Licentiatuppsats

**Lärares och elevers användande av laborativt
material i bråkundervisningen i skolor 4-6**

- Vad görs möjligt för eleverna att erfara?

Cecilia Sveider

Institutionen för beteendevetenskap och lärande
Linköpings universitet
LiU-PEK-R-264
Januari 2016

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Institutionen för beteendevetenskap och lärande
LiU-PEK-R-264

ISBN: 978-91-7685-827-1

Linköpings universitet
Institutionen för beteendevetenskap och lärande
SE-581 83 Linköping, Sweden
Tel 013-28 10 00
Tryck: Linköpings universitet, LiU-Tryck 2016

Förord	5
Bakgrund.....	5
Syfte och frågeställningar	7
En matematikdidaktisk studie.....	8
Teoretiska utgångspunkter	10
Variationsteorin	10
Urskiljning, variation och samtidighet	10
Lärandeobjekt, kritiska aspekter och variationsmönster	12
Användningen av variationsteorin i denna studie	16
Matematikundervisning med fokus på tal i bråkform och laborativt material.....	17
Centralt innehåll inom skolmatematiken.....	17
Elevers kunskaper om tal i bråkform.....	18
Laborativt material	24
Olika typer av laborativt material	26
Argument för laborativt material i matematikundervisningen	28
Olika arbetssätt med laborativt material.....	33
Metod.....	35
Studiens design.....	35
Tillgång till fältet.....	35
Urval	35
Datainsamling.....	37
Datainsamlingsmetod	38
Bearbetning av data.....	38
Transkribering av data	38
Analys av data	40
Metoddiskussion.....	42
Resultat.....	45
Bråk som del av helhet.....	45
Bråkdelarna som ingår i en helhet måste vara lika stora	46
Indelning av en helhet och hur bråkdelarna placeras i helheten	50
Nämnamn ger namn åt andelen i ett bråkuttryck oberoende av andelens storlek eller form	54
Sammanfattning av bråk som del av helhet.....	59
Bråk som del av antal.....	61
Ett givet antal kan delas in i olika bråkdelar.....	61

Ett givet antal kan delas in i samma bråkdel med hjälp av olika strategier	63
Ett givet bråkuttryck kan representera olika värden av ett antal när det totala antalet varierar	66
Sammanfattning bråk som del av antal	67
Bråk som tal	68
Samband mellan tal i bråk, -decimal- och procentform	69
Tal i bråkform kan uttryckas på flera sätt utan att bråkuttryckens värde förändras	73
Skillnader mellan bråkstreckets- och decimaltecknets funktion	79
Jämföra och storleksordna bråkuttryck	81
Nämnarens och täljarens funktion i ett bråkuttryck.....	85
Sammanfattning bråk som tal	92
Beräkningar av tal i bråkform.....	94
Beräkningar av tal i bråkform	95
Sammanfattning beräkningar av tal i bråkform	98
Resultatsammanfattning.....	99
Diskussion	100
Lärares och elevers användande av laborativt material	100
Representationsformernas ordning.....	102
Olika typer av laborativt material	105
Dimensioner av variation- vad ges eleverna möjlighet att erfara	106
Synliggöra olika värden av en fokuserad aspekt	106
Synliggöra variationer med hjälp av olika uppgifter	108
Synliggöra variationer med hjälp av olika strategier	108
Slutsatser, didaktiska implikationer och förslag på fortsatt forskning	109
Förslag till fortsatt forskning	111
Referenser	113
Bilaga 1	128
TIDIGARE UTGIVNA RAPPORTER.....	129

Förord

Denna licentiatuppsats handlar om lärares och elevers användande av laborativt material i bråkundervisningen i skolår 4-6 samt vad eleverna ges möjlighet att erfara om tal i bråkform. Dessa båda områden har jag länge varit intresserad av, både som student, grundskollärare och nu på senare tid även som universitetsadjunkt vid Linköpings universitet. Tack vare kompetensutvecklingsmedel från PEDI har jag fått möjlighet att fördjupa mig i dessa områden vilket har varit oerhört lärorikt, utmanande och intressant.

Det är flera personer som på olika sätt bidragit till detta arbete. Först och främst, ett stort tack till mina handledare Joakim Samuelsson och Jonas Hallström som bidragit med stort engagemang och stöd genom hela processen. Era skarpa analyser och goda förmågor att se helheter har hjälpt mig att se mitt manus från nya infallsvinklar och perspektiv. Tack för att ni orkat läst och kommenterat alla utkast, era synpunkter har varit ovärderliga!

Jag vill även tacka Angelica Kullberg som granskade mitt manus vid mitt halvtidsseminarium och gav, genom sin konstruktiva kritik, mycket god hjälp att utveckla och finna nya vägar i mitt arbete. Ett stort tack riktas även till Margareta Engvall och Lisa Björklunds Boistrup som läst och kommenterat manuset vid olika skeenden. Era synpunkter har varit mycket värdefulla och har bidragit till att förfina slutprodukten.

Att skriva en licentiatuppsats och samtidigt arbeta som universitetsadjunkt har varit en stor utmaning och en balansgång. Tack vare mina kollegor vid PEDI, speciellt Christina Aminoff, Anja Thorsten, matematikdidaktikgänget och min familj har detta ändå varit möjligt. Tack för att ni på olika sätt bidragit till mitt arbete.

Linköping, december 2015
Cecilia Sveider

Bakgrund

I denna studie studeras *användandet av laborativt material*¹ i matematikundervisningen och *variationer av ett specifikt ämnesinnehåll*. I studien handlar det specifika ämnesinnehållet om tal i bråkform.

Användandet av laborativt material

Laborativt material kan ses som en av fem representationsformer² som kan användas av både lärare och elever i syfte att underlätta elevernas förståelse för matematiska begrepp, så som till exempel begreppet $\frac{1}{3}$. Övriga representationsformer är bilder, skrivna- och talade symboler samt omvärldssituationer (Lesh, Post, & Behr, 1987; Mc Intosh, 2008; Skemp, 1987).

Matematikdidaktisk forskning gällande användandet av representationsformen laborativt material visar bland annat att elever som använt laborativt material presterar bättre än elever som inte fått den möjligheten (Durmus & Karakirik, 2006; Sarama Clements, Swaminathan, McMillen, & Gonzalez Gomez, 2003; Sowell, 1989, se även Hattie, 2009; NCTM³, 2000). Att använda laborativt material har visat sig vara särskilt gynnsamt för elevers lärande av tal i bråkform (Cramer, Post, & del Mass, 2002; Gürbüz, 2010; Jordan & Miller, 1999; Miller, 1964; Suh & Moyer, 2007).

Goldsbys (2009) metaanalys visar dock att elever inte alltid förstod kopplingen mellan det matematiska innehållet och det laborativa materialet och konstaterar att laborativt material inte på egen hand kan förbättra elevers matematikkunskaper. Resultatet av en annan metaanalys (Carbonneau, Marley, & Selig, 2013) där två olika typer av matematikundervisning jämförts, med respektive utan laborativt material, visar på en måttlig effektstorlek. Matematikdidaktisk forskning är således inte enig om att matematikundervisning med hjälp av laborativt material kan utveckla elevers förståelse av matematiska begrepp.

¹ För en definition av begreppet se sid 24ff.

² Representationsformerna utvecklas på sid 31ff.

³ Akronymen NCTM står för National Council of Teachers of Mathematics, som är en amerikansk matematiklärarorganisation.

Trots oenigheten kring laborativt material beviljades åren 2009-2011 ca 500 lokala projekt i grundskolan ekonomiskt bidrag från Skolverket (Skolverket, 2011a) i deras matematiksatsning. Närmare 80 miljoner kr, det vill säga över 20 % av de erhållna medlen gick till inköp av material, däribland laborativt material. Dessutom investerades i kompetensutveckling för lärare i form av föreläsningar, workshops och litteratur om laborativt material (Skolverket, 2012). I utvärderingar som gjordes efter matematiksatsningen konstateras bland annat att stort fokus riktats mot investeringar av laborativt material (Skolverket, 2011a) och materialet kan sägas ha fått en överordnad betydelse där lärarna gått från "läroboksstyrning till materialstyrning" (Skolverket, 2011b, s. 94).

Variationer av ett specifikt ämnesinnehåll

Beträffande den andra faktorn, *variationer av ett specifikt ämnesinnehåll*, pekar studier på att en avgörande faktor för elevers lärande, är variationer av ett specifikt ämnesinnehåll (exempelvis Marton & Morris, 2002; Runesson, 1999). Variation handlar i det här sammanhanget inte om att undervisningen ska variera med avseende på vare sig arbetsform⁴ eller arbetssätt⁵, utan med avseende på det specifika ämnesinnehållet (Holmqvist, 2006; 2010).

I denna studie studeras, dels användningen av laborativt material och dels variationer av det specifika ämnesinnehållet tal i bråkform. Forskning (se Moyer & Jones, 2004; Uribe-Flórez & Wilkins, 2010) som beskriver hur lärare och elever använder laborativt material förekommer i begränsad omfattning. Föreliggande studie avser därför att med hjälp av variationsteorin, bidra med ökad kunskap om lärares och elevers användning av laborativt material samt vilka variationer av det specifika ämnesinnehållet. Därmed kan studien utgöra ett stöd (jfr Kilpatrick, 1995) vid användandet av laborativt material i bråkundervisningen.

4 Med arbetssätt menas här på vilket sätt ett ämnesinnehåll behandlas, exempelvis undersökande arbetssätt, läsa skrivna texter i bok (jfr Lindström & Pennlert, 2006)

5 Med arbetsform menas här hur arbetet organiseras, exempelvis enskilt, grupp eller helklassundervisning (se t.ex. Granström, 2003).

Syfte och frågeställningar

Syftet med studien är att, med hjälp av variationsteorin som teoretisk utgångspunkt, beskriva och analysera lärares och elevers användande av laborativt material i skolår 4-6 när de arbetar med tal i bråkform i matematikundervisningen. Syftet ringas in med hjälp av följande frågeställningar.

- På vilka sätt används laborativt material i bråkundervisningen?
- Vilka typer av laborativt material används i bråkundervisningen?
- Vilka dimensioner av variation öppnas upp om tal i bråkform när laborativt material används?
- Vad görs möjligt för eleverna att erfara om tal i bråkform?

En matematikdidaktisk studie

Fokus i denna studie är, som tidigare nämnts, att beskriva och analysera bråkundervisning med laborativt material i skolår 4-6. Det matematikdidaktiska forskningsfältet omfattar en mångfald av olika forskningsfrågor, teoretiska perspektiv och metoder (Björkqvist, 2005). Exempelvis studeras undervisning och lärande samt sociala, politiska och kulturella dimensioner inom matematikdidaktik (Clements, Bishop, Keitel, Kilpatrick, & Leung, 2013). Det matematikdidaktiska forskningsfältet kan beskrivas som ett tvärvetenskapligt fält som lånar teorier från andra vetenskapsfält som exempelvis psykologi, pedagogik och sociologi (Wedegge, 2008). Oavsett teoretiska perspektiv eller metoder är matematikdidaktikens huvudsyfte att stödja och utveckla elevers lärande i matematik (Niss, 1999; Björkqvist, 2003). Niss (1999) ger följande definition av vad matematikdidaktik är:

[...] *the scientific and scholarly field of research and development which aims at identifying, characterising, and understanding phenomena and processes actually or potentially involved in the teaching and learning of mathematics at any educational level.*
(s. 5)

Av citatet framgår att matematikdidaktik handlar om att identifiera, karakterisera och förstå fenomen eller processer avseende undervisning och lärande i matematik oavsett utbildningsnivå.

Matematikdidaktik som forskningsfält är internationellt sett etablerat (Brandell, 2005; Strässer, 2005). Däremot menar författarna att utvecklingen av svensk matematikdidaktisk forskning skett senare än i övriga länder. De områden som svensk matematikdidaktisk forskning fokuserar på är bland annat: (a) genusfrågor, (b) matematikundervisning och demokrati, (c) matematikens och matematikundervisningens historia, (d) datorstöd i lärande och i utvärdering (e) symbolkänsla och förståelse av matematiskt språk (f) lågpresterande elever, (g) bedömning i matematik samt (h) läroboksanalyser (Björkqvist, 2003; Bergsten, 2010). Björkqvist (2003) pekar ut två områden, *stoffdidaktik* och *undervisning och lärande i matematik*, som två relativt utforskade områden i Sverige där det behövs ytterligare forskning. Tidigare har även Runesson (1999) och Sahlström (1999) uttryckt liknande tankegångar. Exempelvis skriver Runesson (1999) att "Det finns få

empiriska studier som behandlar det matematiska innehållet i undervisningen.” (s. 14). Även Häggström (2008) har belagt detta i en genomgång av över 1200 artiklar (skandinaviska och/eller engelskspråkiga) där han konstaterar att endast 179 av de granskade artiklarna beskrev autentiska klassrumsmiljöer med ett tydligt fokus på matematikundervisningen. Forskning som fokuserar på undervisning och lärande i relation till ett matematiskt innehåll är ett område som vuxit under senare tid (Brandell, 2010) och antalet klassrumsstudier har ökat (exempelvis Engvall, 2013; Kilhamn, 2011; Kullberg, 2010; Wernberg, 2009).

Genom att beskriva och analysera lärares och elevers användning av laborativt material när de arbetar med tal i bråkform i matematikundervisningen ska föreliggande studie ses som ett bidrag till det forskningsområde som handlar om undervisning och lärande i matematik då fokus i studien riktas mot elever i skolår 4-6 erfarande av de tal i bråkform när laborativt material används.

Teoretiska utgångspunkter

Tidigare studier har visat att variationsteorin är ett användbart verktyg för att analysera undervisning med intresse för ett specifikt ämnesinnehåll i relation till elevers lärande (exempelvis Kullberg, 2010; Häggström, 2008; Olteanu, 2007; Marton & Tsui, 2004; Runesson, 2008). Med hjälp av variationsteorin kan analyser om vad som möjliggör lärandet fokuseras (Marton, 2015).

I kapitlet presenteras först variationsteorins ursprung och syfte. Därefter beskrivs hur de variationsteoretiska begreppen tolkas och hur dessa används för att analysera studiens datamaterial.

Variationsteorin

Variationsteorin har vuxit fram ur den fenomenografiska forskningsansatsen (Marton & Pang, 2013; Pang & Marton, 2003; Runesson & Gustavsson, 2012). Den fenomenografiska ansatsen fokuserar på hur människor erfar fenomen i sin omvärld (Marton & Booth, 2000). Inom variationsteorin fokuseras på frågor om hur lärandet går till och vad som möjliggör lärandet av ett specifikt ämnesinnehåll (Marton & Booth, 2000; Marton, 2015). Lärandet beskrivs som en förändring i vårt sätt att erfara omvärlden (Marton & Tsui, 2004). För att en förändring ska ske måste vi urskilja olika aspekter av det specifika ämnesinnehållet. För att kunna urskilja något måste vi ha upplevt en variation av tidigare erfarenhet (Marton, 2015). Lärandet kan på det sättet beskrivas som en funktion av urskiljning av aspekter vilket i sin tur förutsätter en upplevd variation (Marton & Booth, 1997).

Det är svårt att uppmärksamma många aspekter samtidigt eftersom vår förmåga att fokusera på flera aspekter är begränsad (Miller, 1956). Vissa aspekter är mer framträdande och bildar *förgrund*, eller som Marton och Booth (1997, s. 98) uttrycker det: "they are figural or themaized" i medvetandet. Andra aspekter bildar *bakgrund* i medvetandet. Vad som är i förgrunden respektive bakgrunden i vårt medvetande varierar.

Urskiljning, variation och samtidighet

Aspekter av ett specifikt ämnesinnehåll som samtidigt urskiljs påverkar den mening som tilldelas det specifika ämnesinnehållet.

Det innebär exempelvis att om två elever urskiljer olika aspekter av ett specifikt ämnesinnehåll kan de förstå det specifika innehållet på olika sätt. Begreppen urskiljning, variation och samtidighet utgör på så sätt stommen inom variationsteorin (Marton & Booth, 1997).

Med *urskiljning* menas att ett specifikt ämnesinnehåll inte kan erfaras om det inte först blivit skilt ifrån dess kontext. Detta görs genom att urskilja delar från helheten och koppla delar till varandra och sedan till helheten igen (Runesson, 1999). För att exempelvis få förståelse för nämnarens respektive täljarens betydelse i ett bråkuttryck behöver dels nämnaren, dels täljaren i bråkuttrycket urskiljas. Därefter kan begreppen kopplas ihop. Begreppet urskiljning hör samman med begreppet *variation*. Runesson (1999) skriver att för att en viss aspekt av ett specifikt ämnesinnehåll ska kunna urskiljas måste en variation erfaras av den aspekten. För att kunna uppfatta egenskaperna av exempelvis ett tal i bråkform måste vi ha erfarit en variation av olika former av tal exempelvis naturliga tal⁶. På liknande sätt resonerar Marton och Morris (2002) då de menar att man inte kan lära sig vad färgen blå är för något om det vore den enda färgen i världen. Vi kan med andra ord inte urskilja något utan variation.

...we cannot discern anything without experiencing variation of that object [...] so we believe that what varies and what is invariant is fundamentally important. (Marton & Morris, 2002, s.20).

Av citatet framgår att för att kunna urskilja något krävs det att det sker utifrån en variation av ett specifikt ämnesinnehåll. Vidare menar Marton och Morris (2002) och Runesson (1999) att vad som varierar och vad som hålls invariant i en undervisningssituation är av betydelse för elevernas lärande. Därmed är variation en nödvändighet för att urskilja olika aspekter av ett specifikt ämnesinnehåll (Marton, Runesson, & Tsui, 2004). För att kunna erfara ett specifikt ämnesinnehåll på ett särskilt sätt måste olika aspekter urskiljas och finnas i medvetandet *samtidigt*. "Att ha en utvecklad förståelse för exempelvis talet "fem" innebär att *samtidigt*

⁶ Ett av talen 0, 1, 2, 3, 4, ... [...] Varje naturligt tal är antalet element i någon ändlig mängd. Mängden av naturliga tal betecknas N . Vi har alltså $0 \in N$. (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 49)

kunna urskilja "fem" som antal eller som en mängd av en viss storlek, "fem" som en position i räkneramsan och helheten i "fem" och relationen till dess delar" (Runesson, 1999 s. 30).

Lärandeobjekt, kritiska aspekter och variationsmönster

I föreliggande studie är matematikundervisningens innehåll tal i bråkform. Det innehåll som eleverna ska ges möjlighet att lära benämns inom variationsteorin för *lärandets objekt* (Marton & Pang, 2006; se även Kullberg, 2010; Lo, 2012). Eftersom fokus i studien är riktat mot ett specifikt ämnesinnehåll blir det relevant att ge en fördjupad beskrivning av begreppet *lärandeobjekt*.

Lärandeobjekt

Enligt variationsteorin är lärandet alltid ett lärande av något. Lärandet har med andra ord ett objekt (Marton & Booth, 1997). Ett lärandeobjekt kan förklaras som en insikt, en förmåga eller en färdighet av ett specifikt ämnesinnehåll som eleven förväntas utveckla (Lo, 2012). Vid en lärandesituation formas ett lärandeobjekt, det erbjudna objektet kan göra det möjligt för eleven att uppfatta, förstå eller erfara ett begrepp på ett nytt sätt.

Lärandeobjektet består av två delar, *det direkta lärandeobjektet* och *det indirekta lärandeobjektet*. Delarna kan analytiskt separeras, men kan i realiteten inte existera utan varandra (Marton & Pang, 2006). Det direkta lärandeobjektet kan definieras i termer av innehållsliga aspekter. Det indirekta lärandeobjektet fokuserar på den förmåga som eleven förväntas utveckla i relation till det direkta lärandeobjektet. I bråkundervisningen kan ett lärandeobjekt exemplifieras som elevers förmåga att jämföra bråkuttryck med olika nämnare, till exempel genom frågan: Vilket bråkuttryck är störst $\frac{1}{3}$ eller $\frac{1}{5}$? Det direkta lärandeobjektet är i detta fall innehållet bråk med olika nämnare och det indirekta lärandeobjektet är förmågan att kunna jämföra dessa båda bråkuttryck. Lärandeobjektet är en dynamisk process och kan variera. Ett lärandeobjekt kan med andra ord förändras beroende på elevernas gensvar (Lo, 2012).

Lärandeobjektet kan från ett variationsteoretiskt perspektiv ses utifrån tre olika synsätt (a) det intentionella-, (b) det iscensatta - och (c) det erfarna lärandeobjektet. Det *intentionella lärandeobjektet*

hänvisar till det specifika innehåll lärarna avser att undervisa om, det vill säga vilka intentioner lärarna har med sin undervisning. Det specifika innehållet som synliggörs under en lektion benämns som det *iscensatta lärandeobjektet*. I det iscensatta lärandeobjektet framträder det som eleverna har möjlighet att, utifrån tidigare erfarenheter, urskilja av det specifika innehållet. Det *erfarna lärandeobjektet* beskriver vilka aspekter av det specifika innehållet som eleverna lärde sig under lektionen. (Marton et al., 2004; Marton och Pang, 2006).

Kritiska aspekter

Aspekter som är nödvändiga att urskilja för att erfara ett avsett lärandeobjekt, men som ännu inte är urskilda benämns *kritiska aspekter* (Lo, 2012, Marton, 2015). Kritiska aspekter är kopplade till lärandeobjektet och kan variera mellan olika elever. Om två elever samtidigt fokuserar på olika aspekter av samma innehåll, kommer innehållet att förstås på två olika sätt. På frågan:

"Ringa in alla bråk som är större än $\frac{1}{4}$ men mindre än $\frac{1}{2}$." svarsalternativ $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$ och $\frac{1}{5}$ (uppgift hämtad från Mc Intosh, 2008, s. 217) kan en elev fokusera på att detta stämmer för bråkuttrycken $\frac{1}{3}$ och $\frac{3}{10}$. En annan elev vet att även bråkuttrycket $\frac{3}{8}$ är större än $\frac{1}{4}$ men mindre än $\frac{1}{2}$. Eleverna har alltså sedan tidigare olika erfarenheter vilket påverkar förmågan att utveckla förståelse för det specifika innehållet (Marton & Booth, 1997).

Olteanu och Olteanu (2010) skriver att de kritiska aspekterna kan ses utifrån två olika perspektiv, *real critical aspects (RCA)* och *potential critical aspects (PCA)*. Med RCA avses det som eleverna uppvisar som kritiska aspekter i relation till lärandeobjektet och ligger i linje med Kullbergs (2010) resonemang om kritiska aspekter då hon skriver att vad som är en kritisk aspekt beror dels på vad som ska läras, och dels på vem som ska lära. Lärarna kan även utifrån sina tidigare erfarenheter av undervisning av ett lärandeobjekt förutse vad som kan vara en kritisk aspekt. Dessa kritiska aspekter benämns *potential critical aspects (PCA)*. Dessa behöver således inte vara kritiska för just den eleven eller elevgruppen.

Variationsmönster

Utgångspunkten är enligt variationsteorin att "when certain aspects of a phenomenon vary while it's other aspects are kept constant, those aspects that vary are discerned" (Lo, Chik, & Pang, 2006, s. 3). Ett erfalande av ett lärandeobjekt blir alltså möjligt då vissa aspekter varierar, medan andra aspekter hålls invarianta (Marton & Booth, 1997). Utifrån detta resonemang skulle det medföra att för att en elev ska urskilja nämnarens betydelse av ett tal i bråkform, så ska nämnaren variera medan täljaren är invariant. Exempelvis skulle två bråkuttryck liknande $\frac{3}{4}$ respektive $\frac{3}{6}$ kunna presenteras för eleven eftersom bråkuttrycken har samma täljare 3, medan nämnaren 4 respektive 6 varierar i bråkuttrycken.

Flertalet studier har visat att elevers lärande förbättras då läraren medvetet använt sig av *variationsmönster* (exempelvis Marton & Tsui, 2004; Marton & Morris, 2002; Pang & Marton, 2003; Runesson, 2005). Lärandet beskrevs inledningsvis som en förändring i vårt sätt att erfara omvärlden. Det är först när skillnader kan urskiljas som nya innebörder kan erfaras. Marton (2015) skriver att för att urskilja ett specifikt ämnesinnehåll för första gången måste minst två olika värden av det specifika ämnesinnehållet eller det Marton (2015) benämner som den *fokuserade aspekten*⁷ varierar. Då aspekter eller egenskaper av ett specifikt ämnesinnehåll hålls invarianta medan andra aspekter eller egenskaper varierar, framträder ett mönster av variation. Ett variationsmönster omfattar vad som varierar och vad som hålls invariant. Inom variationsteorin beskrivs detta som att en *dimension av variation* öppnas upp, det vill säga med hjälp av variation kan en fokuserad aspekt separeras och synliggöras (Lo, 2012; Marton, 2015). Genom att möta och tillägna sig olika värden inom den fokuserade aspekten kan en dimension av variation öppnas vilket kan leda till en fördjupad förståelse av ett lärandeobjekt. (Lo, 2012, Marton, 2015).

Med utgångspunkt från Marton (2015) beskrivs variationsmönstren, *repetition*, *kontrast*, *generalisering* och *fusion*. När två värden hålls invarianta, vilket sker vid en *repetition*, öppnas inga

⁷ En fokuserad aspekt kan vara en kritisk aspekt av ett lärandeobjekt (Marton, 2015)

nya dimensioner av variation upp eftersom eleverna inte ges möjlighet att urskilja något nytt då ingen av aspekterna varierar. *Kontrast*, används för att skilja ut en fokuserad aspekt från ett lärandeobjekt, på så sätt öppnas en dimension av variation för denna aspekt. Det som ska uppmärksammas måste då variera mot en invariant bakgrund. En vanlig missuppfattning av begreppet "en halv" är att det räcker med att helheten delas i två delar. Att delarna måste vara lika stora är något som inte alltid uppmärksammas (se Cramer et al., 2002). För att förstå betydelsen av begreppet en halv måste en halv separeras ut. Detta kan göras genom att minst två värden kontrasteras mot varandra, vilket kan ske med hjälp av två bilder, se figur 1, där begreppet en halv ställs mot något som inte är en halv. Den fokuserade aspekten varierar, medan andra aspekter som rektanglarnas storlek och position är konstant och bildar en invariant bakgrund.

Figur 1. Vänster rektangel delad i två lika stora delar. Höger rektangel delad i två delar.

När den fokuserade aspekten av lärandeobjektet är urskiljd måste den *generaliseras* och separeras från den specifika situationen. Möten och tillägnandet av nya värden inom en redan öppnad dimension sker. Exempelvis kan olika värden av begreppet "en halv" presenteras. Dessa kan representeras med hjälp av bokstäver "en halv" eller som $\frac{1}{2}$ eller $\frac{2}{4}$. Den fokuserade aspekten, begreppet "en halv", hålls här invariant medan representationsformerna av begreppet varierar. Gemensamt för variationsmönstren kontrast och generalisering är att den fokuserade aspekten varierar mot en invariant bakgrund, variationsmönstren kan därmed betraktas som två olika former av separation. I det fjärde variationsmönstret *fusion* varierar flera aspekter samtidig. Detta variationsmönster utnyttjas efter att de fokuserade aspekterna först varit separerade och därefter sätts ihop till en helhet igen. Exempelvis kan både täljaren och nämnaren varieras vid storleksordning av bråken: $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{5}$ och $\frac{6}{9}$.

Ovanstående variationsmönster sammanfattas i figur 2. Den fokuserade aspekten är i figur 2 markerad med (x). Bokstaven (y) står för övriga aspekter. I det första variationsmönstret, repetition, hålls både den fokuserade aspekten (x) och andra aspekter (y) invarianta. Detta betecknas i figur 2 med ett (i). Vid kontrast varierar den fokuserade aspekten, vilket i figur 2 illustreras med bokstaven (v). Andra aspekter hålls invarianta. I det tredje variationsmönstret, generalisering, hålls den fokuserade aspekten invariant (i) medan andra aspekter varierar (v). I det fjärde och sista variationsmönstret, fusion, varierar (v) samtliga aspekter.

	x	y	
(1)	i	i	repetition
(2)	v	i	kontrast
(3)	i	v	generalisering
(4)	v	v	fusion

Figur 2. Fyra variationsmönster, där den fokuserade aspekten är markerad med fet stil (Marton, 2015, s. 53), (min översättning).

Användningen av variationsteorin i denna studie

Gemensamt för matematikundervisningen som analyseras i föreliggande studie är att det specifika innehållet är tal i bråkform och att någon form av laborativt material används i samband med undervisningen. I analysen uppmärksammas de fokuserade aspekterna som uppkommer i de olika undervisningssekvenserna. Dessutom uppmärksammas eventuella kritiska aspekter utifrån begreppen RCA och PCA. Utifrån detta beskrivs och analyseras det iscensatta lärandeobjektet genom att uppmärksamma vilka dimensioner av variation som öppnas upp och vad eleverna ges möjlighet att erfara.

Matematikundervisning med fokus på tal i bråkform och laborativt material

Elever i den svenska grundskolan ska bland annat ges förutsättningar att utveckla specifika förmågor i matematik (Skolverket, 2011c). Förutom förmågor i matematik är matematikämnet indelat i olika centrala delområden. Nedan presenteras de delområden som är centrala i grundskolans matematikundervisning. Särskilt fokus riktas mot delområdet *taluppfattning och tals användning* eftersom tal i bråkform⁸ ingår i detta område (se Skolverket, 2011c) och är relevant för studiens syfte och frågeställningar. Därefter beskrivs elevers kunskaper beträffande tal i bråkform. I kapitlet presenteras olika typer av laborativt material och olika argument för användandet av laborativt material. Dessutom beskrivs två arbetssätt som kan användas i matematikundervisningen med laborativt material.

Centralt innehåll inom skolmatematiken

Skolmatematiken i den svenska grundskolan delas in i sex olika delområden. Dessa delområden är: (a) taluppfattning och tals användning, (b) algebra, (c) geometri, (d) sannolikhet och statistik, (e) samband och förändring och (f) problemlösning (Skolverket, 2011c).

