis som elever, möjligheter till att lära sig för att kunna lära sig något. I praktiken betyder det att lärare och lärarstuderande behöver få rätt

förutsättningar för att fortbilda sig eller att utbilda sig i hur man undervisar en reforminriktad matematik.

Sammanfattningsvis har ovanstående avsnitt visat att inte alla elever i den svenska gymnasieskolan får den undervisning som de behöver för att kunna utveckla de förmågor som matematikundervisningen är satt att utveckla.

2.3.2 Resonemang

I detta avsnitt kommer en av förmågorna, resonemang, att närmare belysas. Det finns ingen enhetlig definition av resonemang (Yackel & Hanna, 2003). Enligt Skolverket (2012a) utgår resonemang från och byggs upp utifrån en konceptuell grund. Skolverkets beskrivning av resonemang är:

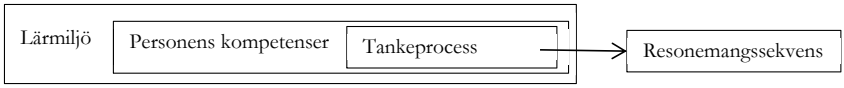
> […] att kunna föra matematiska resonemang som involverar matematikens begrepp, metoder och utgör lösningar på problem och modelleringssituationer. Att föra ett resonemang innefattar även att själv och tillsammans med andra till exempel testa, föreslå, förutsäga, gissa, ifrågasätta, förklara, finna mönster, generalisera, argumentera. Det innefattar även att kunna formulera och allmänt undersöka hypoteser samt genomföra bevis i tal och skrift. Detta inkluderar att uppmärksamma betydelsen av och kunna redogöra för de bärande idéerna i ett matematiskt bevis och inse skillnader mellan gissningar och välgrundade påståenden. (Skolverket, u.å.c, s. 2)

Enligt Skolverkets beskrivning handlar matematiska resonemang om att länka ihop olika delar i en matematisk situation, undersöka, argumentera och redogöra för det matematiskt viktiga i en situation. NCTM (u.å.) har en likande beskrivning av resonemang, men trycker mer på förmågan att analysera mönster och strukturer i en matematisk situation. Skolverkets beskrivning av resonemang är i stort liknande som i Niss (2003). Denna avhandling använder emellertid en vidare beskrivning av och annan definition av resonemang än Skolverkets och vad brukligt är. Skälet är att det ramverk (Lithner, 2008) som används i avhandlingen för att studera just resonemang använder denna bredare definition. Definitionen i sig och skälen till den presenteras senare i detta avsnitt.

Att kunna resonera är en grundläggande förmåga och är viktig inom matematik och en förmåga som alla kan lära sig (Ball & Bass, 2003). Ball och Bass ger tre skäl till att resonemang ska ses som viktig för en god matematisk förståelse. För det första är matematisk förståelse meningslös utan att inkludera resonemang. Ett exempel på det essentiella att använda sig av

resonemang gavs i exemplet i avsnitt 2.2 ovan. I exemplet extrapolerar eleven metoden för att multiplicera tal med decimaler till att även gälla för division av tal med decimaler. Genom att inte förstå anledningarna (jämför engelskans ”reasons”), resonemangen till vad algoritmerna innebär i praktiken, saknas en viss matematisk förståelse. Det andra skälet till att resonemang ska ses som en grundläggande förmåga är att det är fundamentalt i användandet av matematik. Att bara kunna specifika matematiska idéer och procedurer som memorerade fakta eller utantillinlärda algoritmer är otillräckligt för att använda dessa kunskaper på ett flexibelt sätt och i olika sammanhang. Ett exempel kan vara en elev som vet att man inom sannolikhetslära kan beräkna den sammanlagda sannolikheten för två oberoende händelser genom att multiplicera den första sannolikheten med den andra sannolikheten. Alltså innebär detta att sannolikheten för ”två klave” är $\frac{1}{4}$ $\left(=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$ om man singlar slant två gånger, eftersom eleven kan den proceduren. Samtidigt kan samma elev felaktigt hävda att sannolikheten för en krona och en klave (oavsett ordning) är $\frac{1}{3}$, eftersom eleven endast ser tre möjliga utfall (två krona, två klave eller en av varje). Här visar eleven en bristfällig förmåga att analysera situationen och en oförmåga att justera algoritmen för upprepad sannolikhet så att även aspekten av adderad sannolikhet tas i beaktande. Det tredje skälet till att resonemang är en grundläggande förmåga är att resonemang är avgörande för att återskapa kunskap som har fallit i glömska. Det kan till exempel vara en elev som har lärt sig, men glömt bort hur man beräknar den totala sannolikheten för upprepade sannolikheter ska lösa uppgiften: ”vilken är sannolikheten att få två lika (två klave eller två krona) på två kast?”. Eleven kanske ställer följande frågor: Ska man multiplicera sannolikheterna för varje utfall? Addera dem? Vilka är utfallen? Om eleven kan resonera, så kommer denne att inse behovet av att multiplicera sannolikheten för att få ”krona” på ett kast med att få ”krona” på ett andra kast. Samma sak gäller för att beräkna sannolikheten för ”två klave”. Eleven kommer också att kunna förstå att denne måste addera sannolikheterna för ”två krona” och ”två klave” med varandra för att få den sökta sannolikheten. Genom att kunna resonera kommer eleven kunna rekapitulera, återskapa metoden, hur uppgiften kan lösas. Därför är resonemang en nyckel för att utveckla en matematisk förståelse och skapandet av ny matematisk kunskap, och därmed stärka och utveckla sin konceptuella förmåga. I en brittisk longitudinell studie (Nunes, Bryant, Barros, & Sylva, 2012) av över 1000 barn framkom att barnets förmåga att kunna resonera matematiskt var en stark prediktor för barnets framtida matematiska prestation. Sambandet mellan matematiska resonemang och framtida prestation inom matematik var mycket starkare än sambandet mellan aritmetiska kunskaper och framtida prestation inom matematik.

Lithner (2008) använder en vidare definition av resonemang, en definition som kommer att användas framgent i avhandlingen. Det ramverk (Lithner, 2008) som används är ett analytiskt ramverk snarare än ett begreppsligt ramverk. I definitionen inkluderas därför även sådant som eleven kan utantill och som kan göras på rutin. Ramverket syftar till att kunna karaktärisera resonemang och att förklara ursprunget till och konsekvenserna för olika resonemangstyper. Lithner definierar resonemang som resultatet av en tankeprocess som gjorts för att producera påståenden och nå slutsatser i uppgiftlösningen. Ett resonemang enligt Lithners definition är inte nödvändigtvis byggd på formell logik, alltså inte begränsat till bevis, och kan även vara felaktigt, så länge det finns rimliga (för den som resonerar) skäl som stödjer det. En persons resonemang ses alltså som avtryck av personens tankeprocess. Personens tankeprocess är beroende av dennes kompetenser. Kompetenserna är formade av den lärmiljö som eleven befinner sig i (Figur 1).



Figur 1. Resonemangets ursprung, från tanke till uttryck (Lithner, 2008)

Lithners (2008) ramverk tillåter en kategorisering av vilken typ av resonemang som en elev fört, antingen *imitativa resonemang, IR* eller *kreativa matematiska resonemang, CMR*[1]. IR, användandet av procedurer, kräver bara en procedurell kunskap. IR delas i sin tur upp i de resonemang som är memorerade, till exempel ett memorerat matematiskt bevis och de resonemang som följer en algoritm. En algoritm definieras som ”en ändlig sekvens av utförbara instruktioner som leder till ett definitivt svar för en given grupp av uppgifter” (Brousseau, 1997, s. 129, förf. övers.). Poängen med definitionen är att valet av algoritm alltid kan avgöras i förväg. Vidare räknas alla fördefinierade procedurer som algoritmer, till exempel att en metod att finna nollställen till en funktion genom att zooma in med hjälp av en grafräknare på funktionsgrafen skärning med *x*-axeln. Ett *algoritmiskt resonemang, AR* kan åstadkommas på tre sätt: *bekant AR*, *begränsat AR* eller ett *guidat AR*. Användning av ett bekant AR innebär att eleven identifierar något, ett nyckelord eller annan ledtråd i uppgiften som triggar ett val av algoritm. Om en elev använder sig av begränsat AR, väljer eleven inom en grupp av algoritmer som denne anser vara rimliga att välja mellan. Denna typ av resonemang kan kopplas till om eleven är vilsen i sitt uppgiftslösande och är beredd att använda ”vad som helst” för att komma vidare i sin uppgiftslösning. Den tredje typen av AR, guidat AR innebär att en elev blir guidad av någon eller något. Om det är en person är det vanligtvis en lärare eller en elev som guidar resoneraren genom uppgiften. En elev kan också bli

[1] CMR är akronym för *creative mathematically founded reasoning*.

guidad av en algoritm i läroboken, antigen genom en tidigare likadan uppgift, som nyss gjorts eller ett löst exempel som återfinns i boken. Denna typ av resonemang kallas då *textguidat AR*. Av Tabell 1 framgår förhållandet mellan de olika typerna av IR.

Tabell 1
Typer av resonemang, fördelade utifrån huvudtyperna kreativa matematiska resonemang och imitativa resonemang och de olika typerna av algoritmiska resonemang

CMR		IR					
		Memorerat	AR				
Globalt CMR	Lokalt CMR	resonemang	Bekant AR	Begränsat AR	Elevguidat AR	Lärarguidat AR	Textguidat AR

För en elev som använder sig av CMR för att lösa en uppgift, innebär det att en algoritm eller ett memorerat resonemang i huvudsak inte används. Denne elev (I) skapar en ny eller rekonstruerar en bortglömd (för eleven) resonemangssekvens. (II) Ger argument för rimligheten för både vilka val som gjorts och vilken strategi som används och hur implementeringen är utförd. (III) Ger argument som baserar sig på icke-ytliga och relevanta matematiska egenskaper. Att basera argumenten på ytliga egenskaper är till exempel att endast se till talens (9, 15, 2, 3) storlek för att avgöra om 9/15 är större än 2/3. Att basera argumenten på icke-ytliga egenskaper är att ta hänsyn till att det rör sig om en jämförelse mellan två kvoter (Lithner, 2008). CMR kan kopplas till en konceptuell förståelse genom att den kräver att resoneraren kan koppla ihop olika delar av matematiken för att konstruera resonemanget och argumentera för detta. Om resonemanget i huvudsak innehåller CMR och till mindre delar IR klassas resonemanget som ett *globalt CMR*, om resonemanget endast till en mindre del innehåller CMR och till större del IR klassas det som ett *lokalt CMR* (se Tabell 1). Att ett resonemang kallas kreativt indikerar inte att resonemanget måste vara ett verk av ett geni eller att det ska vara exceptionellt nyskapande, snarare handlar det om att resonemangssekvensen är ny för den som skapat (kreerat) den (Jonsson, Norqvist, Lithner, & Liljekvist, 2014). Ett resonemang kan enligt ramverket kategoriseras i diskreta kategorier. I verkligheten är det snarare så att resonemangssekvenser kan placeras längs ett kontinuum, från att vara helt imitativa till att vara helt kreativa. Det är även så att en uppgift som det krävs ett visst resonemang för att lösa för en elev, kan det krävas ett annat resonemang för en annan elev (Palm et al., 2011). Det kan till exempel vara så att ekvationen $2x + 3 = 7$ endast kräver användandet av bekant AR för en elev på gymnasiet att lösa ekvationen, medan för en mellanstadieelev som stöter på denna typ av ekvation för första gången, krävs det användandet av CMR för att kunna lösa den.

Ramverket (Lithner, 2008) för att kategorisera resonemang kan användas på flera sätt och i flera kontexter. Det kan användas för att, som angivits ovan, kategorisera elevers resonemang, detta görs i studierna 1 och 2. Denna typ av kategorisering har tidigare gjorts i både gymnasiekontext (t.ex. Bergqvist, Lithner, & Sumpter, 2008; Boesen et al., 2010; Sumpter, 2013) och i universitetskontext (Lithner, 2003). Vidare kan ramverket användas för att kategorisera matematikuppgifter i sig själva, med antagande om elevernas kunskapsnivå. Denna typ av kategorisering har skett i varierade omfattning i samtliga tre studier i avhandlingen. Uppgiftskategorisering har tidigare gjorts i gymnasiekontext (t.ex. Boesen et al., 2010; Palm et al., 2011) och universitetskontext (Lithner, 2004). Ramverket har även använts för att kategorisera lärares genomgångar (Bergqvist & Lithner, 2012). De generella resultaten från ovanstående studier visar att det finns en dominans av användandet av IR för att lösa uppgifter, en dominans av läroboksuppgifter som kan lösas genom att använda sig av IR och att lärarargenomgångar baserar sig i stor utsträckning på användandet av IR. En studie (Jonsson et al., 2014) gjord i laborationsmiljö (dvs. icke-autentisk undervisningsmiljö) på svenska gymnasieelever och delvis baserad på resultat från ovannämnda studier, visar att de elever som fick träning via uppgifter som krävde användande av CMR för att lösas i jämfört med de elever som fick träning via uppgifter som endast krävde användande av AR för att lösas i större utsträckning kunde rekapitulera från minnet och konstruera ny kunskap. Resultat från studien visade dessutom att den CMR-inriktade träningen hade störst positiv effekt på lågpresterande elever förmåga att rekapitulera från minnet och konstruera ny kunskap. Detta resultat kan sägas gå på tvärs med schablonbilden, att lågpresterande elever endast kan lära sig procedurer (Boesen, 2006). Enligt Lithner (2004) är problemet men den procedurinriktade matematikundervisningen inte att eleverna inte lär sig att använda sig av CMR, utan att elever inte utvecklar konceptuell förståelse.

2.4 Sociomatematiska normer och elevers uppfattningar om matematik

Det resonemang som elever för, sker i en viss lärmiljö (se Figur 1). Denna lärmiljö formas utifrån ett didaktiskt kontrakt (Brousseau, 1997; Lithner, 2008). Hur detta didaktiska kontrakt utformas, tar sig uttryck och kopplingen till elevers uppfattningar om matematik behandlas i detta avsnitt.