I det centrala innehållet för delområdet taluppfattning och tals användning år 4-6 står angivet att undervisningen i huvudsak ska omfatta:

- rationella tal och deras egenskaper
- tal i bråk- och decimalform och deras användning i vardagliga situationer (Skolverket, 2011d, s. 64).

⁸ I denna studie används begreppet tal i bråkform. Tal i bråkform kan skrivas med hjälp av formeln a/b där a och $b \in$ hela talen Z samt $b \neq 0$ (Kiselman & Mouwitz, 2008).

I Kommentarmaterialet till kursplanen för matematik⁹ (Skolverket, 2011d) utvecklas detta på följande sätt:

I årskurserna 4–6 ska undervisningen behandla rationella tal och deras egenskaper samt tal i bråk- och decimalform och deras användning i vardagliga situationer. När eleverna får möta dessa tal i olika situationer, till exempel vid inköp eller när de mäter sträckor, ökar deras förståelse inte bara för talen och deras relationer, utan också för hur man kan tillämpa matematik i vardagen (s. 14).

Vidare skrivs i kommentarmaterialet att då det gäller förmågan att uttrycka och använda tal är det av betydelse att eleverna får förståelse för sambanden mellan tal i procent-, decimal- och bråkform. Eleverna ska även ges möjlighet att utveckla kunskap om de rationella talen och deras egenskaper samt hur tal i bråk- och decimalform kan användas i vardagliga sammanhang.

Av beskrivningarna om tal i bråkform ovan ses att det kan röra sig om många olika aspekter. Exempelvis kan det handla om (a) samband mellan bråk-, procent- och decimalform, (b) hur tal i bråkform används i vardagliga sammanhang eller (c) olika egenskaper för tal i bråkform.

Elevers kunskaper om tal i bråkform

Undervisningen om tal i bråkform utgör en grund för elevers matematikutveckling med särskilt fokus på delområdena algebra och sannolikhet (Behr, Harel, & Post, 1992; Lamon, 2007; Litwiller & Bright, 2002). Eftersom grundskoleelevers kunskaper om tal i bråkform kan utgöra grund för matematikkunskaper på mer avancerad nivå (Wang & Siegler, 2013) blir bråkundervisningen ett av det viktigaste innehållet i matematikundervisningen (Behr et al., 1992; Engström, 1997; Lamon, 2007; Litwiller & Bright, 2002;).

För elever är tal i bråkform ofta komplicerat och utmanade att lära. En utmaning beror på att tal i bråkform skiljer sig från de naturliga

9 Till varje kursplan finns ett kommentarmaterial som riktar sig till lärare och rektorer. Avsikten med materialet är att ge en bredare och djupare förståelse för de urval och ställningstaganden som ligger bakom texterna i kursplanerna. Materialet beskriver också hur det centrala innehållet utvecklas över årskurserna och hur kunskapskraven är konstruerade (Skolverket, 2011d s. 4).

talen i fråga om symboliska konventioner, till exempel $\frac{6}{7}$, $\frac{11}{4}$ och $2\frac{1}{2}$ (se Behr et al., 1992; English & Halford, 1995; Hartnett & Gelman, 1998; Mack, 1993; Sophian, 1996; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). En andra utmaning ligger i att förstå skillnaden av ordningsföljden mellan naturliga tal och tal i bråkform. De naturliga talen minskar respektive ökar i en regelbunden ordning, men för tal i bråkform finns inte samma sekvensregel och det finns oändligt många tal mellan två bråktal (Prediger, 2006). En tredje utmaning är att elevers uppfattning om de naturliga talen påverkar uppfattningen om tal i bråkform, även kallad *the whole number bias* (Ni & Zhou, 2005). Det innebär till exempel att bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ kan uppfattas som större än bråkuttrycket $\frac{1}{3}$ eftersom 4 är större än 3. En fjärde utmaning uppkommer när elever ska storleksordna bråkuttryck. Detta gäller särskilt bråkuttryck med olika nämnare (Pitkethly & Hunting, 1996; Clarke, Roche, Mitchell, & Sukenik, 2006).

En femte och avslutande utmaning är när elevers ska utföra olika beräkningar av tal i bråkform, exempelvis addera additionsuttrycket: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} =$. En svårighet som Dickson, Brown, & Gibson (1990) lyfter fram är att om eleven väljer att rita termerna i additionsuttrycket med hjälp av två bråkcirklar finns en risk att summan av det ovan skrivna bråkuttrycket blir $\frac{3}{6}$ istället för $\frac{3}{3} (=1)$. NAEP¹⁰ genomförde under åren 1972-1973 och 1977-1978 undersökningar som bland annat visade brister i trettonåriga elevers begreppsliga förståelse när de skulle uppskatta summan av $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$ genom att välja ett av följande svarsalternativ (a) 1, (b) 2, (c) 19 och (d) 21. Knappt 30 % av eleverna valde (c) 19 som svar och lika många ansåg att (d) 21 var rätt svarsalternativ. Svaren antyder att eleverna har svårt att förstå storleken av ett bråkuttryck (Carpenter, Coburn, & Reys, 1978). I paritet med NAEP visar Carpenter, Coburn, Kepner, Lindquist, & Reys (1980) studie att en tredjedel av eleverna klarade av additionsuppgifter med olika nämnare, exempelvis $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$.

¹⁰ Akronymen NEAP står för The National Assessment of Educational Progress. The National Assessment of Educational Progress. NAEP är en federalt finansierade, rikstäckande undersökning av utbildningsresultaten i 10 akademiska områden.

Däremot visar studier (Carpenter, Coburn, Reys, & Wilson, 1976 och Carpenter et al. 1980) att elever har goda procedurkunskaper att addera två liknämninga bråk, exempelvis $\frac{3}{8} + \frac{4}{8}$.

Beträffande svenska elevers procedurkunskaper gällande subtraktion visar resultatet från TIMSS 2007 att mer än en tredjedel av eleverna i år 4 valde det korrekta svarsalternativet $\frac{3}{5}$ till uppgiften $\frac{4}{5} - \frac{1}{5}$. Nästan en fjärdedel av eleverna ansåg att det korrekta svaret på uppgiften var 3. En förklaring till den typen av missuppfattning är att eleverna även subtraherar nämnaren (Skolverket, 2008). En slutsats som kan göras utifrån studierna är att eleverna endast lär sig procedurer som memoreras och blir en slags mekanisk utantillinläring med avsaknad av den bakomliggande begreppsliga förståelsen av dessa procedurer (jfr Engström, 1997).

Tal i bråkform kan uppfattas på olika sätt. De olika sätten kan uttryckas med hjälp av olika begreppsmodeller (Carpenter, Fennema, & Romberg, 1993; Confrey & Smith, 1995; Engström, 1997; Kieren, 1976, 1995; Mc Intosh, 2008; Thompson & Saldanha, 2003). En vanlig uppfattning hos eleverna är att förstå tal i bråkform utifrån en *del-helhetsmodell* (se nedan). Att enbart uppfatta tal i bråkform som del av helhet kan hämma eleverna att förstå tal i bråkform utifrån andra begreppsmodeller (Pitkethly & Hunting, 1996). För att eleverna ska utveckla en god förståelse av tal i bråkform måste eleverna ges möjlighet att möta andra typer av begreppsmodeller (Steffe & Olive, 2010; Tzur, 2004). Nedan presenteras först del-helhetsmodellen samt tre andra förekommande begreppsmodeller som beskrivs i forskningslitteraturen tillsammans med elevers kunskaper angående dessa som är av intresse i denna studie.

Del-helhetsmodellen

Del- helhetsmodellen innebär att tal i bråkform kan ses som en del av en helhet, vilket illustreras i figur 3 nedan.

Figur 3. Exempel på del-helhetsmodell.

I en studie av Clarke et al., (2006) vidareutvecklades uppgifter från The Rational Number Project (Cramer, Behr, Post, & Lesh, 1997). Studien visar att ca 80 % av eleverna i år 6 korrekt kunde besvara frågan: "Hur stor del av cirkeln är B i figuren?" (se figur 4 nedan). Den andra frågan: "Hur stor del är D i figuren?" kunde ca 40 % av eleverna besvara korrekt. Cirka 14 % av eleverna svarade $\frac{1}{5}$ på den sistnämnda frågan. Elevernas svar indikerar att de inte tar hänsyn till att delarna måste vara lika stora vid bråk som del av helhet utan räknar antalet delar i cirkeln.

Figur 4. Hur stor del av cirkeln är B? Hur stor del är D? Uppgift från Clarke et al. (2006).

I en annan studie av Hart (1984) var en av uppgifterna att eleverna skulle skriva det bråkuttryck som beskrev figuren (se figur 5). En del av eleverna uppfattade att figuren illustrerade bråkuttrycket $\frac{3}{5}$ istället för $\frac{3}{8}$. Eleverna relaterade de skuggade delarna till de icke skuggade delarna istället för del av helhet.

Figur 5. Uppgift som eleverna skulle beskriva. Uppgift från Hart (1984).

En ytterligare aspekt gällande begreppsmodellen bråk som del av helhet framkommer i Valdemoros (2004) studie där eleverna skulle dela in en kvadrat i femtedelar. Resultatet visade att en del av

eleverna började med att dela in kvadraten i fyra lika stora delar men valde sedan att dela en av de fyra små kvadraterna i två delar. På så sätt blev kvadraten delad i fem delar men inte i femtedelar.

Lösningsfrekvensen för uppgifter från TIMSS, 2007 som mäter elevers kunskaper avseende bråk som del av helhet visade att ca 46% av eleverna i år 4 svarade korrekt på uppgifter gällande bråk som del av helhet (Skolverket, 2008).

Del av antal

Begreppsmodellen liknar del- helhetsmodellen. Men här delas delarna istället upp enligt figur 6. Helheten blir därmed svårare att identifiera som en helhet och istället fokuseras antalet delar. Därför benämns begreppsmodellen som antalsmodellen.

Figur 6. Relation del-helhetsmodellen och antalsmodellen (efter Dickson et al., 1990 s. 279).

Martin och Schwartz (2005) ger exempel på olika elevtolkningar gällande begreppsmodellen del av antal. I figur 7 illustreras en av dessa elevtolkningar.

Figur 7. Elevers missuppfattningar av antalsmodellen (efter Martin & Schwartz, 2005, s. 590).

Uppgiften handlar om att med hjälp av laborativt material beskriva hur mycket $\frac{1}{4}$ av 8 är. I figur 7 har eleven delat in åtta klossar i två

mängder med fyra klossar i varje mängd. Därefter har eleven tolkat den inringade mängden som 1:an i bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ och de fyra andra klossarna som 4:an i bråkuttrycket $\frac{1}{4}$. En tolkning som Martin och Schwartz (2005) gör är att eleven inte kopplar ihop och relaterar högarna till varandra.

Förutom ovanstående svårighet visar matematikdidaktisk forskning på en annan aspekt av bråk gällande del av antal. Bland annat visar forskningen att det är enklare för elever att lösa uppgifter av typen $\frac{1}{3}$ av 6 än uppgifter av typen $\frac{2}{3}$ av 6 (Kieren, 1993; Kullberg & Runesson, 2013).

Bråk representeras som tal på tallinjen

Varje tal i bråkform kan representeras som en punkt på en tallinje (se figur 8) (Kilborn, 2014). Denna bråkmodell kan uppfattas som abstrakt eftersom bråkuttrycket enbart representeras som punkter på en linje vilket inte ger så stort begreppsligt stöd i elevers lärande om tal i bråkform (Skolverket, 2008).

Figur 8. Bråkuttryck illustreras på tallinjen (efter Kilborn, 2014).

Novillis (1976) studie visar att användandet av tallinjen försvårades om tallinjen fortsatte efter talet 1. Detta framkom då eleverna i studien skulle markera $\frac{3}{5}$ på en tallinje. Flertalet av eleverna valde att markera $\frac{3}{5}$ av hela tallinjen. Däremot ökade lösningsfrekvensen då tallinjen enbart sträckte sig mellan talen 0 och 1.

Bråk som beskriver proportion

Begreppsmodellen illustrerar hur bråkuttryck kan förlängas och förkortas på olika sätt, exempelvis att $\frac{1}{2}$ även kan skrivas som $\frac{2}{4}$, det vill säga bråkuttrycken är ekvivalenta. Detta är något som är en svårighet för eleverna att förstå (Bana, Farrell, & McIntosh, 1997).

Kamii och Clark (1995) menar att det är viktigt att eleverna förstår ekvivalenta bråkuttryck eftersom det ligger till grund för elevernas förståelse av såväl att addera och subtrahera med tal i bråkform som att jämföra och storleksordna bråk.

Ett annat exempel på en missuppfattning inom denna begreppsmodell beskrivs av Erlwanger (1973) där eleven Benny ser bråkuttrycken $\frac{4}{11}$ och $\frac{11}{4}$ som samma bråkuttryck. Att täljaren och nämnaren bytt plats ansåg eleven inte hade någon betydelse. Elevernas svårigheter att hantera ekvivalenta bråk visar sig även i TIMSS 2007. Bland annat ansåg eleverna i år 4 att bråkuttrycket $\frac{2}{3}$ var ekvivalent med bråkuttrycket $\frac{3}{2}$. Eleverna i år 4 hade även svårt att korrekt besvara uppgiften $\frac{12}{3} = \frac{\quad}{2}$. Av de fyra svarsalternativ som gavs, (a) 2, (b) 4, (c) 6 och (d) 8, valde en femtedel av eleverna svarsalternativ (d), vilket var det korrekta svaret. Knappt hälften av eleverna valde svarsalternativ (b). Den förklaring till lösningsfrekvensen som presenteras i TIMSS 2007 var att eleverna inte har tillräckligt god förståelse för likhetstecknet.

Laborativt material

Människor har i olika kulturer använt varierande typer av laborativt material som hjälpmedel för att lösa vardagliga matematiska problem. Kulramen, abacus, brukar anses vara det första laborativa materialet (Boggan, Harper, & Whitmire, 2010).

Precis som det vardagliga användandet av laborativt material har även undervisning med hjälp av laborativt material en lång historia. Enligt Comenius (i Boggan et al., 2010) skulle eleverna lära sig att använda verkligheten och sinnena, inte bara orden. Han föreslog bland annat att eleverna skulle använda sig av verktyg från verkligheten eller att det åtminstone skulle finnas en bildlig representation av verkligheten i klassrummet. Boggan et al. (2010) skriver att ett laborativt material anses som både viktigt och nödvändigt i samband med matematikundervisning i grundskolan. Även NCTMs (2000), The 2009 What Works Clearinghouse rapport (Gersten, Beckmann, Clarke, Foegen, & Marsh, 2009) och den svenska kvalitetsgranskningen NUs -03 (Skolverket, 2004) uttrycker rekommendationer om att använda laborativt material för att variera matematikundervisningen, oavsett elevernas ålder. I

kvalitetsgranskningen (Skolverket, 2004) framhålls att matematikundervisning som kännetecknas av inslag av laborativt material är både utmanande och motiverande för elever. Att variera matematikundervisningen med hjälp av till exempel laborativt material beskrivs således som ett sätt att förbättra och utveckla matematikundervisningen.

Laborativt material kan delas upp i två olika huvudkategorier, dels *vardagliga material* såsom föremål som går att finna i vardagen eller naturen, dels *pedagogiska material* som är specialtillverkade. Ett av syftena med att använda laborativt material i matematikundervisningen är att åskådliggöra ett eller flera matematiska begrepp (Szendrei, 1996). Ett bra laborativt material kännetecknas av att det är meningsfullt för eleverna. Vidare ska det laborativa materialet överensstämja med eller spegla kognitiva- och matematiska strukturer så att det både explicit och konkret representerar den tänkta matematiska idén (Moyer, 2001). Kelly (2006) presenterar även förslag på vad ett laborativt material kan vara. Hon anser att ett laborativt material dels kan vara ett konkret föremål, dels en bildlig representation, vilket även stämmer överens med både Sowell (1989) och Van de Walle, Karp, och Bay-Williams, (2013) resonemang. Enligt deras definition kan laborativt material vara konkreta material, som exempelvis bönor, cuisenairestavar¹¹ och geobräden¹². Dessutom menar de även att laborativt material kan bestå av tryckta bilder på föremål (som ska gå att manipulera med, det vill säga vrida och vända på dem). Utifrån dessa resonemang kan ett laborativt material utgöras av antingen *fysiska föremål* (bönor) eller *tryckta bilder av olika föremål* (bild på bönor).

Ett annat perspektiv på vad ett laborativt material är ges av Hartshorn och Boren (1990). De menar att ett laborativt material är "...objects that can be touched and moved by students to introduce or reinforce a mathematical concept" (s. 2). De menar följaktligen att ett laborativt material kan användas för att

¹¹ Cursinairstavar är ett material bestående av 10 olikfärgade stavar. Den kortaste staven är 1 cm och den längsta 10 cm.

¹² Geobräde är en kvadratisk trä- eller plastplatta där spikarna/piggar sitter i vågräta och lodräta rader så att de bildar ett rutnät. Med hjälp av gummisnoddar kan former och geometriska figurer i två dimensioner göras.

introducera eller förstärka ett matematiskt begrepp. En tolkning av citatet är också att de även menar att ett laborativt material endast är ett konkret föremål. Därmed framkommer en skillnad mellan definitionen av laborativt material där Hartshorn och Boren (1990) skriver att ett laborativt material enbart är ett konkret material och inte en visuell representation. Genom citatet ovan framkommer också att Hartshorn och Boren (1990) uppmärksammar att det är eleverna som ska använda det laborativa materialet. Detta är något som vare sig Sowell (1989), Kelly (2006) eller Van de Walle et al. (2013) lyfter fram.

I denna studie beskrivs hur laborativt material används i matematikundervisningen om tal i bråkform. Vidare beskrivs och analyseras i studien hur både lärare och elever använder laborativt materialet, vilket därmed är en avvikelse beträffande vem som använder materialet jämfört med Hartshorn och Boren (1990). Den definition av laborativt material som används i denna studie är den bygger på Sowell (1989), Van de Walle et al. (2013) samt Kellys (2006) resonemang. Det innebär att ett laborativt material i denna studie betraktas som både ett fysiskt- och bildligt objekt som går att manipulera med.

Olika typer av laborativt material

Olika typer av laborativt material passar olika användningsområden (Marsh & Cooke, 1996). Exempelvis visar McNeil, Uttal, Jarvin och Sternberg (2009) att den elevgrupp som använt ett laborativt material bestående av låtsaspengar som liknade riktiga pengar fick försämrade resultat jämfört med den elevgrupp som använt ett laborativt material som var av enklare karaktär (se figur 9 nedan).

Figur 9. Vänstra figuren, exempel på “perceptuellt rika¹³” laborativa material. Högra figuren, exempel på enklare¹⁴ laborativa material (McNeil, et al., 2009, s. 175).

Förutom att dela in laborativt material i grupperna vardagligt respektive pedagogiskt material kan utifrån resonemanget ovan en ytterligare gruppering göras. Laborativt material såsom Cuisenairestavar och geobräden är exempel på material som hör till gruppen *bland manipulatives* (se Goldstone & Sakamoto, 2003; Petersen & McNeil, 2013), medan låtsaspengar ingår i gruppen *perceptual rich manipulatives* (McNeil et al., 2009). Begreppen översätts i den här studien till *enkla laborativa material* respektive *perceptuellt rika laborativa material*. Den förstnämnda gruppen utmärks av att materialet har begränsade kännetecken med avseende på exempelvis avsaknad av färg och verklighetstroget utseende. Därmed blir materialet i sig självt inte särskilt intressant och eleverna ges möjligheter att fokusera på vad materialet är tänkt att representera. Den andra gruppen av laborativt material karakteriseras av att ha många olika kännetecken, exempelvis färggrant och verklighetstroget material. Dessa kännetecken kan avleda elevernas uppmärksamhet då materialet i sig konkurrerar med den matematiska idén materialet var avsett att representera (Uttal, Scudder, & DeLoache, 1997; DeLoache, 2000). Fenomenet har även uppmärksammats av Szendrei (1996) och Martin (2009) som menar att det finns en risk att eleverna blir för upptagna med materialet i sig så att den matematiska idén förloras. När elever eller lärare använder denna typ av laborativt material skriver De Bock, Verschaffel, Janssens, Van Dooren, och Claes (2003) att det finns en

¹³ McNeil et al., (2009) använder begreppet *perceptually rich manipulatives*, vilket här översätts till *perceptuellt rika laborativa material*

¹⁴ McNeil et al., (2009) använder begreppet *bland manipulatives*, vilket här översätts till *enkla laborativa material*

risk att eleverna kan få svårt att förstå hur materialet kan användas i andra kontexter. Elever som är förtrogna med att använda låtsaspengar vid olika typer av spel kan få svårt att förstå hur låtsaspengarna kan användas i samband med benämnda uppgifter (DeLoache, 1995; Uttal, Liu, & DeLoache, 2006). En studie gjord av Kaminski, Sloutsky, och Heckler (2008) visade att den elevgrupp som endast erbjudits abstrakt och formell matematik uppvisade bättre förmåga att generalisera sina kunskaper än den elevgrupp som erbjudits olika typer av perceptuellt rikt laborativt material. Deras slutsats är att materialet kan begränsa elevernas förmåga att generalisera matematiska begrepp. Resonemanget bygger på att ju mer framträdande det laborativa materialet är i sig självt, desto sämre är dess förmåga att representera en matematisk idé. Langer (1942) uttrycker detta genom att konstatera: "a peach would be a poor symbol because we are too much interested in peaches themselves" (s. 75).

Liknande perspektiv på varför ett enkelt laborativt material är att föredra framför perceptuellt rika laborativa material bygger på DeLoache (1995, 2000, 2004) och Belenky och Schalk (2014) resonemang om begreppet *dual representation* (översätts i studien till dubbel representation). Med detta menas att inbyggt i ett laborativt material finns en dubbel representation. Samtidigt som materialet representerar dels sig självt så representerar det dels en matematisk idé. Forskarna menar att för att materialet ska användas effektivt så måste eleverna fokusera på den matematiska idén istället för materialet i sig självt. Eftersom enkla laborativa material är utformade så att de har begränsade kännetecken så kan det då underlätta för eleverna att fokusera på den matematiska idén istället för materialet i sig.

Vilka elever som påverkas av materialets egenskaper beror på flera faktorer. Förmågan att hantera perceptuellt rika material ökar i takt med elevernas ålder och ökad arbetsminneskapacitet (Gathercole, Pickering, Ambridge & Wearing, 2004; Son, Smith, & Goldstone & Sakamoto, 2003)

Argument för laborativt material i matematikundervisningen

Det finns flera skäl till att använda laborativt material i matematikundervisningen. Ett skäl är att användningen av laborativt material bland annat visat sig gynnsamt för att utveckla

elevers olika förmågor i matematik (se exempelvis Gürbüz, 2010; Sarama et al., 2003; Sowell, 1989). Argumenten som talar för användningen av laborativt materialet i matematikundervisningen kan delas in i kategorierna (a) utveckla elevers begreppsförmåga, (b) utveckla elevers kommunikations- och resonemangsförmåga samt (c) utveckla elevers attityder till matematik i en positiv riktning (McLeod, 1992). Nedan presenteras och utvecklas respektive argument var för sig.

Utveckla elevers begreppsförmåga

Som tidigare nämnts stödjer flertalet studier (se Clements, 1999; Cotter, 2000; Durmus & Karakirik, 2006; Kennedy & Tipps, 1994; Sowell, 1989) användandet av laborativt material eftersom de menar att elevers begreppsliga förmåga kan utvecklas då ett laborativt material används i matematikundervisningen. Ytterligare exempel på studier som visar att det är fördelaktigt att använda laborativt material för att utveckla elevers begreppsliga förmåga är Mochs (2002) studie *Manipulatives Work!* Studien genomfördes bland elever i årskurs 5 under en sju veckors period. En interventionsstudie genomfördes där lärare och elever arbetade med laborativt material under 12 matematiklektioner á 90 min. Elevernas begreppsliga förmåga avseende (a) taluppfattning, (b) geometri och (c) algebra mättes vid för- och eftertest. Testet visade att eleverna förbättrade sina resultat med ett snitt på 10 %. Den största förbättringen skedde inom området geometri följt av områdena taluppfattning och algebra. Även Goldsbys (2009) metaanalys påvisade bättre prestationer för elever som använt ett laborativt material jämfört med de elever som inte haft tillgång till något laborativt material. Ytterligare en studie som påvisat goda resultat av elevers begreppsliga förmåga gällande tal i bråkform och laborativt material är Martin och Schwartz (2005). I en serie av experiment fick elever i år 4 arbeta med uppgifter inom tal i bråkform. Den ena elevgruppen arbetade med uppgifterna genom skrivna uppgifter. Den andra elevgruppen arbetade med uppgifterna med hjälp av laborativt material. Resultatet indikerar att elever som arbetade med uppgifterna med hjälp av laborativt material fick en bättre begreppslig förståelse av tal i bråkform än den andra elevgruppen.

Trots att flera studier stödjer användandet av laborativt material finns det andra studier som visar att det laborativa materialet har en begränsad effekt. Ett exempel på en studie som visar att laborativt

material har en begränsad effekt på elevernas lärande är Beishuizens (1993) studie. Materialet som i studien bestod av hundrarutor och multibasmaterial hjälpte inte eleverna att utveckla någon begreppslig förmåga gällande addition- och subtraktionsberäkningar. Beishuizen (1993) menar att resultatet beror på att materialet som användes i studien ledde till att eleverna utvecklade ett passivt beteende och att eleverna enbart lärde sig att "läsa av" materialet utan något kognitivt engagemang.

Likaså visar Nishida (2007) i sin studie om bråkundervisning att eleverna som undervisats om tal i bråkform utan laborativt material presterade på samma nivå, som de elever som hade undervisats med hjälp av laborativt material. Utifrån ovan nämnda studier framgår att förvärvandet av begreppslig förståelse inte garanteras bara för att laborativt material används. De två sistnämnda studierna är exempel på det Ball (1992) skriver att ett laborativt material i sig själv inte kan hjälpa eleverna att förstå den matematiska idén som materialet representerar. Motstridigheterna mellan resultaten hänger ihop med dels vilket material som används, dels hur läraren använder materialet. Andra faktorer som också kan påverka resultaten är det matematiskt innehållet, elevernas ålder och klassrumsmiljön (Carbonneau et al., 2013). Uttal et al. (2006) menar därför att det är viktigt att lärare överväger både fördelarna och nackdelarna med att använda ett laborativt material.

Utveckla elevers begreppsuppfattning med hjälp av representationsformer

Forskning som argumenterar för att användandet av laborativt material hjälper eleverna att utveckla sin begreppsliga förmåga, baseras på teorier av Piaget (1962), Bruner (1964) och Montessori (1964). Dessa menar att eleverna lär sig abstrakta begrepp i interaktion med det laborativa materialet (McNeil & Jarvin, 2007). Ett sätt att utveckla elevers förståelse för abstrakta begrepp inom matematiken är att använda olika former av representationer, där laborativt materialet räknas som en representationsform (Dienes, 1969). Elever kan bättre förstå matematiska begrepp när de får tillgång till laborativt material och/eller bilder (Piaget, 1952). Skemp (1987) stödjer också uppfattningen om att elevers tidiga möte och interaktion med fysiska objekt, gynnar förståelsen av abstrakta begrepp. Representationsformerna spelar en viktig roll när eleverna ska lära sig nya begrepp då representationerna kan ses som olika

sätt att förstå samma matematiska begrepp (Ainsworth, Bibby, & Wood, 2002; Stylianou, 2009).

Inom matematikdidaktisk forskning presenteras olika perspektiv beträffande ordningen och användandet av representationsformerna. Ett perspektiv bygger på Bruners (1966) teoretiserande om att tre olika nivåer, (I) enaktiv, (II) ikonisk och (III) symbolisk representationsform, ska användas för att ge eleverna möjlighet att utveckla nya förmågor. Liknande tankar på progression mellan representationsformerna återfinns hos Heddens (1986). Han menar att svårigheten att förstå abstrakta begrepp inom matematik beror på gapet mellan det konkreta och det abstrakta. Heddens (1986) utvecklar Bruners (1966) representationsformer genom att föra in ytterligare två former av den ikoniska representationsformen. Dessa former kallar han *semikonkret* respektive *semiabstrakt* form. I den semikonkreta formen representeras den konkreta formen med hjälp av bilder av de konkreta föremålen i stället för konkreta föremål. I den semiabstrakta representationsformen ersätts bilderna av symboler som inte liknar den abstrakta situationen. De olika nivåerna ska följas i en sammanhängande sekvens där den andra bygger på den första (Heddens, 1986; se även Cramer & Karnowski, 1995; Kosko & Wilkins, 2010).

Ett annat perspektiv företräds av bland annat Lesh et al., (1987), Mc Intosh (2008) och Skemp, (1987). Mc Intosh (2008) som menar att ordningen eller progressionen mellan representationsformerna beror dels på elevens förmåga, dels på vilket begrepp som eleven ska utveckla. Istället för en progression beträffande inlärningsnivåer utgår detta perspektiv från Leshs (1981) schema som illustreras i figur 10. Lesh menar att schemat kan ses som en arbetsmodell för hur lärare kan välja relevant representationsform kopplat till aktuellt begrepp. Ju fler representationsformer och översättningar mellan representationsformer desto bättre möjlighet för eleverna att utveckla sin begreppsliga förståelse för det matematiska begreppet (Ainsworth et al., 2002). Pilarna och verben i figur 10 belyser dels de olika riktningar mellan representationsformerna, dels hur representationsformerna kan användas i matematikundervisningen för att utveckla elevernas begreppsliga förståelse av ett matematiskt begrepp.

Figur 10. Transformationer mellan olika representationsformer och uttrycksformer i matematik (efter Lesh, 1981).

Utveckla elevers kommunikations- och resonangsförmåga

Andra förmågor i matematik som kan utvecklas genom användandet av laborativt material är kommunikationsförmågan med avseende på dels muntlig kommunikation (Mercer & Sams, 2006; Hiebert & Wearne, 1993), dels skriftlig kommunikation (Kosko & Wilkins, 2010; Kenney, 2005). En uppfattning inom matematikdidaktisk forskning är att det föreligger ett samband mellan användandet av laborativt material och elevers kommunikationsförmåga i matematik (exempelvis Cramer & Karnowski, 1995; Kroll & Halaby, 1997; Moch, 2002; Moyer, 2001; Stein & Bovalino, 2001; Whitin & Whitin, 2004). I de ovan nämnda studierna diskuteras och beskrivs sambanden utan att närmare gå in på effekterna. Studierna visar ändå att elever som använder laborativt material i matematikundervisningen är mer benägna att muntligt kommunicera och resonera kring matematik (Kosko & Wilkins, 2010). I Whitin och Whitins (2004) studie användes laborativt materialet av eleverna i år 4 då de med egna ord skulle definiera vad en triangel var för något och själva upptäcka relationen mellan de tre sidorna i en triangel. Resultatet av studien visade att det laborativa materialet bidrog till att eleverna utvecklade både den muntliga och den skriftliga kommunikativa förmågan. Studiens resultat kan sägas visa på ett förhållande mellan det laborativa materialet och elevers kommunikationsförmåga.

Även en reanalys av en tidigare studie från the Early Childhood Longitudinal Study (ECLS) - Fifth Grade Year syftade på att avgöra om det fanns en relation mellan elevers matematiska kommunikation och användandet av laborativt material. Resultatet visade på ett sådant samband mellan elevers användande av

laborativt material och deras kommunikationsförmåga. Sambandet var statistiskt signifikant för både muntlig- och skriftlig kommunikation (Kosko & Wilkins, 2010).

Utveckla elevers positiva attityder till matematik

Negativa attityder till matematik kan leda till försämrat resultat inom matematikämnet (SOU, 2004:97). Matematikdidaktikforskare skriver att användandet av laborativt material i matematikundervisningen kan motverka och/eller förhindra negativa attityder till matematik (Cruikshank & Sheffield, 1992; Furoto & Lang, 1982; Reys, Suydam, & Lindquist, 1995). En hypotes som framförs av Cordova och Lepper (1996) Schraw, Flowerday, och Lehman (2001), Sweller, van Merrienboer, och Paas (1988) och Sweller (2006) är att när ett laborativt material används i matematikundervisningen är det för att hjälpa eleverna att förstå nya matematiska begrepp som i sin tur leder till att underlätta för elevernas minne. Samtidigt förstärks också elevernas begreppsliga förståelse genom att den nya kunskapen förankras i den gamla. Detta i sin tur, menar forskarna, leder till att elevernas positiva attityder till matematik ökar (jfr Allen, 2007). Allen (2007), Martinez (1987) och Sowell (1989) skriver dessutom att elevers attityder till matematik kan förbättras när eleverna arbetar med laborativt material, förutsatt att läraren även är förtrogen med att använda laborativt materialet i undervisningen.

Olika arbetssätt med laborativt material

Ett laborativt material kan användas vid både ett laborerande- och ett konkretiserande arbetssätt. En god lärandemiljö är en balans mellan de olika arbetssätten, mellan elevers egna undersökningar och lärares systematiska handledning (Pettersson, 2003; se även Trygg, 2014). Arbetssätten kan enligt Star och Rittle-Johnson, (2008) användas som komplement till varandra och kan vid behov kombineras med varandra.

Med avseende på hur lärare använder ett laborativt material samt elevernas erbjudande att använda det laborativa materialet kan matematikundervisningen, med utgångspunkt i Tryggs (2014) resonemang om *laborativt* respektive *konkretiserande arbetssätt* samt Leshs (1981) idé om transformationer mellan olika representationsformer och uttrycksformer i matematik, beskrivas.

Ett laborerande arbetssätt utmärks då av att det utgår ifrån informella representationsformer i riktning mot formella. Arbetssättets riktning kan illustreras med hjälp av figur 11. I den vänstra delen av figuren finns de informella representationsformerna. Den högra delen av figuren illustrerar de representationsformer som tillhör de formella.

Figur 11. Laborerande arbetssätt med inspiration från Lesh (1981)¹⁵.

Ett konkretiserande arbetssätt kännetecknas av att gå ifrån formella representationsformer och rör sig i riktning mot de informella. Rörelsen illustreras med hjälp av figur 12 nedan.

Figur 12. Konkretiserande arbetssätt med inspiration från Lesh (1981).

¹⁵ Grön kontur= informella representationsformer, svart kontur= formella representationsformer

Metod

I kapitlet redovisas inledningsvis studiens design och tillgång till fältet. Därefter beskrivs hur bearbetningen av datamaterialet gått till. Kapitlet avslutas med en redogörelse av analysprocessen samt studiens kvalitetskriterier.

Studiens design

För att studera lärares och elevers användning av laborativt material när de arbetar med tal i bråkform har insamlandet av data skett genom deltagande observation i form av videoinspelningar. Bilder och fältanteckningar ingår även i det empiriska materialet. Fältanteckningarna gjordes som en "backup" för videoinspelningarna. Forskarens roll kan beskrivas som en icke – deltagande observatör (se Bryman, 2011). Det innebär att jag som forskare inte har deltagit eller interagerat med elever och eller lärare under matematiklektionerna. Vid några tillfällen har avsteg gjorts från den rollen genom att exempelvis hjälpa till med att plocka upp något laborativt material som ramlat ner från en bänk eller svarat på någon fråga från eleverna. Bedömning av dessa avsteg är att de inte har påverkat studiens resultat.

Tillgång till fältet

Nedan beskrivs urval, datainsamling och datainsamlingsmetod.

Urval

För att besvara studiens syfte och frågeställningar krävdes tillgång till ett fält. I denna studie består fältet av matematiklektioner i år 4-6. Becker (2008) menar att valet av fält bör vara ett medvetet val eftersom skolor skiljer sig åt exempelvis beträffande sammansättning av elever, huvudmän och arbetsformer. Skolor har under de senaste åren blivit mer etniskt och socialt segregerade (Skolverket, 2009). Detta har påverkat urvalet av skolor. Empirin består av observationer från 20 stycken olika matematiklektioner fördelade på nio skolor i fyra kommuner. Samtliga skolor är kommunala grundskolor i östra Mellansverige. Skolorna skiljer sig åt beträffande geografisk placering och årskurssammansättning.

Tabell 1 är en sammanställning över fördelningen av de årskurser som observerats. Här framkommer även vilket undervisningsinnehåll som behandlades under den observerade matematiklektionen samt den undervisningssekvens som kopplas till respektive årskurs. Undervisningssekvensernas nummer används i resultatkapitlet i samband med att excerpten återges.

Tabell 1. *Årskurs, undervisningsinnehåll och undervisningssekvens.*

Årskurs	Undervisningsinnehåll	Undervisningssekvens
4	Delens namn är inte beroende av helhetens form och bråkdelen i en helhet är lika stora	1 (a, b) ¹⁶
4	Delens namn är inte beroende av helhetens form och bråkdelen placering i en geometrisk figur samt indelningen av den geometriska figuren. Bråkdelen i en helhet är lika stora	2 (a, b, c)
4	Jämföra olika bråkuttryck	3 ¹⁷
4	Bråkdelen placering i en helhet och beräkningar av tal i bråkform	4
4	Ett givet antal kan delas in i olika bråkdelen	5
4	Nämnarens och täljarens placering i ett bråkuttryck	6
4	Nämnarens och täljarens funktion	7
5	Ett givet bråkuttryck kan representera olika antal	8
5	Jämföra och storleksordna olika bråkuttryck	9 (a, b)
5	Beräkningar av tal i bråkform	10
5	Ett givet antal kan delas in i olika bråkdelen	11 ¹⁷
5	Nämnarens och täljarens funktion i ett bråkuttryck	12
5	Ekvivalenta bråkuttryck	13
5	Bråkdelen i en helhet är lika stora	14 (a, b)
5	Ett givet antal kan delas in i samma bråkdelen med olika strategier	15
5	Ekvivalenta bråkuttryck	16
6	Storleksordna bråkuttryck	17 ¹⁷
6	Samband mellan tal i bråk-procent och decimalform och skillnader mellan bråkstrecker och decimaltecken	18 (a, b)
6	Samband mellan tal i bråk-procent och decimalform	19
6	Förkortning av bråkuttryck	20

¹⁶ a, b etc. indikerar att exemplet är hämtat från den första respektive andra delen av undervisningssekvensen.

¹⁷ Undervisningssekvens 3, 11 och 17 har ingått i bearbetningen av datamaterialet men beskrivs inte i resultatkapitlet som någon egen undervisningssekvens eftersom dessa liknade andra undervisningssekvenser.

I föreliggande studie har ett strategiskt urval använts. Ett strategiskt urval kan användas för att få en stor variation i svaren på det undersökta fenomenet. Vid ett strategiskt urvalsförfarande väljs ett antal variabler ut som är av teoretisk betydelse (Trost & Hultåker, 2007). I denna studie har följande tre variabler, (a) spridning, (b) erfarenhet av videoinspelning och (c) lärares erfarenhet av användandet av laborativt material uppmärksammats. För att tillgodose variabeln *spridning* och en bred variation av matematiklektioner har urvalet utgått från att observera matematikklassrum från olika: kommuner, skolor, klasser och lärare, vilket beskrivits ovan. En ytterligare variabel som beaktats är att de medverkande *lärarna och eleverna skulle vara vana vid videoinspelningar av lektioner*. Denna variabel har uppmärksammats då datainsamlingsmetoden eventuellt skulle kunna påverka lärarnas och elevernas vilja att delta i studien (jfr Mondada, 2006; Swantesson, 2012). Villkoret för att deltagarna skulle vara vana vid videoinspelningar behöver dock inte innebära att videoinspelningen inte påverkar vad som sker i matematikklassrummen. Tvärtom menar Mondada (2006) att det är viktigt att erkänna att videodokumentationen i sig blir inbäddad i den interaktion som sker.

Den sista variabeln rör *lärares erfarenheter av laborativt material*. Tidigare studier (exempelvis Raphael & Wahlstrom, 1989; Sowell, 1989) visar att elevers lärande i matematik är förknippat med lärarnas erfarenhet av att använda laborativt material. De lärare som observerats i föreliggande studie hade, enligt egna uppgifter, erfarenhet av att undervisa med hjälp av laborativt material.

Datainsamling

Datainsamlingen genomfördes från hösten 2011 till och med våren 2014. Lärarna kontaktades antingen muntligt eller via mail. Eftersom studiens syfte var specifikt gällande både innehåll (tal i bråkform) och arbetssätt (laborativt material) informerades lärarna om förutsättningarna. De lärare som ställde sig positiva till att medverka i studien skickade i sin tur ut information om studiens syfte och hur datainsamlingen skulle genomföras till elever och vårdnadshavare. När elever och vårdnadshavare i respektive klass lämnat skriftligt godkännande bestämdes tid för observation med de aktuella lärarna.

Datainsamlingsmetod

Som tidigare nämnts har insamlandet av data skett med hjälp av videoinspelning. Valet av datainsamlingsmetod grundar sig på data som samlats in med hjälp av ljud- och bildinspelningsteknik ger ett mycket detaljrikt empiriskt material (jfr Bjørndal, 2005; Derry et al, 2010; Jordan & Henderson, 1995). Videoinspelningar underlättar vid analysen av ickeverbala handlingar (Heath, Hindmarch, & Luff, 2010; Sparrman, 2005). Icke verbala handlingar kan till exempel röra sig om lärares och eller elevers hantering av laborativt material. Även om det finns fördelar med videoinspelningar som datainsamlingsmetod finns även en del nackdelar. Jordan och Henderson (1995) menar att det finns begränsningar gällande både tekniken i sig själv och handhavande av tekniken. En teknisk begränsning har varit placeringen av videokameran i klassrummen. Videokameran har haft en fast placering längst bak i klassrummen. Placeringen grundar sig på Heath et al. (2010) argument om att videokamerans placering ska vara så diskret som möjligt så att den inte påverkar individerna som deltar i studien. Vid de tillfällen som eleverna arbetade individuellt, i par eller i grupp med det laborativa materialet krävdes en mer flexibel lösning. Vid dessa tillfällen användes istället Ipadens videoinspelningsfunktion, vilket ligger i linje med Heath et al. (2010) rekommendation. Som tidigare nämnts förekom även fältanteckningar. Dessa gjordes enbart som en backup i fall videoinspelningarna skulle misslyckas. Eftersom detta inte inträffade har fältanteckningarna inte använts vid bearbetningen av datamaterialet.

Bearbetning av data

Nedan presenteras tillvägagångssätt gällande transkribering och analys av datamaterialet.

Transkribering av data

Det material som visat sig överensstämma med studiens syfte har transkriberats medan andra partier som inte motsvarat studiens syfte har lämnats obearbetade (jfr Kvale & Brinkmann, 2009). Exempel på partier som inte transkriberats är delar av de observerade matematiklektionerna som handlat om exempelvis insamlandet av läxor, lärarinstruktioner som inte berört matematik och genomgångar där det laborativa materialet ej varit närvarande.

Totalt har data motsvarande ca 12 h matematikundervisning fördelat på 20 klassrum transkriberats.

Den transkriptionsnivå som använts har varit inspirerad av Linells (1994) transkriptionsnivå III, vilket innebär att den transkriberade texten kan likställas med en utförlig dokumentation av vad som sagts. Valet av transkriptionsnivå grundar sig på de tankar som framhålls av Forsblom-Nyberg (1995), Kvale och Brinkmann (2009), Norrby (1996) och Ochs (1979) som skriver att transkriptionen ska göras selektivt så att den återspeglar de aspekter av samtalet som är nödvändiga för studiens syften. Den uppställningsmodell som har använts vid transkriberingen är inspirerad av en *linjär dramadialogisk modell* (Linell, 1994) vilket innebär att samtalen återges replik för replik. Enligt Forsblom-Nyberg (1995) kan det vara svårt att samordna icke-verbala handlingar i denna typ av modell. För att visualisera icke-verbala handlingar och integrera dessa handlingar har den uppställningsmodell som använts vid transkriberingen även varit inspirerad av *kolumnmodellen* (jfr Forsblom-Nyberg 1995). I tabell 2 återfinns de symboler som används vid transkriberingen. Efter tabellen visas ett exempel på excerptutdrag där symbolerna används.

Tabell 2. *Transkriptionsnyckel.*

<i>Symboler</i>	<i>Innebörd</i>
L	lärare ¹⁸
E	elev ¹⁹
E _i	siffror används för att skilja mellan olika elevers repliker som förekommer inom samma excerpt
E _{alla} =	beteckningen "alla" används när det är flera elever som uttrycker något och då det inte går att urskilja någon specifik individ
[]	beskrivning av ickeverbala handlingar

18, 19 Eftersom kön- och etnicitetsaspekter inte är relevant i relation till studiens syfte används enbart beteckningarna L och E.

Excerpt X (undervisningssekvens y)

- 1 L Kan någon säga vad jag har skrivit på tavlan?
2 E₁ En halv
3 L Just det, en halv står det. Sen har jag satt upp lite figurer här
4 va. Spelar det någon roll tror ni vad det är för form på de
5 olika figurerna när vi ska vika bråktal? Tror ni jag kan vika bråket
6 en halv av en rektangel? Vad tror du NN?
7 E₂ Ja
8 L Ja, det tror jag att ni ser allihopa va. Ska vi testa? Då lägger jag
9 sidorna mot varandra och då får vi en halv. [DETTA VISAS
10 GENOM ATT LÄRAREN HÅLLER UPP REKTANGELN SOM
11 VIKS PÅ MITTEN]

Analys av data

Datamaterialet har analyserats med utgångspunkt i studiens syfte och frågeställningar. Det innebär att analysarbetet har delats upp i två faser. Den *första fasen* i analysarbetet avser att ge svar på de två första frågeställningarna (1) På vilka sätt används laborativt material i bråkundervisningen? och (2) Vilka typer av laborativt material används i bråkundervisningen? I den första analysfasen ligger det insamlade datamaterialet till grund för kodningsprocessen. Därmed kan den första fasen betecknas som induktiv (jfr Braun & Clarke, 2006).

Studiens teoretiska utgångspunkt, variationsteorin, utgör grunden för *analysens andra fas*. Här besvaras studiens två sistnämnda frågeställningar (3) Vilka dimensioner av variation öppnas upp om tal i bråkform när laborativt material används? och (4) Vad görs möjligt för eleverna att erfara om tal i bråkform?

Analysens första fas

Datamaterialet är insamlat från olika matematiklektioner men har analyserats som en enda helhet. Avsikten har varit att fånga upp och beskriva de olika undervisningssekvenserna, det vill säga vad som händer under matematiklektionerna när lärare och elever använder sig av laborativt material, utan att göra några jämförelser mellan de observerade matematiklektionerna. Tillvägagångssättet i den första analysen har inspirerats av Braun och Clarkes (2006) analysprocess. I enlighet med det första steget av nämnda analysprocess har stor vikt lagts vid att bekanta sig med datamaterialet. Detta gjordes i samband med transkriberingen. Transkriberingen skapade en god

förståelse för materialet vilket i sin tur har varit till hjälp vid analysen. Vid genomläsning av det transkriberade materialet gjordes anteckningar om olika undervisningssekvenser som var intressanta i relation till studiens syfte. Anteckningarna utgjorde sedan grunden för steg två i analysprocessen där initiala koder med särskilt intressanta drag skapades på ett systematiskt sätt. Exempel på initiala koder som skapades är *eleverna visar med hjälp av multilinkkuber olika strategier hur de gör* och *lärare använder bråkcirklar för att jämföra bråkuttryck*. Koderna ströks under med olika färgpennor och antecknades i ett separat dokument. Förutom att fokusera på olika undervisningssekvenser, uppmärksammades under analysens första fas om och i så fall hur det laborativa materialet påverkade matematikundervisningen. Analysens tredje steg, handlar om att söka efter teman samt att precisera eventuella tidigare identifierade teman. De koder som identifierats i samband med analysens andra steg organiserades i grupper som tillsammans bildade teman. Under analysens fjärde steg gjordes en kritisk granskning av de identifierade temana. Exempelvis uppmärksammades om det fanns tydliga distinktioner mellan temana och samstämmighet inom temana. I det femte steget gjordes ytterligare en kritisk granskning om temana hjälpte till att besvara studiens syfte och frågeställningar. Det sjätte och sista steget av analysprocessen gjordes efter att analysens andra fas (se nedan) var avslutad.

Analysens andra fas

Till denna del av analysen har inspiration hämtats från Häggströms (2008) analysprocess. En anledning till valet av analysprocessen är att analysen syftar till ta ett elevperspektiv i matematikklassrummet och ur detta perspektiv analysera de fokuserade aspekterna och vad som görs möjligt för eleverna att lära i relation till lärandeobjektet. Vissa avsteg från Häggströms (2008) analysprocess har dock gjorts. Ett sådant avsteg gäller steg 1, som handlar om att identifiera det matematiska innehållet, eftersom detta redan genomförts i samband med analysens första fas.

Efter att teman genererats utifrån analysens första fas gjordes nya genomläsningar av datamaterialet. Syftet var här att urskilja det Häggström (2008) benämner "focusing one object of learning at a time" (s. 78). Frågor som ställdes till materialet var till exempel: Vad

är den fokuserade aspekten i denna undervisningssekvens? När den fokuserade aspekten identifierats analyserades materialet återigen med utgångspunkt i variationsteorin (jfr Lo, 2012; Marton, 2015). Här analyserades vad som varierade och vad som var invariant i relation till den fokuserade aspekten samt vilket erfaranade som gjordes möjligt för eleverna. Här noterades även om någon eventuell kritisk aspekt i relation till de fokuserade aspekterna framträdde.

Metoddiskussion

I relation till studiens kvalitet har begreppen *validitet* och *reliabilitet* (Kvale & Brinkmann, 2009) samt de tre kvalitetskriterierna, *perspektivmedvetenhet*, *intern logik* och *etiska överväganden* (Larsson, 2005) och som rör kvaliteter i framställningen av studien som helhet beaktats.

Validitet beskrivs av Bryman (2011) som en sorts giltighet om metoden som valts undersöker vad den påstås undersöka. Det vill säga kan studiens frågeställningar besvaras med hjälp av den valda metoden. I denna studie har insamlandet av data skett med hjälp av videoinspelning av matematiklektioner där lärare och elever använder laborativt material när de arbetar med tal i bråkform, vilket stämmer väl ihop med de frågeställningarna som ställs i studien.

Reliabilitet handlar enligt Bryman (2011) om studiens tillförlitlighet och rör frågan om resultaten blir de samma om studien genomförs på nytt. För att nå hög reliabilitet i denna studie har forskningsprocessen redovisats så noggrant som möjligt i syfte att göra forskningsprocessen *transparent* (se Bryman, 2011).

Kvalitetskriteriet *perspektivmedvetenhet* inbegriper bland annat forskarens förförståelse. "Genom att explicitgöra förförståelsen gör man utgångspunkter för tolkningen tydlig" (Larsson, 2005, s 4). Ett sätt att göra detta är att redovisa forskningsläget (Larsson, 2005). I denna studie har forskningsläget om matematikdidaktik beskrivits i det inledande kapitlet. Ett annat sätt är enligt Larsson (2005) att redovisa den tolkningsteori som legat till grund för analysen. I föreliggande studie har den tolkningsteori som använts beskrivits i kapitlet teoretiska utgångspunkter.

Det andra kvalitetskriteriet rör studiens *inre logik*. Enligt Howe och Eisenhart (1990) och Larsson (2005) innebär det att skapa en harmoni mellan studiens forskningsfrågor, val av datainsamling och

den analysteknik som används. Vidare menar de att forskningsfrågorna ska vara styrande när det gäller vilka datainsamlingsmetoder och analyser som används och inte tvärtom. För att skapa en intern logik har studiens syfte och frågeställningar varit avgörande när det gäller val av datainsamlingsmetod. Exempelvis så valdes datainsamlingsmetoden observation som den mest lämpliga för att besvara studiens syfte som är att beskriva och analysera hur lärare och elever i skolår 4-6 använder laborativa material när de arbetar med bråk i matematikundervisningen.

Det tredje kvalitetskriteriet som Larsson (2005) lyfter fram är att studien ska uppfylla god *forskningsetik*. En viktig del av god forskningsetik handlar, och som är av vikt i föreliggande studie, om frågor om hur individer som ingår i forskningsstudien behandlas. Individskyddskravet kan preciseras i fyra allmänna huvudkrav, (a) informationskravet, (b) samtyckeskravet, (c) konfidentialitetskravet och (d) nyttjandekravet (Vetenskapsrådet, 2011). Som tidigare nämnts presenterades studiens syfte för ett antal verksamma matematiklärare i år 4-6. Via de lärare som var villiga att delta i studien skickades ett informationsbrev (se bilaga 1) innehållandes syfte med studien och samtyckesblankett till berörda elever och vårdnadshavare. Vid observationstillfällena presenterades återigen studiens syfte för lärarna och eleverna. På så sätt anses *informationskravet* vara uppfyllt. Vetenskapsrådet (2011) skriver att datainsamling med hjälp av videoinspelning kan inkräkta på individernas privatliv och integritet. I denna studie gäller det både de videofilmade lärarna och eleverna. Därför har särskilt hänsyn tagits till *samtyckeskravet* som i föreliggande studie omfattar både lärare och elever. Förutom lärarnas samtycke till medverkan har även elevernas och deras vårdnadshavares samtycke krävts. För att inte elever, lärare och/eller klassrum ska kunna identifieras har de bilder²⁰ som förekommer i studiens resultatkapitel ritats om från autentiska bilder till enbart bilder med hjälp av ett ritprogram. I excerpten används inga namn utan för att markera när en elev säger något markeras detta med ett E och när en lärare säger något har detta markerats med ett L. *Konfidentialitetskravet* bedöms därmed vara fullgjort. Det sista kravet är *nyttjandekravet* och innebär att

²⁰ Figur 30, 36-38 är bilder från autentiska matematikklassrum

insamlat datamaterial enbart får användas för forskningsändamål, vilket även är intentionen med denna studie.

Resultat

Resultatkapitlet är uppdelat i fyra huvudteman. Strukturen är inspirerad av hur tal i bråkform kan uppfattas, det vill säga olika typer av bråkmodeller. Huvudtemana har delats in i olika underteman (se tabell 3) och beskrivs med hjälp av en eller flera undervisningssekvenser vars syfte är att spegla den observerade matematikundervisningen. I tabell 3 redovisas en översikt över resultatkapitlets huvudteman. I relation till varje bråkmodell beskrivs (a) på vilka sätt laborativt material används, (b) vilka typer av laborativt material som används, (c) vilka dimensioner av variation som öppnas upp om tal i bråkform och (d) vad eleverna ges möjligt att erfara om tal i bråkform.

Tabell 3. *Resultatkapitlet huvudteman.*

Bråk som del av helhet
Bråk som del av antal
Bråk som tal
Beräkningar av tal i bråkform

Varje huvudtema sammanfattas med hjälp av en tabell (se exempel tabell 4 nedan). I tabellen presenteras (a) den undervisningssekvens som avses, (b) vilket laborativt material som används, (c) vilka dimensioner av variation som öppnas upp samt (d) vad eleverna ges möjlighet att erfara.

Tabell 4. *Exempel på tabell som förekommer i sammanfattningarna av undervisningssekvenserna.*

Undervisnings- sekvens	Laborativt material	Dimensioner av variationer som öppnas upp	Eleverna ges möjlighet att erfara
Nr	Material som används	Vilken dimension av variation som öppnas upp	Vad eleverna ges möjlighet att erfara

Bråk som del av helhet

Lärares och/eller elevers användning av laborativt material när begreppsmodellen *bråk som del av helhet* behandlas beskrivs utifrån

tre olika aspekter. En aspekt handlar om att eleverna ges möjlighet att erfara att (a) bråkdelarna som ingår i ett och samma objekt, det vill säga en helhet, måste vara lika stora. En andra aspekt av begreppsmodellen är att eleverna ges möjlighet att erfara att (b) det inte har någon betydelse hur helheten delas in och bråkdelarnas placering i helheten. I den tredje och sista aspekten riktas fokus mot att eleverna ges möjlighet att erfara att (c) det är nämnaren i ett bråkuttryck som ger namn åt andelarna och inte andelens form eller storlek.

Bråkdelarna som ingår i en helhet måste vara lika stora

När lärarna använder laborativt material för att konkretisera att de bråkdelar som ingår i en helhet måste vara lika stora görs det på två olika sätt. Det ena sättet innebär att läraren använder sig av kvadrater för att åskådliggöra denna aspekt. Kvadraterna används parvis, där den ena kvadraten är indelad i lika stora delar, medan den andra kvadraten är delad i samma antal delar som den föregående men delarna är olika stora. Det andra sättet innebär att läraren istället använder frukt för att konkretisera denna aspekt.

Läraren konkretiserar att bråkdelarna är lika stora med hjälp av två kvadrater

Läraren använder två kvadrater som är av samma storlek och färg där den ena kvadraten är indelad i tredjedelar (se kvadrat A i figur 13) och den andra kvadraten är delad i tre delar (se kvadrat B i figur 13). Kvadraterna sätts upp bredvid varandra på whiteboardtavlan. Läraren uppmärksammar först begreppet en hel genom att peka på den ena av kvadraterna. Därefter uppmärksammas bråkdelarnas storlek.

Figur 13. Kvadrater som visas på tavlan.

Excerpt 1 (undervisningssekvens 14a)

1	L	Det här är ju en hel. [PEKAR PÅ KVADRAT A]
2		Om jag nu gör så här istället [VÄNDER
3		PÅ MITTENDELEN SÅ ATT EN ANNAN FÄRG
4		FRAMTRÄDER] Hur stor är den delen då?
5	E	En tredjedel
6	L	Ja, en tredjedel är det, det ser man ganska tydligt
7		Alla bitar måste vara lika stora. [EN TREDJEDEL
8		SKRIVS UNDER FIGURENS MITTENDEL] När
9		man tittar på de olika delarna måste man alltid
10		utgå från det hela, oavsett hur figuren än ser ut.

Här använder läraren kvadraterna för att dels konkretisera hur en tredjedel ser ut, i relation till en hel (rad 6), dels konkretisera att delarna inom samma objekt måste vara lika stora (rad 7).

Elevernas uppmärksamhet riktas därefter mot "kvadrat B" och de får frågan om även den kvadraten är indelad i tredjedelar.

Excerpt 2 (undervisningssekvens 14a)

1	L	Den här figuren då. Är den delad i tredjedelar?
2		[PEKAR PÅ KVADRAT B]
3	E ₁	Nej
4	L	Jo men se här det är tre stycken delar, en, två och
5		tre [PEKAR SAMTIDIGT PÅ VARJE DEL I
6		KVADRAT B]
7	E ₂	De är inte lika stora
8	L	Nä, de är ju inte lika stora. Att det är tre delar det
9		ser man ju, men de är ju inte lika stora. Hur ska vi
10		göra nu då om vi skulle dela den i tre lika stora
11		delar då? [ELEVERNA PEKAR PÅ KVADRAT A]

Läraren exemplifierar, med hjälp av kvadraterna, olikheter mellan kvadrat A som är indelad i tredjedelar och kvadrat B som är delad i tre delar (figur 13). Den fokuserade aspekten, *att bråkdelarna som ingår i ett objekt måste vara lika stora*, varierar medan andra aspekter som form och färg och antal delar är invarianta. Kontraster mellan tredjedelar och tre delar öppnar upp en dimension av variation av att bråkdelarna i en helhet måste vara lika stora. Eleverna ges möjlighet att erfara att alla bråkdelar som ingår i samma helhet måste vara lika stora.

Läraren konkretiserar att bråkdelarna är lika stora med hjälp av frukt

Förutom geometriska figurer används hela frukter för att illustrera att bråkdelarna i en helhet ska vara lika stora. Ett exempel på det är när läraren använder ett äpple för att konkretisera hur mycket $\frac{1}{4}$ är. För att symbolisera olika delar av en helhet (ett äpple) delar läraren

äpplet i fyra delar med hjälp av en kniv. När läraren skär äpplet med kniven visar det sig att det svårt att skära så att de fyra delarna blir exakt lika stora. Läraren påpekar detta för eleverna genom att säga "Ja, nu blev det ju inte så bra det här. Den här kniven var lite slö. Men ni får tänka er att delarna är lika stora" (undervisningssekvens 2a).