2.4.1 Sociomatematiska normer

Det är i stort sett bara i klassrummet som elever får erfara formell matematik (Schoenfeld, 2012). Därför är det genom klassrumserfarenheterna som elever abstraherar sin uppfattning av vad matematik är och vad som är specifikt för matematik. Elevers uppfattningar om matematik leder också till ett visst beteende med avseende på hur matematiken behandlas. Till exempel, elever som år efter år får procedurinriktade uppgifter, som tar någon eller några enstaka minuter att lösa

får uppfattningen att uppgifter ska ha algoritmer kopplade till sig och ska ta kort tid att lösa (Schoenfeld, 1992). För dessa elever blir det meningslöst att arbeta med uppgifter som tar längre tid och som inte har en på förhand känd algoritm kopplad till sig eftersom man förväntar sig att veta vilken procedur som ska användas och att man ska kunna lösa uppgiften inom en tämligen begränsad tidsrymd. Elevers lärmiljö har betydelse för vilken matematik som elever får möjligheter att lära sig. I en studie har Säljö och Wyndhamn (1993) låtit elever i årskurs åtta och nio lösa en uppgift där en portotabell ska användas för att kunna lösa uppgiften. Studien visade att elever som arbetade med uppgiften under en SO-lektion i högre grad löste uppgiften än de elever som arbetade med uppgiften på en matematiklektion. Resultatet från Säljös och Wyndhamns studie kan tolkas som att inte bara uppgiftens konstruktion och innehåll spelar roll utan även i vilken lärmiljö som uppgiften ges har betydelse. Cobb, Wood, Yackel och McNeal (1992) redovisar en studie där två olika lågstadieklasser undersöktes. Den ena klassen karaktäriserades att ha en traditionell undervisningskultur med fokus på procedurer och den andra klassens undervisningskultur karaktäriserdes som undersökande (”inquiry based”). En undersökande undervisning betonar matematiska resonemang och konceptuell förståelse (Yackel & Hanna, 2003). Det som var signifikativt för klassen som hade en undersökande undervisning var hur förklaringar och motiveringar skulle vara för att anses vara giltiga. I klassen med traditionell undervisning ansågs förklaringar och motiveringar onödiga och överflödiga eftersom eleverna bara skulle följa givna regler. Uppgifternas lösningar eller svar ansågs vara bra om de följde given instruktion på ett korrekt sätt. I det undersökande klassrummet skapade eleverna meningsfulla lösningar och de var benägna att förklara sin matematiska aktivitet så att andra elever hade möjlighet att erkänna eller avfärda de förklaringar som gavs. På ett likande sätt som klasserna i Cobb et al. (1992) skiljer sig, skiljer sig skolorna i Boaler (1998) som omnämndes i avsnitt 2.1, även om klasserna i Cobb et al.:s studie var lågstadieklasser och i Boalers studie var högstadie- och gymnasieklasser. Ena skolan i Boaler (1998), Amber hill, vars utantillbetonade och läroboksbundna undervisning innebar att elevernas fokus var att komma ihåg regler och metoder. Den bild som målas upp av skolan Amber hill påminner om majoriteten av de svenska gymnasieskolor som Bergqvist et al. (2010) har undersökt. Undersökningen visade att procedurhantering dominerade i matematikundervisningen och att den mesta av procedurhanteringen sker via elevens arbete med uppgifter från läroboken. Den kategorisering av elevarbeten som Bergqvist et al. har gjort visar att CMR används i begränsad omfattning medan användandet av IR var vanligt, speciellt då elever arbetade med uppgifter från läroboken.

En lärmiljö utformas eller bestäms i stor utsträckning av läraren och eleverna (Brousseau, 1997; Yackel & Cobb, 1996). Brousseau (1997) talar om att det finns ett *didaktiskt kontrakt* mellan

eleverna och läraren. Detta, i huvudsak implicita, kontrakt innehåller överenskommelser om elevernas respektive lärarens roll i klassrummet. Yackel och Cobb (1996) använder begreppet *sociomatematiska normer*, som är nära besläktat med begreppet didaktiska kontrakt (Schoenfeld, 2012). Exempel på sociomatematiska normer är normativa tolkningar av vad som räknas som matematiskt annorlunda, matematiskt sofistikerat, matematiskt effektivt, matematiskt elegant och vad som räknas som en matematiskt gångbar förklaring och motivering. De sociomatematiska normerna beskriver elevernas uppfattningar och värderingar om matematik. De sociomatematiska normerna är inte statiska, utan dessa normer är potentiellt under ständig förändring och regenereras och modifieras genom elevernas och lärarnas interaktion. Det finns andra sociala normer som påverkar undervisningen generellt, men sociomatematiska normer är normer som är specifika för matematikundervisningen (Yackel & Cobb, 1996). Läraren fungerar som en representant för matematiken och har på detta sätt en central roll i formandet av de sociomatematiska normer som inverkar på lärandet och synen på matematik (Yackel & Cobb, 1996). Detta innebär i sin tur att lärarens uppfattningar om matematik och dennes matematiska förståelse har en avgörande roll för hur de sociomatematiska normerna tar sig uttryck. Det är genom lärarens respons till elevernas utsagor om förslag och lösningar som eleverna lär sig vad som exempelvis konstituerar en matematiskt annorlunda, olik lösning. Yackel och Cobb (1996) ger följande exempel:

Uppgiften $16 + 14 + 8 =$ ____ ska lösas med hjälp av huvudräkning.

Lermont: Jag adderade de två 1:orna i 16 och 14 … vilket blir 20 … plus 6 plus 4 som är lika med 10, och det blir 30 plus 8 kvar, som blir 38.

Läraren: Ok. Har någon annan gjort på något annorlunda sätt?

Ella: Jag tog 16 plus 14 som blir 30 … och adderade 8 till som blir 38.

Läraren: Ok! Jose? En annorlunda lösning?

Jose: Jag tog två tior från 14 och 16, som blir 20 … sedan adderade jag 6 och 4 som blir 30 … sedan adderade jag 8, som blir 38.

Läraren: Ok! Det är nästan likadant som …

(s. 463, förf. övers.)

Dialoger som den ovan skulle kunna hjälpa att utmejsla en norm för vad som ska betecknas som en annorlunda lösning och vad som betecknas som en likadan lösning. Genom ett medvetet förhållningssätt från läraren och en tydlig pedagogisk agenda skapas en förståelse för vad som är matematiskt relevant i en viss situation. På likande sätt skapas enligt Yackel och Cobb normer för vad som ska ses som en matematiskt acceptabel förklaring, se exempelet nedan:

En elev har löst ekvationen $4x + 3 = 6x - 2$ och kommit fram till $x = 2{,}5$. Eleven ombeds av läraren förklara hur denne har gjort, varpå eleven förklarar alla steg i proceduren.

I ett visst klassrum, med en viss sociomatematisk norm kan upprepandet av en korrekt gjord procedur ses som en matematiskt acceptabel förklaring, eftersom eleven har redogjort för alla stegen i sin beräkning. I annat klassrum, med en annan sociomatematisk norm, skulle kanske inte elevens redogörelse för sin lösning gälla som förklaring på hur man löser samma ekvation. För att vara en matematiskt giltig förklaring i detta andra klassrum krävs det att eleven förklarar varför stegen görs i lösningen, det vill säga ger argument, som bygger på den bakomliggande matematiken. Istället för att exempelvis säga att ”jag flyttar över $4x$ och byter tecken” så säger kanske eleven ”eftersom att uttrycken på båda sidorna om likhetstecknet är lika, så kan jag subtrahera $4x$ från båda uttrycken”. Eleven går sedan vidare med att förklara skälen till varför denna subtraktion sker, medan eleven från det första klassrummet går vidare med att förklara nästa procedur, ”flyttar över 2:an och byter tecken” och så vidare. I Yackel och Cobbs studie kunde de se en utveckling hos de elever som hade en ”undersökande” undervisning. Eleverna var, när de började i klassen, vana med att det var läraren som skulle ge förklaringar, inte eleverna. Vartefter började eleverna även kunna urskilja vad som var en redogörelse för en procedur och vad som var en förklaring för en viss handling i relation till matematiska begrepp. En lärare kan utmana och stötta specifika typer av förklaringar. På så sätt kan de sociomatematiska normerna ändras och en mer undersökande undervisning och lärmiljö uppnås (Yackel och Hanna, 2003). Ett klassrums sociomatematiska normer påverkar elevers möjligheter till lärande (Yackel & Cobb, 1996). Läraren kan aktivt sträva efter att skapa en undersökningsbaserad undervisning genom att förändra de sociomatematiska normerna i ett klassrum genom att inrikta diskussioner mot och med hjälp av konceptuell förståelse (Yackel & Rasmussen, 2002).

2.4.2 Elevers uppfattningar om matematik

De sociomatematiska normerna beskriver hur en klass och dess lärare ser på och arbetar med matematik ur ett socialt perspektiv. Det individuella, psykologiska perspektivet av de sociomatematiska normerna är uppfattningar om matematik som en person har (Yackel & Rasmussen, 2002). Genom att individen befinner sig i en social miljö i klassrummet är det ett oupplösligt samband mellan sociomatematiska normer å ena sidan och uppfattningar och föreställningar om matematik som elever har å andra sidan (Francisco, 2013; Yackel & Rasmussen, 2002). Dessa uppfattningar och föreställningar om matematik omnämns på engelska i litteraturen som *mathematical beliefs* eller *beliefs*. I avhandlingen används begreppet *uppfattningar om matematik* eller *uppfattningar*. Behovet att undersöka elevers uppfattning har ökat genom trenden

med en reforminriktad matematik (McLeod, 1994). McLeod menar att genom den reforminriktade matematikens fokus på problemlösningstänkande på bekostnad av procedurtänkande har det lett till att elever i ökad utsträckning utvecklat negativa uppfattningar om matematik.

Det finns ingen enhetlig definition av uppfattningar (Furinghetti & Pehkonen, 2002). En orsak till att det inte finns en enhetlig definition och att begreppet uppfattningar är omvittnat svårt att definiera är den brist på konsensus på hur begreppet ska relateras till annan kognitiv kunskap (Thompson, 1992). Att se uppfattningar och kognitiv kunskap som strikt skilda företeelser ger intryck av att kognitiv kunskap är något mer rent (mindre affektivt, mindre episodiskt och mer logiskt) (Österholm, 2009). Leatham (2006) anger "[o]f all the things we believe, there are some things that we 'just believe' and other things that we 'more than believe – we know'. Those things we 'more than believe' we refer to as knowledge and those things we 'just believe' we refer to as beliefs" (s. 92). Leathams beskrivning visar på en glidande skala mellan uppfattningar och kognitiv kunskap. Uppfattning bör även tolkas som ett uttryck för kognitiv kunskap (McLeod, 1992). Inom forskningsområdet är det en utmaning att särskilja mellan uppfattningar och andra relaterade faktorer såsom känslor och attityder (McLeod, 1992). McLeod särskiljer mellan uppfattningar, känslor och attityder beroende på hur stabila, hur djupt rotade och föränderliga dessa är hos en person och deras förhållande till kognition (se Tabell 2).

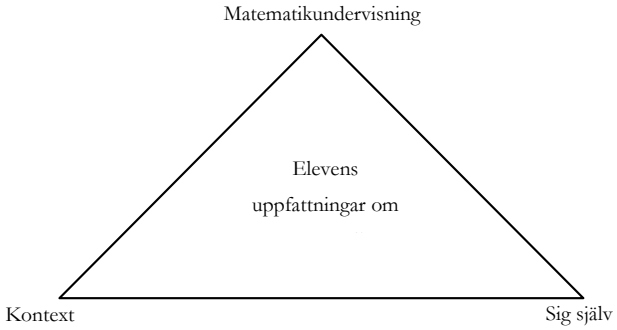
Tabell 2
Affektiva dimensioner inom matematikundervisning (McLeod, 1992, s. 578 förf. övers).

Kategorier	**Exempel**
Uppfattningar	
Om matematik	Matematik handlar om regler
Om sig själv	Jag kan lösa problemlösnings-uppgifter
Om undervisning	Undervisning är förmedlande
Om social kontext	Lärande är en tävling
Attityder	Ogillande av geometriska bevis
	Gillande av problemlösning
	Föredrar lärande som upptäckande
Känslor	Glädje (eller frustration) i att arbeta med problemlösnings-uppgifter
	Estetisk respons till matematik

McLeod menar att en persons uppfattningar är mer stabila och förändras mer sällan än en persons attityder och känslor. Känslor är än mindre stabila än attityder och uppfattningar. Uppfattningar byggs upp under relativt lång tid och är i stor utsträckning kognitiva till sin natur,

till exempel att man anser sig *veta* att matematik handlar om regler. Känslor är å andra sidan mindre kopplade till kognition och kan uppträda och försvinna relativt snabbt. En känsla kan vara en frustration över att man först inte lyckas lösa en svår uppgift och sedan en glädje när man lyckats lösa uppgiften.

Op 'T Eynde, De Corte och Verschaffel (2002) har en likande uppdelning av uppfattningskategorierna som McLoed (1992). Op 'T Eynde et al. låter en elevs uppfattningar om matematik konstitueras av dimensionerna: kontexten (klassrummet), sig själv och matematikundervisningen (se Figur 2). I dimensionen matematikundervisning låter Op 'T Eynde et al. även ämnet matematik ingå.



Figur 2. Elevers uppfattningar om matematik konstitueras av tre dimensioner (Op 'T Eynde et al., 2002)

Schoenfelds definition av uppfattningar är att de ”ses som en individs förståelser och känslor som formar hur individen tolkar och engageras i matematisk aktivitet” (Schoenfeld, 1992, s. 358, förf. övers.). Sumpter (2013) utesluter i sin definition av uppfattningar Schoenfelds aspekt gällande individens känslor med argumentet att samma uppfattning kan delas av två personer, men kopplade till två olika känslor. I avhandlingen används Sumpters definition av uppfattningar: en individs förståelse som formar hur individen tolkar och engagerar sig i matematisk aktivitet. Forskningen kan ge en ganska klar bild av vilka uppfattningar elever vanligtvis har som är kopplade matematik (Schoenfeld 1992):

- Matematikuppgifter har ett och bara ett rätt svar.
- Det finns bara ett rätt sätt att lösa matematikuppgifter på – vanligtvis senaste regeln som läraren gått igenom med klassen.

- Vanliga elever kan inte förvänta sig att förstå matematik. Elever förväntar sig endast behöva memorera och använda vad de har lärt sig mekaniskt och utan att förstå.
- Matematik är något man gör ensam.
- Elever som har förstått den matematik som de arbetar med kommer att kunna lösa alla givna uppgifter på fem minuter eller snabbare.
- Den matematik som lärs ut i skolan har lite eller inget att göra med den riktiga världen.
- Matematiska bevis är inte till någon hjälp i en process av upptäckande och utforskande.

Många av eleverna på skolan Amber hill (Boaler, 1998), som omnämnts ovan (avsnitt 2.1), hade bland annat just uppfattningen att matematik handlar om att lära sig regler utantill och uppfattning kopplades till hur undervisningen utformades. En majoritet av eleverna som gick i motsvararande första året på gymnasiet hade uppfattningen att när de ställdes inför en uppgift var det viktigare att komma ihåg likande uppgifter istället för att tänka till vad som behövdes för att lösa uppgiften. Uppfattningen att matematik handlar om att lära sig en uppsättning regler verkar ha hindrat eleverna från att försöka tolka nya situationer med hjälp av matematik. En studie (Sumpter, 2013) gjord i en svensk gymnasiekontext visade också att elever uppvisade uppfattningar som innebar att procedurer hade en central position vid uppgiftslösning. Studien visade också att elevers uppfattningar kopplades till motivation, till exempel att eleverna inte litade på sin förmåga att använda sig av CMR. Studie 2 i denna avhandling bygger delvis på resultat från Sumpters studie.

2.5 Lärobokens betydelse

Läroboken har en central position inom matematikundervisingen, både för eleverna genom deras arbete med uppgifterna i läroboken och för lärarna i förberedandet av undervisningen (Kajander & Lovric, 2009). Både internationellt (Kajander & Lovric, 2009; Love & Pimm, 1996; Schmidt et al., 2001; Törnroos, 2005; Valverde et al., 2002) och nationellt (Jablonka & Johansson, 2010; Skolinspektionen, 2010) fungerar läroboken som en informell läroplan. Exempelvis har Schmidt et al. (2001) i en internationell studie påvisat ett positivt samband mellan det utrymme som ett visst stoff har i läroboken med hur mycket tid som läggs på stoffet inom ramen för undervisningen.

Bergqvist et al. (2010) rapporterade att drygt hälften av lektionstiden i de undersökta gymnasieklasserna upptogs av elevernas arbete med matematikuppgifter och trefjärdedelar av arbetet med matematikuppgifter var arbete med läroboksuppgifter. En granskning av Skolinspektionen (2010) pekade på att läroböckerna på gymnasiet i liten utsträckning ger möjligheter till att lära sig att använda förmågorna resonemang och problemlösning.

Konsekvenserna av att ha ett allt för stort fokus på proceduruppgifter sammanfattas av Doyle (1988):

- Det ger en signal om att uppgifter ska kunna lösas enkelt genom kända procedurer
- Genom att signalera att många uppgifter ska göras snabbt, leder detta till att eleven begränsas i att utveckla förmågor som skulle stötta lösandet av uppgifter. Istället blir eleven i större utsträckning hänvisad till att ta hjälp.
- Att jobba utifrån att koppla ihop uppgifter med algoritmer signalerar att uppgifter bäst löses genom algoritmberäkningar snarare än matematiska resonemang. Att arbeta på detta sätt hindrar utvecklandet av elevens problemlösningsförmåga.

Uppgiften blir till en proceduruppgift, en algoritmisk uppgift, när eleven inte behöver skapa något eget för att slutföra uppgiften (Lithner, 2008). Information om hur en procedur ska utföras kan eleven ha fått genom lärargenomgångar, lärobokens exempel, tidigare räknade uppgifter eller från andra elever. Ett exempel på en ”typisk” proceduruppgift i en lärobok skulle kunna vara att lösa ekvationen $\frac{x}{5} = 12$. På samma uppslag som uppgiften finns på återfinns ett löst exempel av ekvationen $\frac{x}{6} = 5$. Eleven har då att imitera proceduren från det lösta exemplet, genom att använda sig av IR, för att kunna lösa ekvationen $\frac{x}{5} = 12$ (Ovanstående uppgift och exempel är hämtade från Szabo, Larson, Viklund, Duåker & Marklund (2011), s. 90f.). Det är inte bara kontextlösa uppgifter som ofta kan lösas genom att använda sig av IR, utan även uppgifter med kontext kan ofta lösas genom använda sig av IR. Nedanstående uppgift är ett exempel på en sådan uppgift.

Ett lån på 30000 kr ska amorteras med tre lika stor belopp på tre år. Räntan är 5,20 %.

a) Rita och fyll i tabellen (Figur 3).

b) Vilket totalbelopp ska betalas till banken? (Alfredsson, Erixon et al., 2011), s. 107)

År	Återstående lån	Årsränta	Att betala till banken
1	30000 kr		
2			
3			

Figur 3. Tabell till uppgift om banklån som exemplifierar imitativa resonemang (Alfredsson, Erixon, & Heikne, 2011, s. 107).

På samma uppslag som ovanstående uppgift återfinns, finns nedanstående lösta exempel med ifylld tabell (se Figur 4).

När Malin ska köpa sin första bil måste hon ta ett lån på 10000 kr. Lånet ska betalas tillbaka på 4 år. Varje år betalar hon tillbaka en fjärdedel av lånet. Vi säger att hon amorterar 2500 kr per år. Räntan på Malins lån är 7,00 %.

Hur mycket mer än 10000 kr kommer Malin att ha betalt banken när hela lånet är återbetalt?

7 % av återstående lån

Amortering + ränta

År	Återstående lån	Årsränta	Att betala till banken
1	10000 kr	$0{,}07 \cdot 10000 = 700$ kr	$2500 + 700 = 3200$
2	7500 kr	$0{,}07 \cdot 7500 = 525$ kr	$2500 + 525 = 3025$
3	5000 kr	$0{,}07 \cdot 5000 = 350$ kr	$2500 + 350 = 2850$
4	2500 kr	$0{,}07 \cdot 2500 = 175$ kr	$2500 + 175 = 2675$
Summa:		**1750 kr**	**11750 kr**

Figur 4. Tabell och förklarande text till exempel om banklån som exemplifierar imitativa resonemang (Alfredsson, Erixon et al., 2011), s. 106).

Malin har betalat banken 1750 kr i räntekostnader. Det motsvarar 17,5 % mer än det beloppet hon lånade. (Alfredsson, Erixon et al., 2011), s. 106)

Om läraren har gått igenom ovanstående eller likande exempel alternativt att eleven tittat på exemplet i boken har eleven fått alla de algoritmer som krävs för att lösa uppgiften med lånet på 30000 kr. Att lösa uppgiften kan mycket möjligt ge eleven möjligheter att träna vissa förmågor, men det ges ingen möjlighet att träna på att använda sig av CMR.

Resultatet från en studie (Lithner, 2004) som har kategoriserat läroboksuppgifter i en matematiklärobok som används på grundläggande universitetsnivå i Sverige visade att cirka 70 % av uppgifterna har en algoritm given genom lösta exempel i läroboken, medan cirka 10 % av uppgifterna helt saknade likheter med lösta exempel. Lithner menar att en elevs uppfattningar av matematik inte påverkas av en enskild läroboksuppgift, men att uppfattningen att matematik handlar om att memorera regler kan förstärkas om den typ av uppgifter som endast kräver memorering av regler är tydligt dominerande i läroboken. Eftersom den absoluta majoriteten av uppgifterna i läroboken var av det slag att det var tillräckligt för studenterna att bara använda en metod, etablerar detta ett mönster av hur uppgiftslösning går till. Ett mönster där man söker efter rätt metod snarare än att basera sina resonemang och sin lösning på djupare matematiska kunskaper. Lithner föreslår att för en student ska utveckla en konceptuell förståelse, behövs en högre andel uppgifter som kräver att studenterna använder sig av CMR, och att dessa uppgifter ska vara på alla svårighetsnivåer. Ett exempel på en enklare uppgift som med viss sannolikhet skulle krävas CMR för att lösas av en elev som går första året på gymnasiet skulle kunna se ut så här:

”Beskriv med ord sambandet mellan *a* och *b* [se Figur 5]” (Alfredsson, Bråting, Erixon, & Heikne, 2011, s. 157).

a	*b*
1	6
2	7
4	9

Figur 5. Tabell som ger ett samband mellan a och b. För att ange ett samband krävs användandet av CMR (Alfredsson et al., 2011, s. 157).

För att lösa ovanstående uppgift behöver eleven jämföra värdena för *a* och *b* i raderna för sig. Som en del i en trolig strategi är att se den aritmetiska relationen ”*b* är 5 större är *a*” genom att utföra subtraktionerna $6-1$, $7-2$ och $9-4$ och inse att differensen hela tiden är 5. Därtill behövs en begreppslig förståelse för variabelbegreppet. I den lärobok som denna uppgift återfinns i, finns det inte tidigare i boken några lösta exempel eller andra uppgifter som använder en liknande algoritm för att lösa den aktuella uppgiften. Därför kan det vara ett rimligt antagande att en elev skulle behöva använda sig av CMR för att kunna lösa denna uppgift.

Kapitel 1 ovan har introducerat avhandlingens utgångspunkt som är att omfattande forskning visar att ett av skälen till elevers svårigheter i matematik är att det finns ett för stort fokus på utantillinlärning och att elever endast i begränsad omfattning får djupare kunskap om och förståelse av matematik. Kapitel 2 har behandlat viktiga förutsättningar för eleverna att lära sig att resonera matematiskt och bygga en konceptuell förståelse av matematik. Nästa kapitel behandlar de metodöverväganden och metodologi som ligger till grund för avhandlingens studier.

3. *Metodöverväganden och metodologi*

Detta kapitel redogör för de metodöverväganden som har gjorts för de tre studierna. I förekommande fall grundas metodövervägandena med metodologiska aspekter. Korta metodbeskrivningar ges också av hur studierna har utförts. För ytterligare metodbeskrivningar hänvisas till respektive artikel eller manuskript i del II av avhandlingen samt avsnitten 4.1, 4.2 och 4.3, där studierna sammanfattas. Kapitlet avslutas med dels de etiska hänsyn som tagits i samband med studierna och dels en diskussion om studiernas begränsningar, resultatens tillförlitlighet och generaliserbarhet.

3.1 Att studera resonemang

Det ramverk (Lithner, 2008) som har använts för att studera resonemang i avhandlingens studier kan och har använts för att studera resonemang på flera sätt (se avsnitt 2.3.2). Ramverket har i avhandlingens studier använts för att studera vilken typ av resonemang som eleverna har använt vid uppgiftslösning och för kategorisering av uppgifter med avseende på vilken typ av resonemang som krävs för att lösa dessa uppgifter.

3.1.1 Att studera elevers resonemang

För att studera en persons resonemang genom Lithners (2008) ramverk är det första steget att dela upp data i delar, i så kallade resonemangssekvenser. Hur finkornigt data ska delas upp beror på vad som ska studeras. Om till exempel en lösning av en hel uppgift ska studeras kan en resonemangssekvens vara hela uppgiftslösningen. Om en mer noggrann analys görs kan man behöva dela upp uppgiftslösningen i flera resonemangssekvenser. En resonemangssekvens har följande fyra steg (Lithner, 2008):

1. Resoneraren stöter på en (del)uppgift.
2. Ett *strategival* görs, där "strategi" innebär allt från lokala procedurer till övergripande angrepssätt och "val" ses i en vid bemärkelse (erinra, konstruera, upptäcka, gissa etc.) Strategivalet kan stödjas av argument om varför vald strategi kommer att lösa uppgiften.
3. *Strategin implementeras*. Implementering kan stödjas av argument till varför vald strategi har löst uppgiften.
4. En *slutsats* dras.

Uppgiften som ska lösas kan alltid formuleras som en fråga. Detta görs implicit eller explicit av resoneraren. I analysen av resonerarens strategival och strategiimplementering försöker man

avgöra om strategin grundar sig på ytliga eller icke-ytliga matematiska egenskaper, undersöka vilka argument som förs fram varför en vald metod kommer att lösa uppgiften/löste uppgiften och om lösningsmetoden är erinrad eller är ny. En resonemangssekvens avslutas med en slutsats, till exempel angivandet av ett svar på en uppgift eller att uppgiften överges.

Två av studierna, 1 och 2 har studerat elevers resonemang. Data har genererats genom elevanteckningar, elevernas tal, gester och mimik (Bjuland, Cestari, & Borgersen, 2008; Lithner, 2008). Metoden att generera data, som bygger på Långström och Lithner (2008), var att låta två eller tre elever arbeta med uppgifter tillsammas. Det var inte växelverkan eller samarbetet mellan eleverna som primärt studerades, utan skälet till att låta elever arbeta med uppgifter i grupp var ett metodval för att kunna studera enskilda elevers resonemang vid uppgiftslösning i klassrumsmiljö. I övervägandet om data skulle genereras genom att elever löste uppgifter tillsammans eller enskilt har nedanstående överväganden gjorts. Ett sätt att studera elevers uppgiftslösning är att låta enskilda elever ”tänka högt”. Denna metod går ut på att eleven uppmanas berätta vad denne gör och tänker under uppgiftslösandet (Bergqvist et al., 2008; Boesen et al., 2010; Boren & Ramey, 2000; Ericsson & Simon, 1993; Lithner, 2003). Det finns fördelar med att använda sig av en datainsamlingsmetod som bygger på att låta en elev ”tänka högt”. Enligt Ericsson och Simon (1993) är denna metod den som ligger närmast att spegla en tankeprocess. En nackdel med denna metod är att den kan skapa låsningar hos den elev som ska ”tänka högt” (Schoenfeld, 1985). De låsningar som enligt Schoenfeld kan inträffa när en enskild ombeds ”tänka högt” blir mer sällsynta när en elev får möjligheten att för en annan elev blotta sin låsning genom att till exempel kunna säga ”Jag har ingen aning hur jag ska göra här”. Ett annat alternativ är därför att låta elever i grupp lösa uppgifter. På detta sätt verbaliserar elever sina tankar utan att det behöver påkallas. Även denna metod kan anses ha sina nackdelar. Dels kan en elevs tankebana ändras av att en annan elev verbaliserar sin tanke och dels kan det sociala samspelet på flera sätt påverka hur arbetet fortlöper. Det finns till exempel en risk att en elev dominerar i gruppen och att eleverna kan förvirra varandra (Schoenfeld, 1985). Schoenfeld menar dock att det finns övervägande fördelar med att låta elever arbeta tillsammans vid uppgiftslösning när data ska genereras snarare än att låta elever lösa uppgifter individuellt genom att ”tänka högt”. Förutom den minskade risken för låsningar när data genererats via elevgrupper innehåller de ofta bättre information om de val som eleverna gör genom att elevernas val oftare motiveras och att det oftare finns indikationer på om andra alternativ har överlagts.