Eftersom läraren har svårt att dela frukten i exakta delar, blir det problematiskt att illustrera den fokuserade aspekten, *att delar som ingår i en och samma helhet måste vara lika stora*, även om läraren är medveten om och förklarar för eleverna att delarna i själva verket ska vara lika stora och att det inte har någon betydelse vilken storlek frukten (helheten) har. Under matematiklektionen konkretiseras bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ med hjälp av ett äpple, men inga jämförelser mellan att dela in en helhet (äpplet) i lika stora delar och olika stora delar görs. Läraren presenterar bara ett värde inom dimensionen, vilket innebär att den fokuserade aspekten hålls invariant. I undervisningssekvensen hålls även bakgrunden invariant. Eftersom både den fokuserade aspekten och andra aspekter hålls invarianta kan det variationsmönster som framträder beskrivas som en repetition av något som eleverna tidigare har erfart. Det innebär att eleverna inte ges några nya möjligheter att erfara att delar som ingår i ett och samma objekt (helhet) måste vara lika stora.

Eleverna är angelägna om att fråga läraren när de ser att det finns frukter uppdukade på katedern om de får äta av frukten efteråt. En av eleverna frågar läraren "Visst får vi äta upp frukten sedan?" (undervisningssekvens 2a) vilket bekräftas av läraren. Eleverna intresserar sig även över hur många bitar av frukten de får ta och om frukten är god eller inte. Att använda frukter som ett laborativt material i dessa sammanhang kan leda till att elevernas uppmärksamhet i första hand riktas mot frukten och inte på den matematiska idé frukten är tänkt att representera.

Sammanfattning av undervisningssekvenserna bråkdelen som ingår i en helhet måste vara lika stora

Undervisningssekvenserna 14a och 2a illustrerar olika sätt som lärare använder laborativt material på. I undervisningssekvenserna används laborativt material när lärarna konkretiserar att bråkdelen som ingår i en helhet måste vara lika stora, det vill säga lärarnas användande av laborativt material kan beskrivas utifrån ett konkretiserande arbetssätt. Det som skiljer under-

visningssekvenserna åt är att i undervisningssekvens 14a används två lika stora kvadrater där den ena representerar en kvadrat som är indelad i tredjedelar och den andra kvadraten är indelad i tre olika delar. När dessa skillnader visas ges eleverna möjlighet att erfara att delarna som ingår i en helhet måste vara lika stora. I undervisningssekvens 2a konkretiserar läraren att bråkdelen som ingår i en helhet måste vara lika stora med hjälp av ett äpple. Eftersom läraren enbart visar på ett sätt hur mycket en fjärdedel av frukten är och inte ställer det emot exempelvis fyra delar, görs här inga kontraster vilket kan innebära att eleverna inte ges möjlighet att erfara att delarna som ingår i en helhet måste vara lika stora. Ytterligare svårigheter med att använda frukt är att det dels är svårt för läraren att dela in frukten i lika stora delar, dels att en del elever riktar uppmärksamhet mot frukten istället för den fokuserade aspekten.

I figur 14 sammanfattas de undervisningssekvenser (US) som förekommer i undertemat. I figuren framkommer *på vilket sätt det laborativa materialet används, konkretiserande eller laborerande*. Vidare framkommer även vem som använder materialet, lärare (L) och/eller elever (E). I figur 14 presenteras även vad eleverna ges möjlighet att erfara i relation till lärandeobjektet.

Figur 14. Arbetssätt i undertemat bråkdelen som ingår i en helhet måste vara lika stora.

Indelning av en helhet och hur bråkdelarna placeras i helheten

Undervisningssekvens 2b visar hur läraren, med hjälp av rektanglar, riktar elevernas fokus mot att benämningen av en bråkdel inte påverkas av hur helheten delas in.

Förutom indelningen av helheten använder läraren även rektanglarna för att konkretisera att bråkdelarnas placering i en helhet inte påverkar benämningen av bråkdelen. Bråkdelarnas placering exemplifieras med hjälp av två undervisningssekvenser, 2c och 4. I undervisningssekvens 2c används två rektanglar för att konkretisera bråkdelarnas placering medan undervisningssekvens 4 illustrerar hur läraren konkretiserar bråkdelens placering inom en och samma rektangel.

Läraren konkretiserar med hjälp av två rektanglar att en helhet kan delas in på flera sätt

Under matematiklektionen har läraren noterat att två elevgrupper har delat in två lika stora rektanglar på två olika sätt. Det som skiljer gruppernas indelning är att den ena gruppen har delat in rektangeln med hjälp av lodräta streck och den andra gruppen har delat in rektangeln med hjälp av vågräta streck (se objekt a och b i figur 15).

Figur 15. Variationer av elevernas vikningar och markeringar (undervisningssekvens 2b).

Läraren frågar eleverna om det är någon skillnad på sätten att dela in rektangeln, vilket eleverna inte tycker att det är. Läraren undrar hur de skulle kunna göra för att bevisa att bråkdelarna är lika stora. En av eleverna föreslår att de ska riva bort en tredjedel från objekt a och en tredjedel från objekt b. De bortrivna delarna hålls upp och läraren säger "Ser de här lika stora ut?" (undervisningssekvens 2b). Några elever ser tveksamma ut, men den elev som föreslagit att de

skulle riva bort en tredjedel från vardera rektangeln föreslår att den bortrivna delen från objekt a ska delas i tre lika stora delar och sedan lägga dessa delar på objekt b, vilket läraren gör.

Skillnader mellan de två sätten att dela in rektangeln fokuseras. De olika sätten att dela in rektangeln ställs mot varandra eftersom dessa varierar mot en invariant bakgrund (två lika stora rektanglar). En dimension av variation öppnas upp, där två olika sätt att dela in rektangeln visas. Eleverna ges möjlighet att erfara att det inte har någon betydelse hur helheten delas in förutsatt att delarna inom helheten är lika stora.

Läraren konkretiserar med hjälp av två rektanglar att bråkdelen kan placeras på olika sätt i en helhet

Att bråkdelen kan placeras på olika sätt i en helhet uppmärksammas av läraren under en matematiklektion där eleverna delat in rektanglar i tredjedelar och markerat en av dessa delar för att illustrera hur mycket en tredjedel är. En elevgrupp valde att använda sig av den mittersta delen för att markera hur stor del en tredjedel av rektangeln var (se objekt d i figur 15). Den andra elevgruppen valde att markera den högra delen (se objekt c i figur 15). I samband med den ovan beskrivna undervisningssekvensen noterar läraren skillnaderna i elevernas sätt att markera en tredjedel av en helhet. Läraren frågar eleverna "om det har någon betydelse vilken del som markeras". En av eleverna säger att "det brukar vara den första eller den sista" (undervisningssekvens 2c) och får motfrågan om det alltid behöver vara så. En elev säger att det inte spelar någon roll eftersom alla delar är lika stora, vilket bekräftas av läraren. Diskussionen utmynnar i att även om det kanske är vanligast att den första delen av en helhet används för att markera en del av en helhet så kommer läraren och eleverna överens om att det inte spelar någon roll vilken del som markeras för att illustrera en given del av en helhet.

Den fokuserade aspekten, *det har inte någon betydelse vilken bråkdelen som markeras i helheten*, varierar eftersom elevgrupperna valt att markera en (tredje)del av en helhet på olika sätt. Andra aspekter såsom helhetens form och antal bråkdelar är invarianta. Läraren kontrasterar de två sätten att dela in en helhet och en dimension av variation att bråkdelen i en helhet kan markeras på olika sätt i en helhet kan öppnas upp. Eleverna ges möjlighet att erfara att det inte

har någon betydelse vilken av bråkdelen i en helhet som markeras för att illustrera en del av en helhet.

Läraren konkretiserar med hjälp av en rektangel att bråkdelen kan placeras på olika sätt i en helhet

Ett annat sätt att konkretisera att bråkdelen kan placeras på olika sätt i en helhet är då läraren enbart använder en och samma rektangel.

I undervisningssekvensen använder sig läraren av en rektangel som har byggts ihop med ett antal blåa sugrör. Rektangeln används för att konkretisera och göra eleverna uppmärksamma på om det har någon betydelse vilka delar i en helhet som ska markeras för att illustrera bråk som del av helhet. Läraren visar upp rektangeln för eleverna och frågar dem vad figuren heter. Eleverna identifierar att det är en rektangel. Rektangeln sätts därefter upp på tavlan med långsidan nedåt. Efter att rektangeln satts upp delas den, med hjälp av sugrör, in i femtedelar.

Excerpt 3 (undervisningssekvens 4)

1	L	Hur många delar har jag delat den här rektangeln i?
2	E ₁	Fem
3	L	Om jag nu ska måla eller skugga i två stycken eller två femtedelar
4		hur ska jag göra då?
5	E ₂	Färga två.
6	L	Ska jag färga två, spelar det någon roll vilka delar jag tar?
7		[LÄRAREN PEKAR PÅ DE OLIKA DELARNA I FIGUREN]
8	E ₂	Nja [TVEKAR]
9	L	Kan jag ta vilken jag vill? Kan jag ta någon i mitten eller så?
10		Så här, eller så här? [PEKAR PÅ REKTANGELN OCH GER
11		OLIKA FÖRSLAG PÅ DELAR SOM KAN MARKERAS]
12	E ₃	Ja, det kan man.
13	L	Då gör jag faktiskt så. [LÄRAREN BÖRJAR SKUGGA I MITTEN-
14		RUTAN OCH SEDAN RUTAN LÄNGST BORT TILL HÖGER]
15		Har jag skuggat två femtedelar nu?
16	E _{alla}	Jaa

Rektangeln används som stöd för att visualisera vilka delar som ska markeras så att två femtedelar av rektangeln blir markerade (rad 1-4). En kritisk aspekt gällande vilka delar som kan markeras identifieras när en av eleverna är osäker på om det spelar någon roll vilka delar av rektangeln som kan markeras eller inte (rad 8). Läraren visar med hjälp av det laborativa materialet att det inte spelar någon roll vilken av delarna som illustrerar bråk som del av helhet (rad 9-11). Den fokuserade aspekten, *det har inte någon betydelse var i helheten bråkdelen placeras för att illustrera bråk som del av helhet*, varierar mot en invariant bakgrund (rektangeln). Läraren

skapar kontrast mellan olika alternativ att markera två av fem delar. Eleverna ges möjlighet att erfara att det inte spelar någon roll vilka delar av ett objekt som markeras för att illustrera del av helhet.

Sammanfattning av undervisningssekvenserna indelning av helheten och hur bråkdelen placeras i helheten

Fokus i de beskrivna undervisningssekvenserna är att eleverna ska ges möjlighet att erfara att benämningen av bråkdelen i en given helhet inte förändras varken om helheten delas in på olika sätt eller om bråkdelen placeras förändras inom samma helhet. I undervisningssekvenserna framkommer att lärarna använder en eller två rektanglar för att uppmärksamma dessa båda aspekter. I undervisningssekvens 2b använder läraren två olika rektanglar som eleverna delat in på två sätt för att visa att bråkdelen inte förändras. För att klargöra att bråkdelen är lika stora gör läraren en direkt jämförelse mellan tredjedelarna genom att lägga delarna på varandra. Lärarens sätt att hantera det laborativa materialet kan beskrivas utifrån ett laborerande arbetssätt. I undervisningssekvens 2c och 4 är fokus istället på att bråkdelen placeras i en helhet inte påverkar bråkdelen benämning. Lärarna använder här antingen två rektanglar, undervisningssekvens 2c, eller en och samma rektangel, undervisningssekvens 4. I dessa undervisningssekvenser beskrivs matematikundervisningen utifrån ett konkretiserande arbetssätt.

Figur 16. Arbetssätt i undertemat indelningen av en helhet och hur bråkdelen placeras i en helhet.

Nämnamn ger namn åt andelen i ett bråkuttryck oberoende av andelens storlek eller form

Undervisningssekvensen syftar till att eleverna ska ges möjlighet att erfara att det är nämnaren i ett bråkuttryck som ger namn åt andelarna och inte andelens form eller storlek. Nedan beskrivs först en matematiklektion där bråkdelen har (a) samma form men olika storlek. Därefter beskrivs två matematiklektioner där (b) både bråkdelenas storlek och form varierar.

Läraren konkretiserar med hjälp av bråkcirklar att bråkdelenas namn inte påverkas av bråkdelenas storlek

För att visa att bråkdelenas namn inte påverkas av bråkdelenas storlek använder läraren i exemplet nedan två bråkcirklar av olika storlek, bråkcirkelarnas färg är densamma. I båda bråkcirkelarna är en fjärdedel markerad (se figur 17 nedan). Läraren börjar med att fråga eleverna vad den röda delen i bråkcirkelarna heter (pekar på den vänstra bråkcirkeln i figur 17). En av eleverna säger att det är en fjärdedel, vilket bekräftas av läraren. Därefter går läraren vidare med att fråga om det är någon skillnad mellan de olika bråkdelen (pekar på båda bråkcirkelarna i figur 17).

Figur 17. Två bråkcirklar av olika storlek, där en fjärdedel är markerad i respektive cirkel.

Excerpt 4 (undervisningssekvens 1a)

1	L	Då undrar jag om det är någon skillnad på hur stor del som är
2		skuggad på de här två cirkelarna?
3	E ₁	Det är ingen skillnad
4	L	Fast den där är ju mycket större [PEKAR PÅ DEN STÖRSTA
5		CIRKELN]
6	E ₂	Ja fast det är ju delarna man tittar på [KAN INTE FÖRKLARA
7		MER UTAN EN ANNAN ELEV TAR VID]
8	E ₃	Antalet delar är lika många, båda cirkelarna är delade i fyra delar,
9		det är bara det att den ena är större.

Bråkcirkelarna används för att visa att en fjärdedel alltid är en av fyra lika stora delar oavsett hur stor delen är (rad 1-5). En av eleverna

förklarar att det är antalet delar som är avgörande för bråkdelens namn (rad 8-9) och inte hur stora delarna av helheten är.

Andelen, som i exemplet ovan är $\frac{1}{4}$ ändrar inte namn även om storleken på delen förändras. Med hjälp av det laborativa materialet konkretiseras och varieras bråkdelens storlek mot en invariant bakgrund (bråkdelens färg och placering i bråkcirklarna är invarianta). En liten ($\frac{1}{4}$) bråkdelen kontrasteras mot en större ($\frac{1}{4}$) bråkdelen. En dimension av variation att det är antalet delar, det vill säga nämnaren, som ger namn åt andelen i ett bråkuttryck och inte storleken av andelen öppnas upp. Eleverna kan erfara att andelen i ett bråkuttryck inte ändrar namn även om storleken av andelen förändras.

Läraren konkretiserar med kvadrater och rektanglar av olika storlek att bråkdelens namn inte påverkas av bråkdelens storlek

Resultatet visar även att matematikundervisningen kan syfta till att ge eleverna möjlighet att erfara att förutom storlek så påverkar inte heller andelens form namnet på bråkdelens. Här används flera olika typer av helheter, i form av kvadrater och rektanglar. Förutom att formen varierar så varieras även helheternas storlek.

Excerptet nedan visar en undervisningssekvens där två kvadrater och två rektanglar med olika storlek används samtidigt. I samtliga fyra helheter är $\frac{1}{4}$ markerad (se figur 18).

Figur 18. Fjärdedelar av rektanglar och kvadrater med olika storlek.

En grupp elever sitter tillsammans med läraren runt ett bord. Undervisningssekvensen inleds med att kvadraterna och

rektanglarna läggs upp på bordet. Läraren frågar hur stor del av objekten som är färgade. Läraren vill även veta om eleverna tycker att alla färgade delar har samma namn med tanke på att formen och storleken är olika.

Excerpt 5 (undervisningssekvens 14b)

1	L	Hur stor del i figurerna är färgad?
2	E ₁	En del
3	L	Kan du visa?
4		[ELEVEN PEKAR PÅ DE FÄRGADE DELARNA I DE
5		GEOMETRISKA FIGURERNA SE FIGUR 18]
6	L	Kan någon säga hur stor del som är färgad i
7		bråkform?
8	E ₂	En fjärdedel
9	L	Just det så heter det. Men har alla delarna samma namn? Delarna
10		ser ju inte likadana ut?
11	E ₃	Exakt, de där är ju typ hälften så stora som de här [PEKAR
12		PÅ DEN MINSTA REKTANGELN OCH DEN MINSTA
13		KVADRATEN DÄREFTER PÅ DE TVÅ STÖRRE FIGURERNA]
14	E ₄	Ja, fast så kan man ju inte tänka, du får ju kolla på hur många
15		delarna är inte hur stora de är.
16	L	Ja, hur är det egentligen, vilket ska man titta på, antalet eller
17		storleken eller formen på figuren?
18	E _{1,2,4}	Antalet
19	L	Ja ni har rätt grabbar. Det är antalet delar som avgör. Det spelar
20		ingen roll vilken form eller hur stor figuren är.

Excerptet visar att det laborativa materialet används för att påvisa att en fjärdedel alltid är en av fyra lika stora andelar oavsett hur stora andelarna är och i vilken form delen är konstruerad. En av eleverna är inte riktigt säker på varför delarna har samma namn när storleken på kvadraterna och rektanglarna varierar (rad 11-13). Eleven fokuserar däremot inte på att det är olika former. En av eleverna menar att det är antalet andelar som är väsentligt, inte hur stora andelarna är (rad 14-15). Eleven får medhåll från de övriga två eleverna och av läraren (rad 18-20). Läraren avslutar diskussionen med att säga att varken helhetens form eller storlek påverkar andelens namn (rad 20).

Med hjälp av det laborativa materialet kan den fokuserade aspekten, *andelens namn är inte beroende av varken storlek eller form*, varieras genom dels olika former, dels olika storlekar. Det som är invariant är att bråkuttryckets värde, $\frac{1}{4}$, är det samma i samtliga objekt. Även placeringen av bråkdelen är invariant (i den fjärde kvadranten). En dimension av variation, att bråkdelen namn inte påverkas av storlek eller form, öppnas upp. Eleverna ges möjlighet

att erfara att oavsett storlek eller form så är antalet delar, det vill säga nämnaren, det som avgör hur andelen ska benämnas.

Eleverna laborerar med olika geometriska figurer med olika storlek

Eleverna använder olika typer av geometriska figurer i samband med att de ges möjlighet att erfara att andelens namn inte ändras när helhetens form och/eller storlek förändras. De former som eleverna kan välja mellan är varierande storlekar av cirklar, rektanglar och parallelltrapetser som läraren eller eleverna klippt ut från A4- och eller A3-papper.

Nedan beskrivs en undervisningssekvens där eleverna erbjuds erfara att bråkdelens namn inte påverkas när formen och storleken varierar. Eleverna arbetar parvis och har fått i uppgift att dela in geometriska former i tredjedelar. Läraren uppmanar eleverna att först bestämma vilken geometriskt form de ska använda för att illustrera helheten och därefter markera en tredjedel.

Ett av elevparen bestämmer sig för att använda en cirkel. Efter lite diskussioner mellan eleverna kommer de överens om hur cirkeln ska delas in i tredjedelar. Ett annat elevpar väljer istället att använda sig av en rektangel som de delar in i tredjedelar. När eleverna är klara med uppgiften får de två elevparen diskutera med varandra om de tycker att uppgiften är korrekt utförd. Läraren uppmanar eleverna att diskutera "om båda figurerna är indelade i tredjedelar även om de använt olika former med olika storlek" (undervisningssekvens 1b). Båda elevparen är överens om att både cirkeln och rektangeln är delade i tredjedelar. En av eleverna konstaterar att "det spelar ingen roll hur det ser ut" (pekar på cirkeln och rektangeln i figur 19) (undervisningssekvens 1b). Elevparen är överens om att en tredjedel kan se ut på olika sätt men att båda sätten är korrekta. Ytterligare en möjlighet att markera en tredjedel av en geometrisk figur ges när eleverna tillsammans markerar en tredjedel av en parallelltrapets.

Figur 19. En tredjedel av en cirkel jämförs med en tredjedel av en rektangel (undervisningssekvens 1b).

Genom att eleverna får diskutera och jämföra tredjedelarna av cirkeln, rektangeln och parallelltrapetsen ges eleverna möjlighet erfara att bråkuttryckets namn inte ändras även om de geometriska figurerna varierar. I exemplet hålls bråkuttryckets värde invariant och den fokuserade aspekten, *att andelens namn inte påverkas av varken storlek eller form av de geometriska figurerna*, varierar genom att tre olika geometriska figurer av olika storlek används. Med hjälp av de geometriska figurerna kontrasteras tredjedelarna mot varandra och en dimension av variation kan öppnas upp. Eleverna ges möjlighet att erfara att bråkdelen namn inte påverkas av varken storlek eller form.

Sammanfattning av undervisningssekvenserna nämnaren ger namn åt andelen i ett bråkuttryck oberoende av andelens storlek eller form

I de tre ovan beskrivna undervisningssekvenserna riktas matematikundervisningens fokus mot att eleverna erbjuds erfara att andelens namn inte påverkas av varken storlek (undervisningssekvens 1a) eller storlek och form (undervisningssekvens 14b och 1b). I de två förstnämnda undervisningssekvenserna är det läraren som med hjälp av olika typer av geometriska objekt konkretiserar denna aspekt. I den sistnämnda undervisningssekvensen är det istället eleverna som laborerar med olika geometriska figurer och som på så sätt kan erfara denna aspekt.

Figur 20. Arbetssätt i undertemat nämnaren ger namn åt andelen i ett bråkuttryck, oberoende av andelens storlek eller form.

Sammanfattning av bråk som del av helhet

De observerade undervisningssekvenserna gällande bråk som del av helhet har ovan beskrivits utifrån tre olika underteman:

- Bråkdelen i en helhet är lika stora (US 14a och US 2a)
- Indelningen av och hur bråkdelen placeras i en helhet (US 2b, c, och US 4)
- Nämnaren ger namn åt andelen i ett bråkuttryck oberoende av andelens storlek eller form (US 1a, b och US 14b)

I tabell 5 nedan framgår vilken typ av laborativt material som används, vilka dimensioner av variation som öppnas upp under respektive undervisningssekvens och vad eleverna ges möjlighet att erfara.

En sammanfattande bild av hur lärarna och eleverna använder laborativt materialet när de arbetar med bråk som del av helhet visar att lärarnas användande kan beskrivas utifrån ett *konkretiserande arbetssätt* medan elevernas användande kan beskrivas utifrån ett *laborerande arbetssätt*.

Det material som används är såväl *vardagligt material*, exempelvis äpplen och sugrör som *pedagogiskt material* så som bråkcirklar och

olika geometriska objekt. Vidare ses att materialet kan påverka elevernas uppmärksamhet från den matematiska idén (se US 2).

Materialet används i samband med variationsmönstren kontrast och repetition. I det första undertemat öppnas *dimensioner av variation* upp genom att läraren använder två kvadrater där en kvadrat är delad i lika stora delar och den andra är delad olika stora delar. Med hjälp av laborativt material kontrasteras tredjedelar mot tre delar i en helhet, vilket leder till att *eleverna ges möjlighet att erfara den fokuserade aspekten*. Däremot ges eleverna i undervisningssekvens 2 inga möjligheter att erfara någon ny kunskap om att bråkdelarna i en helhet ska vara lika stora eftersom någon dimension av variation inte öppnades upp då den fokuserade aspekten inte varierade mot någon invariant bakgrund.

I det andra undertemat öppnas *dimensioner av variation* upp genom att läraren med hjälp av två rektanglar kontrasterar hur rektanglarna har delats in. Genom att använda rektanglarna fokuserades dessutom hur bråkdelarna kan placeras i en helhet. På så sätt ges *eleverna möjlighet att erfara att hur helheten delas in eller att bråkdelarnas innebörders placering inom helheten inte påverkar benämning*.

Även i det tredje och sista undertemat skapas kontraster när exempelvis olika stora bråkcirklar och rektanglar används. Förutom form varieras även de sistnämnda geometriska figurernas storlek. Genom att *variera antingen bråkdelens storlek eller form* kan det leda till att *eleverna får möjlighet att erfara att det är nämnaren som ger namn åt bråkdelens namn*.

Tabell 5. Sammanfattande översikt av bråkmodellen bråk som del av helhet.

Undervisnings- sekvens	Laborativt material	Dimensioner av variationer	Eleverna ges möjlighet att erfara
14a	Kvadrater med samma färg och storlek	Skillnaden mellan att dela in en helhet i tredjedelar respektive tre delar	Delar som ingår i en helhet måste vara lika stora
2a	Äpple	- 21	Ingen ny kunskap blir möjlig att erfara
2b	Rektanglar med samma färg och storlek	Två olika sätt att dela in helheten, (vågräta och lodräta delar)	En helhet kan delas in på olika sätt förutsatt att delarna inom helheten är lika stora

2c	Rektanglar med samma färg och storlek	Två olika sätt att placera en del av en helhet	Det inte har någon betydelse var i helheten bråkdelen placeras för att markera en del av en helhet
4	Rektangel som byggts ihop med hjälp av sugrör	Flera olika sätt att placera två delar av en helhet	Det inte har någon betydelse var i helheten bråkdelen placeras för att markera en del av en helhet
1a	Bråkcirklar, samma färg, olika storlekar	Olika storlek av bråkdelen	Nämnamnaren ger namn åt bråkdelen, inte storleken av andelen
14b	Kvadrater och rektanglar av olika storlekar	Olika storlek och form av bråkdelen	Nämnamnaren ger namn åt bråkdelen, inte formen eller storleken av andelen
1b	Cirkel, rektangel och parallell-trapets olika storlek, samma färg	Olika storlek och form av bråkdelen	Nämnamnaren ger namn åt bråkdelen, inte formen eller storleken av andelen

Bråk som del av antal

I temat beskrivs undervisningssekvenser där lärare och elever använder laborativt material när undervisningen fokuserar på uppgifter som ingår i begreppsmodellen *bråk som del av antal*. Undervisningssekvenserna som rör bråk som del av antal beskrivs här utifrån tre aspekter. I den första handlar det om hur eleverna ges möjlighet att erfara att (a) ett givet antal kan delas in i flera olika bråkdelar. Den andra aspekten handlar istället om att eleverna ges möjlighet att erfara att (b) ett givet antal kan delas in i samma sorts delar med hjälp av olika strategier. Den tredje och sista aspekten av bråk som del av antal beskriver en undervisningssekvens där eleverna ges möjlighet att erfara att (c) ett givet bråkuttryck kan representera olika värden av ett antal när det totala antalet varierar.

Ett givet antal kan delas in i olika bråkdelar

I nedanstående undervisningssekvens använder eleverna det laborativa materialet tändstickor när de delar in ett givet antal i olika bråkdelar.

Eleverna konkretiserar hur tändstickor kan delas in i olika bråkdelar

Elevernas uppgift är att konkretisera hur ett givet antal tändstickor kan delas in i olika bråkdelar såsom halvor, tredjedelar och sjättedelar.

Eleverna sitter en och en vid sina bänkar. På varje bänk finns 18 stycken tändstickor. Elevernas uppgift är att dela upp tändstickorna

i olika högar så att det blir lika många tändstickor i varje hög. Eleverna uppmanas av läraren att pröva olika alternativ. När eleverna har arbetat med uppgiften själva en stund bryter läraren aktiviteten och lägger upp 18 tändstickor på en overheadapparat. Tändstickorna projiceras på whiteboardtavlan. Läraren frågar eleverna om de kan komma fram och visa hur de har tänkt kring uppgiften. Några av eleverna räcker upp handen och får i tur och ordning komma fram till overheadapparaten och visa för resten av klasskamraterna hur de har gjort.

Excerpt 6 (undervisningssekvens 5)

1	E ₁	Man kan dela dem i tre delar för då blir det 6 i varje del.
2		[ELEVEN LÄGGER DE ARTON TÄNDSTICKORNA I TRE
3		HÖGAR MED SEX TÄNDSTICKOR I VARJE HÖG]
4	L	Då blir det sex stycken i varje. Och då skriver man alltså att man
5		kan dela i tre delar [LÄRAREN SKRIVER FÖRST UT BRÅK-
6		STRECKET OCH EN TREA PÅ NÄMNARENS PLATS MEN
7		SKRIVER INGET TAL TÄLJARENS PLATS]. Då har du gjort
8		tredjedelar.
9	L	Kan jag dela dem på något annat sätt än tre delar om jag har 18
10		stycken? [EN NY ELEV KOMMER FRAM]
11	E ₂	Om man gör hälften så blir det nio i varje [TÄNDSTICKORNA
12		GRUPPERAS OM OCH DELAS IN I TVÅ LIKA STORA HÖGAR]
13	L	Om jag delar dem i två högar så blir det nio i varje ja.
14		LÄRAREN SKRIVER UT BRÅKSTRECKET OCH EN TVÅA I
15		NÄMNAREN MEN LÄMNAR TOMT PÅ TÄLJARENS PLATS]
16		Ja, då har du gjort halvor. Kan jag dela det ännu mer på något
17		sätt? [EN NY ELEV KOMMER FRAM]
18	E ₃	I sex högar. [TÄNDSTICKORNA DELAS UPP I SEX LIKA
20		STORA HÖGAR. LÄRAREN SKRIVER BRÅKSTRECK
21		OCH EN SEXA I NÄMNAREN MEN INGET I TÄLJAREN]
22	L	Ja och då får jag ju sjättedelar

Av excerptet framkommer att eleverna visar på olika sätt som de 18 tändstickorna kan delas in på (se exempelvis rad 1, 11 och 18). När läraren frågar "Kan jag dela dem på något annat sätt än tre delar om jag har 18 stycken?" (rad 9-10) ges eleverna möjlighet att erfara att det går att dela det givna antalet på flera sätt.

Den fokuserade aspekten, *att dela in tändstickorna i olika antal bråkdelar*, varierar i undervisningssekvensen. Eftersom antalet tändstickor är invariant och antalet sätt att dela in tändstickorna på varierar kan eleverna erfara att det går att dela in ett givet antal på flera sätt. Då öppnas en dimension av variation, olika antal bråkdelar som det går att dela in tändstickorna, upp.

Sammanfattning av undervisningssekvensen ett givet antal kan delas in i olika bråkdelar

I den ovan beskrivna undervisningssekvensen använder eleverna tändstickor i samband med att de konkretiserar olika sätt att dela in ett givet antal tändstickor. Eftersom eleverna beskriver olika sätt kan dessa kontrasteras mot varandra. Eleverna kan då erfara att ett givet antal kan delas in i olika bråkdelar.

Figur 21. Arbetssätt i undertemat ett givet antal kan delas in i olika bråkdelar.

Ett givet antal kan delas in i samma bråkdel med hjälp av olika strategier

I undervisningssekvensen riktas fokus mot hur olika strategier används när ett givet antal delas in i samma bråkdel.

Eleverna jämför och värderar strategier för bråk som del av antal med hjälp av multilinkkuber

Exemplet nedan visar en undervisningssekvens där två elever jämför och värderar två olika strategier för att urskilja bråk som del av antal. Inledningsvis arbetar eleverna självständigt med uppgiften "Hur stor del är $\frac{1}{4}$ av 24?". Eleverna arbetar först enskilt och därefter parvis. Eleverna uppmanas att för varandra beskriva och visa med hjälp av multilinkkuberna hur de tänkt kring uppgiften. De

uppmannas även att diskutera och värdera vilken strategi som de anser vara mest hållbar.

Elev 1 visar att han lagt upp multilinkkuberna i två rader med tolv kuber i varje rad. Han berättar att han tänker att hälften av 24 är 12. Eleven fortsätter sedan att säga att han sedan ska ta "hälften en gång till" varpå eleven delar upp raderna i två lika stora högar med sex multilinkkuber i varje hög. Slutligen pekar eleven på en av högarna (se inringad hög i figur 22) och säger till kompisen att " $\frac{1}{4}$ av 24 är sex stycken" (undervisningssekvens 15).

Figur 22. Elev 1:s strategi (undervisningssekvens 15).

Elev 2 lägger multilinkkuberna i rader med sex stycken kuber i varje rad. Totalt läggs fyra rader under varandra (se figur 23). Eleven säger att han tänkte att "det var som en rektangel med $4 \cdot 6$ kuber, eftersom $4 \cdot 6 = 24$." Därefter visar eleven att han tar en rad som han menar motsvarar $\frac{1}{4}$ av 24. Elevernas olika strategier diskuteras sedan och eleverna kommer fram till att elev 2:s strategi "är smartare" eftersom den "går fortare och tar mindre plats" (undervisningssekvens 15).

Figur 23. Elev 2:s strategi (undervisningssekvens 15).

Exemplet visar hur eleverna använder multilinkkuberna som stöd för att visualisera respektive strategi. Den fokuserade aspekten, *olika strategier att dela in ett givet antal delar i samma bråkdel*, varierar i ovanstående exempel. Det som är invariant är uppgiften eftersom båda eleverna fått samma uppgift. Det som också är invariant är att båda eleverna använder samma typ av laborativt material så när som på att färgen på multilinkkuberna varierar. Eleverna visar och diskuterar respektive strategi. I och med detta öppnas en dimension av variation upp, där strategierna kontrasteras. Genom att eleverna får redogöra för sina olika strategier får de erfara hur dessa kan jämföras och värderas.

Sammanfattning av undervisningssekvensen ett givet antal kan delas upp i samma bråkdelar med hjälp av olika strategier

I figur 24 illustreras undervisningssekvensen där eleverna använder multilinkkuberna för att konkretisera och visa varandra sina strategier när de arbetar med uppgiften "Hur stor del är $\frac{1}{4}$ av 24?". Eleverna diskuterar även om vilken strategi som är mest hållbar. Eleverna ges i den här undervisningssekvensen möjlighet att erfara olika strategier att dela upp ett givet antal.

Figur 24. Arbetssätt i undertemat ett givet antal kan delas in i samma bråkdel med hjälp av olika strategier.

Ett givet bråkuttryck kan representera olika värden av ett antal när det totala antalet varierar

I den följande undervisningssekvensen riktas elevernas uppmärksamhet mot att ett och samma bråkuttryck, (här används bråkuttrycket $\frac{1}{4}$), kan representera olika värden av ett antal när det totala antalet varierar.

Läraren konkretiserar med hjälp av snäckor att ett bråkuttryck kan representera olika värden av ett antal

I excerpt 7 beskrivs en undervisningssekvens där eleverna ges möjlighet att erfara att $\frac{1}{4}$ kan representera dels antalet 2, dels antalet 3, om det totala antalet snäckor varierar. Läraren har tagit fram en ask som hon visar för eleverna. Hon skakar lite på asken så att eleverna hör att det ligger något i den. Därefter öppnar läraren asken och tar fram två stycken snäckor. Nedan återges dialogen mellan läraren och eleverna.

Excerpt 7 (undervisningssekvens 8)

1	L	Nu har jag tagit ut $\frac{1}{4}$ av snäckorna. Hur många fanns det i asken
2		från början? [LÄRAREN VISAR UPP TVÅ STYCKEN
3		SNÄCKOR]
4	E ₁	8
5	L	Hur tänker du när du får det till 8?
6	E ₁	Jag tänker så här att 2 gånger 4 är 8
7	L	Därför du ser två stycken där [PEKAR PÅ DE TVÅ
8		SNÄCKORNA] och en fjärdedel blir 4 gånger 2 = 8 [LÄRAREN
9		SKRIVER 4*2=8 PÅ TAVLAN]
10	L	Tänker ni allihop på det sättet?
11	E _a	Ja
12	L	Och det visade ju sig att det stämmer [LÄRAREN GÅR VIDARE
13		OCH VISAR ISTÄLLET UPP TRE SNÄCKOR]
14		Fortfarande så har jag tagit ut en fjärdedel [SKRIVER $\frac{1}{4}$ PÅ
15		TAVLAN] Hur många fanns det från början?
16	E ₂	12
17	L	Stämmer det?
18	E _a	Ja
19	L	Så $\frac{1}{4}$ kan både representera 2 snäckor och 3 snäckor.

Av excerptet framgår att läraren konkretiserar att bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ kan representera olika värden av ett antal, två snäckor (rad 1-3) eller tre snäckor (rad 12-15) när det totala antalet varierar.

Läraren ställer två värden, två snäckor och tre snäckor mot varandra medan bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ är invariant vid båda tillfällena.

Kontrast mellan olika värden skapas och en dimension av variation där ett bråkuttryck kan representera olika värden av ett antal öppnas upp. Eleverna ges i den här undervisningssekvensen möjlighet att erfara att samma bråkuttryck kan representera olika värden av ett antal.

Sammanfattning av undervisningssekvensen ett givet bråkuttryck kan representera olika värden av ett antal när helheten varierar

Undervisningssekvensen beskriver ett konkretiserande arbetssätt där läraren genom att använda olika antal snäckor konkretiserar och åskådliggör att ett och samma bråkuttryck, ($\frac{1}{4}$) kan representera dels två snäckor, dels tre snäckor, det vill säga olika delar av ett antal.

Figur 25. Arbetssätt i undertemat ett givet bråkuttryck kan representera olika värden av ett antal när antalet varierar.

Sammanfattning bråk som del av antal

Undervisningssekvenserna som berör bråk som del av antal har ovan beskrivits utifrån tre olika underteman:

- Ett givet antal kan delas in i olika bråkdelar (US 5)
- Ett givet antal kan delas in i samma bråkdel med hjälp av olika strategier (US 15)
- Ett givet bråkuttryck kan representera olika värden av ett antal när det totala antalet varierar (US 8)

Lärarnas och elevernas användande av laborativt material karaktäriseras i de observerade undervisningssekvenserna av bråk som del av antal av ett *konkretiserande arbetssätt*.

Materialet som används är både *vardagligt material*, exempelvis tändstickor och *pedagogiskt material*, såsom multilinkkuber. *Dimensioner av variation öppnas* i det första undertemat upp genom att eleverna beskriver olika sätt att dela in tändstickorna på. *Eleverna ges här möjlighet att erfara att ett givet antal (18 tändstickor) kan delas in i olika delar.*

I det andra undertemat *öppnas dimensioner av variation upp* när olika strategier att dela in ett givet antal delar (24 multilinkkuber) i samma bråkdel ($\frac{1}{4}$) redovisas och *eleverna ges då möjlighet att erfara dessa olika strategier.*

I det tredje och sista undertemat *ges eleverna möjlighet att erfara att samma bråkuttryck ($\frac{1}{4}$) kan representera olika antal* genom att skapa kontrast och visa att både två snäckor och tre snäckor, det vill säga två olika delar, kan representera bråkuttrycket $\frac{1}{4}$.

Tabell 6. *Sammanfattande översikt av bråkmodellen bråk som del av antal.*

Undervisnings- sekvenser	Laborativt material	Dimensioner av variationer	Eleverna ges möjlighet att erfara
5	Tändstickor	I vilka bråkdelar det går att dela in ett givet antal i	Ett givet antal kan delas in i olika bråkdelar
15	Multilinkkuber	Olika strategier att dela in ett givet antal i samma bråkdel	Jämföra och värdera strategier för bråk som del antal
8	Snäckor	Olika värden av samma bråkuttryck	Samma bråkuttryck kan representera olika antal

Bråk som tal

I *bråk som tal* ingår undervisningssekvenser som handlar om att eleverna erbjuds erfara (a) samband mellan tal i bråk-, decimal- och procentform, (b) att tal i bråkform kan uttryckas på flera sätt utan att

värdet förändras och (c) skillnaderna mellan bråkstrecks- och decimaltecknets funktion. Undervisningssekvenserna kan även handla om att eleverna får (d) jämföra och storleksordna bråkuttryck samt erfara (e) nämnarens och täljarens funktion i ett bråkuttryck.

Samband mellan tal i bråk, -decimal- och procentform

I det följande beskrivs två undervisningssekvenser som båda syftar till att eleverna ges möjlighet att erfara samband mellan tal i bråk-, decimal- och procentform. För att konkretisera detta samband använder läraren i den första undervisningssekvensen ett antal egentillverkade kort med tal skrivna i bråk-, decimal- eller procentform. I den andra undervisningssekvensen använder eleverna ett dominospel för att själva laborera med kort där tal i bråk-, decimal- och procentform ingår.

Läraren använder kort för att konkretisera samband mellan tal i bråk-, decimal- och procentform

Under en undervisningssekvens uppmärksammas eleverna på sambandet mellan tal i bråk-, decimal- och procentform genom att ett antal kort sätts upp på tavlan (se figur 26). På några av korten har följande tal i procentform skrivits upp: 10 %, 20 %, 75 % och 150 %. På andra kort finns tal i bråkform: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$ och $\frac{2}{3}$ [sic]²² och som en tredje kategori finns kort med tal i decimalform: 0,1, 0,2, 0,75 och 1,5. Bredvid korten har läraren ritat en tom tabell med tre kolumner. Lektionen inleds med att eleverna uppmanas att identifiera de tal som står i procentform. När en av eleverna säger 75 % flyttar läraren det kortet till en av kolumnerna. Proceduren upprepas så att de tre kolumnerna i tabellen på tavlan till slut innehåller olika former av kort. Därefter namnges de tre kolumnerna till bråkform, procentform respektive decimalform.

²²Läraren upptäcker att det står $\frac{2}{3}$ på kortet. Lärarens intention var att det skulle stå $\frac{3}{2}$. Läraren löser problemet genom att vända kortet upp och ned. Siffrorna blir spegelvända men det är inget som påverkar elevernas förståelse av vad bråkuttrycket betyder eftersom de ser att kortet hör ihop med 150 % och 1,5.

Figur 26. Kort med tal i bråk-, decimal- och procentform som läraren satt upp på tavlan.

Excerpt 8 (undervisningssekvens 18a)

1	L	Här på tavlan har jag satt upp några färgglada lappar och då
2		undrar jag först nu så här då. Vilka utav de här är det som är
3		procenttal?
4	E ₁	75%
5	L	75% och du vet nu liksom ni övriga att procenttecknet skrivs som
6		det görs.
7	L	Har vi några mer förslag?
8	E ₂	Ja, 10 %
9	L	Och vad säger du NN?
10	E ₃	150%
11	L	Och det sista NN?
12	E ₄	20 %
13	L	Om vi tar bråkformen nu då
14	L	Ok, då kallar jag den här formen för bråkform. Någon mer som
15		har förslag på något kort?
16	E ₅	Tre fjärdedelar [ELEVERNA GER OLIKA FÖR-
17		SLAG PÅ TAL I BRÅKFORM]
18	L	Hör ni, nu sitter det alltså fyra stycken lappar kvar. Har ni någon
19		rubrik på de här [PEKAR PÅ DE RESTERANDE FYRA
20		LAPPARNA] Vad skulle man kunna kalla dem?
21	E ₆	Decimaltal
22	L	Titta här nu, ser ni att om vi tittar på $\frac{1}{10}$ så ser vi om vi hoppar till
23		den här kolumnen [PEKAR PÅ DECIMALTALSFORMEN OCH
24		DECIMALTALET 0,1] så ser ni att det är samma sak. Likadant så
25		kan vi se att det är samma som 10 %. Likadant är det med alla kort
26		[PEKAR MED HANDEN PÅ ALLA KORT]
27		Vi kan skriva dem i olika former, utan att deras värde ändras.

Efter att läraren, med utgångspunkt i elevernas förslag, satt upp de olika korten i rätt kolumn kan eleverna erfara att samma värde för ett specifikt bråkuttryck kan skrivas i olika former (exempelvis $\frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$) (rad 23-27).

Undervisningssekvensen visar att eleverna ges möjlighet att erfara hur ett och samma bråkuttryck kan skrivas i decimal- och procentform när läraren varierar den fokuserade aspekten genom att skapa kontrast mellan tre olika värden av dimensionen (bråk-, decimal- eller procentform).

Elever spelar dominospel med tal i bråk-, decimal- och procentform

Här beskrivs en undervisningssekvens som visar hur eleverna använder ett laborativt material när de arbetar med samband mellan tal i bråk-, decimal och procentform. Eleverna är indelade i par och läraren har delat ut 20 stycken kort till respektive par. På korten finns tal i bråk-, procent- och decimalform skrivna. Korten delas upp mellan eleverna så att varje elev får fyra stycken kort var. Resterande kort läggs i en hög med baksidan vänd uppåt. En av eleverna börjar med att lägga ut ett kort. I exemplet nedan läggs kortet med talen 1 respektive $\frac{1}{2}$ ut först (se figur 27). Turen går sedan över till den andra eleven som nu kan välja på att para ihop ett tal som passar med talet 1 eller med talet $\frac{1}{2}$. Om eleven inte kan, får han ta upp ett kort från den gemensamma högen. Vinnaren av spelet är den elev som först blivit av med sina kort. Vid några tillfällen diskuterar eleverna om de hade lagt ut rätt kort eller inte.

För det observerade elevparet vållade kortet med talet 0,05 problem. En av eleverna hade rätt kort vid handen men valde ändå att ta upp ett kort från den gemensamma högen. Eleven frågade kamraten hur han skulle tänka för att omvandla talet i decimalform till procentform. Den andra eleven svarade genom att ge ett generellt exempel på hur han brukade tänka. Han sa att han "brukar ta gånger 100, alltså om du har 0,02 så gånger du med 100 och då blir det 2 %" (undervisningssekvens 19). Den andra eleven funderade en stund till och la sedan ut kortet med talet 5 %.

Figur 27. Korten som lagts ut av eleverna (undervisningssekvens 19).

I den här undervisningssekvensen är den fokuserade aspekten att *se samband mellan tal i bråk-, procent- och decimalform* som eleverna erbjuds erfara. Exemplet visar att eleverna till stor del redan är förtrogna med detta. När en av eleverna ska para ihop decimalformen 0,05 med procentformen 5 % uppstår en svårighet. Eleven kan inte använda samma strategi som han använde för att exempelvis para ihop 0,7 med 70 %. En tolkning är att eleven har en fungerande strategi för att erfara samband mellan tal uttryckta i tiondelar (0,7) och procentformen men har ännu inte erfart sambandet mellan tal uttryckta i hundradelar (0,05) och procentformen (5 %). Den andra eleven förklarar muntligt hur han brukar tänka i dessa situationer vilket eleven förstår eftersom han tillslut lägger kortet 5 %. Genom att ge ett exempel på en hållbar strategi i relation till den fokuserade aspekten beskriver eleven olika värden inom dimensionen och kontraster mellan de olika värdena skapas. Eleven ges därmed möjlighet att erfara sambanden mellan tal i procent- och decimalform.

Sammanfattning av undervisningssekvenserna samband mellan tal i bråk-, decimal- och procentform

Likheter och skillnader mellan undervisningssekvenserna som beskrivits i det här undertemat kan illustreras med hjälp av figur 28 nedan. Gemensamt för undervisningssekvenserna är att båda syftar till att eleverna ges möjlighet att erfara samband mellan tal i bråk-, decimal- eller i procentform. En skillnad mellan undervisningssekvenserna ligger i vem som använder det laborativa materialet. I undervisningssekvens 18a används

materialet av läraren medan det i undervisningssekvens 19 är eleverna som använder materialet.

En ytterligare skillnad ligger i hur det laborativa materialet används. I undervisningssekvens 18a är arbetssättet konkretiserande medan undervisningssekvens 19 illustrerar ett laborerande arbetssätt.

Figur 28. Arbetssätt i undertemat samband mellan tal i bråk-, -decimal- och procentform.

Tal i bråkform kan uttryckas på flera sätt utan att bråkuttryckets värde förändras

De tre undervisningssekvenserna nedan beskriver elevernas möjlighet att erfara hur ett och samma bråkuttryck kan uttryckas på flera sätt utan att bråkuttryckets värde förändras. Det vill säga att bråkuttrycken är ekvivalenta.

I den första undervisningssekvensen använder läraren olika träfärgade rättblock för att visa att olika bråkuttryck kan representera samma tal. Den andra undervisningssekvensen visar hur eleverna laborerar med ett laborativt material som här har fått det övergripande namnet Bråkpizza. Bråkpizzorna är bråkcirklar med måtten ca 20 cm i diameter. Bråkpizzorna används av eleverna i samband med att de undersöker vilka bråkuttryck som är ekvivalenta med varandra. I den tredje och sista

undervisningssekvensen använder en grupp elever Ahlgrens bilar när de arbetar med hur bråkuttryck kan förkortas.

Läraren konkretiserar, med hjälp av träfärgade rätblock, ekvivalenta bråkuttryck

I en undervisningssekvens använder läraren träfärgade rätblock för att konkretisera hur många sjättedelar som är lika mycket som en tredjedel. Läraren håller först fram ett träfärgat rätblock som representerar bråkuttrycket $\frac{1}{3}$, därefter plockar hon fram andra träfärgade rätblock som representerar bråkuttrycken $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ och $\frac{1}{8}$. Läraren poängterar att "klossarna måste vara lika långa som tredjedelsklossen, för att det ska ha samma värde" (undervisningssekvens 16). Läraren jämför först åttondelsklossen med tredjedelsklossen och konstaterar att två stycken åttondelsklossar blir för kort och tre stycken blir för långt. Därefter jämförs på samma sätt fjärdedelsklossarna med tredjedelsklossen. Läraren visar eleverna att en fjärdedelskloss blir för kort medan två stycken blir för långt. Slutligen tar läraren fram sjättedelsklossen och visar att två stycken sjättedelsklossar motsvarar lika mycket som tredjedelsklossen (se figur 29). Därefter säger läraren att: "Vi kan alltså säga att en tredjedel är samma sak som två sjättedelar" (undervisningssekvens 16).

Figur 29. Olika bråkuttryck representerar samma tal (undervisningssekvens 16).

I exemplet beskrivs hur läraren, genom att jämföra olika bråkuttryck med tredjedelsklossen, konkretiserar och visar eleverna att bråkuttrycket $\frac{1}{3}$ är ekvivalent med bråkuttrycket $\frac{2}{6}$. En dimension av variation öppnas, där läraren kontrasterar olika bråkuttryck med

bråkuttrycket $\frac{1}{3}$. Eleverna ges möjlighet att erfara att bråkuttrycket $\frac{1}{3}$ är ekvivalent med bråkuttrycket $\frac{2}{6}$.

Eleven laborerar med bråkpizza för att erfara ekvivalenta bråkuttryck

Här beskrivs hur eleverna använder Bråkpizzor för att erfara att olika bråkuttryck kan representera samma värde, det vill säga ekvivalenta bråkuttryck, trots att bråkuttrycken har olika namn. Det material som eleverna använder är prefabricerade bråkcirklar föreställandes pizzor. Bråkpizzorna är uppdelade i följande bråk: en hel, halv, tredjedelar, fjärdedelar, sjättedelar och åttondelar. Eftersom det finns olika pizzor med olika "fyllningar" finns det många olika slag av de ovan beskrivna bråkuttrycken. Elevernas uppgift är att lägga ut pizzabitar så att "tallrikarna" fylls med lika stor andel av en pizza. Eleverna får själva bestämma vilka pizzadelar de ska använda. En av eleverna har på den första tallriken lagt ut fyra stycken åttondelsbitar, på den andra tallriken har han använt två stycken fjärdedelsbitar. När han sedan ska "fylla" den sista tallriken tvekar han en stund och tittar på de bråkdelar som är kvar på bordet. Till slut tar han upp den pizzadel som visar en halv och lägger den på den tredje och sista tallriken (se figur 30). Bråkpizzorna ritas av i elevens räknehäfte där eleven skriver bråkuttrycken med matematiska symboler ($\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$).

Figur 30. Bråkpizzor som representerar ekvivalenta bråkuttryck (undervisningssekvens 13).

I exemplet beskrivs hur eleven laborerar och med hjälp av bråkpizzorna synliggör att de tre bråkuttrycken $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$ och $\frac{1}{2}$ är ekvivalenta med varandra. En dimension av variation öppnas, där eleven erfar *vilka bråkuttryck som är ekvivalenta med bråkuttrycket $\frac{4}{8}$* . Eleven ges möjlighet att erfara att bråkuttrycken $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$ och $\frac{1}{2}$ är ekvivalenta med varandra.

Att eleven stannar upp en stund innan han tar den sista pizzadelen kan bero på att det ligger många pizzadelar med varierande "fyllning" på bordet framför honom och att han inte hittar den "rätta" pizzadelen som stämmer med de övriga fyllningarna omedelbart. Av figur 30 framgår att eleven valt pizzadelar med samma "fyllning" vilket kan förklara hans agerande. Det laborativa materialet som används kan här leda till att elevens uppmärksamhet fokuseras på andra aspekter än den matematiska idé som materialet var tänkt att representera.

Eleverna använder Ahlgrens bilar initialt för att erfara hur bråkuttryck kan förkortas

Nedan ges ett exempel på när Ahlgrens bilar används i matematikundervisningen i samband med att eleverna ges möjlighet att urskilja hur olika bråkuttryck förkortas.

Elevernas uppgift är att först uttrycka hur stor del av en påse med Ahlgrens bilar som representeras av respektive färg (vit, rosa och grön) i bråkform. Därefter uppmanas eleverna att skriva bråkuttrycken på flera olika sätt. I excerptet nedan beskrivs den dialog som förs mellan medlemmarna från en grupp när de arbetar med uppgiften att förkorta bråkuttryck.

Excerpt 9 (undervisningssekvens 20)

1	E ₁	Det är 140 st. bilar totalt i påsen
2	E ₂	Ja och det var 61 gröna, 40 rosa och 39 vita.
3	E ₃	Stor skillnad. Jag vill ha de gröna
4		[KOMMENTAREN IGNORERARS AV DE ÖVRIGA I
5		GRUPPEN]
6	E ₁	Då kan man skriva $\frac{61}{140}$ [UTTRYCKET SKRIVS PÅ DET GEMEN-
7		SAMMA PAPPRET SOM LIGGER PÅ BORDET FRAMFÖR
8		GRUPPEN] Det blir sextioenhundrafyrtiondelar.
9	E ₂	Ja, men det går väl inte att skriva på något annat sätt eftersom det
10		står 61 där [PEKAR PÅ TÄLJAREN]
11	E ₃	OK, nästa då?
12	E ₁	Nej vänta lite. Man kan ju tänka så här $\frac{6,1}{14}$ [ELEVEN SÄTTER DIT
13		ETT DECIMATLTECKEN MELLAN SEXAN OCH ETTAN
14		SAMT FÖRKORTAR TALET 140 TILL 14]
15	E ₃	Öh, va?
16	E ₁	Ja men, jag förkortar bara. Man kan tänka att det blir 6,1 fast man
17		egentligen inte får skriva så. Men det blir enklare att tänka.
18	E ₂	Ja, 61 är ju nästan samma sak som 60, så man kan ju bara skriva
19		så här istället och strunta i den där ettan. [ELEVEN SKRIVER
20		UTTRYCKET $\frac{6}{14}$ PÅ PAPRET]
21	E ₁	Exakt, och det är ju samma sak som $\frac{3}{7}$.
22	E ₃	Fattar inget. Kan vi inte äta nu?

23	E ₄	Nä, inte jag heller.
24	E ₁	Jamen, vi kör på nästa nu då. Kanske ni fattar då. 40 rosa bilar.
25		Det blir ju $\frac{40}{140}$ och det är ju samma sak som $\frac{4}{14}$ som är samma som
26		$\frac{2}{7}$.
27	E ₂	Och dom här då? [PEKAR PÅ HÖGEN MED VITA BILAR] Det är
28		ju 39 stycken. Det blir ju lite svårare att dela
29	E ₁	Ja, men jag tycker vi tänker att det är 40 stycken istället. Det är ju
30		nästan samma sak. Då blir det samma som vi skrev här. [PEKAR
31		PÅ PAPPRET DÄR DE TIDIGARE SKRIVIT UTTRYCKET FÖR
32		DE ROSA BILARNA]

Av excerptet framkommer att det laborativa materialet enbart används i samband att eleverna sorterar och räknar hur många bilar det är av respektive färg, i det sammanhanget laborerar eleverna med materialet. Efter sorteringen används det laborativa materialet återigen i samband med att en av eleverna pekar på en av högarna med vita bilar (rad 27). Men i excerptet ses att eleverna inte använder det laborativa materialet för att förkorta något av bråkuttycken. Några av elever i gruppen fokuserar på att få äta upp bilarna (rad 1-5, 22).

För att beskriva andelen gröna bilar skriver eleverna bråkuttrycket $\frac{61}{140}$ (rad 6). Efter lite diskussion mellan eleverna förkortas bråkuttrycket på tre olika sätt: $\frac{6,1}{14}$, $\frac{6}{14}$ och $\frac{3}{7}$ (rad 11, 19 och 20). Eleverna använder samma tillvägagångssätt när de sedan arbetar med bråkuttrycket $\frac{40}{140}$. Detta bråkuttryck förkortas på två andra sätt: $\frac{4}{14}$ och $\frac{2}{7}$. (rad 24). Eleverna använder sig av både informella (exempelvis $\frac{6,1}{14}$, rad 12) uttryck och formella uttryck (exempelvis $\frac{4}{14}$, rad 25) när bråkuttrycken förkortas. Avslutningsvis förkortas även bråkuttrycket $\frac{40}{140}$ till bråkuttrycken $\frac{4}{14}$ och $\frac{2}{7}$ (rad 25-26).

Av excerptet framkommer att några elever har kunskap om hur bråkuttryck kan förkortas (exempelvis rad 12-14). Däremot är inte alla elever i gruppen förtrogna med detta (exempelvis rad 9, 10 och 15). När eleverna diskuterar med varandra hur bråkuttrycken kan förkortas ges de elever som ännu inte erfarit detta, möjlighet att via dessa exempel erfara *hur bråkuttrycken kan förkortas*. De olika sätten

som eleverna förkortar bråkuttrycken på blir kontraster och en dimension av variation öppnas upp.

Vidare framkommer att det laborativa materialet till viss del påverkar elevernas fokus på uppgiften eftersom diskussion om vem och när bilarna ska ätas uppstår.

Sammanfattning av undervisningssekvenserna tal i bråkform kan uttryckas på flera sätt utan att värdet förändras

När eleverna ges möjlighet att erfara hur tal i bråkform kan uttryckas på olika sätt utan att värdet förändras visar denna studie att detta sker utifrån olika tre undervisningssekvenser. I undervisningssekvens 16 och 13 används det laborativa materialet av antingen läraren eller eleverna när de på ett laborativt sätt undersöker vilka bråkuttryck som är ekvivalenta. I undervisningssekvens 20 används det laborativa materialet av eleverna, och till viss del kännetecknas matematikundervisningen av att eleverna laborerar med materialet. Men materialet är inte närvarande under hela undervisningssekvensen och eleverna arbetar med hur bråkuttryck kan förkortas utan att ta hjälp av materialet. Den streckade rutan runt undervisningssekvens 20 i figur 31 illustrerar att det laborativa materialet endast delvis används av eleverna.

Figur 31. Arbetssätt i undertemat tal i bråkform kan uttryckas på flera sätt utan att värdet förändras.

Skillnader mellan bråkstrecks- och decimaltecknets funktion

Denna undervisningssekvens syftar till att beskriva hur eleverna identifierar och erfar olika delar i ett bråkuttryck samt beskriva hur en lärare uppmärksammar eleverna på skillnaderna mellan bråkstrecks- och decimaltecknets funktion.

Läraren konkretiserar skillnaden mellan bråkstrecks- och decimaltecknets funktion med hjälp av olika kort

Läraren har i samband med en matematiklektion som handlar om att eleverna ska se sambanden mellan tal i bråk-, decimal- och procentform uppmärksammat att en elev svarat "ett streck fem" på frågan vilket av korten 1,5 eller $\frac{1}{5}$ som illustrerar talet uttryckt i bråkform. Matematiklektionens fokus skiftas från att se sambanden mellan tal i bråk-, decimal- och procentform till att uppmärksamma skillnaden mellan de två symboluttrycken bråkstreck och decimaltecken.