Elever från första årskursen på gymnasiet valdes ut att delta i studie 1 och 2, skälet till detta var att år 1 är det sista året som samtliga elever läser matematik i svensk skola. Genom att välja elever från årskurs 1 gavs därmed möjlighet att undersöka elevers resonemang från samtliga tre

kursspår: spår a (yrkesprogram), spår b (högskoleförbredande program, mindre matematikintensivt) och spår c (högskoleförbredande program, mer matematikintensivt). I studie 1 representerades alla tre spåren medan spår a och b representerades i studie 2.

3.1.2 Att studera resonemang i läroboken

Läroboken indikerar vilka möjligheter till lärande som elever får (Schmidt, 2012; Törnroos, 2005). Genom att studera elevers läroböcker går det alltså att säga något om vilka möjligheter elever får att lära sig att använda CMR. Lärobokens uppgifter är en hörnsten i elevernas arbete med matematik och påverkar eleverna genom att rikta deras uppmärksamhet på innehållsliga aspekter likväl som på vilket sätt en uppgift förväntas processas (Doyle, 1983). Enligt Halldén, Scheja och Haglund (2008) är lärobokens uppgifter tänkta att stödja elevernas lärande. Detta implicerar att alla uppgifter i en lärobok i princip ska vara lösbara för eleverna. När eleven arbetar med läroboksuppgifter är det möjligt att eleven kopplar uppgiften till lärobokens lösta exempel eller annan information i läroboken med hjälp av ytliga egenskaper hos den uppgift som ska lösas. Detta sätt att arbeta ger eleven en mall för hur uppgiften ska lösas, något som kan göras utan att ha en konceptuell förståelse av den aktuella matematiken (Brousseau, 1997). Analysmetoden, som bygger på Lithner (2004) och Palm et al. (2011) och som användes i studie 1 och 3 går i korthet ut på att undersöka om en uppgift i läroboken kan lösas med hjälp av algoritmer (återfunna i exempel, teori eller uppgifter) eller liknade karaktäristik som finns tidigare i läroboken. Om en algoritm finns anses den analyserade uppgiften kunna lösas genom att använda sig av IR, i annat fall krävs användandet av CMR i mindre eller större utsträckning för att lösa uppgiften. Hypotetiskt skulle eleverna kunna få den information som finns i läroboken förmedlad av läraren vid exempelvis en genomgång. Den information som eleven har tillgång till är i så fall densamma, vare sig läroboken eller läraren är informationsbäraren. Den information som facit ger har undantagits från analysen av läroböckerna. Data från studie 1 visar att användningen av facit verkar ha en inverkan på uppgiftslösandet. Dessutom finns indikationer på att användandet av facit kan inverka negativt på elevernas lärande (Skolinspektionen 2010). Det hade därför varit eftersträvansvärt om aspekten av användandet av facit ingått i analysen av läroboksuppgifterna. Vid utformandet av analysramverket för att utföra analysen av läroboksuppgifter inkorporerades inte facit i analysen på grund av att det var metodiskt svårt undersöka på vilket sätt facit kan antas inverka på det resonemang som krävs för att lösa en uppgift.

Studie 3 analyserade läroböcker från tolv länder. Urvalet av länder begränsade sig till länder där svenska eller engelska är vanliga undervisningsspråk. Urvalet av vilka länder, vars läroböcker, som därefter kom att ingå i studien baserade sig på en geografisk spridning som antogs kunna ha kopplingar till lärobokens utformning. De länder som finns med i den senaste Trends in

International Mathematics and Science Study, TIMSS-undersökningen och Programme for International Student Assessment, PISA-undersökningen och som också ingick i studie 3 visade en spridning i resultat i dessa undersökningar (International association for the evaluation of educational achievement, IEA, 2012; Organisation for Economic Co-operation and Development, OECD 2014a, 2014b). Spridningen i resultatet användes dock inte som urvalsgrund eftersom alla världens länder inte är med i TIMSS- och PISA-undersökningarna. Kriteriet för valet av vilken lärobok i respektive land som skulle analyseras var att det skulle vara en vanlig lärobok. För att kunna hitta jämförbara matematiska områden användes innehållsramverk från TIMSS (Mullis et al., 2008).

3.2 Att studera elevers uppfattningar

Att studera uppfattningar är komplext (McLeod, 1994). Berger (1998) använder en metafor för att beskriva vilka utmaningar som en forskare i didaktik kan stå inför när uppfattningar studeras. Berger jämför paleontologens upptäckt av ett fossilfynd av en dinosaurie till en rekonstruktion av dinosaurien med didaktikerns upptäckt i empiri från en individs utsagor och beteende till konstruktionen av en trolig bild av en individs uppfattningar. Från iakttagelser försöker paleontologen respektive didaktikern återskapa en dinosauries skelett respektive en modell för individens uppfattningar. För paleontologen går byggandet av skelettet från fossilfyndet via utgrävningar till rekonstruktion. För didaktikern går byggandet av modellen av uppfattningar via data och analys av data. Utseendet av själva dinosaurien bygger på kvalificerade antagningar gjorda av paleontologen, men likväl är och förblir utseendet av originalet dolt. På liknande sätt är det när en individs uppfattningar beskrivs av didaktikern, konstruktionen av det dolda bygger på empiri, men själva uppfattningarna är aldrig synliga. Det som metaforen försöker beskriva är att det finns element av godtycklighet i rekonstruktionen av individens uppfattningar från individens uttalande och beteende. Furinghetti och Morselli (2009) undertrycker behovet av att skapa en datagenereringsmetod som ger förutsättningar att konstruera en trolig bild av individens uppfattningar. Enligt McLeod (1994) måste man finna metoder som låter fånga komplexiteten i elevers uppfattningar. Därför behövs en metod- och teorigrund som är bred och tillräckligt öppen för att inrymma denna komplexitet. För att möta kravet på en trolig bild av elevers uppfattning användes tematisk analys, där elevernas explicita utsagor analyserades (Braun & Clarke, 2006). Tematisk analys innebär i korthet att data delas in i teman som sedan blir föremål för ytterligare analys. Sumpter (2013) studerade svenska gymnasieelevers uppfattningar kopplat till resonemang genom induktiv metod (kategorisera data utan fördefinierade teman). De teman som Sumpter identifierade var förväntningar på sig själv och ämnet, inre- och yttre motivation samt säkerhet (se Tabell 3).

Tabell 3
Teman från Sumpter (2013) av elevers indikerade uppfattningar av matematik kopplat till arbete med icke-rutinuppgifter och med exempel på explicita utsagor

Teman	Exempel
Förväntningar	"Jag vet inte hur man gör det här"
	"Det är ok att gissa"
Motivation - inre	"Jag vet inte hur man gör det här"
	"Det kändes rätt"
Motivation–yttre	"En lösning måste presenteras (redovisas)"
Säkerhet	"Jag är osäker när jag måste tänka annorlunda"
	"Jag är osäker om det är rätt"
	"Jag känner mig säker"

I studie 2 användes en deduktiv metod (kategorisera data utifrån fördefinierade teman) med teman från Sumpter (2013). Valet av deduktiv metod och med teman från Sumpter (2013) var att studie 2 i stor utsträckning var en uppföljningsstudie till Sumpters studie.

3.3 Etiska hänsyn

Etiska övervägande har framförallt skett vad det gäller datagenerering för de data som ligger till grund för studie 1 och 2, eftersom elever och lärare var direkt involverade. Alla elever som ingick i datagenereringen för studie 1 och 2 var över 15 år. De etiska övervägandena har skett med vägledning av och i enlighet med Vetenskapsrådet (2011). För studie 1 informerades eleverna, elevernas målsmän och lärarna i de klasser som ingick i datainsamlingen skriftligt i förväg om att det skulle ske en observation under vanligt klassrumsarbete och att ljud- och bildupptagning skulle komma att ske samt att vissa elevers anteckningar skulle komma att kopieras. Vidare underströks för eleverna och deras målsmän att genererad data inte skulle kommenteras eller på annat sätt föras vidare till elevernas lärare. Elever och lärare som filmades fick skriva under ett medgivandeavtal. För studie 2 ombads lärare att välja ut två elevpar var. Dessa elever fick sedan skriva under ett medgivandeavtal. Namnen på alla eleverna som återges i studierna är fingerade. Allt deltagande har skett frivilligt och utan ersättning. Val av läroböcker i studie 3 har skett med hjälp av lärare och forskare med god kännedom om läroböckerna i sina respektive länder. Det har inte utgått någon ersättning till de personer som har konsulterats för val av läroböcker. Läroböckerna inhandlades via ombud eller genom beställning hos bokhandlare.

3.4 Validitet och generaliserbarhet

Vid datainsamling och dataanalys har hög validitet eftersträvats. Att använda sig av triangulering är ett sätt att nå hög validitet (Schoenfeld, 2002). Triangulering kan ske genom datatriangulering

(använda fler än en metod att generera data), observationstriangulering (mer än en observatör eller medkodare), metodologisk triangulering (kombinera kvantitativa och kvalitativa ansatser) och teoritriangulering (användandet av multipla teorier eller perspektiv) (Denzin, 1989). Flera metoder har används för att undersöka elevers möjligheter till att lära sig använda CMR: videoinspelning och observationer, intervju samt textanalys. Urval och kategorisering av data har föregåtts av pilotundersökningar. Utifrån pilotdata har sedan minst två personer gjort urval och kalibrerat analysramverket. Urval och kategorisering av data som ingått i studierna har sedan i huvudsak gjorts av en person. Vid osäkerhet vid kategoriseringen konsulterades en medkodare. Både kvantitativa och kvalitativa metoder har använts. Kvantitativa metoder har använts för att utföra läroboksanalysen i studie 3. Kvalitativa metoder har används i studie 2 för att analysera elevernas uppfattningar och i studie 1 och 2 för att analysera elevernas resonemang. Två ramverk, Lithner (2008) och Sumpter (2013) har använts för att belysa data från olika perspektiv.

Aspekter av reliabilitet, det vill säga resultatens tillförlitlighet, har också beaktats. Alla avgörande steg i metodhanteringen har dokumenterats, exempelvis noggranna och omfattande kalkylbladsfiler med data över elevernas kategoriserade resonemang och kategoriserade läroboksuppgifter. Brist på reliabilitet kan enligt Robson (2011) även bero på hur urvalet av data har gjorts och hur data har bearbetats . För studie 1 och 2 har data samlats in mitt under en termin (vårterminen 2013 respektive 2014), för att inte generera data i en uppstartfas av en kurs eller i en mer intensiv examinationsfas som vanligtvis sker i slutet av en termin. För att få ett bredare urval av elever till studie 1 och 2 har elever valts från två olika skolor och från olika gymnasieprogram, som är olika matematikintensiva. Bias kan uppstå i samband med att data genereras. I den laboratoriesituation (angränsande grupprum till elevernas klassrum) som data till studie 2 genererades i kan det anas att det funnits element av bias genom att eleverna sa eller gjorde på ett visst sätt på grund av laboratoriemiljön. Det kunde observeras genom att eleverna viskade ibland, trots att de var de enda personerna i rummet. Visandet gjordes kanske för att talet inte skulle fångas av mikrofonen. Detta sågs som en indikation på att eleverna var påverkade av situationen. I studie 1 verkar inte eleverna blivit påverkade av att de var del av en datainsamling i lika hög grad som eleverna i studie 2. Detta kunde observeras genom att eleverna även samtalade mycket spontant om företeelser som inte hade koppling till uppgiftslösandet. Anledningen till att eleverna verkade vara mindre påverkade vid denna datainsamling antas vara att de befann sig i sin normala klassrumssituation med bekanta arbetsuppgifter. Urval av data och analys av data kan också vara föremål för bias (Robson, 2011). Urvalet av data till studie 3, det vill säga urval av läroböcker skede med hjälp av personer med god kännedom om det aktuella landets matematiklläroböcker. Stickprover gjordes mot bokhandlare i det aktuella landet för att se om det

var överensstämmelse mellan den sakkunnige personens bedömning och bokhandelns bedömning. Stickprovens resultat var att det rådde överensstämmelse mellan de båda bedömningarna. En annan aspekt av bias är att i studie 2 förelåg det en potentiell bias vad det gäller urval genom att lärare ombads välja ut elever som brukade arbeta tillsammans och som antogs att precis klara kursen. I efterhand har kontroll gjorts för att undersöka vilket provbetyg eleverna fick på det nationella prov som gjordes vid kursslut. Samtliga tre elever som ingick i studie 2 fick provbetyget E. Därmed kan det sägas att aspekten av bias vad det gäller lärarnas urval minimerats. Att kunna reproducera resultaten från studierna är en annan aspekt av reliabilitet (LeComtpe & Goetz, 1982). För att det ska vara möjligt att reproducera resultat från de studierna har Robson (2011) följts: metodbeskrivningarna för datainsamling och dataanalys var noggranna och ett erkänt teoretiskt ramverk (Lithner, 2008) har använts.

En annan aspekt av validitet är generaliserbarheten hos resultaten för en studie (Robson, 2011). Enligt LeCompte och Goetz (1982) bör hänsyn tas på vilket sätt som resultatet är specifikt vad det gäller: urval, kontext eller speciella egenskaper hos de eller det studerade. Studie 1 och 2 har sina begränsningar i att data genererats i en svensk gymnasiekontext, men inom den kontexten har det eftersträvats att generera data från vanliga elever, till exempel inte från väldigt låg- eller högpresterande elever. Resultaten från studie 1 kan sägas har högre ekologisk validitet (Robson, 2011) än resultaten i studie 2. En högre ekologisk validitet ha kunnat uppnås eftersom den kontext som data genererades var mer naturlig, genom en autentisk klassrumsmiljö, i studie 1 än i studie 2. Urvalet till studie 3 har en begränsning i att den endast är gjord på läroböcker i länder där engelska eller svenska är vanliga språk. Möjligheten till generaliserbara resultat från studie 3 är goda i den bemärkelsen att läroböckerna var relativt lika i upplägget (kontexten) och att inga speciella (unika) egenskaper hos läroböckerna observerades. Däremot finns en begränsning i att generalisera resultaten från studie 3 vad det gäller att med säkerhet uttala sig om vilka möjligheter elever får till att lära sig att använda CMR. Ett skäl till att det inte går att avgöra vilka möjligheter elever får till att lära sig att använda CMR är att det inte har studerats hur läroböckerna används i respektive land. I Sverige har detta skett i viss utsträckning, bland annat genom studie 1.