Excerpt 10 (undervisningssekvens 18b)

1	L	Ett streck fem säger du, hur kan man säga det på något annat sätt?
2	E ₁	Komma fem
3	L	Komma fem säger du, håller ni med?
4	E ₂	En femtedel
5	L	Var det den du menade? [RIKTAR FRÅGAN TILL ELEVEN SOM SVARADE ETT STRECK FEM OCH PEKAR PÅ KORTET MED $\frac{1}{5}$]
6		
7		Eller var det den här du menade? [PEKAR PÅ KORTET MED 1,5]
8	E ₁	Nej det var den första, ett streck fem
10	L	Och då pratar du om bråkstreck
11	E ₁	Ja
12	L	Vad är det för skillnad mellan dessa olika streck? [PEKAR FÖRST PÅ DECIMALTECKNET DÄREFTER PÅ BRÅKSTRECKET]
13		
14	E ₃	Kommatecknet används för att skilja heltal från decimaltal
15	L	Ja det stämmer. Hur många hela har vi i det här uttrycket då? [PEKAR PÅ 1,5 KORTET]
16		
17	E ₃	En hel och en halv.
18	L	Just det, en och en halv kan man säga. Hur är det med det här tecknet då? [PEKAR PÅ BRÅKSTRECKET]
19		
20	E ₄	Det används när man jobbar med bråktal, för att skilja täljaren och nämnaren
21		
22	L	Precis, och vad står det egentligen på det här kortet då? [PEKAR PÅ KORTET $\frac{1}{5}$]
23		
24	E ₅	En femtedel och det är lika mycket som 0,2
25	L	Just det, det blir ett helt annat tal. Förstår ni nu varför jag hela tiden tjar på er att uttrycka er på korrekt sätt?
26		

I excerptet ses att en kritisk aspekt för en elev verkar vara hur bråkuttrycket $\frac{1}{5}$ muntligt ska uttryckas eftersom eleven tvekar på om

innebörden av kortet $\frac{1}{5}$ eller kortet 1,5 representerar uttrycket en femtedel (rad 1-8). Läraren fångar upp den kritiska aspekten genom att fråga eleverna vad det är för skillnad mellan de båda strecken (rad 12-13). Decimaltecknets funktion förklaras av en elev som säger att kommatecknet (decimaltecknet) används för att skilja heltal från decimaltal. Bråkstrecks funktion förklaras av en annan elev som något som används vid arbetet med bråktal för att separera täljaren från nämnaren. Förutom att förklara decimaltecknets och bråkstrecks funktioner tydliggörs även symbolernas betydelse (rad 14-24). Genom att läraren och några elever muntligen förklarar och hänvisar till de kort som sitter uppsatta på tavlan förtydligas skillnaderna mellan bråkstrecks och decimaltecknets funktioner och deras innebörd. Läraren skapar kontrast mellan vad som är ett bråkstreck och vad som är ett decimaltecken genom att variera bråkstrecket och decimaltecknet medan siffrorna 1 och 5 hålls invarianta. En dimension av variation gällande *skillnaden mellan de två symboluttrycken bråkstreck och decimaltecken* öppnas upp. I undervisningssekvensen ges eleverna möjlighet att erfara skillnaden mellan bråkstrecks och decimaltecknets funktioner.

Sammanfattning av undervisningssekvensen skillnader mellan bråkstrecks och decimaltecknets funktion

I den här undervisningssekvensen är det läraren som använder det laborativa materialet på ett konkretiserande arbetssätt för att visa på skillnaderna mellan funktionerna av ett bråkstreck respektive ett decimaltecken.

Figur 32. Arbetssätt i undertemat skillnader mellan bråkstrecks och decimaltecknets funktion.

Jämföra och storleksordna bråkuttryck

Det här undertemat beskriver undervisningssekvenser där elevernas uppmärksamhet riktas mot att jämföra olika bråkuttryck för att kunna avgöra vilket bråkuttryck som är störst. I den första undervisningssekvensen fokuseras (a) strategier för att jämföra bråkuttryck med olika nämnare och täljare. I den andra undervisningssekvensen fokuseras (b) hur bråkuttryck, skrivna som stambråk, kan storleksordnas.

Läraren jämför två bråkuttryck med olika nämnare och täljare

Läraren har satt upp två stycken vita bråkcirklar på tavlan. På bråkcirklarna finns inga markeringar utsatta. Därefter berättar läraren att hon ska visa hur eleverna kan tänka när de ska jämföra två bråkuttryck med varandra och identifiera vilket av bråkuttryck som är störst. I undervisningssekvensen jämförs bråkuttrycken $\frac{1}{2}$ och $\frac{5}{8}$ med varandra. Läraren plockar fram en blå bricka föreställande en halv bråccirklar, brickan sätts upp på en av de uppsatta bråccirklarna. Därefter täcks den andra bråccirkeln med fem stycken röda åttondelsbrickor. Slutligen tar läraren fram en meterlinjal och drar ett vågrätt streck i mitten av de båda bråccirklarna (se figur 33).

Figur 33. Två bråkuttryck med olika nämnare och täljare jämförs (undervisningssekvens 9a).

Läraren konstaterar att $\frac{5}{8}$ måste vara större än $\frac{1}{2}$ eftersom "det var mer kvar utanför strecket" (undervisningssekvens 9a) i den cirkel som symboliserade $\frac{5}{8}$. Läraren pekar på båda cirkelarna samtidigt som hon muntligt förklarar för eleverna en strategi för att jämföra bråkuttrycken.

I exemplet är bråkcirkelarnas storlek densamma, det vill säga den är invariant. En annan aspekt som hålls invariant är bråckbrickornas placering. Det som varierar är enbart bråkuttryckens storlek. För att avgöra vilket bråkuttryck som är störst dras ett vågrätt streck igenom bråkcirkelarna vilket innebär att eleverna kan jämföra oliknämninga bråk och erfara vilket bråkuttryck som är störst. En dimension av variation öppnas upp när två värden, två bråkuttryck med olika nämnare och täljare, jämförs genom att bråkcirkelarna kontrasteras mot varandra. Med hjälp av det laborativa materialet konkretiseras bråkuttrycken visuellt, eleverna ges här möjlighet att erfara den fokuserade aspekten hur *två bråkuttryck med olika nämnare och täljare kan jämföras med varandra*.

Eleverna storleksordnar tal i bråkform på tallinje

Studiens resultat visar också att eleverna får möjlighet att storleksordna bråkuttryck med hjälp av ett laborativt material. Excerptet som följer beskriver en undervisningssekvens där läraren har delat in klassen i grupper om fyra. Varje grupp har fått ett antal klädnypor, ett ca 2 m långt snöre och kort där olika stambråk är uppskrivna. De olika stambråken²³ är: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ och $\frac{1}{9}$. Elevernas uppgift är att placera in stambråken på snöret i storleksordning där det minsta stambråket ska placeras längst till vänster. I följande excerpt presenteras den dialog som förs mellan några elever i en av grupperna.

²³ Stambråk= bråk som har täljaren 1 (Kiselman & Mouwitz, 2008)

Excerpt 11 (undervisningssekvens 9b)

- 1 E₁ Jag tycker att vi börjar med den här, [PEKAR PÅ KORTET DÄR
2 BRÅKET $\frac{1}{2}$ ÄR SKRIVET] för då vet vi var mitten på snöret är.
3 E₂ Smart
4 [ELEVERNA VIKER SNÖRET I MITTEN FÖR ATT
5 KONTROLLERA ATT BRÅKKORTET HAMNAR I MITTEN.
6 KORTET FÅST MED HJÄLP AV EN KLÄDNYPA]
7 E₃ Ok, vilket kort ska vi köra på nu då?
8 E₄ Fjärdedelskortet kanske?
9 E₁ Ja, vik snöret fyra gånger, då vet vi vart vi ska sätta kortet
10 [ELEVERNA VIKER SNÖRET FYRA GÅNGER FÖR ATT
11 KONTROLLERA ATT BRÅKKORTET $\frac{1}{4}$ KOMMER RÄTT]
12 E₁ Sen kan vi ta en åttondel, då får vi vika snöret åtta gånger.
13 [ELEVERNA VIKER SNÖRET IGEN, MEN DET ÄR SVÅRARE
14 NU EFTERSOM NÅGRA KORT OCH KLÄDNYPORNA ÄR I
15 VÄGEN. NÅGRA KORT LOSSNAR. EFTER EN STUNDS
16 PILLANDE ÄR FYRA KORT UPPSATTA PÅ SNÖRET]
17 E₃ Hur ska vi göra nu då, det är ju så himla krångligt det här?
18 E₄ Ja, jag håller med. Kan vi inte bara sätt upp resten av korten
20 någonstans? [INGEN AV DE ÖVRIGA ELEVERNA HAR
21 NÅGRA INVÄNDNINGAR UTAN HJÄLPS ÅT ATT SÄTTA
22 UPP DE RESTERANDE KORTEN. EFTERSOM UTRYMMET
23 MELLAN $\frac{1}{8}$ OCH $\frac{1}{4}$ INTE ÄR SÅ STORT HAMNAR KORTEN $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$
24 OCH $\frac{1}{9}$ NÄSTAN PÅ VARANDRA SE FIGUR 34 NEDAN]

Figur 34. Bråkkort på snöre (undervisningssekvens 9b).

Excerptet illustrerar att eleverna kommunicerar och argumenterar med varandra om hur de ska placera korten på rätt ställe. En av eleverna föreslår att de ska börja med det kort som visar bråkuttrycket $\frac{1}{2}$ eftersom de då får reda på var mitten av snöret är (rad 1-6). Eleverna fortsätter sedan med kortet $\frac{1}{4}$. För att veta var kortet ska placeras viks snöret fyra gånger (rad 8-11). Samma strategi används för att placera kortet $\frac{1}{8}$ (rad 12). Strategin försvåras dock på grund av att det redan sitter kort på snöret som vid några tillfällen lossnar när snöret viks (rad 13-17). Strategin med att vika snöret överges efter denna situation och eleverna väljer istället att

sätta upp de återstående korten på snöret godtyckligt (rad 19). Korten blir korrekt placerade på snöret i förhållande till bråkuttryckens värde, men avståndet mellan korten är inte helt riktigt. Detta är inget som eleverna reflekterar över.

I exemplet är bråkuttrycken som finns på korten skrivna som stambråk vilket innebär att täljaren i bråkuttrycket hålls invariant. Det som varierar är nämnarnas storlek. Den fokuserade aspekten i undervisningssekvensen är att *storleksordna stambråk*. En dimension av variation öppnas upp när eleverna skapar kontraster mellan bråkkorten när dessa jämförs med varandra. På så sätt kan eleverna erfara stambråkens relativa storlek av tal i bråkform vilket här innebär att ju större nämnaren är desto mindre är talet när täljaren är 1.

Sammanfattning av undervisningssekvenserna jämföra och storleksordna bråkuttryck
Undervisningssekvenser där eleverna ges möjlighet att erfara hur bråkuttryck kan jämföras och storleksordnas kan beskrivas utifrån två olika aspekter. I den ena är det läraren som konkretiserar genom att med hjälp av bråkcirklar visa hur två bråkuttryck med olika nämnare och täljare kan jämföras med varandra. I den andra aspekten är det eleverna som laborerar med olika bråkkort för att storleksordna stambråk.

Figur 35. Arbetssätt i undertemat jämföra och storleksordna bråkuttryck.

Nämnarens och täljarens funktion i ett bråkuttryck

Nämnarens och täljarens funktion i ett bråkuttryck behandlas på tre olika sätt i den observerade matematikundervisningen. I den första undervisningssekvensen fokuserar läraren på hur (a) en siffras placering i ett bråkuttryck påverkar bråkuttryckets värde och att placeringen är avgörande för vilken funktion nämnaren och täljaren får. För att åskådliggöra detta använder sig läraren av ett egentillverkat material. Den andra undervisningssekvensen visar hur (b) läraren använder bråkplattor²⁴ för att påvisa skillnaderna mellan nämnaren och täljaren genom att uppmärksamma siffrornas innebörd. I den tredje och sista undervisningssekvensen (c) fokuseras siffrornas innebörd genom att läraren använder två olika typer av laborativt material.

Läraren konkretiserar hur en siffras placering i ett bråkuttryck påverkar bråkuttryckets värde.

I exemplet nedan beskrivs en undervisningssekvens där läraren med hjälp av bråkuttrycket $\frac{1}{2}$ visar hur en siffras placering i ett bråkuttryck påverkar bråkuttryckets värde.

I dialogen diskuterar läraren och eleverna begreppet en halv. Läraren uppmärksammar eleverna på ett uttryck som tidigare nämnts under matematiklektionen då en av eleverna benämnt begreppet en halv som "två av en". Läraren och eleverna diskuterar skillnaderna mellan bråkuttrycken $\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{1}$.

Figur 36. Lärarens illustration av bråkuttrycket $\frac{1}{2}$.

Excerpt 12 (undervisningssekvens 6)

1	L	Någon sa två av en förut, är det en halv? [SKRIVER UTTRYCKET
2		$\frac{1}{2}$ PÅ TAVLAN, SE FIGUR 36]
3	E ₁	Nää [SÄGS HÖGT OCH ÖVERRÖSTAR ÖVRIGA ELEVER I

²⁴ Bråkplatta/bråkplank= ett laborativt material som kan användas för att jämföra, storleksordna och beskriva relationerna mellan olika bråkuttryck.

4		KLASSEN SOM GER JAKANDE SVAR]
5	L	Kommer ni ihåg när vi delade äpplen och ritade bilder? Vi ska
6		titta lite på bilderna igen för att illustrera vad en halv är och vad
7		det här kan vara för något [SKRIVER UTTRYCKET $\frac{2}{1}$]. Hur många
8		delar delade vi äpplet i för att få en halv?
9	E ₂	Två
10	L	Ett äpple [SÄTTER SAMTIDIGT UPP EN BILD AV ETT ÄPPLE]
11		och så är det två stycken som ska dela på det [SÄTTER UPP EN
12		BILD AV TVÅ STRECKGUBBAR OCH RITAR ETT BRÅK-
13		STRECK MELLAN ÄPPLET OCH STRECKGUBBARNAS SE
14		FIGUR 36
15		Så ska det se ut va, ett äpple och två gubbar. Det är en halv

Läraren sätter upp en bild av ett äpple på tavlan (rad 10). Under bilden sätts bilder på två streckgubbar upp (rad 11-12), därefter separeras täljaren (äpplet) och nämnaren (streckgubbarna) med ett bråkstreck (rad 13-14).

Läraren fortsätter därefter genomgången genom att rikta elevernas uppmärksamhet mot det andra bråkuttrycket $\frac{2}{1}$ som tidigare skrivits upp på tavlan (rad 7).

Figur 37. Lärarens illustration av bråkuttrycket $\frac{2}{1}$.

Excerpt 13 (undervisningssekvens 6)

1	L	Men det här då? [PEKAR PÅ TAVLAN DÄR LÄRAREN
2		SKRIVIT $\frac{2}{1}$]
3		Hur många äpplen ska jag sätta ovanför strecket nu då?
4	E ₁	Två
5	L	Två delat med ett jo, två personer delar på ett äpple
6		[PEKAR PÅ FIGUR 36] Vad händer här då? [PEKAR PÅ DEN
7		ANDRA BILDEN I FIGUR 37]
8	E ₂	Ingenting, han får båda.
9	L	En person får två äpplen [SÄTTER DIT EN BILD FÖRE-
10		STÄLLANDE EN STRECKGUBBE] Ser ni skillnaden nu mellan
11		de båda uttrycken? Vad som händer när ettan och tvåan byter
12		plats? [PEKAR FÖRST PÅ DET SOM STÅR I FIGUR 36 OCH
13		DÄREFTER PÅ DET SOM STÅR I FIGUR 37]
14	E _{alla}	Ja

Läraren fokuserar på bråkuttrycket $\frac{2}{1}$ och frågar eleverna hur bråkuttrycket kan konkretiseras med hjälp av det laborativa materialet (rad 1-3). Eleverna får komma med förslag på hur bråkuttrycket $\frac{2}{1}$ kan konkretiseras utifrån samma tanke som läraren använde för att åskådliggöra bråkuttrycket $\frac{1}{2}$ (rad 4-10). Med hjälp av det laborativa materialet påvisas skillnaderna mellan bråkuttrycken och vad det innebär att placera nämnaren respektive täljaren på olika platser om bråkstreckets genom att peka först på det ena bråkuttrycket $\frac{1}{2}$ och därefter det andra bråkuttrycket $\frac{2}{1}$ (rad 10-13).

Läraren öppnar tillsammans med eleverna upp en dimension av variation av nämnarens och täljarens placering när *bråkuttrycket* $\frac{1}{2}$ kontrasteras mot *bråkuttrycket* $\frac{2}{1}$. Placeringarna av siffrorna i bråkuttrycken varierar medan siffrorna i bråkuttrycket är invarianta. Eleverna ges i den här undervisningssekvensen möjlighet att erfara hur placeringen av täljaren och nämnaren i ett bråkuttryck påverkar bråkuttryckets värde.

Läraren konkretiserar täljarens och nämnarens funktion med hjälp av ett laborativt material

Följande excerpt beskriver även den en undervisningssekvens där täljarens och nämnarens funktion urskiljs men här används istället av bråkplattor.

På tavlan har läraren satt upp olika bråkplattor under varandra enligt figur 38 nedan. Läraren pekar sedan på den bråkplatta som representerar bråkuttrycket en halv. Läraren ber en av eleverna att berätta vad som står på bråkplattan.

Figur 38. Bråkplattor som sitter uppsatta på tavlan.

Excerpt 14 (undervisningssekvens 7)

- 1 E₁ Ett streck två.
 2 L Ett streck två va, en halv. Det var ju precis den som vi var ute
 3 efter, den rosa här. Den symboliserar en halv. Nu blir min lilla
 4 fråga till er, vad betyder den ettan? [PEKAR PÅ ETTAN SOM
 5 STÅR SKRIVEN PÅ BRÅKPLATTAN] Kan du säga det NN? Kan
 6 du uttrycka det med ord?
 7 E₂ Nää [FRÅGAN GÅR VIDARE TILL EN ANNAN ELEV]
 8 E₃ En hel
 9 L Nja, vi har en av två bitar va, [PEKAR ÅTERIGEN PÅ
 10 BRÅKPLATTAN]
 11 E₃ Jaha
 12 L Så den övre siffran den talar om att vi har valt ut en [BETONAR
 13 EN] av totalt två. Jag tar ju en av två. [TAR LOSS EN AV DE ROSA
 14 BRÅKPLATTORNA OCH VISAR FÖR ELEVERNA] Hur många
 15 av någonting vi tar. Hänger ni med på det?
 16 E_{alla} Mm
 17 L Siffran som står över bråkstrecket kallas för täljaren, det har ni
 18 säkert hört förut. Ok, men vad betyder den här tvåan som står
 19 under strecket?
 20 E₄ Att det är två stycken
 21 L Just det, det är ju båda plattorna va. Namnet på de här plattorna
 22 är ju en halv i det här fallet. Detta brukar vi kalla för nämnaren.
 23 Vi har alltså en stycken halva delar här [VISAR ÅTERIGEN DEN
 24 ROSA BRÅKPLATTAN] Vi skulle kunna skriva en regel för det
 25 här. [DEN ROSA BRÅKPLATTAN PLACERAS HÖGST UPP PÅ
 26 WHITEBOARDTAVLAN OCH LÄRAREN SKRIVER
 27 BREDVID BRÅKPLATTAN:

TÄLJAREN Täljaren berättar hur många delar av helheten vi har
NÄMNAREN Nämnaren berättar hur många delar en hel har delats i

Figur 39. Vad läraren skrivit upp på whiteboardtavlan.

Inledningsvis definieras täljarens funktion (rad 4). Av excerptet framkommer en kritisk aspekt gällande täljarens funktion då en av de tillfrågade eleverna inte är säker på vad ettan i bråkuttrycket representerar. Eleven svarar att "ettan" i bråkuttrycket betyder en hel (rad 8). Täljarens funktion förklaras genom att läraren pekar på den rosa bråkplattan samtidigt som han säger att "ettan" symboliserar "en av två bitar" i bråkuttrycket (rad 9-10). Därefter förklarar läraren nämnarens innebörd (rad 21-22). I undervisningssekvensen ställs täljarens funktion mot nämnarens funktion. *Funktionerna kontrasteras*, vilket innebär att en dimension av variation om täljarens och nämnarens funktion kan erfaras.

Läraren konkretiserar nämnarens och täljarens funktion med hjälp av två olika typer av laborativt material

I den här undervisningssekvensen är det också täljarens och nämnarens funktion som läraren riktar elevernas uppmärksamhet mot. Men istället för att använda ett och samma laborativa material används här två olika typer. På tavlan skrivs bråkuttrycket $\frac{3}{5}$ därefter berättar läraren för eleverna att de idag ska prata om nämnaren och täljaren i ett bråkuttryck. Läraren säger att "täljaren är det som står i taket, det vill säga det översta talet" (undervisningssekvens 12) samtidigt som hon pekar på trean i bråkuttrycket. Bredvid bråkuttrycket skrivs ordet täljare. Läraren fortsätter att berätta att det tal som står under bråkstrecket kallas nämnare, vilket skrivs bredvid femman. Matematiklektionen fortsätter med att elevernas uppmärksamhet fokuseras på nämnarens respektive täljarens funktion. Läraren poängterar för eleverna att: "alltid börja med att titta på nämnaren eftersom den visar vilken sort vi har och det kan vi visa så här" (undervisningssekvens 12). Sedan plockas fem stycken magnetiska remsor fram som sätts upp bredvid varandra på tavlan (se figur 40). Läraren uttrycker att:

Nu får de här magnetremorna illustrera en rektangel som är indelad i fem exakt lika stora delar och det är precis det som den här femman betyder. Rektangeln är indelad i femtedelar.
[PEKAR PÅ FEMMAN I BRÅKUTTRYCKET OCH RITAR ETT SVART STRECK RUNT MAGNETREMSORNA]
(undervisningssekvens 12).

Hon går sedan vidare med att beskriva vad täljaren representerar genom att säga till eleverna att de ska tänka "hur många av femtedelar ska jag ta, jo tre stycken femtedelar". Läraren markerar tre femtedelar genom att rita ett rött streck runt tre av magnetremsorna. Läraren repeterar nämnarens betydelse då hon upprepar att "nämnaren talar om vilken sort som helheten ska delas in i" och "täljaren talar om hur många femtedelar som ska användas" (undervisningssekvens 12).

Figur 40. Det laborativa materialet åskådliggör täljarens och nämnarens funktion (undervisningssekvens 12).

Därefter plockar läraren fram en bråkcirkel som hon sätter upp på tavlan, bredvid rektangeln. Bråkcirkeln som sätts upp på tavlan är också indelad i femtedelar (se figur 41). Läraren säger till eleverna att "de ska titta på hur det kan se ut när man använder bråkcirklar istället för rektanglar". Läraren pekar på hela bråkcirkeln samtidigt som hon högt räknar delarna och konstaterar att även bråkcirkeln är indelad i femtedelar.

Då vet vi vilken sort vi har, eller hur? Det är ju det som nämnaren talar om. Om vi sedan tar tre av de här bitarna [RITAR RUNT TRE AV DELARNA] då ser vi hur många delar vi ska ta. Det är ju det som täljaren talar om (undervisningssekvens 12).

Figur 41. Det laborativa materialet åskådliggör täljarens funktion (undervisningssekvens 12).

Magnetremssorna och bråkcirkeln används i samband med att läraren konkretiserar betydelsen för nämnarens respektive täljarens funktion. När magnetremssorna används påpekar läraren vikten av att delarna är exakt lika stora.

Vid båda tillfällena definierar läraren nämnarens- och täljarens funktion när hon påpekar att nämnaren talar om hur stort bråkuttrycket är och att täljaren beskriver hur många delarna är. På så sätt *kontrasteras nämnarens- och täljarens funktion*, vilket leder till att eleverna ges möjlighet att erfara nämnarens respektive täljarens funktion. Efter att dimensionen av variation öppnats upp, ges eleverna även möjlighet att generalisera nämnarens och täljarens funktion när detta illustrerades med hjälp av ytterligare ett laborativt material, bråkcirkeln.

Sammanfattning av undervisningssekvensen nämnarens och täljarens funktion i ett bråkuttryck

I samtliga tre undervisningssekvenser som beskrivits ovan är det läraren som använder och hanterar det laborativa materialet när de konkretiserar nämnarens och täljarens funktion i ett bråkuttryck. Lärarnas användande av det laborativa materialet betecknas som ett konkretiserande arbetssätt.

Figur 42. Arbetssätt i undertemat nämnarens och täljarens funktion i ett bråkuttryck.

Sammanfattning bråk som tal

Undervisningssekvenser som tillhör bråk som tal har ovan beskrivits utifrån fem olika underteman:

- Samband mellan tal i bråk, - decimal- och procentform (US18a och US 19)
- Tal i bråkform kan uttryckas på flera sätt utan att värdet förändras (US 13, US 16 och US 20)
- Skillnader mellan bråkstreck och decimaltecken (US 18b)
- Jämföra och storleksordna bråkuttryck (US 9a, b)
- Nämnarens och täljarens funktion i ett bråkuttryck (US 6, US 7 och US 12)

Lärarnas användande av laborativt material kan ses utifrån dels ett *konkretiserande arbetssätt*, dels ett *laborerande arbetssätt*. Elevernas arbetssätt kan beskrivas utifrån ett *laborerande arbetssätt*.

Laborativt material som används i undervisningssekvenserna är av både *vardaglig-* och *pedagogisk* karaktär (exempelvis Ahlgrens bilar och bråkplattor). I några av de observerade undervisningssekvenserna (exempelvis US 9b, 13 och 20) påverkas eleverna av det laborativa materialet och uppmärksamheten flyttas från den matematiska idén till materialet.

I det första undertemat, samband mellan tal i bråk, - decimal- och procentform, *öppnas dimensioner av variation upp* av lärarna och

eleverna när de kontrasterar olika värden av dimensionen (bråk-, decimal- eller procentform). Eleverna ges här möjlighet erfara sambandet mellan bråk-, decimal- eller procentform.

I undertemat som handlar om att tal i bråkform kan uttryckas på flera sätt utan att värdet förändras öppnas dimensioner av variation upp genom kontraster av olika bråkuttryck. Eleverna ges möjlighet att erfara att olika bråkuttryck är ekvivalenta med varandra.

I det tredje undertemat, skillnader mellan bråkstreck och decimaltecken skapar läraren en kontrast mellan ett bråkstreck och ett decimaltecken. En dimension av variation gällande skillnaden mellan de två symboluttrycken bråkstreck och decimaltecken öppnas upp och eleverna ges möjlighet att erfara skillnaden mellan bråkstreckets och decimaltecknets funktioner.

I samband med att eleverna ges möjlighet att erfara hur olika bråkuttryck kan jämföras med varandra skapar läraren, med hjälp av två bråkcirklar kontraster mellan de två bråkuttrycken. En dimension av variation öppnas upp genom att bråkcirkelarna kontrasteras mot varandra. Kontraster sker även när eleverna använder bråkkort för att jämföra och storleksordna korten på snöret.

I det femte och avslutande undertemat ges eleverna möjlighet att erfara nämnarens och täljarens funktion i ett bråkuttryck genom att en dimension av variation öppnas upp när läraren exempelvis åskådliggör kontraster mellan bråkuttrycken $\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{1}$ samt påvisar innebörden av att placera nämnaren respektive täljaren på olika platser om bråkstrecket. Förutom att kontrastera nämnarens och täljarens funktion används materialet även för att generalisera nämnarens och täljarens funktion.

Tabell 7. *Sammanfattande översikt av bråkmodellen bråk som tal.*

Undervisnings- sekvens	Laborativt material	Dimensioner av variationer	Eleverna ges möjlighet att erfara
18a	Egentillverkade kort med tal i bråk, - decimal, och procentform	Bråk, -decimal- och procentform	Sambanden mellan att uttrycka tal i bråk-, decimal- eller i procent-form
19	Dominospel	Bråk, -decimal- och procentform	Sambanden mellan att uttrycka tal i bråk-, decimal- eller i procentform
16	Träklossar	Olika värden mellan bråk- uttrycken	Olika bråkuttryck kan representera samma tal
13	Bråkpizzor	Olika värden mellan bråk- uttrycken	Vilka bråkuttryck som är ekvivalenta med bråkuttrycket $\frac{4}{8}$
20	Ahlgrens bilar	Hur bråkuttryck kan förkortas	Hur bråkuttryck kan förkortas
18b	Egentillverkade kort med bråk- och decimaltal	Bråkstreck och decimaltecken	Skillnader mellan bråkstreck och decimaltecken samt deras funktioner
9a	Bråkcirklar av samma storlek	Två bråkuttryck med olika nämnare och täljare jämförs	Jämföra bråkuttryck med olika nämnare och olika täljare
9b	Egentillverkade bråkkort	Flera bråkuttryck med olika nämnare	Storleksordna stambråk
6	Egentillverkade bilder av äpplen och personer	Siffrornas placering i bråkuttrycken $\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{1}$	Skillnaden mellan placeringen av siffror i ett bråkuttryck
12	Magnetremsor och bråkcirklar	Nämnarens och täljarens funktion	Nämnarens och täljarens funktion
7	Bråkplattor	Nämnarens och täljarens funktion	Nämnarens och täljarens funktion

Beräkningar av tal i bråkform

Nedan beskrivs undervisningssekvenser hur elevernas uppmärksamhet riktas mot ett bråkinnehåll som rör begreppsmodellen *beräkningar av tal i bråkform*.

Beräkningar av tal i bråkform

Det laborativa materialet används här för att visualisera olika termer vid beräkningarna av tal i bråkform. De beräkningar som förekommer i den observerade matematikundervisningen är additionsberäkningar av tal i bråkform, där termerna har samma nämnare. I den första undervisningssekvensen använder läraren magnetremsor för att bygga termerna i ett additionsuttryck. I undervisningssekvensen uppmärksammar läraren särskilt på vad som händer med nämnarna när två bråkuttryck adderas. I den andra undervisningssekvensen använder eleverna geobräden och gummisnoddar när de arbetar med additionsberäkningarna av karaktären öppna utsagor, där den ena termen i uppgiften är okänd medan både den andra termen och summan är kända²⁵.

Läraren använder magnetremsor för att konkretisera additionsberäkningar av tal i bråkform

I den här undervisningssekvensen har läraren satt upp fem magnetiska plastremsor på tavlan. Plastremsorna bildar tillsammans formen av en rektangel. Två av plastremsorna är blåa och de andra tre är vita (se figur 43). Läraren talar om för eleverna att de idag ska arbeta med addition av bråk. Vidare påpekar hon, efter att hon satt upp remsorna på tavlan, att de blåa remsorna symboliserar bråkuttrycket $\frac{2}{5}$ och de vita remsorna symboliserar bråkuttrycket $\frac{3}{5}$. Bråkuttrycken skrivs under plastremsorna.

Figur 43. Rektangel bestående av magnetiska plastremsor.

Excerpt 15 (undervisningssekvens 4)

- 1 L Om man lägger ihop de delar som är blå och de som är vita,
2 vad blir det då? [PEKAR PÅ REKTANGELN I FIGUR 43]

²⁵ Ett exempel på en öppen utsaga är uppgiften: $\frac{3}{4} + \underline{\hspace{1cm}} = 1$. Den okända termen som eftersöks är här $\frac{1}{4}$.

3	E ₁	Fem
4	L	Om man skriver så här, [LÄRAREN SÄTTER ETT PLUSTECKEN
5		MELLAN $\frac{2}{5}$ OCH $\frac{3}{5}$ OCH ETT LIKAMEDTECKEN EFTER
6		$\frac{3}{5}$] då skulle man nästan kunna göra ett mattetal av det här
7		[LÄRAREN SKRIVER 5 I TÄLJAREN MEN DRÖJER MED ATT
8		SKRIVA VAD DET SKA STÅ I NÄMNAREN OCH FRÅGAR I
9		STÄLLET ELEVERNA]
10	E ₂	Tio
11	E ₃	Nej, fem [SÄGS DIREKT EFTER E2: S SVAR]
12	L	Ja, vad är rätt svar egentligen? Om vi tittar på rektangeln
13		igen.
14		[PEKAR PÅ TAVLAN] Vad heter delarna som vi delade in den i?
15	E ₄	Femtedelar
16	L	Ja just det, det är ju fortfarande femtedelar och då händer
17		ingenting med det här va? [LÄRAREN PEKAR PÅ
18		FEMMAN I NÄMNAREN OCH SKRIVER $\frac{5}{5}$ EFTER
20		LIKA MED TECKNET]

När bråkuttrycken ska adderas refererar läraren till det laborativa materialet innan eleverna får svara på frågan (rad 1-3). Läraren väntar med att skriva svaret på nämnaren och frågar istället eleverna om de vet svaret (rad 8-10). En av eleverna svarar tio men blir motsagd av en annan elev som säger att det ska stå fem (rad 11-12). Excerptet visar en kritisk aspekt gällande den fokuserade aspekten, *när två bråkuttryck adderas så är det enbart täljarna som adderas medan nämnarna förblir oförändrade*. Med utgångspunkt i elevernas olika svar skapar läraren kontraster mellan svaret 5 och svaret 10 vilket öppnar upp för en dimension av variation. Kontrasten lyfts fram av läraren när hon relaterar till delarna i figur 43. Det blir möjligt för eleverna att erfara att när två bråktal adderas så är det enbart täljarna som adderas medan nämnarna förblir oförändrade.

Eleverna använder geobräden och gummisnoddar när de arbetar med additionsuttryck av karaktären öppna utsagor

Geobräden och olikfärgade gummisnoddar används i samband med att eleverna arbetar med additionsuttryck med tal i bråkform. Ett exempel på uppgifter som eleverna arbetar med är: $\frac{5}{8} + \underline{\hspace{1cm}} = 1$. Nedan beskrivs hur elever använder geobräden och gummisnoddar för att åskådliggöra en additionsberäkning.

Eleverna har fått i uppgift att beräkna uppgiften $\frac{3}{10} + \underline{\hspace{1cm}} = 1$. Till sin hjälp har eleverna varsin geobräda och två gummisnoddar i två olika färger. Först används den ena gummisnodden för att markera hur många delar bråkuttrycket ska bestå av, det vill säga den totala

summan i additionsuttrycket ($\frac{10}{10}=1$), se röd markering i figur 44. Eleverna plockar sedan fram nästa gummisnodd (svart) och bygger bråkuttrycket $\frac{3}{10}$ som symboliserar den kända termen i uttrycket. Det "mellanrum" som skapas mellan gummisnoddarna, i figur 44 markerat med en pil, föreställer det okända bråkuttryck som ska adderas så att uppgiften blir korrekt. I det här fallet $\frac{7}{10}$.

Figur 44. Additionsuttryck på geobräda
 $\frac{3}{10} + _ = 1$ (undervisningssekvens 10).

Eleverna fortsätter sedan att bygga liknande additionsuttryck med hjälp av geobrädan och gummisnoddarna. Eleverna väljer själva vilka bråkuttryck som ska byggas men summan ska hela tiden bli 1.

Under matematiklektionen använder eleverna samma strategi för additionsberäkning av tal i bråkform med öppna utsagor, det vill säga strategin är invariant men termerna i uppgifterna varierar. En dimension av variation angående *olika sätt att uttrycka tal i bråkform öppnas* upp när termerna kontrasteras med varandra. Eleverna ges möjlighet att erfara hur de ska arbeta med additionsuttryck av karaktären öppna utsagor.

Sammanfattning av undervisningssekvenserna beräkning av tal i bråkform

De ovan beskrivna undervisningssekvenserna sammanfattas i figur 45. I undervisningssekvens 4 konkretiserar läraren med hjälp av magnetremsor att vid addition med två bråkuttryck så adderas enbart täljarna medan nämnarna inte förändras. I undervisningssekvens 10 är det eleverna som med hjälp av geobräden bygger olika additionsuttryck, här används ett laborerande arbetssätt.

Figur 45. Arbetssätt i undertemat beräkningar av tal i bråkform.

Sammanfattning beräkningar av tal i bråkform

Matematikundervisning som handlar om beräkningar av tal i bråkform har ovan presenterats med hjälp av undertemat:

- Beräkningar av tal i bråkform (US 4 och US 10)

När undervisningen handlar om att eleverna ska göra beräkningar av tal i bråkform använder läraren i studien ett *konkretiserande arbetssätt* medan elevernas arbetssätt är *laborerande*.

Det material som används i dessa sammanhang är *pedagogiska material* (geobräden och magnetiska remsor).

I undervisningssekvens 4 öppnas det *upp dimensioner av variation* gällande hanteringen av nämnarna och täljarna när två bråkuttryck adderas med varandra. Kontrasten framhålls av läraren när hon relaterar till delarna i det laborativa materialet. *Eleverna ges här möjlighet att erfara beräkningar av tal i bråkform med fokus på att nämnarna inte adderas*. I undervisningssekvens 10 öppnas *en dimension av variation upp* beträffande additionsberäkning av tal i bråkform med öppna utsagor när eleverna använder geobräden. Detta leder till att *eleverna ges möjlighet att erfara additionsuttryck med öppna*

utsagor. I båda undervisningssekvenserna används variationsmönstret kontrast.

Tabell 8. Sammanfattande översikt av bråkmodellen beräkningar av tal i bråkform.

Undervisnings- sekvens	Laborativt material	Dimensioner av variationer	Eleverna ges möjlighet att erfara
4	Magnetiska plastremsor	Addition av nämnarna i bråkuttryck	Beräkningar av tal i bråkform med fokus på hur nämnarna adderas
10	Geobräden	Olika bråkuttryck som tillsammans blir 1	Additionsuttryck av tal i bråkform med öppna utsagor

Resultatsammanfattning

I resultatet beskrivs hur lärare och elever använder laborativt material när bråkundervisningen fokuseras på (a) bråk som del av helhet, (b) bråk som del antal, (c) bråk som tal och (d) beräkningar av tal i bråkform.

Av resultat framgår att lärares och elevers användande av laborativt materialet kan beskrivas utifrån antingen ett *konkretiserande arbetssätt* eller ett *laborerande arbetssätt*. Vem som använder materialet och vilket arbetssätt som används presenteras i sammanfattningarna av respektive undertema.

Det material som används är både *vardagligt-* eller *pedagogiskt material*. En ytterligare uppdelning av materialet visar att både *perceptuellt rika* och *enkla laborativa material* förekommer i undervisningssekvenserna.

När lärare och elever använder det laborativa materialet i matematikundervisningen öppnas det upp för *olika dimensioner av variation* i relation till undervisningssekvensens lärandeobjekt. De variationsmönster som förekommer i studien är kontrast och generalisering. När en dimension av variation öppnas upp ges eleverna möjlighet att erfara lärandeobjektet. I tabellerna som presenteras i resultatkapitlet beskrivs vad eleverna erbjuds erfara i relation till de specifika undervisningssekvenserna.

Diskussion

I det avslutande kapitlet diskuteras, i relation till tidigare forskning, lärares och elevers användande av laborativt material i bråkundervisningen.

Syftet med studien är att, med hjälp av variationsteorin som teoretisk utgångspunkt, beskriva och analysera lärares och elevers användande av laborativt material i skolår 4-6 när de arbetar med tal i bråkform i matematikundervisningen. Tal i bråkform är ett av de viktigaste innehållen i matematikundervisningen (Behr et al., 1992; Engström, 1997; Lamon, 2007; Litwiller & Bright, 2002;) eftersom det ligger till grund för högre studier i matematik (Wang & Siegler, 2013).

Med utgångspunkt i syftet har fyra frågeställningar formulerats: På vilka sätt används laborativt material i bråkundervisningen? Vilka typer av laborativt material används i bråkundervisningen? Vilka dimensioner av variation öppnas upp om tal i bråkform när laborativt material används? Vad görs möjligt för eleverna att erfara om tal i bråkform? Dessa frågor ligger till grund för den följande diskussionen.

Lärares och elevers användande av laborativt material

I resultatkapitlet beskrivs och analyseras lärares och elevers användande av laborativt material i bråkundervisningen utifrån antingen ett *laborerande*- eller ett *konkretiserande arbetssätt* (jfr figur 11 och 12).

Ett exempel på när det laborerande arbetssättet används är när eleverna arbetar med bråkpizzor för att erfara vilka bråkuttryck som är ekvivalenta med varandra och som är en viktig förutsättning för att kunna så väl operera med bråk som att kunna jämföra och storleksordna bråk (Bana et al., 1997; Kamii & Clark, 1995). Eleven använder sig här av representationsformerna *laborativt material*, *bilder* och *skrivna symboler* (se a-pilarna i figur 46). Detta sätt att använda representationsformerna i det laborerande arbetssättet är ett av tre olika sätt. De övriga sätten att använda representationsformerna är: *laborativt material*- *skrivna symboler* (se b-

pilen i figur 46) och *laborativt material- talade symboler* (se c-pilen i figur 46). I figur 46 presenteras en sammanfattande bild över de olika sätten att använda representationsformerna som förekommer i det laborerande arbetssättet.

Figur 46. Riktning mellan olika representationsformer i ett laborerande arbetssätt (med inspiration från Lesh, 1981).

Istället för att utgå från informella representationsformer kan bråkundervisningen även ta sin utgångspunkt i de mer formella representationsformerna. De representationsformer som används i samband med det konkretiserande arbetssättet kan användas i ordningen: *talade symboler*, *skrivna symboler* och *laborativt material* (se a-pilarna i figur 47). Denna ordning används exempelvis när eleverna använder laborativt material för att undersöka hur täljarens och nämnarens placering i ett bråkuttryck påverkar bråkuttryckets värde. Eller så kan det ske en *pendling* mellan ovanstående representationsformer (se b-pilen i figur 47). I resultatet finns således två olika variationer av det konkretiserande arbetssättet, ett som rör sig från de formella representationsformerna i riktning mot de informella och ett som rör sig i samma riktning, men som även pendlar tillbaka till de formella. Resultatet visar att det framförallt sker flera pendlingar mellan den talade- och skrivna representationsformen samt flera pendlingar mellan den talade- och den laborativa representationsformen.

Figur 47. Riktning mellan olika representationsformer i ett konkretiserande arbetssätt (med inspiration från Lesh, 1981).

När undervisningen pendlar så som det beskrivs i den sistnämnda variationen av det konkretiserande arbetssättet sker alltså en slags kombination av båda arbetssätten. Pendlingarna mellan representationsformerna kan tolkas som att de båda arbetssätten kombineras, vilket är något som förespråkas av både Peterson (2003) och Star och Rittle-Johnson (2008). En skillnad mellan användandet av ett laborerande arbetssätt och ett konkretiserande arbetssätt är att i det laborerande arbetssättet inte finns några pendlingar tillbaka till de informella representationsformerna.

En ytterligare skillnad är att när ett konkretiserande arbetssätt används så utnyttjas inte den bildliga representationsformen, därmed är det färre representationsformer som kan representera det matematiska begreppet vilket skulle kunna försvåra elevernas förståelse av ett matematiskt begrepp (se exempelvis Ainsworth et al., 2002). En annan iakttagelse är att oavsett arbetsform så används inte den representationsform som handlar om *omvärldssituationer*. Detta blir särskilt intressant eftersom både kursplanen- och kommentarmaterialet i matematik föreskriver att undervisning ska behandla hur tal i bråkform kan tillämpas i vardagliga situationer (Skolverket, 2011c; 2011d).

Representationsformernas ordning

Beroende på vilket arbetssätt som används så varierar representationsformernas *ordning*. Ibland används det laborativa materialet *initialt*, där eleven först arbetar med ett laborativt material

för att sedan använda sig av andra representationsformer. I andra undervisningssekvenser används det laborativa materialet i *slutet* av en undervisningssekvens.

Inom matematikdidaktiken har en debatt förts rörande i vilken *ordning* representationsformerna bör användas. Några forskare förespråkar att laborativt material användas initialt (se Bruner, 1966; Heddens, 1986; Cramer & Karnowski, 1995; Kosko & Wilkins, 2010). Andra menar att ordningen dels beror på elevens förmåga och dels på vilket begrepp som eleven ska utveckla (Ainsworth et al., 2002; Lesh et al., 1987; McIntosh, 2008; Stylianou, 2009). Oavsett forskarnas inställning beträffande ordningen menar de att användandet av representationsformer möjliggör för eleverna att fördjupa förståelsen av matematiska begrepp (Ainsworth et al., 2002; Cramer & Karnowski, 1995; Kosko & Wilkins, 2010; McIntosh, 2008; Stylianou, 2009).

Denna studie motsäger inte att användandet av representationsformer möjliggör för eleverna att fördjupa förståelsen av matematiska begrepp. Men studien visar att för att erfara en fokuserad aspekt är det av betydelse att de representationsformer som används utgör minst två olika värden av den fokuserade aspekten (jfr Marton, 2015). Det innebär att istället för att använda flera olika representationsformer kan *samma* representationsform användas för att ge eleverna möjlighet att erfara en fokuserad aspekt. Exempel på detta är då kvadrater används i samband med att eleverna ges möjlighet att erfara att alla bråkdelar som ingår i samma helhet måste vara lika stora (jfr figur 4), vilket Clarke et al. (2006) menar är centralt i samband med bråkmodellen Bråk som del av helhet. I den här undervisningssekvensen är det enbart en representationsform, laborativt material, som används.

Härmed visas en skillnad mellan resultatet i studien i och tidigare matematikdidaktisk forskning som belyser vikten av att använda flera olika representationsformer. Utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv kan däremot flera olika representationsformer användas i syfte att fördjupa elevernas kunskaper om en fokuserad aspekt då den *generaliseras* (se Lo, 2012; Marton, 2015). Detta möjliggörs när den fokuserade aspekten hålls invariant medan andra aspekter varierar (se figur 2).

Kritiska aspekter är ytterligare ett sätt att resonera om i vilken ordning representationsformerna kan användas. Kullberg (2010)

menar att vad som är en kritisk aspekt beror dels på vad som ska läras och dels på vem som ska lära. Om samma resonemang appliceras på ordningen av representationsformer, det vill säga för att erfara de kritiska aspekterna så kan ordningen på representationsformer variera beroende på vad som ska läras och vem som ska lära. Detta sätt att resonera om ordningen av representationsformer stämmer överens med de tankar som förs fram av bland annat Lesh et al., (1987), McIntosh (2008) och Stylianou (2009) till skillnad mot de som stödjer sig på Bruners (1966) resonemang om att användandet av representationsformer bör ske i en viss ordning oavsett vad eller vem som ska lära.

Laborativt material- för att uppmärksamma elevers missuppfattningar

Resultatet visar att lärare, med hjälp av laborativt material, kan uppmärksamma elevers missuppfattningar om tal i bråkform. Dessa missuppfattningar kan här förstås som kritiska aspekter (Lo, 2012; Kullberg, 2010; Marton, 2015; Oltenau & Oltenau, 2010). Uppmärksammandet kan ske på två olika sätt. Det ena innebär att lärarna uppmärksammar hur eleverna uppfattar ett lärandeobjekt (Kullberg, 2010; Marton & Booth, 1997) och utifrån elevernas svar urskiljer vilka kritiska aspekter som eleverna ytterligare behöver för att erfara lärandeobjektet. De kritiska aspekterna är på så sätt direkt kopplade till vad som ska läras och vem som ska lära (se Kullberg, 2010). De missuppfattningar som beskrivs i resultatet gäller bland annat hur eleverna muntligen ska uttrycka ett tal i bråkform, vilket exempelvis sker i samband med undervisning om nämnarens och täljarens funktion i ett bråkuttryck. Lärarna förhåller sig här till både lärandeobjektet och till elevernas förståelse av lärandeobjektet. De kritiska aspekterna kan i de här sammanhangen relateras till begreppet *real critical aspects (RCA)* (Oltenau & Oltenau, 2010) eftersom de kritiska aspekterna är relaterade till elevernas erfarenhet. Lärarnas agerande kan i de här fallen förstås mot bakgrund av det Ball (2001) benämner som lärarnas *reflektiva praxis* där lärarna har förmågan att lägga om kursen i en pågående interaktion med eleverna och kan ta nya beslut om sitt eget agerande i förhållande till elevernas erfarenhet.

Det andra sättet att uppmärksamma missuppfattningar om tal i bråkform innebär att läraren lyfter fram, för lärarna, tidigare kända kritiska aspekter av ett lärandeobjekt. De kritiska aspekterna är i dessa situationer enbart kopplade till vad som ska läras (se Kullberg,

2010) och inte till vem som ska lära eftersom lärarna inte vet om det är en kritisk aspekt av lärandeobjektet för just den eleven eller elevgruppen. I dessa sammanhang kan de kritiska aspekterna istället ses som *potential critical aspects (PCA)* (Oltenau & Oltenau, 2010) eftersom det här är lärarnas tidigare erfarenheter av lärandeobjektet som avgör vad som kan vara en kritisk aspekt.

Olika typer av laborativt material

I de undervisningssekvenser som presenterats i resultatet används många olika typer av laborativt material. Det förekommer dels laborativt material som betecknas som *vardagligt material*, dels *pedagogiskt material* som är specialtillverkat och avsett att användas i matematikundervisningen (se Szendrei, 1996). Resultatet visar att den övervägande delen av det material som används är av vardaglig karaktär så som tändstickor, A4- papper och snäckor.

Resultatet visar också att användandet av laborativt material ibland försvårar elevernas förståelse av tal i bråkform. En av svårigheterna uppstår när ett äpple ska delas in i exakt lika stora delar, vilket är centralt i samband med bråkmodellen Bråk som del av helhet (se Clarke et al., 2006; Valdemoros, 2004). En annan svårighet framkommer då resultatet även visar att elevernas uppmärksamhet riktas mot materialet i sig självt när de frågar om de får äta upp äpplet efter lektionen. Denna typ av laborativt material är således av karaktären perceptuellt rikt laborativt material (se McNeil et al., 2009) och exemplet visar att den problematik som lyfts fram av bland annat Belenky och Schalk (2014), DeLoache (2000), Uttal et al. (1997) och Kaminski et al. (2008) beträffande användandet av perceptuellt rika laborativa material i matematikundervisningen även till viss del stämmer med resultatet i denna studie.

Däremot visar resultatet att eleverna i denna studie inte tycks påverkas av att det laborativa materialet ibland kan ha olika färger vilket tidigare studier påvisat (se Uttal et al., 1997; De Loache 2000). Till exempel visar resultatet att när eleverna arbetar med bråkmodellen Bråk som del av antal med uppgiften "Hur stor del är $\frac{1}{4}$ av 24?" så påverkas eleverna inte av att de använder olikfärgade multilinkkuber. En förklaring till skillnaden mellan denna studies resultat jämfört med tidigare forskning är att eleverna i denna studie är äldre. Att äldre elever har större förmåga än yngre elever att

bortse från materialets *dubbla representation* (DeLoache, 2000) har även studier av Gathercole et al. (2004) och Son et al. (2008) visat.

Resultatet visar däremot att även enkelt laborativt material (se McNeil et al., 2009) kan påverka elevernas erfaran- de av tal i bråkform. Exempelvis visar resultatet att enkla laborativa material försvårar elevernas arbete med att storleksordna bråkkort på ett snöre eftersom bråkkorten som används av eleverna inte sitter kvar på snöret utan faller ner. Dessutom visar resultatet att även korten till slut placeras ut rätt i förhållande till varandra så sitter inte korten på korrekt avstånd i förhållande till varandra, vilket enligt Prediger (2006) är en stor utmaning för eleverna att förstå.

Studiens resultat innebär alltså oavsett om materialet som används är ett perceptuellt rikt material eller ett enkelt laborativt material så finns för- respektive nackdelar med användandet av båda typerna av material.

Dimensioner av variation- vad ges eleverna möjlighet att erfara

Av resultatet framkommer att laborativt material kan användas för att dimensioner av variation kan öppnas upp genom att (a) synliggöra olika värden av en fokuserad aspekt, (b) synliggöra variationer med hjälp av olika uppgifter och (c) synliggöra variationer med hjälp av olika strategier.

Synliggöra olika värden av en fokuserad aspekt

Resultatet visar att det finns två olika sätt som det laborativa materialet användas på för att synliggöra olika värden av en fokuserad aspekt och på så sätt öppna upp en dimension av variation. I det ena fallet handlar det om att *två olika värden* av en fokuserad aspekt används. Detta sker bland annat när en liten bråkcirkel där $\frac{1}{4}$ markerats kontrasteras mot en större bråkcirkel där $\frac{1}{4}$ markerats. Eleverna ges här möjlighet att erfara att bråkdelen- s namn inte påverkas av bråkdelen- s storlek.

Ytterligare exempel på när *två olika värden* av en fokuserad aspekt används för att öppna upp en dimension av variation sker är då eleverna ges möjlighet att erfara nämnarens och täljarens funktion. Detta är av stor betydelse eftersom både Erlwanger (1973) och resultatet i TIMSS 2007 visar att eleverna inte alltid inser vikten av

detta. Resultatet visar att efter det att dimensionen av variation öppnats upp ges eleverna en möjlighet att generalisera (se Lo, 2012; Marton 2015) och fördjupa sin kunskap när en annan typ av material tillförs i undervisningssekvensen.

Resultatet visar dessutom att en dimension av variation även kan öppnas upp genom att *flera olika värden* av den fokuserade aspekten används, vilket bland annat sker i samband med att olika geometriska figurer med varierande storlek, kontrasteras. Eleverna ges här möjlighet att erfara att bråkdelens namn inte påverkas av varken storlek eller form.

I figur 48 presenteras en sammanfattning över vilka variationsmönster som används för att öppna upp dimensioner av variation.

Figur 48. Variationsmönster som förekommer i undervisningssekvenserna och vem som använder det laborativa materialet.

Av figuren framgår att de variationsmönster som används för att öppna upp en dimension av variation är *kontrast* och *generalisering*. Att öppna upp en dimension av variation med hjälp av kontraster görs av både lärare och elever. Däremot är det enbart läraren som använder det laborativa materialet i syfte att ge eleverna möjlighet att generalisera sin kunskap om tal i bråkform.

Synliggöra variationer med hjälp av olika uppgifter

Ytterligare ett perspektiv på hur dimensioner av variation kan öppnas upp presenteras i det följande. Här fokuseras istället på om variationerna öppnas upp genom att olika *uppgifter varierar*.

Exempel på när uppgifterna varierar är när eleverna arbetar med beräkningar av tal i bråkform. Här använder eleverna samma slags strategi när de arbetar med additionsberäkningar av tal i bråkform, medan uppgiftstyperna varierar eftersom eleverna bygger olika uppgifter på sina geobräden. När strategierna är invarianta och uppgiftstyperna varierar kan en dimension av variation öppnas upp. Detta illustreras i figur 49.

Figur 49. Eleverna presenteras en strategi (S) för att arbeta med en viss uppgiftstyp (U.). Strategin hålls invariant medan uppgifterna varierar (U.var 1-n) (med inspiration från Runesson, 1999).

Synliggöra variationer med hjälp av olika strategier

Det tredje sättet att öppna upp en dimension av variation på sker *när strategierna att lösa uppgiften varierar* medan uppgifterna är invarianta (se figur 50). I resultatet sker det då eleverna arbetar med bråkmodellen Bråk som del av antal. Här utgår eleverna från samma uppgift men använder olika strategier för att lösa uppgiften.

Figur 50. Eleverna arbetar med olika strategier (S. var.1-n) för att lösa en viss uppgift (U) (med inspiration från Runesson, 1999).

I resultatet ses därmed att när uppgifterna varierar så är strategierna invarianta och tvärtom, när strategierna varierar hålls uppgifterna invarianta. Denna typ av variation förekommer även i Runessons (1999) resultat. Till skillnad från Runessons (1999) resultat, där det var läraren som presenterade och varierade strategierna innan eleverna själva fick arbeta med uppgifterna, visar föreliggande studie att det är eleverna som med hjälp av det laborativa materialet själva får komma med förslag på olika strategier.

Resultatet i studien visar att genom att både lärare och elever använder laborativt material i bråkundervisningen kan det bidra till att öppna upp dimensioner av variation på flera olika sätt, som i sin tur kan ge eleverna möjligheter att erfara och utveckla kunskap om tal i bråkform. Detta kan leda till att eleverna ges möjlighet att fördjupa sina kunskaper om tal i bråkform.

Slutsatser, didaktiska implikationer och förslag på fortsatt forskning

Studien avser att ge ett ämnesdidaktiskt bidrag inom matematikdidaktik gällande lärares och elevers användande av laborativt material. Studien kan på så sätt bidra med olika tankeverktyg kring *hur lärare och elever använder laborativt material i bråkundervisningen, vilka typer av material som används, vilka dimensioner av variation som öppnas upp med hjälp av laborativt material*

och slutligen vad som görs möjligt för eleverna att erfara om tal i bråkform.

Lärares användning av laborativt material kan till stor del kännetecknas som ett konkretiserande arbetssätt medan elevernas arbetssätt till stor del kännetecknas av ett laborerande arbetssätt. Representationsformer som används i det konkretiserande arbetssättet är muntliga-, skriftliga- och laborativa representationer. I det laborerande arbetssättet används laborativ, - bild, - muntlig- och skriftlig representationsform.

Resultatet visar att det material som används kan karaktäriseras som både pedagogiska material och vardagliga material (se Szendrei, 1996), med en överrepresentation av vardagliga material. En intressant fråga i relation till de satsningar som gjorts (se Skolverket, 2011a; 2012) gällande inköp av pedagogiska material är att lärarna i föreliggande studie övervägande använder vardagliga material i bråkundervisningen. Resultatet kan tolkas på flera sätt. En tolkning kan vara att dessa är mer lättillgängliga än specialtillverkade material som ofta förvaras i något gemensamt utrymme i skolans lokaler (se Marshall & Swan, 2008; Perry & Howards, 1997). En annan tolkning är att de observerade matematikklassrummen av olika anledningar inte köpt in något specialtillverkat material som kan användas i bråkundervisningen.

Oavsett om vilken typ av laborativt material som används kan det vara betydelsefullt att beakta att det material som används, vare sig det är av typen perceptuellt rika laborativa material eller enkla laborativa material (se McNeil et al., 2009), kan det leda till att elevernas uppmärksamhet riktas från den matematiska idén som materialet är tänkt att representera. Inbyggt i det laborativa materialet kan det finnas en dubbel representation, det vill säga materialet kan dels representera sig självt, dels den matematiska idén (jfr DeLoache, 1995, 2000, 2004; Belenky & Schalk, 2014; se även De Vries, 2005; Kroes, 2002). Detta kan leda till att eleverna fokuserar på materialet i sig självt i stället för vad materialet är tänkt att representera.

Studiens resultat visar att med hjälp av det laborativa materialet kan dimensioner av variation öppnas upp. Detta sker företrädesvis genom att variationsmönstret kontrast används. Utifrån detta resonemang ligger alltså fokus inte på om vilken typ av arbetssätt

(laborerande eller konkretiserande) som kan används i bråkundervisningen. Det blir inte heller avgörande vilka representationsformer som används. Istället är det mer avgörande att synliggöra en fokuserad aspekt genom en variation, samtidigt som andra aspekter får träda tillbaka. Det innebär att det som ska erfaras måste vara framträdande och ligga i förgrund, medan andra aspekter bildar bakgrund (Marton & Booth, 1997). När skillnader framträder kan nya aspekter erfaras (jfr Marton, 2015, Lo, 2012).

Om syftet med bråkundervisningen däremot är att fördjupa och generalisera elevernas kunskaper av en fokuserad aspekt kan flera olika representationsformer användas eftersom eleverna då ges möjlighet att generalisera (se Lo, 2012; Marton, 2015) den fokuserade aspekten. Den fokuserade aspekten är här invariant medan andra aspekter varierar (se figur 2).

Studien kan därmed bidra med kunskap om vilka dimensioner av variation som öppnas upp i matematikundervisningen när laborativt material används och vad som görs möjligt för eleverna att erfa om tal i bråkform.