Slutligen, de tre studierna har inte tagit någon genusaspekt i beaktande. Dataunderlaget till studie 1 och 2 är för litet för att kunna säga något tydligt utifrån en genusaspekt. I studie 3 har bedömningen gjorts att andra aspekter har varit viktigare än genusaspekten för att kategorisera potentiella resonemang i uppgifterslösningen.

4. *Om studierna och resultat*

I föreliggande kapitel redovisas en sammanfattning av avhandlingens tre studier och deras huvudresultat.

4.1 Sammanfattning av studien "Elevers resonemang i uppgiftlösning av läroboksuppgifter" (studie 1)

Läroboken används mycket i undervisningen i matematik och har inverkan på vilka möjligheter elever ges att lära sig något. Klassrummet är det ställe där elevernas syn på matematik framförallt formas. Studie 1 hade som övergripande syfte att undersöka elevernas möjligheter till att lära sig CMR när de löser läroboksuppgifter i vanlig klassrumsmiljö. För att uppfylla studiens syfte undersöktes relationerna emellan: vilka typer av resonemang som eleverna förde när de arbetade med läroboksuppgifter, vilka resonemang som själva uppgiften teoretiskt krävde för att lösas och om eleverna lyckades lösa uppgiften. Studien genomfördes i totalt fyra förstaårsklasser på två gymnasieskolor i Mellansverige. Klasserna var från bygg- och anläggningsprogrammet, estetiska programmet, naturvetenskapsprogrammet och teknikprogrammet. Tjugosex lektioner filmades. Analysen omfattade den första lektionen från respektive klass. Data från de först analyserade lektionerna var så pass omfattande att det bedömdes att tillräckligt med data hade analyserats varför inte ytterligare data analyserades.

Resultaten visade att eleverna sällan använde sig av CMR för att lösa läroboksuppgifter. För uppgifter som det teoretiskt endast krävdes IR för att lösa, användes också i praktiken nästan uteslutande IR för att lösa eller försöka lösa dessa uppgifter. De få uppgifter som eleverna angrep genom att använde sig av CMR, löstes korrekt. Detta var också fallet när textguidat AR användes, även om användandet av textguidat AR var sällsynt. Eleverna använde däremot sig ofta av elevguidat AR för att lösa eller försöka lösa uppgifter. Detta sätt att lösa en uppgift ledde ofta till korrekta lösningar eftersom eleven som guidade den andra eleven oftast löst uppgiften korrekt innan. När elever blev guidade fanns lite fokus på att få och ge förklaringar till varför en viss lösning hade gjorts. I inget av fallen då läraren hjälpte en elev ledde det till att eleven sedan arbetade vidare med uppgiften genom att använda sig av CMR. Av uppgiftskategorisering av krävt resonemang för varje uppgift framgick att det var få uppgifter som krävdes ett användande av CMR för att lösa uppgiften. Eleverna arbetade inte med de svåraste uppgifterna i läroboken, utan framförallt de enklaste uppgifterna.

En slutsats som ligger nära tillhands utifrån resultatet är att det råder en diskrepans mellan vad eleverna gör när de löser läroboksuppgifter och den resonemangs- och problemlösningsförmåga som elever ska utveckla enligt ämnesplanen. Eleverna får begränsade möjligheter att lära sig att

använda CMR i sitt arbete med läroboksuppgifter. Resultat från studien kan tolkas som att när elever arbetade ihop kunde det vara ett hinder att lära sig använda CMR, snarare än en hjälp eftersom arbetet ihop så ofta ledde till guidning mellan eleverna (elevguidat AR) för att lösa uppgifterna. Vidare pekade resultaten på behovet av att läraren på ett medvetet sätt ska hjälpa elever så att de inte guidas av läraren, i för hög utsträckning utan istället stöttas att använda sig av CMR. Eftersom studien visade att läroböckernas lösta exempel och teoridelar sällan användes finns det skäl att omvärdera hur en lärobok bäst läggs upp och vilket innehåll den ska ha. Studien visade också att det fanns få enklare CMR-uppgifter för eleverna att lösa i läroböckerna. Detta kan tolkas som att läroböckerna bör omdisponeras så att det finns uppgifter som det krävs CMR för att lösas på alla svårighetsnivåer och i lika stor omfattning på alla nivåer.

4.2 Sammanfattning av studien "Elevers resonemang och uppfattningar om matematik i arbetet med icke-rutinuppgifter" (studie 2)

Inom forskningen finns det en relativt god bild av relationen mellan matematiska uppfattningar som elever har, problemlösning och förutsättningarna för att vara en god problemlösare. Elevers uppfattningar har till viss del visat sig vara kontextbundna, vilket var en anledning till att studera elevers uppfattningar i en svensk gymnasiekontext. En andra anledning var att elevers uppfattningar relaterat till resonemang inte har studerats i någon större omfattning. Studien studerade relationen mellan elevernas resonemang, CMR respektive IR (Lithner, 2008) och indikationer på uppfattningar, förväntningar, motivation respektive säkerhet (Sumpter, 2013) när elever arbetade med icke-rutinuppgifter (som därmed potentiellt endast kunde lösas genom att använda sig av CMR). De elever som ingick i urvalet gick första året på gymnasiet. Eleverna var andra än de elever som ingick i studie 1. Data från åtta elever (fyra elevpar) samlades in, fyra elever från samhällsvetenskapliga programmet och fyra elever från bygg- och anläggningsprogrammet. I den slutgiltiga analysen ingick tre elever. Skälet till att dessa tre elever ingick i den slutgiltiga analysen var att deras uppgiftslösande och efterföljande intervju genererade goda mängder data. Samtliga elever var sådana som undervisande lärare bedömde skulle få betyget E i den aktuella matematikkursen. En majoritet av eleverna på bygg- och anläggningsprogrammet respektive samhällsvetenskapliga programmet i Sverige får betyget E eller lägre i den aktuella matematikkursen.

Resultaten visade att de tre eleverna hade varsina uppsättningar av uppfattningar som var för sig kunde kopplas till antingen IR eller CMR. En av eleverna hade uppfattningar som innebar att denne inte ansåg sig kunna förstå icke-rutinuppgifter, bara kunde lösa rutinuppgifter och uppvisade en uppfattning av osäkerhet. Dessa uppfattningar kopplades till användandet av IR. Eleven använde CMR vid upprepade tillfällen, men övergav det till förmån för användandet av

IR. De två andra eleverna uppvisade mer blandade uppfattningar jämfört med den ovan beskrivna eleven. De båda senare elevernas uppfattningar kunde kopplas till användandet av CMR. Dock var det bara en av eleverna vars användande av CMR renderade korrekta lösningar. Eleven som löste uppgifter korrekt genom att använda sig av CMR, gjorde detta när en korrekt lösning var inom räckhåll och där det inte behövdes så stor ansträngning ("struggle", se avsnitt 2.3). Elevens resonemang kunde kopplas till både en uppfattning om osäkerhet och en uppfattning om att inte kunna förstå uppgifterna. Vid elevens arbete med den svåraste uppgiften kunde en uppfattning av osäkerhet kopplas till användandet av IR. Den tredje eleven, som använde sig av CMR men som gav inkorrekta lösningar hade uppfattningar som innebar både säkerhet och osäkerhet, inre positiv motivation att lösningarna kändes bra och att gissningar är en acceptabel strategi. Dessutom observerades att det fanns en uppfattning av förväntan hos eleverna på att uppgifter skulle vara av en viss komplexitetsnivå eller svårighetsnivå. Denna uppfattning verkar ha spelat roll i övervägandet av vilken typ av resonemang som användes.

Studiens resultat ger stöd till tidigare forskningsresultat angående elevers uppfattningar kopplat till problemlösning, exempelvis att det ska finnas en given metod att lösa en uppgift på. Två av eleverna i denna studie visade att användandet av CMR faktiskt är en väg framåt för att lösa en uppgift. En anledning till användandet av CMR, om än inte alltid korrekt, skulle kunna vara att undervisningen är sådan att den ger elever möjligheter att lära sig använda sig av CMR. Studiens resultat implicerar att eleverna delvis behöver förändra sina uppfattningar, utveckla sina matematiska resurser för hur man kan arbeta framgångsrikt med uppgifter samt utveckla en förmåga av reflektion kopplat till strategival som är matematiskt förankrade. Studiens resultat harmonierade med tidigare forskning i det avseendet att det krävs mer än en viss typ av uppgifter för att elever ska använda sig av och därmed få möjlighet att lära sig använda CMR.

4.3 Sammanfattning studien "Resonemangskrav i matematiklläroböcker: en analys av läroböcker från tolv länder" (studie 3)

Givet antagandet att läroboken är en god indikator på elevernas möjligheter till lärande var syftet med studien att undersöka vilka möjligheter elever har att lära sig använda CMR. I studien analyseras uppgifter i läroböcker från tolv länder (Australien, Finland, Irland, Indien, Kanada, Nepal, Skottland, Singapore, Sverige, Sydafrika, Tanzania och USA). Totalt analyserades knappt 6000 uppgifter. I läroböckerna har uppgifter inom kunskapsområdena algebra och geometri analyserats. Studien avsåg att besvara vilken fördelning av global CMR-, lokal CMR- och textguidade AR-uppgifter som områdena algebra och geometri innehöll. Studien undersökte även var uppgifterna återfanns inom avsnitten med avseende på avsnittsrubriker eller var i avsnitten uppgifterna återfanns, till exempel i början av ett avsnitt.

Resultatet visar att textguidade AR-uppgifter dominerade i alla tolv länders läroböcker. I genomsnitt var cirka 80 % av uppgifterna i algebraavsnitten textguidade AR-uppgifter och i genomsnitt cirka 70 % i geometriavsnitten. För globala CMR-uppgifter var den genomsnittliga fördelningen för båda avsnitten cirka 10 %. Överlag var proportionerna i ländernas läroböcker relativt lika. Proportionen av textguidade AR-uppgifter inom algebraavsnitten varierade från 68 % till 96 %, där nio av tolv länder hade en fördelning mellan 74 % och 86 %. Motsvarande proportioner för geometriavsnitten var mellan 59 % och 85 %, med tio länders fördelning som låg mellan 59 % och 75 %. Ett annat resultat från studien var att andelen uppgifter som kunde lösas med AR var vanligare i början av respektive avsnitt i läroböckerna och ovanligare i slutet, det motsatta gällde följaktligen för uppgifter som det krävdes CMR för att lösa. För uppgifter som återfanns under rubriker såsom ”aktivitet”, ”diskussion” eller dylikt var andelen global-CMR generellt högre än för de uppgifter som var tidigast i respektive avsnitt, men lägre än de uppgifter som var placerade sist i respektive avsnitt.

Studien syftade inte till att avgöra om läroböckerna erbjuder tillräckligt med CMR-uppgifter för att utveckla förmågan att använda sig av CMR. Att andelen globala CMR-uppgifter är cirka 10 % och att CMR-uppgifterna inte är jämnt fördelade i avsnitten indikerar ändå att läroböckerna inte leder utvecklingen av en reforminriktad matematik. Studien visar också att urvalet av uppgifter som eleverna eller läraren gör spelar roll för hur stora möjligheter för lärande av att använda CMR som eleven får. Studiens resultat implicerar att elever och lärare bör förhålla sig aktiva till lärobokens innehåll för att använda hela dess potential, till exempel genom att välja att arbeta med de CMR-uppgifter som finns i läroböckerna. Läroboksförfattare bör kritiskt förhålla sig till den fördelning av CMR- respektive textguidade AR-uppgifter inom läroboken som helhet och fördelningen inom avsnitten.

5. *Diskussion*

I detta avslutande kapitel diskuteras studiernas resultat och hur dessa resultat förhåller sig till varandra och till tidigare forskning. Vidare diskuteras vilka implikationer avhandlingens resultat ger till undervisningen och utformningen av läroböcker samt deras användning. Kapitlet avslutas med förslag till vidare forskning och en vision inför framtiden.

5.1 Resonemang, elevers uppfattningar och sociomatematiska normer

De sociomatematiska normerna i ett klassrum är en av faktorerna som avgör vilken typ av matematik som eleverna får möjlighet att lära sig (Schoenfeld, 2012). Av studie 1 framgår det att lektionerna dominerades av två delar, lärarens genomgång och arbete med läroboksuppgifter. Den senare aktiviteten upptog normalt mer än hälften av tiden i anspråk. Bergqvist et al. (2010) rapporterar att denna lektionsstruktur – som också observerades i studie 1 – är den dominerande lektionsstrukturen på gymnasiet. Resultat från studie 1 visade också att läroboken i stort sett inte användes för att söka kunskap om hur uppgifter ska lösas. Detta resultat går emot tidigare observationer i svensk kontext (Lithner & Palm, 2010) och i tysk gymnasiekontext (Rezat, 2009). Lithner och Palm samt Rezat visade att studenter och elever använde läroboken för att söka efter information för att kunna lösa uppgifter. Att eleverna inte får information från boken innebär att de måste få informationen från annat håll, mest troligt från lärargenomgångar och enskild hjälp från lärare och elever. Bergqvist och Lithners (2012) studie som undersökte vilka typer av resonemang som användes vid lärargenomgångar visade att genomgångarna framförallt baserades på IR. Lärarens genomgångar skulle därmed kunna vara en anledning till att användandet av IR är en vanlig lösningsstrategi för att lösa uppgifter. Även läroboken skulle kunna vara en anledning till att eleverna ofta använde sig av IR för att lösa uppgifter. Trots att resultaten från studie 1 visade att lärobokens lösta exempel och teoriavsnitt inte användes för att söka efter algoritmer, var en stor majoritet av de läroboksuppgifter som eleverna arbetade med sådana uppgifter kunde lösas genom användande av IR. Genom att eleverna nästan uteslutande arbetade med IR-uppgifter indikerade detta ett procedurinriktat arbetssätt, så trots att eleverna bara verkade relatera till själva uppgifterna kan det vara så att läroboken ändå i högsta påverkar vilka typer av resonemang som anses viktiga i undervisningen. Resultat från studie 2 visade att en av eleverna valde att försöka lösa CMR-uppgifter genom att använda sig av IR. Dessa lösningsförsök kan kopplas till dennes uppfattningar: osäkerhet, låga förväntningar på sig själv och en negativ inre motivation. Detta resultat kan också tolkas som att det finns en sociomatematisk norm att uppgifter ska lösas med kända metoder (använda sig av IR) och inte konstruera egna

lösningsmetoder (använda sig av CMR). Eleven säger vid några tillfällen ”sånt här kan inte jag”. Denna utsaga kan tolkas som en upplevelse av att stå handfallen när eleven inte ser vilken metod som ska använda för att lösa en uppgift, alternativt att denne insåg att uppgiften krävde något annat än IR för att kunna lösas, men detta var inget som eleven kände att eleven kunde eller vågade göra. Även de andra två eleverna i studie 2 uppvisade osäkerhet när de arbetar med CMR-uppgifter. En av dessa två elever uppvisade även säkerhet och angav att lösningen till en uppgift ”kändes rätt”. Denna säkerhet kunde emellertid kopplas till användande av IR och en inkorrekt lösning. Denne eleven verkade ha saknat erforderliga resurser för att klara av den aktuella uppgiften. Eleven gavs, i en mening, inte möjlighet att lösa uppgiften, den var helt enkelt för svår. Annorlunda uttryckt var inte detta en möjlighet till lärande av CMR för eleven, uppgiften fanns där men andra nödvändiga förutsättningar fanns inte, exempelvis tillräcklig konceptuell förmåga. Resultatet från studie 2, att eleverna uppvisade en uppfattning av osäkerhet är i linje med resultaten från Sumpter (2013). Eleverna i studie 1 uppvisade vid ett flertal tillfällen ett beteende vid uppgiftslösning som inte stöttade dem, kanske till och med hindrade dem att använda sig av CMR för att lösa uppgifter. Att bli guidad till en lösning och att inte kräva eller få djupare matematiska förklaringar var vanligt. Detta beteende, att ge och få hjälp på ett ytligt sätt kan betraktas som en sociomatematisk norm för vad som krävs för att ”förklara” en uppgift till en annan elev. I ljuset av Cobb et al. (1992) och Yackel och Cobb (1996) kan man karaktärisera den guidning som sker i studie 1 och 2 som tillhörande en viss typ av sociomatematisk norm, en norm som innebär att det inte krävs att elever och till viss del också lärare förklarar eller motiverar varför en lösning är på ett visst sätt.

Undersökningen PISA 2012 (OECD, 2014a) om femtonåringars digitala problemlösnings-förmåga har bäring även på matematisk problemlösning (Skolverket, 2014). I undersökningen presterade svenska elever generellt sett under OECD-genomsnittet. På uppgifter som ansågs mindre komplexa (av procedurkarakär) presterade svenska elever över OECD-genomsnittet. Uppgifter som svenska elever däremot hade svårt för, var enligt undersökningen, de mer komplexa uppgifterna (av problemlösningskaraktär). Dessa uppgifter vara sådana där det krävdes reflektion över strategival och hög grad av kontroll i genomförandet och konstruktion av nya lösningsmetoder. Reflektion och kontroll är två egenskaper som är viktiga delar i strategivalet och strategiimplementeringen när CMR används. Resultaten för en annan PISA-undersökning 2012 (OECD, 2014b), som undersökte femtonåringarnas matematikkunskaper visade svenska elevers förmåga att lösa uppgifter från enkla procedurer till konceptuellt krävande uppgifter. Svenska elevers resultat har fallit för alla typer av uppgifter och mest har resultaten fallit för svenska elever

vad det gäller förmågan att lösa de mer konceptuellt krävande uppgifterna jämfört med resultat från tidigare PISA-undersökningar. Att resultatet för svenska elevers matematikkunskaper fallit över hela linjen och mest vad det gäller lösandet av mer komplexa uppgifterna kan ses som att andelen lågpresterande elever ökat, samtidigt som andelen högpresterande elever har minskat. Det kan sägas finnas en koppling mellan detta resultat och resultaten från studie 1 och 2. Studie 1 visar att eleverna framförallt arbetade med proceduruppgifter och att CMR sällan användes för att lösa uppgifter samt att eleverna nästan uteslutande arbetade med enklare uppgifter. Resultat från studie 2 visar att det fanns en tendens att inte riktigt göra uppriktiga försök att arbeta med eller försöka lösa den mest komplexa uppgiften, detta trots att ingången till uppgiften var relativt enkel, vilket borde göra att eleverna skulle kunna påbörja uppgiften. Eleverna indikerade här en uppfattning av inre motivation att det var viktigt att prestera ett svar och eleverna använde sig därför av IR i syfte att kunna få till ett svar. Ett alternativt angreppssätt vore att använda sig av CMR genom att analysera uppgiften, koppla till relevanta matematiska begrepp och argumentera för strategier som skulle kunna leda till att lösa uppgiften eller en första del av uppgiften. Att CMR inte användes kan kopplas till uppfattningar om förväntningar på ämnet (att prestera svar) och på en uppfattning av osäkerhet. Att CMR inte användes kan tolkas som en ovana att arbeta med mer komplexa uppgifter där eleverna inte ser lösningen på en gång och som tar lite tid att lösa. Det skulle kunna vara så att de elever som var med i studie 1 och 2 har anammat en sociomatematisk norm som innebär att det inte finns en förväntan på matematikämnet att man arbetar med mer komplexa uppgifter och som tar lite längre tid att lösa.

En orsak, generellt sett till att elever i stor utsträckning har en undervisning som framförallt stödjer ett procedurinriktat lärande är att gymnasielärare i Sverige har låga kunskaper om vilka förmågor som eleverna ska utveckla (Skolinspektionen, 2010). Denna observation kan kopplas till resultat från Bergqvist et al (2010) som indikerade att vissa gymnasielärare ansåg att mer lågpresterande elever inte tillräckligt väl kan tillgodogöra sig andra kompetensaktiviteter än procedurhantering, och anpassade undervisningen efter detta. Enligt Skolinspektionens rapport har en knapp femtedel av lärarna goda kunskaper om de förmågor som eleverna ska utveckla. Trettiosex procent av lärarna bedömdes ha obefintliga kunskaper om förmågemålen, enligt samma undersökning. Läraren har en påvisad viktig roll (Fennema & Franke, 1992) och enligt Yackel och Cobb (1996) och Brousseau (1997) åvilar det läraren ett stort ansvar för vilka sociomatematiska normer som råder i klassrummet. För att lärarna ska kunna undervisa utifrån ett reformperspektiv behöver lärare rätt utbildning eller fortbildning. Enligt Hiebert (2003) behöver lärare, precis som elever, möjligheter till att lära sig för att kunna lära sig något. I

praktiken betyder det att lärare och lärarstuderande behöver få rätt förutsättningar för att fortbilda sig eller att utbilda sig i hur man undervisas en reforminriktad matematik. En annan orsak till att ett procedurinriktat arbetssätt är vanligt kan vara läroböckernas innehåll. Läroboken fungerar som en informell läroplan och studie 3 visade att uppgifterna i läroböckerna i stor utsträckning kan lösas med algoritmer som finns i läroboken. Lärobokens centrala position och att den ger användandet av procedurer stor plats kan bidra till en procedurinriktad undervisning. Till detta kan läggas att studie 3 visade att andelen CMR-uppgifter inte är jämnt fördelade inom läroböckernas olika avsnitt. Om man som elev endast gör de uppgifter som är i början av läroboksavsnitten leder detta till begränsade möjligheter till att lära sig använda CMR. Om eleven dessutom inte använder sig av CMR för att lösa de relativt få CMR-uppgifter och istället, i låg eller hög utsträckning, låter sig guidas till en lösning minskar elevens möjligheter till att lära sig att använda sig av CMR ytterligare. Resultat från studie 1 visade att användningen elevguidat AR, inte var en ovanlig strategi för att lösa CMR-uppgifter. Resultaten från studie 3 visade att fördelningen mellan uppgifter som krävde IR för att lösas respektive CMR för att lösas var cirka 80 % respektive 20 % i samtliga analyserade läroböcker. Detta är ett resultat som ligger nära det resultat Lithner (2004) visade vid läroboksanalys av en universitetsmatematikbok. Resultaten från dessa två studier tillsammans indikerar hur djupt rotad uppbyggnaden av en lärobok är med avseende på fördelningen mellan rutinuppgifter (med fokus på procedurell kunskap) som det endast krävs användandet av IR för att lösa och icke-rutinuppgifter (med fokus på konceptuell kunskap) som det krävs användandet av CMR för att lösa.

En anledning till att vissa elever är sämre på problemlösning är att de under många år inte fått utveckla de strategier som behövs för att bli goda problemlösare (Hegarty, Mayer & Monk, 1995). Lithner och Palm (2010) för fram en hypotes om varför en del elever verkar hänga med i undervisningen många år i skolan, men tillslut verkar tappa kontakten med matematiken. En elev skulle till exempel kunna säga: ”På låg-, mellan- och högstadiet hade jag lätt för matte, men nu på gymnasiet fattar jag ingenting”, om man tänker sig att undervisningen under skolgången i stor utsträckning byggt på ytligt grundade resonemang. På lågstadiet var procedurerna få och en strategi som byggde på ytliga igenkänningsegenskaper fungerade relativt friktionsfritt. Ju högre eleven kommit i skolsystemet desto fler procedurer har eleven behövt hålla reda på, och till sist har de blivit för många. Utan ett tillräckligt nätverk av kunskap har inte eleven kunnat koppla procedurerna till varandra och matematiken har till sist kommit att framstå som obegriplig.

5.2 Implikationer för undervisningen

I detta och i kommande avsnitt 5.3 kommer det pekas på implikationer utifrån resultaten i avhandlingen. Implikationerna förs av en argumentation från undertecknad för en förändring av matematikundervisningen och av läroböckernas upplägg och innehåll.

Sociomatematiska normer och elevers uppfattningar kan förändras (Stylianides & Stylianides, 2014; Yackel & Rasmussen, 2002). Elevers och lärares uppfattningar behöver förändras för att en reforminriktad matematik ska kunna få genomslag (McLeod, 1992). McLeod (1992) och Ball och Bass (2003) ger stöd åt en av slutsatserna från studie 2: att elevernas uppfattningar behöver ändras och att det verkar krävas mer än att ge eleverna uppgifter som ger tillfälle att resonera matematiskt. Ball och Bass argumenterar för att det inte heller räcker med att säga till elever att berätta hur de tänker, då även de sociomatematiska normerna som styr undervisningen måste vara sådana som stöttar en undersökande undervisning. Utmaningen för läraren är att skapa förutsättningar för en undervisning som präglas av sociomatematiska normer som stöttar möjligheter till lärande av att använda sig av CMR. Läraren kan initiera en omförhandling av de sociomatematiska normerna genom uttryckliga diskussioner. Diskussionerna behöver sedan också åtföljas av handling i enlighet med det överenskomna (Yackel & Rasmussen, 2002). Enligt Schoenfeld (2012) karaktäriseras en produktiv undervisning och som främjar utveckling av elevers matematiska förmågor av följande egenskaper, som alla har en grund i ett socialt samspel:

1. Problematisering: lärmiljön präglas av ett undersökande arbetssätt, till skillnad från att eleverna lär passivt.
2. Agens och befogenhet: eleverna gör matematiken till sin egen och upplever att de själva är avsändaren till ”nya” resultat.
3. Ansvar: eleverna tar tillsammans med läraren ett ansvar för att det som produceras är i samklang med ämnet. Eleverna görs medansvariga för den matematik som produceras.
4. Resurser: eleverna har erforderliga kunskaper för att kunna angripa den matematik som ska utföras.

Nedan följer ett påhittat exempel på hur en lärare kan initiera en förändrad norm för vad som ska anses vara en acceptabel förklaring genom en dialog med eleverna om en uppgift och dess lösning.

Uppgiften: Löneutvecklingen under de fem första åren för nyutbildade civilingenjörer bedöms följa $y = 30800 \cdot 1{,}039^x$, där y är den nya månadslönen i kronor och x är antal år efter anställningens början. Vilken är ingångslönen för nyutbildade civilingenjörer?	
Elev 1	30800
Lärare	Berätta hur du kom fram till det?
Elev 1	Det är talet, startvärdet som står innan talet med exponenten.

Elev 1:s förklaring är helt procedurinriktad och saknar viktiga referenser till relevanta begrepp. Men eleven ifråga anser kanske att frågan är besvarad. Läraren kan använda detta tillfälle till att initiera ett förändrat fokus, bort från procedurella förklaringar mot konceptuella förklaringar (Yackel & Rasmussen, 2002). Dialogen mellan läraren och eleven forsätter:

Läraren	Om jag förstår dig rätt menar du man multiplicerar 30800 med den efterföljande faktorn för att få fram lönen efter ett år?
Elev 1	Mmm
Lärare	Vad säger det oss? Vad betyder det? Hur kan man med hjälp av detta veta att 30800 är lönen civilingenjören har i ingångslön? Vad innebär 1,039?
Elev 2	Vet inte men 1,039 är förändringsfaktorn.
Lärare	Vad betyder då att multiplicera 30800 med förändringsfaktorn 1,039 upphöjt i x, x som är antal år efter 2014?
Elev 2	Det innebär att man får fram lönen för lika många efter 2014, som värdet på x är.
Lärare	Så om man sätter in $x = 1$ beräknar man lönen för 2015. Hur kan man då beräkna ingångslönen, lönen 2014?
Elev 1	Genom att sätta $x = 0$.
Lärare	Precis genom att sätta $x = 0$ beräknar vi när det har gått noll år $1{,}039^0 = 1$, det vill säga att det inte sker någon löneökning. Det har ju inte gått någon tid sedan civilingenjören fick sin ingångslön.

I dialogen ovan nöjer sig inte läraren förrän eleverna är framme vid en förklaring till *varför* 30800 kronor är ingångslönen. Det sista läraren säger är inte bara ett bekräftande av det som elev 1 har kommit fram till utan också ett tillfälle för eleverna att omvärdera sina uppfattningar om vad som är en meningsfull matematisk förklaring genom att läraren själv ger en sådan förklaring (Yackel & Rasmussen, 2002). Hiebert och Carpenter (1992) menar att kopplingar mellan olika delar av matematiken byggs upp genom att läraren visar på dessa kopplingar också med hjälp av olika representationsformer. Rika kopplingar till olika koncept, bidrar till en konceptuell förståelse. Detta är i linje med att man bara kan lära sig det man har möjlighet att lära sig. Hiebert och Grouws (2007) menar att uppgifter som ligger nära vad eleverna klarar av även stimulerar deras utveckling av sin konceptuella kunskap. Lärmiljön bör alltså vara sådan att eleven går lite längre än det omedelbart uppenbara, vistas i den proximala zonen (Vygotskij, 1978). I studie 2 observerades att en av eleverna använde sig av CMR upprepade gånger för att lösa uppgifter så länge en lösning var inom räckhåll och behovet av ansträngning var relativt lågt. När eleven arbetade med den svåraste uppgiften gav han upp och valde hellre att besvara uppgiftens fråga

med hjälp av att använda sig av IR och ange en uppenbart inkorrekt lösning, istället för att komma en bit på väg mot en lösning med hjälp av att använda sig av CMR. Resultat från studie 2 visade även att eleverna använde sig av IR när de var osäkra, detta är i linje med tidigare forskning (Schoenfeld, 1992). Ett alternativt sätt för en elev att angripa en uppgift vore att låta användandet av CMR vara det primära valet när man ska lösa en uppgift där man inte omedelbart kan avgöra hur man ska lösa den. Genom att använda sig av sig av CMR skulle eleven förankra sina argument i matematiken och borde på så sätt uppleva säkerhet snarare än osäkerhet då CMR används för att lösa en uppgift.

Enligt Ball och Bass (2003) kan en lärare lägga grunden till en undervisning som stöttar lärandet av matematiska resonemang genom att se till att tre förutsättningar är uppfyllda. För det första ska de uppgifter som eleverna ska arbeta med vara tillgängliga för alla elever i den meningen att alla elever förstår dem. På så sätt skapas en yta för att genomföra matematiska resonemang kollektivt. För det andra ska det finnas en överenskommelse – inte nödvändigtvis uttalad – i klassen om vad som är matematiskt accepterat, vilka sociomatematiska normer som råder. För det tredje, ett praktiserande av uppgiftslösning i klassrummet genom att eleverna kommunicerar sina lösningar med lärare och de andra eleverna. Här ingår också att utvärdera andra elevers förslag. Arbetet ska också dokumenteras i elevernas böcker som framtida referens och på tavlan för den allmänna diskussionen. Att uppgifterna ska vara tillgängliga för eleverna innebär att alla ska ha förutsättningar att klara av dem., Eleverna ska ha möjligheten att lära sig det avsedda (Hiebert, 2003), samtidigt som de ska behöva göra en viss ansträngning (Hiebert & Grouws, 2007) för att klara av uppgiften. De sociomatematiska normer som råder i klassrummet ska vara sådana att de innebär att man är överens om vad som krävs för att till exempel en förklaring och motivering ska vara acceptabel och gångbar. Genom att diskutera lösningar tillsammans tillämpas och utmejslas de sociomatematiska normerna. Genom att värdera olika lösningar, som gärna får innehålla olika representationsformer stärks den konceptuella förståelsen (Hiebert & Carpenter, 1992). Data från studie 1 visade att en lärmiljö som präglas av lärande genom samarbete inte uppstår av sig själv bara för att elever arbetar ihop. Enligt Webb och Mastergeorge (2003) krävs för det första att eleverna ställer precisa frågor till varandra när de ger hjälp till en uppgift, för det andra att eleven som behöver hjälp fortsätter att fråga tills denne konceptuellt förstår förklaringen och för det tredje att förklaringen sedan tillämpas på den uppgiften, där frågeställaren ges tillfälle att applicera förklaringen.

Att arbeta kollektivt i helklass är tvärs emot den trend som har rått i Sverige de senaste två decennierna. Istället har en stark trend varit att arbetet ska individualiseras (Skolverket, 2009), det har inom matematikundervisning kommit att innebära att läraren använder största delen eller hela

lektionen till att hjälpa elever individuellt (Lithner & Palm, 2010). Fördelen med denna undervisningsform är enligt Lithner och Palm att läraren bättre kan möta varje elev på dennes nivå. En nackdel är enligt Lithner och Palm att läraren får väldigt lite tid med varje elev vilket kan leda till att lärarguidat AR används för att korta tiden med varje elev och på så sätt kunna assistera fler elever. Enligt Schoenfeld (1992) kan en lärare istället i helklass föra en diskussion och en undervisning enligt Tabell 4 som fokuserar på att ge möjligheter att träna problemlösning och därmed stöttas lärandet av CMR.

Tabell 4
En undervisning som stöttar utvecklandet av problemlösning (Schoenfeld, 1992)

	Lärararens undervisning	Syfte
	Före	
1	Läs uppgiften – diskutera ord eller fraser som eleverna inte förstår	Illustrerar vikten av att läsa noggrant
2	Använd helklassdiskussioner för att fokusera på vikten av att förstå uppgiften	Fokus på viktig data, tydliggör processen
3	(Valbart) Helklassdiskussion om möjliga strategier för att lösa en uppgift	Få fram idéer till möjliga lösningsalternativ till uppgiften
	Under	
4	Observera och fråga eleverna för att avgöra var de befinner sig	Diagnostisera styrkor och svagheter
5	Ge ledtrådar om nödvändigt	Hjälpa elever förbi blockeringar
6	Ge fördjupningar av uppgiften vid behov	Utmana elever som är klara tidigt att generalisera
7	Se till att elever som får en lösning att ”besvara frågan”	Kräver att elever går igenom sin lösning och säkerställer att den hänger ihop
	Efter	
8	Visa och diskutera lösningar	Visa och namnge olika strategier
9	Relatera till tidigare lösta uppgifter eller låt elever lösa utvecklade uppgifter	Visa på generella tillämpningar av problemlösningsstrategier
10	Diskutera speciella särdrag, till exempel figurer	Visa på hur särdrag kan påverka hur man tar sig an uppgiften

Elever ska inom ramen för undervisningen också bjudas rika möjligheter att utveckla procedur förmåga, liksom andra matematiska förmågor. Ett utvecklande av procedurell förmåga kan gå hand i hand med utvecklandet av och med hjälp av elevers konceptuella kunskaper (Gravemeijer & van Galen, 2003). Enligt Gravemeijer och van Galen sker det genom att lärandet av olika procedurer tar sin utgångspunkt i och knyter till konceptuell förståelse. På detta sätt kan elever utveckla ett proceptuellt (Gray & Tall, 1994) förhållande till den studerade matematiken, det vill säga där eleverna ser procedurer och koncept som två sidor av samma mynt.

För att förändra sociomatematiska normer krävs förmodligen flera samverkande satsningar. Bergqvist et al. (2010) drar slutsatsen att svenska gymnasieelever ”bör erbjudas mer omfattande, bättre utvecklade och mer systematiska möjligheter att engagera sig i [förmåge]relaterade aktiviteter som går utöver procedurhantering.” (s. 59). Enligt Bergqvist et al. kan detta delvis nås genom att målen för undervisningen klargörs och att målen sedan används som vägledning för att

utveckla undervisningen. Det finns goda exempel på gymnasielärare som ger eleverna bra förutsättningar att utveckla sina matematiska förmågor (Bergqvist et al., 2010). Enligt Skolinspektionen (2010) är hög kompetens hos lärarna vad det gäller styrdokumenten och en medveten satsning på kompetensutveckling inom matematikdidaktik bidragande faktorer till att gymnasielärarna kan ge en god undervisning.

5.3 Implikationer för läroboken och dess användning

Studie 3 visade att den svenska läroboken, liksom läroböckerna från de andra länderna i studien inte på ett tydligt sätt harmonierar med en reforminriktad matematik. Det var en tydlig övervikt av proceduruppgifter, som endast kräver ett användande av textguidat AR för att lösas, jämfört med uppgifter som kräver användning av CMR. En väg att gå när det gäller undervisningen är därför att läroböckerna kompletteras med andra uppgifter som ger eleverna större möjligheter att lära sig att använda CMR (Bergqvist et al., 2010). Bergqvist et al. (2010) ställer sig frågan om den procedurinriktade undervisning kanske inte beror på att undervisningen är läroboksbunden i sig, utan att läroböckerna inte är tillräckligt bra utformade för att stötta en reforminriktad undervisning. Både internationell forskning (Valverde et al., 2002) och nationell forskning (Bergqvist et al., 2010) pekar på behovet av stora förändringar av läroböckernas innehåll för att möta behovet av att utveckla de matematiska förmågorna hos eleverna. Johansson (2006) har undersökt svenska matematiklläroböcker för grundskolan utgivna under perioden 1979 till 2001, en period där grundskolan två gånger fått förändrade läroplaner. Johanssons studie visade att läroböckernas innehåll inte återspeglade läroplanernas innehåll. Dessutom förändrades inte läroböckernas innehåll nämnvärt när det skedde läroplansreformer. Johanssons resultat indikerar tillsammans med Lithners (2004) studie gällande universitetsläroböcker och med resultatet från studie 3 att läroböckerna i Sverige inte är drivande i formandet en reforminriktad matematik.

Utifrån den uppgiftskategorisering som gjorts i studie 1 var det få uppgifter som eleverna arbetade med som krävde CMR för att lösas. Studien visade också att många av de uppgifter som eleverna arbetade med och som de i princip borde ha tillgång till lösningsmetoder för inte löstes med bekant AR. Att uppgifterna inte löstes med bekant AR antyder att eleverna inte kom ihåg eller aldrig kunnat behövd lösningsmetod. Dessa uppgifter som saknar bekant lösningsmetod är per definition CMR-uppgifter för just den eleven, även om det vid en kategorisering gjorts en annan bedömning. Att elever inte valde att använda sig av CMR för att lösa dessa uppgifter, kan ses som förlorade möjligheter att lära sig att använda CMR. Istället använde eleverna andra resonemang för att lösa uppgifterna, framförallt elevguidat AR. En förklaring till detta beteende skulle kunna ges utifrån en del av resultaten från studie 2 där en av eleverna indikerade uppfattningar som kunde kopplas till att eleven föredrog att låta sig guidas av sin klasskamrat

(elevguidat AR) snarare än att använda sig CMR. Förändrade sociomatematiska normer som innebär att användandet av CMR är ett förstahandsval när eleven inte på en gång ser vilken lösningsmetod som ska användas skulle göra att denna elev, som inte har tillgång till så många algoritmer skulle få fler möjligheter till att lära sig använda CMR via läroboken.

Resultatet från studie 3 visar att fördelningen av IR- respektive CMR-uppgifter var ganska lika i alla länders läroböcker. Alla de länder som var representerade i läroboksstudien har inte ingått i de senaste TIMSS- eller PISA -underökningarna (IEA, 2012; OECD 2014a, 2014b). De länder som finns representerade i dessa undersökningar är också jämförbara med Sverige med avseende på att alla är mer eller mindre väl utvecklade ekonomier med relativt väl utbyggda utbildningssystem (Skolverket, 2012b). Att alla dessa länders (Australien, Finland, Irland, Kanada, Singapore, och USA) femtonåringar presterade bättre än svenska jämnåriga i PISA:s senaste mätningar (OECD 2014a, 2014b) med avseende på matematik och digital problemlösningsförmåga indikerar att det finns andra orsaker än lärobokens innehåll som inverkar på vad elever lär sig. Vilken typ av uppgifter som man arbetar med i undervisning har visats påverka lärmiljön (Hiebert & Wearne, 1993), men också hur elever och lärare arbetar med uppgifter (Stein, Remillard & Smith., 2007). Elevernas möjligheter att lära sig och utveckla sina matematiska förmågor är i stor utsträckning beroende av läraren (Henningsen & Stein, 1997; Stein et al., 2007; Stein, Grover, & Henningsen, 1996). Hur uppgifterna sedan används har stor betydelse för vilka möjligheter till lärande uppgifterna ger (Stien et al., 2007). Läraren har stora möjligheter att påverka lärmiljön (Brousseau, 1997) och att uppgifternas hela potential används som verktyg för lärande (Stein et al., 1997). Stein et al. anger att för att uppgifterna ska ge eleverna så mycket som möjligt behöver läraren ställa frågor som bygger upp och stödjer elevernas fortsatta engagemang med uppgiften och motiverar och driver eleverna att förklara och motivera sitt tänkande. Det motsatta är att läraren enbart förväntar sig ett korrekt svar eller att läraren ”tar över” när det gäller mer utmanande delarna av en uppgift. Att ställa rätt frågor hjälper eleverna att bygga konceptuell förståelse. Konstruktionen av själva uppgiften har även betydelse för vilken typ av lärande som kan ske när elever arbetar med uppgiften (Stein & Lane, 1996). Uppgifter som kräver multipla strategier, multipla representationsformer och förklaringar leder i högre utsträckning till konceptuell förståelse än uppgifter som är procedurartade, endast kräver en strategi, en representationsform och med lite eller inget krav på att kommunicera matematiken (Stein & Lane, 1996). Dessa resultat är i enighet med Hiebert och Wearnes (1993) resultat som innebär att uppgiftens natur och nivå tillsammans med lärmiljön spelar en avgörande roll i klassrummet för elevernas möjligheter att lära sig att lösa problem och resonera matematiskt.

5.4 Fortsatt forskning

Det är långt ifrån klarlagt vad som är de bakomliggande förutsättningarna för att skapa sociomatematiska normer och uppfattningar som skapar goda lärmiljöer på gymnasiet och hur man metodmässigt kan studera dessa (Francisco, 2013; Lester, 2002; Schoenfeld, 1992). Att undersöka hur de sociomatematiska normerna konstitueras i klassrum där elever är del av en rik matematikundervisning är ett sätt att få syn på vilka uppfattningar och attityder som dessa elever utvecklar (Yackel & Cobb, 1996). Därmed skulle framtida forskning ytterligare kunna kartlägga bakomliggande förutsättningar för eftersträvansvärda sociomatematiska normer för att sedan föreslå hur man i praktiken skapar framgångsrika lärmiljöer.

Ett annat spår för fortsatt forskning är att genom designforskning undersöka vilken typ av undervisning som triggar och stöttar användandet av CMR. Jonsson et al. (2014) har inom ramen för ett designforskningsprojekt, Learning by Imitative or Creative Reasoning (LICR) (gjord i laboratoriemiljö), på väg i riktningen att kunna säga hur en CMR-inriktad undervisning bör vara. Att utveckla resultaten från denna studie och utföra studier i klassrum är angeläget genom att det skulle kunna ge fler och tydligare resultat rörande hur undervisningen ska utformas för att stödja lärandet av CMR. Fortsatt forskning pågår inom ramen för LICR-projektet (Lithner, personlig kommunikation, 16 januari 2015).

Det finns skäl att kritiskt granska hur läroböcker idag är utformade och hur de i framtiden bör utformas för att på bästa sätt ge möjligheter till att lära sig använda CMR. Det första skälet till detta är att studie 1 visade att eleverna i stort sett bara använde läroboken som en källa för de uppgifter som de arbetar med och inte i någon nämnvärd utsträckning för att fördjupa sig i teori och lösta exempel. Det andra skälet, med stöd från resultatet från studie 3 var att CMR-uppgifterna inte var jämnt fördelade i läroboken och eventuellt underrepresenterade överhuvudtaget.

5.5 Ett resonerande klassrum

En vision inför framtiden är en skola vars matematikundervisning sker i resonerande klassrum. I ett resonerande klassrum arbetar elever och lärare i en lärmiljö som präglas av en undersökande undervisning. Det innebär att eleverna får arbeta med uppgifter som öppnar upp för samtal och problemlösning. Var och en känner ansvar för sitt lärande. Eleverna har en agens och är auktoriteter i sitt lärande och på så sätt gör varje elev matematiken till sin. Klassrummet präglas av sociomatematiska normer som innebär att elever och lärare ger matematiskt förankrade argument för sina uttalanden och lösningsförslag. I ett resonerande klassrum ska en uppfattning om osäkerhet inte leda till att eleven försöker lösa en icke-rutinuppgift genom att använda sig av IR. Istället har eleven ett proceptuellt förhållningsätt som gör att eleven kan använda sig av sin

procedurella och konceptuella förståelse i varje uppgiftssituation. Läraren i ett resonerande klassrum arbetar utifrån innehålls- och komptensmål och varje elev utmanas både vad det gäller innehåll och förmågor, allt med en strävan mot att varje elev ska nå sin fulla potential.

Referenser

Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P., & Heikne, H. (2011). *Matematik 5000. kurs 1b grön, lärobok* (1:a utg.). Stockholm: Natur & kultur.

Alfredsson, L., Erixon, P., & Heikne, H. (2011). *Matematik 5000. kurs 1a gul, lärobok* (1:a utg.). Stockholm: Natur & kultur.

Ball, D., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (red.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 27-44). Reston, VA: National council of teachers of mathematics.

Berger, P. (1998). Exploring mathematical beliefs – the naturalistic approach. I M. Ahtee, & E. Pehkonen (red.), *Research Methods in Mathematics and Science Education* (s. 25-40). Helsingfors: Department of Teacher Education, Research report 185.

Bergqvist, E., Bergqvist, T., Boesen, J., Helenius, O., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2010). *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet. gymnasieskolan hösten 2009*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning.

Bergqvist, T., Lithner, J., & Sumpter, L. (2008). Upper secondary students' task reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(1), 1-12.

Bergqvist, T., & Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(2), 252-269.

Bjuland, R., Cestari, M. L., & Borgersen, H. E. (2008). The interplay between gesture and discourse as mediating devices in collaborative mathematical reasoning: A multimodal approach. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 10*(3), 271-292.

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 41-62.

Boaler, J. (2012). From psychological imprisonment to intellectual freedom - the different roles that school mathematics can take in student's lives. Paper presenterat vid *the 12th International congress on mathematical education*. Seoul, Sydkorea.

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 72-87.

Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics, 7*5(1), 89-105.

Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity: Comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact*. (Doktorsavhandling, Umeå universitet). Hämtad från http://umu.diva-portal.org/smash/get/diva2:144670/FULLTEXT01.pdf.

Boren, M. T., & Ramey, J. (2000). Thinking aloud: Reconciling theory and practice. *IEEE Transactions on Professional Communication, 4*3(3), 261-278.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology,* 3(2), 77-101.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics didactique des mathématiques, 1970-1990* [elektronisk resurs]. Redigerad och översatt av N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield. Dordrecht: Kluwer.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal, 2*9(3), 573-604.

Cox, W. (1994). Strategic learning in a-level mathematics*? Teaching Mathematics and its Applications, 1*3(1), 11-21.

Denzin, N. K. (1989). *The research act: A theoretical introduction to sociological methods* (3:e uppl.). Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.

Doyle, W. (1983). Academic work. *Review of Educational Research, 53*(2), 159-199.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist, 2*3(2), 167-180.

Engelbrecht, J., Bergsten, C., & Kågesten, O. (2009). Undergraduate students' preference for procedural to conceptual solutions to mathematical problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 4*0(7), 927-940.

Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1993). *Protocol analysis: Verbal reports as dat*a (rev. uppl.). Cambridge, Mass.; London: MIT Press.

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. I D. A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learnin*g (s. 147-164). New York: Macmillan.

Francisco, J. M. (2013). The mathematical beliefs and behavior of high school students: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior, 3*2(3), 481-493.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of belief. I G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (red.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education*? (s. 39-57). Dordrecht: Kluwer.

Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: Affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics, 70*(1), 71-90.

Goldin, G. A. (2002). Affect, meta-affect, and mathematical beliefs structures. I G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (red.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education*? (s. 59-72). Dordrecht: Kluwer.

Gravemeijer, K., & van Galen, F. (2003). Facts and algorithms as products of students' own mathematical activity. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (red.), *A research companion to principles and standards for school mathematic*s (s. 114-122). Reston, VA: National council of teachers of mathematics.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 2*5(2), 116-40.

Halldén, O., Scheja, M., & Haglund, L. (2008). The contextuality of knowledge: An intentional approach to meaning making and conceptual change. I S. Vosniadou (red.), *International handbook of research on conceptual chang*e (s. 509-532). New York: Routledge.

Hegarty, M., Mayer, R., & Monk, C. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology, 8*7(1), 18-32.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 524-549.

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM standards. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (red.), *A research companion to principles and standards for school mathematic*s (s. 5-23). Reston, VA: National council of teachers of mathematics.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. I D. A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learnin*g (s. 65-97). New York: Macmillan.

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. I F. K. Lester (red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National council of teachers of mathematic*s (s. 371-404). Charlotte, NC: Information age pub.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I J. Hiebert (red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematic*s (s. 1-27). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal, 3*0(2), 393-425.

International association for the evaluation of educational achievement (IEA) (2012). *TIMSS 2011: International results in mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Jablonka, E., & Johansson, M. (2010). Using texts and tasks: Swedish studies on mathematics textbooks. I B. Sriraman (red.), *First sourcebook on Nordic research in mathematics education: Norway, Sweden, Iceland, Denmark, and contributions from Finland* (s. 363-372). Charlotte: Information age pub.

Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbook: A classroom and curricular perspective* (Doktorsavhandling, Luleå tekniska universitet). Hämtad från http://epubl.ltu.se/1402-1544/2006/23/LTU-DT-0623-SE.pdf.

Jonsson, B., Norqvist, M., Lithner, J., & Liljekvist, Y. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 3*6, 20-32.

Kajander, A., & Lovric, M. (2009). Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 4*0(2), 173-181.

Leatham, K. R. (2006). Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 9(1), 91-102.

LeCompte, M. D., & Goetz, J. P. (1982). Problems of reliability and validity in ethnographic research. *Review of Educational Research, 52*(1), 31-60.

Lester, F. K. (2002). Implications of research on students' beliefs for classroom practice. I G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (red.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (s. 345-353). Dordrecht: Kluwer.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics, 5*2(1), 29-55.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(4), 405-427.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.

Lithner, J., & Palm, T. (2010). Learning difficulties and mathematical reasoning. I B. Sriraman (red.), *First sourcebook on Nordic research in mathematics education: Norway, Sweden, Iceland, Denmark, and contributions from Finland* (s. 283-298). Charlotte: Information age pub.

Love, E., & Pimm, D. (1996). 'This is so': A text on texts. I A. J. Bishop (red.), *International handbook of mathematics education.* Del 1 (s. 371-409). Dordrecht: Kluwer.

Långström, P., & Lithner, J. (2008). Svenska gymnasieelevers matematiska resonemang och hjälpprocesser i klassrumsmiljö. *Matematikelevers strategier för fel- och hjälpsökning.* (Licentiatavhandling, Umeå universitet) (s. 51-102). Umeå: Institutionen för matematik och statistik, Umeå universitet.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 575-596). New York, NY: Macmillan publishing co, Inc.

McLeod, D. B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 637-647.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Olson, J. F., Preuschoff, C., Erberber, E., … Galia, J. (2008). *TIMSS 2007 International mathematics report – Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades.* International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Chestnut Hill, MA: Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center.

National council of teachers of mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematic*s. Reston, VA: National council of teachers of mathematics.

National council of teachers of mathematics (NCTM) (u.å.). *Executive summary, principles and standards for school mathematics.* Hämtad från http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/12752_exec_pssm.pdf

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 4*0(1), 1-24.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish kom project. *Mediterranean Conference On Mathematical Education; 3rd 2003*, 115-126.

Nunes, T., Bryant, P., Barros, R., & Sylva, K. (2012). The relative importance of two different mathematical abilities to mathematical achievement. *British Journal of Educational Psychology, 82*(1), 136-156.

Op 'T Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics-related beliefs. I G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (red.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (s. 13-37). Dordrecht: Kluwer.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2014a). *PISA 2012 results: creative problem solving: students' skills in sackling real-life problems (volume V)* Paris; Organisation for Economic Co-operation and Development.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2014b). *PISA 2012 results: What students know and can do: Wtudent performance in mathematics, reading and science (volume I).* Reviderad upplaga.; Paris; Organisation for Economic Co-operation and Development.

Palm, T., Boesen, J., & Lithner, J. (2011). Mathematical reasoning requirements in Swedish upper secondary level assessments. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 13*(3), 221-246.

Pettersson, K. (2008). *Algoritmiska, intuitiva och formella aspekter av matematiken i dynamiskt samspel: En studie av hur studenter nyttjar sina begreppsuppfattningar inom matematisk analys* (Doktorsavhandling, Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet). Hämtad från http://www.math.chalmers.se/Math/Research/Preprints/Doctoral/2008/1.pdf

Rezat, S. (2009). The utilization of mathematics textbooks as instruments for learning. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME6, Lyon France*. Hämtad från http://www.inrp.fr/editions/cerme6.

Robson, C. (2011). *Real world research* (3:e uppl.). West Sussex, Storbritannien: John Wiley & Sons Ltd.

Schmidt, W. H. (2012). Measuring content through textbooks: The cumulative effect of middle-school tracking. I G. Gueudet, B. Pipin & L. Trouche (red.), *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* [elektronisk resurs] (s. 143-160). New York: Springer.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., & Wolfe, R. G. (2001). *Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco, Calif.: Jossey-Bass.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic press.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. I J. F. Voss, D. N. Perkins & J. W. Segal (red.), *Informal reasoning and education* (s. 311-343). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I D. A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 334-370). New York, NY: Macmillan publishing co, Inc.

Schoenfeld, A. H. (2002). Research methods in (mathematics) education. I L. D. English (red.), *Handbook of international research in mathematics education* (s. 435-487). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Schoenfeld, A. (2012). Problematizing the didactic triangle. *ZDM – International Journal on Mathematics Education, 44*(5), 587-599.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Silver, E. A. (1986). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. I J. Hiebert (red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 181-198). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher, 26*(3), 9-15.

Skolinspektionen (2010). *Undervisningen i matematik i gymnasieskolan*. (Nr. 2010:13). Stockholm: Skolinspektionen.

Skolinspektionen (2014). *Från huvudmannen till klassrummet - tät styrkedja viktig för förbättrade resultat*. Stockholm: Skolinspektionen.

Skolöverstyrelsen. (1970). *Läroplan för gymnasieskolan. 2, supplement. treårig ekonomisk linje; treårig humanistisk linje; treårig naturvetenskaplig linje; treårig samhällsvetenskaplig linje; fyraårig teknisk linje*. Stockholm: Svenska utbildningsförlaget AB.

Skolverket (2009). *Vad påverkar resultaten i svensk grundskola?: Kunskapsöversikt om betydelsen av olika faktorer: Sammanfattande analys*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2012a). *Upper secondary school 2011* [elektronisk resurs]. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2012b). *TIMSS 2011: Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2014). *PISA 2012: Digital problemlösningsförmåga hos 15-åringar i ett internationellt perspektiv*. (Nr. 406). Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (u.å.a). *Ämne – matematik*. Hämtat från http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat?tos=gy&subjectCode =MAT&lang=sv.

Skolverket. (u.å.b). *Ämne - matematik*. Hämtad från http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/kursplaner-fore-2011/subjectKursinfo.htm?subjectCode=MA&lang=sv.

Skolverket. (u.å.c). *Om ämnet matematik*. Hämtad från http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat?tos=gy&subjectCode=mat&lang=sv.

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research & Evaluation, 2*(1), 50.

Stein, M., Remillard, J. T., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. I F. K. Lester (red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National council of teachers of mathematic*s (s. 319-369). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 455-488.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2014). Impacting positively on students' mathematical problem solving beliefs: An instructional intervention of short duration. *Journal of Mathematical Behavior, 33*(2014), 8-29.

Sumpter, L. (2013). Themes and interplay of beliefs in mathematical reasoning. *International journal of Science and Mathematics Education, 11*(5), 1115-1135.

Szabo, A., Larson, N., Viklund, G., Duåker, D., & Marklund, M. (2011). *Matematik origo. 1b* (2:a uppl.). Stockholm: Bonnier utbildning.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1993). Solving everyday problems in the formal setting: An empirical study of the school as context for thought. I S. Chaiklin, & J. Lave (red.), *Understanding practice: Perspectives on activity and context* (s. 327-342). New York, NY: Cambridge University Press.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. I A. J. Bishop (red.), *International handbook of mathematics education.* Del 1. (s. 289-325). Dordrecht: Kluwer.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. I D. A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 127-146). New York: Macmillan.

Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation, 31*(4), 315-327.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbook*s. Dordrecht: Kluwer.

Verschaffel, L., Greer, B., & Corte, E. d. (2000). *Making sense of word problem*s. Lisse, Nederländerna; Exton, PA: Swets & Zeitlinger publishers.

Vetenskapsrådet. (2011). *God forskningssed.* (Nr. 1:2011). Stockholm: Vetenskapsrådet.

Vygotskij, L. S. (1978). Interaction between learning and development. I I. M. Cole, & V. John-Stiener (red.), *Mind and society* (s. 79-91). Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Webb, N. M., & Mastergeorge, A. (2003). Promoting effective helping behavior in peer-directed groups. *International Journal of Educational Research, 39*(1-2), 73-97.

Yackel, E., & Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. I G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (red.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education*? (s. 313-330). Dordrecht: Kluwer.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (red.), *A research companion to principles and standards for school mathematic*s (s. 227-236). Reston, VA: National council of teachers of mathematics.

Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect in mathematics education: an Introduction. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 113-121.

Österholm, M. (2009). Beliefs: A theoretically unnecessary construct? I V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (red.), *Proceedings of CERME6, Lyon France*. Hämtad från http://www.inrp.fr/editions/cerme6.

DEL II

STUDIERNA

Papers

The articles associated with this thesis have been removed for copyright reasons. For more details about these see:
http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:liu:diva-117759