Förslag till fortsatt forskning

Denna studie har bland annat visat att olika typer av laborativt material kan leda till att elevernas uppmärksamhet riktas från den matematiska idén som materialet var tänkt att representera på grund av materialets eventuella inbyggda dubbla representation. Med utgångspunkt i detta och med tanke på de senaste framstegen inom datateknik där det numera förutom *fysiska laborativa material* som beskrivits i denna studie även används *virtuella laborativa material* i matematikklassrummen. Ett virtuellt material kan definieras som ett interaktivt, webbaserat visuell representation av ett dynamiskt objekt (Moyer, Bolyard, & Spikell, 2002). Så vore det det vara intressant att studera om det även i de virtuella laborativa materialen finns någon inbyggd dubbel representation. Det vore dessutom intressant att studera effekterna på elevernas lärande när dessa båda material används. Tidigare studier har visat att både fysiska- och virtuella material är effektiva verktyg för att elever i år 3 ska utveckla sin begreppsliga, -och procedurella förmåga gällande dels bråk (Reimer & Moyer, 2005), dels algebra (Suh & Moyer, 2007).

Reimer och Moyer (2005) undersökte om elevers begreppsliga- och procedurella förmåga förändrades efter det att eleverna arbetat

med virtuella material som stöd i arbetet med bråk. Resultatet visade att elevernas poäng gällande den begreppsliga förmågan var signifikant högre vid eftertestet än vid förtestet. Inga signifikanta skillnader kunde ses gällande den procedurella förmågan. En förklaring till varför det inte fanns några signifikanta skillnader gällande den procedurella förmågan menar forskarna berodde på takeffekter.

Ett förslag är att vidareutveckla Reimer och Moyers (2005) studie genom att dels se om samma effekter beträffande elevers begreppsliga förmåga även gäller för elever i år 4-6. Men det skulle även vara intressant att studera eventuella effekter på andra förmågor (se Skolverket 2011c) förutom de två som Reimer och Moyer studerade.

Ett ytterligare förslag till fortsatt forskning som ligger i linje med med Suh och Moyers (2007) studie är att studera om det finns några skillnader mellan vilka förmågor som elever i år 4-6 ges möjlighet att utveckla i samband med att de antingen får tillgång till ett virtuellt laborativt material eller ett fysiskt laborativt material i bråkundervisningen.

Referenser

- Ainsworth, S., Bibby, P., P., & Wood, D. (2002). Examining the Effects of Different Multiple Representational Systems in Learning Mathematics. *The journal of the Learning Sciences*, 11(1), 25-61.
- Allen, C. (2007). *An action based research study on how using manipulatives will increase students' achievement in Mathematics*. Detroit, MI: Marygrove College.
- Ball, D. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, 16(2), 46-47.
- Ball, D. (2001). Teaching with respect to mathematics and students. In T. Wood, B. Nelson, & J. Warfield (Eds.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (pp. 11-22). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Bana, J., Farrell, B. B., & McIntosh, A. (1997). Student error patterns in fraction and decimal concepts. In F. Biddulph & K. Carr (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated* (Vol. 1) (pp. 81-87). Rotorua, New Zealand: MERGA.
- Becker, H. S. (2008). *Tricks of the trade: yrkesknepe för samhällsvetare*. Malmö: Liber.
- Behr, M., Harel, G., & Post, T. (Ed.) (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 296-333). New York: Simon & Schuster/Macmillan.
- Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(4), 294-323.
- Belenky, D., & Schalk, L. (2014). The effects of idealized and grounded materials on learning, transfer, and interest: An organizing framework for categorizing external knowledge representations. *Educational Psychology*, 26(1), 27-50.
- Bergsten, C. (2010). Mathematics Education Research in Sweden: An Introduction. In B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Pálsdóttir, B. Søndergaard, & L. Haapasalo (Eds.), *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education* (pp. 269-282). Charlotte: Information Age Publishing.

- Björkqvist, O. (2003). *Matematikdidaktiken i Sverige: en lägesbeskrivning av forskningen och utvecklingsarbetet*. Stockholm: Kungliga Vetenskapsakademien.
- Björkqvist, O. (2005). *Lära ut och in: om innehållet i pedagogisk verksamhet*. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Bjørndal, C. (2005). *Det värderande ögat: observation, utvärdering och utveckling i undervisning och handledning*. Stockholm: Liber.
- Boggan, M., Harper, S., & Whitmire, A. (2010). Using manipulatives to teach elementary mathematics. *Journal of Instructional Pedagogies*, 3(1), 1-6.
- Brandell, G. (2005). *Forskarskolan i matematik med ämnesdidaktisk inriktning. I Utbildningsvetenskap 2005- Resultatdialog och framblick*. Vetenskapsrådet: Utbildningsvetenskapligakommitténs rapport 2005:13.
- Brandell, G. (2010). The Swedish Graduate School in Mathematics Education: An Effort to Promote an Interdisciplinary Research Field. In B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Pálsdóttir, B. Søndergaard, & L. Haapasalo (Eds.), *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education* (pp. 387-306). Charlotte: Information Age Publishing.
- Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77-101.
- Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, Mass: Belknap Press.
- Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19(1), 1-15.
- Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. (2., [rev.] uppl.). Malmö: Liber.
- Carbonneau, K., Marley, S., & Selig, J. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380-400.
- Carpenter, T., Coburn, M., Kepner, H., Lindquist, M., & Reys, R. (1980). National assessment: Prospective of students' mastery of basic skills. In M. Lindquist, *Selected issues in mathematics education*. Berkley, CA: Mc Cutchan.
- Carpenter, T., Coburn, T., & Reys, R. (1978). *Results from the First Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Carpenter, T., Coburn, T., Reys, R., & Wilson, J. (1976). Notes from national assessment: Addition and multiplication with fractions. *Arithmetic Teacher*, 23(2), 137-141.
- Carpenter, T., Fennema, E., & Romberg, T. (1993). *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Clarke, D., Roche, A., Mitchell, A., & Sukenik, M. (Eds.) (2006). Assessing students. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková, *Proceedings of the 30th Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education (Vol. 2,)* (pp. 337-344). Prague PME: PME.
- Clements, D. (1999). "Concrete" Manipulatives, Concrete Ideas. Contemporary Issues. *Early Childhood*, 1(1), 45-60.
- Clements, M., Bishop, A., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education*. New York: Springer New York.
- Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66-86.
- Cordova, D. I., & Lepper, M. (1996). Intrinsic motivation and the process of learning: Beneficial effects of contextualization, personalization, and choice. *Journal of Educational Psychology*, 88(4), 715-730.
- Cotter, J. (2000). Using language and visualization to teach place value. *Teaching Children Mathematics* 7(2), 108-114.
- Cramer, K. A., Post, T., & del Mas, R. (2002). Initial Fraction Learning by Fourth- and Fifth-Grade Students: A Comparison of Effects of Using Commercial Curricula With the Effects of Using the Rational Number Project Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education* 33 (2), 111-144.
- Cramer, K., & Karnowski, L. (1995). The importance of informal language in representing mathematical ideas. *Teaching Children Mathematics*, 1(6), 332-6.
- Cramer, K., & Karnowski, L. (1995). The importance of informal language in representing mathematical ideas. *Teaching Children Mathematics*, 1(6), 332-336.
- Cramer, K., Behr, M., Post, T., & Lesh, R. (1997). *Rational Number Project: Fraction Lessons for the Middle Grades - Level 1*. Dubuque Iowa: Kendall/Hunt Publishing Co.

- Cruikshank, D. E., & Sheffield, L. (1992). *Teaching and learning elementary and middle school mathematics*. New York: Merrill, 24.
- De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modeling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction*, 13(4), 441-463.
- De Vries, M. (2005). *Teaching about technology: An introduction to the philosophy of technology for nonphilosophers*. Dordrecht: Springer.
- DeLoache, J. (2004). Becoming symbol-minded. *Trends in Cognitive Science*, 8(2), 66-70.
- DeLoache, J. S. (2000). Dual representation and young children's use of scale models. *Child Development*, 71(2), 329-338.
- DeLoache, J. S. (Ed.) (1995). Early symbol understanding and use. In D. Medin, *The psychology of learning and motivation*, Vol. 33 (pp. 65-114). New York: Academic.
- Derry, S., Pea, R., Barron, B., Engle, R., Erickson, F., Goldman, R., . . . Sherin, B. (2010). Conducting Video Research in the Learning Sciences: Guidance on Selection, Analysis Technology and Ethics. *Journal of the Learning Sciences* 19(1), 3-53.
- Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1990). *Children learning mathematics- A teacher's guide to recent research*. Oxford: Casell Educational Ltd.
- Dienes, Z. (1969). *Building Up Mathematics*. London: Hutchison Education.
- Durmus, S., & Karakirik, E. (2006). Virtual manipulatives in Mathematics education: A theoretical framework. *The Turkish Journal of Educational Technology*, 5(1), 117-123.
- English, L., & Halford, G. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Engström, A. (1997). *Reflektivt tänkande i matematik: om elevers konstruktioner av bråk*. Diss. Lund: Stockholm.
- Engvall, M. (2013). *Handlingar i matematikklassrummet: en studie av undervisningsverksamheter på lågstadiet då räknemetoder för addition och subtraktion är i fokus*. Diss. Linköping: Linköpings universitet.
- Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1(2), 7-26.

- Forsblom-Nyberg, Y. (1995). Samtal som transkription. In A.-M. Ivars, & P. Slotte (Red.), *Folkmålsstudier* 36 (pp. 53-74). Helsingfors: Institutionen för nordiska språk och nordisk.
- Furoto, D., & Lang, M. (1982). *Relationship of self concept enhancement to anxiety and achievement in college mathematics*. ERIC Document Reproduction Service No. ED 218 088.
- Gathercole, S. E., Pickering, S. J., Ambridge, B., & Wearing, J. H. (2004). The structure of working memory from 4 to 15 years of age. *Developmental Psychology*, 40(2), 177-190.
- Gersten, R., Beckmann, S., Clarke, B., Foegen, A., & Marsh, L. (2009). *Assisting students struggling with mathematics: Response to intervention (RTI) for elementary and middle schools (NCEE 2009-4060)*. Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, US Department of Education.
- Goldsby, D. (2009). *Research summary: Manipulatives in middle grades mathematics*. Hämtad 17 februari 2015, från <http://www.amle.org/TabId/270/ArtMID/888/ArticleID/325/Research-Summary-Manipulatives-in-Middle-Grades-Mathematics.aspx>. Westerville: Association for Middle Level Education.
- Goldstone, R. L., & Sakamoto, Y. (2003). The transfer of abstract principles governing complex adaptive systems. *Cognitive Psychology*, 46, 414-466.
- Granström, K. (2003). Arbetsformer och dynamik i klassrummet. In S. Selander, Kobran, nallen och majjen. *Tradition och förnyelse i svensk skola och skolforskning* (pp. 223-243). Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.
- Gürbüz, R. (2010). The effect of activity-based instruction on conceptual development of seventh grade students in probability. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(6), 743-767.
- Hart, K. M. (1984). *Ratio: Children's Strategies and Errors*. Windsor: NFER-Nelson.
- Hartnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: Paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and instructions*, 8(4), 341-374.
- Hartshorn, R., & Boren, S. (1990). *Experiential Learning of Mathematics: Using Manipulatives*. Martin, TN & Charleston, WV: ERIC Clearinghouse on Rural Education and Small Schools.

- Hattie, J. (2009). *Visible Learning. A Synthesis of over 800 metaanalyses relating to achievement*. London & New York: Routledge.
- Heath, C., Hindmarch, J., & Luff, P. (2010). *Video in qualitative research: Analysing social interaction in everyday life*. London: Sage.
- Heddens, J. (1986). Bridging the Gap between the Concrete and the Abstract. *Arithmetic Teacher*, 33(6), 14-17.
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse and student's learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal*, 30(2), 393-425.
- Holmqvist, M. (2010). Teachers learning in a Learning Study. *Instructional Science*, 39(4), 497-511.
- Holmqvist, M. (Red.) (2006). Att teoretisera lärande. In M. Holmqvist, *Lärande i skolan: learning study som skolutvecklingsmodell* (pp. 9-28). Lund: Studentlitteratur.
- Howe, K., & Eisenhart, M. (1990). Standards for qualitative (and quantitative) research: A prolegomenon. *Educational Researcher* 19(4), 2-9.
- Häggström, J. (2008). *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: what is made possible to learn?* Göteborg: Diss. Göteborg.
- Jordan, B., & Henderson, A. (1995). Interaction analysis: Foundation and practice. *Journal of the Learning Sciences* 4(1), 39-103.
- Jordan, L., & Miller, M. D. (1999). The effects of concrete to semiconcrete to abstract instruction in the acquisition and retention of fraction concepts and skills. *Learning Disabilities*, 9(3), 115-122.
- Kamii, C., & Clark, F. (1995). Equivalent Fractions: Their Difficulty and Educational Implications. *Journal of Mathematical Behaviour*, 14(4), 365-378.
- Kaminski, J. A., Sloutsky, V., & Heckler, A. F. (2008). The advantage of abstract examples in learning math. *Science*, 320(5875), 454-455.
- Kelly, C. (2006). Using Manipulatives in Mathematical Problem Solving: A Performance Based Analysis. *The Montana Mathematics Enthusiast University of Colorado at Colorado Springs.TMME*, 12(2), 184-193.
- Kennedy, S., & Tipps, S. (1994). *Guiding children's learning of mathematics*, 7th ed. Belmont: CA: Wadsworth.
- Kenney, J. (2005). *Literacy strategies for improving mathematics instruction*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

- Kieren, T. (1995). Creating spaces for learning fractions. In J. Sowder, & B. T. Schappelle, *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 31-65). Albany, NY: State University of New York Press.
- Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and institutional foundations of rational numbers. In R. Lesh, & D. Bradbard, *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp. 104-144). Athens, GA: ERIC/SMEAC.
- Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. E. Kieren, E. Fennema, & T. Romberg (Eds), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.
- Kilborn, W. (2014). *Tal i bråk och decimalform- en röd tråd*. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematik.
- Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers*. Diss. Göteborg: Göteborgs universitet.
- Kilpatrick, J. (1995). Staking claims. *Nordisk matematikdidaktik* 3(4), 21-40.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, D. C: National Academy Press.
- Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. (1. uppl.). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.
- Kosko, K., & Wilkins, J. (2010). Mathematical Communication and Its Relation to the Frequency of Manipulative. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, (5)2, 79-90.
- Kroes, P. (2002). Design methodology and the nature of the technical artefacts. *Design Studies*, 23(3), 287-302.
- Kroll, C., & Halaby, M. (1997). Writing to learn mathematics in the primary school. *Young Children*, 52(4), 54-60.
- Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned. Professional insights gained and shared by teachers of mathematics*. (Gothenburg studies in educational sciences 293). Gothenburg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Kullberg, A., & Runesson, U. (2013). Learning about the numerator and denominator in teacher-designed lessons. *Mathematics Education Research Journal* 24(5), 547-567.
- Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. (2. uppl.). Lund: Studentlitteratur.

- Lamon, S. (Ed.)(2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Langer, S. (1942). *Philosophy in New Key*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Larsson, S. (2005). Om kvalitet i kvalitativa studier. *Nordisk Pedagogik* 25(1), 16-35.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problemsolving. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 235-264.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (Ed.) (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier, *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lindström, G., & Pennlert, L. (2006). *Undervisning i teori och praktik: en introduktion i didaktik. (3.uppl.)*. Umeå: Fundo.
- Linell, P. (1994). *Transkription av tal och samtal: teori och praktik*. Linköpings universitet: Tema kommunikation.
- Litwiller, B., & Bright, G. (2002). *Making sense of fractions, ratios, and proportions, 2002 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*. Reston, VA: NCTM.
- Lo, M. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Göteborg: Acta universitatis Gothoburgensis.
- Lo, M., Chik, P., & Pang, M. (2006). Patterns of variation in teaching the colour of light to Primary 3 students. *Instructional Science*, 34, 1-19.
- Mack, N. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg, *Rational numbers: An integration of research* (pp. 85-103). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Marsh, L. G., & Cooke, N. (1996). The effects of using manipulatives in teaching math problem solving to students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice* 11(1), 58-65.
- Martin, T. (2009). A theory of physically distributed learning: How external environments and internal states interact in mathematics learning. *Child Development Perspectives* 3(3), 140-144.
- Martin, T., & Schwartz, D. (2005). Physically Distributed Learning: Adapting and Reinterpreting Physical Environments in the Development of Fraction Concepts. *Cognitive Science* 29, 587-625.

- Martinez, J. (1987). Preventing math anxiety: A prescription. *Academic Therapy*, 23, 117-125.
- Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. New York, N Y: Routledge.
- Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Marton, F., & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.
- Marton, F., & Morris, P. (Eds.) (2002). *What matters? Discovering critical conditions of classroom learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis nr. 181.
- Marton, F., & Pang, M. (2006). On some necessary conditions for learning. *Journal of the Learning Science*, 15(2), 193-220.
- Marton, F., & Pang, M. (2013). Meanings are acquired from experiencing differences against a background of sameness, rather than from experiencing sameness against a background of difference: Putting a conjecture to the test by embedding it in a pedagogical tool. *Frontline Learning Research* 1(1), 24-41.
- Marton, F., & Tsui, A. (Eds.) (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum.
- Marton, F., Runesson, U., & Tsui, M. (2004). The space of learning. In F. Marton, & A. Tsui, *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 3-40). Mahawah: NJ: Lawrence Erlbaum.
- Mc Intosh, A. (2008). *Förstå och använda tal: en handbok (1.uppl.)*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikundervisning: Göteborgs universitet.
- McLeod, D. (Ed.) (1992). Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. In D. Grouws, *Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp. 575-596). New York: Macmillan.
- McNeil, N. M., Uttal, D., Jarvin , L., & Sternberg, R. (2009). Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics objects on mathematics problems. *Learning and Instruction*, 19, 171-184.
- McNeil, N., & Jarvin, L. (2007). When theories don't add up: disentangling the manipulatives debate. *Theory Into Practice*, 46(4), 309-316.
- Mercer, N., & Sams, C. (2006). Teaching children how to use language to solve maths problems. *Language and Education* 20(6), 507-528.

- Miller, G. (1956). The magic number seven, plus or minus two. Some limits on our capacity to process information. *Psychological Review*, 63, 81-87.
- Miller, J. (1964). An experimental comparison of two approaches to teaching multiplication of fractions. *Journal of Educational Research*, 57(9), 468-471.
- Moch, P. (2002). Manipulatives Work! *The Educational Forum* (66) 1, 81-87.
- Mondada, L. (2006). Video recording as the reflexive preservation and configuration of phenomenal features for analysis. In H. Knoblauch, J. Raab, H.-G. Soeffner, & B. Schmettler (Eds.), *Video Analysis* (pp. 51-67). Bern: Peter Lang.
- Montessori, M. (1964). *The Montessori method*. New York, NY: Schocken.
- Moyer, P. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 175-197.
- Moyer, P. S., & Jones, M. (2004). Controlling choice: Teachers, students, and manipulatives in mathematics classrooms. *School Science and Mathematics*, 104(1), 16-31.
- Moyer, P. S., Bolyard, J. J., & Spikell, M. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics*, 8(6), 372-377.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ni, Y., & Zhou, Y. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40, 27-52.
- Nishida, T. K. (2007). *The use of manipulatives to support children's acquisition of abstract math concepts*. Charlottesville, VA: University of Virginia.
- Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 40(1), 1-24.
- Norrby, C. (1996). *Samtalsanalys, så gör vi när vi pratar med varandra*. Lund: Studentlitteratur.
- Novillis, C. (1976). An Analysis of the Fraction Concept into a Hierarchy of Selected Subconcepts and the Testing of the Hierarchical Dependencies. *Journal of Research in Mathematics Education*, 7(3), 131-144.

- Ochs, E. (1979). Transcription as theory. In E. Ochs, & B. Schieffelin (Ed.), *Developmental pragmatics* (pp. 43-72). New York: Academic Press.
- Olteanu, C. (2007). "Vad skulle x kunna vara?": andragradsekvation och andragradsfunktion som objekt för lärande. Diss. Umeå: Umeå universitet.
- Oltenau, C., & Oltenau, L. (2010). Changing teaching practice and students' learning of mathematics. *Education Inquiry* 1(4), 381-397.
- Pang, M., & Marton, F. (2003). Beyond "lesson study" - Comparing two ways of facilitating the grasp of economic concepts. *Instructional Science*, 31(3), 175-194.
- Petersen, L. A., & McNeil, N. (2013). Effects of Perceptually Rich Manipulatives on Preschoolers' Counting Performance: Established Knowledge Counts. *Child Development*, 84(3), 1020-1033.
- Pettersson, A. (2003). Bedömning och betygsättning. In *Baskunnande i matematik* (pp. 60-75). Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.
- Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number*. New York: Humanities Press.
- Piaget, J. (1962). *Play, dreams, and imitation in childhood*. New York, NY: Norton.
- Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 30(1), 5-38.
- Prediger, S. (2006). The relevance of didactic categories analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, 18(1), 3-17.
- Raphael, D., & Wahlstrom, M. (1989). The influence of instructional aids on mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 173-190.
- Reimer, K., & Moyer, P. (2005). Third graders learn about fractions using virtual manipulatives: A classroom study. *Journal of Computers Computers in Mathematics and Science Teaching*, 24(1), 5-25.
- Reys, R., Suydam, M., & Lindquist, M. (1995). *Helping Children Learn Mathematics*. Boston, MA: Allyn and Bacon: Allyn and Bacon.
- Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll*. Göteborgs universitet: Acta Universitatis Gotoburgensis .

- Runesson, U. (2005). Beyond discourse and interaction. Variation: A critical aspect for teaching and learning mathematics. *Cambridge Journal of Education*, 35(1), 69-87.
- Runesson, U. (2008). Learning to design for learning. The potential of learning study to enhance learning on two levels: Teachers' and students' learning. In W. T. & P. Sullivan, *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp. 153-172). Rotterdam: The Netherlands: Sense Publishers.
- Runesson, U., & Gustavsson, G. (2012). Sharing and developing knowledge products from Learning Study. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1(3), 245-260.
- Sahlström, F. (1999). *Up the Hill Backwards. On Interactional Constraints and Affordances for Equity-Constitution in the Classrooms of the Swedish Comprehensive School.* (Uppsala Studies of Education, 85). Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis.
- Sarama, J., Clements, D. H., Swaminathan, S., McMillen, S., & Gonzalez Gomez, R. M. (2003). Development of mathematical concepts of two-dimensional space in grid environments: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 21, 285-324.
- Schraw, G., Flowerday, T., & Lehman, S. (2001). Increasing situational interest in the classroom. *Educational Psychology Review*, 13, 211-224.
- Skemp, R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Skolverket. (2004). *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003: sammanfattande huvudrapport*. Stockholm: Statens skolverk.
- Skolverket. (2008). *TIMSS 2007. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv. Rapport 323*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket. (2009). *Vad påverkar resultaten i svensk grundskola? Kunskapsöversikt om betydelsen av olika faktorer*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011a). *Redovisningar av uppdrag om att genomföra utvecklingsinsatser i matematik, naturvetenskap och teknik*. Stockholm.
- Skolverket. (2011b). *Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverkstäder: en utvärdering av Matematiksatsningen, rapport 366*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011c). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.

- Skolverket. (2011d). *Kommentarmaterial till kursplanen för matematik*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2012). *Tid för matematik: erfarenheter från matematikundervisningen 2009-2011*. Stockholm: Skolverket.
- Son, J., Smith, L., & Goldstone, R. (2008). Simplicity and generalization: Short-cutting abstraction in children's object categorizations. *Cognition*, 108, 628-638.
- Sophian, C. (1996). The trouble with fractions. *Children's numbers*, 89-101.
- SOU. (2004:97). *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens*. Stockholm: Fritzes.
- Sowell, E. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 498-505.
- Sparrman, A. (2005). Video recording as interaction: participant observation of children's everyday life. *Qualitative Research in Psychology*, 2, 241-255.
- Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14, 503-518.
- Star, J., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problemsolving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, 565-579.
- Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York: Springer.
- Stein, M. K., & Bovalino, J. (2001). Manipulatives: One piece of the puzzle. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(6), 356-259.
- Strässer, R. (2005). *An overview of research on teaching and learning mathematics*. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Stylianou, D. (2009). Teachers' Conceptions of Representation in Middle School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(4), 325-343.
- Suh, J., & Moyer, P. (2007). Developing students' representational fluency using virtual and physical algebra balances. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 26(2), 155-173.
- Swantesson, J. (2012). Learning study – kompetensutveckling med matematik i fokus. In *Tid för matematik- erfarenheter från Matematiksatsingen 2009-2011* (pp. 77-82). Stockholm: Skolverket.
- Sweller, J. (2006). The worked example effect and human cognition. *Learning and Instruction*, 16, 165-169.

- Sweller, J., van Merriënboer, J. J., & Paas, F. (1988). Cognitive Architecture and Instructional Design. *Educational Psychology Review*, 10 (3), 251-296.
- Szendrei, J. (1996). Concrete materials in the classroom. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde, & (Eds.), *International handbook of mathematics education (vol. 1)* (pp. 411-434). Dordrecht: Kluwer.
- Thompson, P., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter, *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 95-113). Reston, VA: National Council of Teacher.
- Trost, J., & Hultåker, O. (2007). *Enkätboken*. (3., [rev. och utök.] uppl.) . Lund: Studentlitteratur.
- Trygg, L. (2014). Undervisning med laborativa material. In K. Wallby, U. Dahlberg, O. Helenius, J. Häggström , & A. Wallby, *Matematikundervisning i praktiken* (pp. 176 - 183). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.
- Tzur, R. (2004). Teacher and students' joint production of a reversible fraction conception. *Journal of Mathematical Behavior*, 23(1), 93-114.
- Uribe-Flórez, L. J., & Wilkins, J. (2010). Elementary School Teachers' Manipulative Use. *School Science and Mathematics*, 110(7), 363-371.
- Uttal, D. H., Liu, L., & DeLoache, J. (2006). Concreteness and symbolic development. In L. B. & C. S. Tamis-LeMonda (Eds.), *Child psychology: A handbook of contemporary issues (2nd Ed.,)* (pp. 167-184). New York: Psychology Press.
- Uttal, D., Scudder, K., & DeLoache, J. (1997). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18, 37-54.
- Valdemoros, M. (2004). Fractions in Adult's Elementary School . *Proceedings of the 28th Conference of the International* (pp. 377-384). Bergen, Norway: Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Van de Walle, J., Karp, K., & Bay-Williams, J. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. 8th Edition. Boston: Pearson.
- Wang, Y., & Siegler, R. (2013). Representations of and translation between common fractions and decimal fractions. *Chinese Science Bulletin*, 4630-4640.

- Wedegge, T. (Red.) (2008). Gränsöverskridande: om forskningsfältets identitet . In T. Wedegge, *Identitet og forskning: ni essays om at blive matematikdidaktisk forsker* (pp. 6-21). København: Nationalt Videncenter for Matematikdidaktik, NAVIMAT.
- Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt: vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna*. Diss. Umeå, Kristianstad: Umeå universitet, Högskolan Kristianstad.
- Vetenskapsrådet. (2011). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet. Hämtad 17 december 2014 från <http://www.codex.vr.se/texts/hsfr.pdf>.
- Whitin, D., & Whitin, D. (2004). *Math Is Language Too: Talking and Writing in the Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bilaga 1

Till vårdnadshavare och elever

Hej!

Mitt namn är Cecilia Sveider och arbetar på lärarutbildningen vid Linköpings universitet. Jag skriver till er därför att jag förutom att undervisa så har jag påbörjat en studie som kommer att handla om matematikundervisning i skolår 4-6. Syftet med studien är att beskriva hur lärare och elever arbetar med laborativt material.

För att kunna genomföra studien kommer jag att besöka och videofilma olika matematiklektioner. Eftersom ditt barns/din lärare har tackat ja till att medverka i studien innebär det att även ditt barn/du kommer att videofilmas. Deltagandet är frivilligt och kan när som helst avbrytas. För att få videofilma behöver jag ert samtycke i form av en underskrift på bifogad blankett.

Materialet som samlas in kommer att behandlas konfidentiellt. Det innebär att ditt barns/ditt namn, lärarens namn eller skolans namn kommer att anonymiseras i studien. Det insamlade materialet enbart kommer att användas i forskningssammanhang.

Har ni några frågor eller funderingar är ni välkomna att kontakta mig via mail cecilia.sveider@liu.se eller telefon 013- 28 XX XX

Med vänliga hälsningar

Cecilia Sveider

Medgivande till deltagande i studien

☐

Ja, vårt/ mitt barn får delta.

☐

Nej, vårt/mitt barn får inte delta.

Barnets

namn:.....

Målsmans/-mäns

underskrift:.....

.....

TIDIGARE UTGIVNA RAPPORTER

- 239 Tjellander, Bengt. HUR JAG BLEV LÄRARES LÄRARE. Den förändrade lärarrollen – den forskande pedagogiska processhjälparen och vetandeskapandet. En didaktikfilosofisk betraktelse. Juli 2004. (Licentiatavhandling)
- 240 Westlund, Ingrid. LÄXBERÄTTELSE. Läxor som tid och uppgift. Oktober 2004.
- 241 Pedersen, Jens. VÄGAR TILL VÄRDERINGAR OCH VÄRDEN. Skolans sociala fostran i läroplanstexter och pedagogisk praktik. Oktober 2004. (Licentiatavhandling)
- 242 Colnerud, Gunnel & Hägglund, Solveig (red). ETISKA LÄRARE – MORALISKA BARN. Forskning kring värdefrågor i skolans praktik. Värdepedagogiska texter II. November 2004.
- 243 Matwejeff, Susanna. SVENSKFÖDDA ADOPTERADES SÖKPROCESS. Januari 2005. (Licentiatavhandling)
- 244 Samuelsson, Joakim. LÄRARSTUDENTERS ERFARENHETER AV MATEMATIKUNDERVISNING. Vad händer med elever när de inte förstår? Maj 2005.
- 245 Öfverström Christel. UPPLEVELSE, INLEVELSE OCH REFLEKTION - drama som en aktiv metod i lärandet. September 2006. (Licentiatavhandling) ISBN: 91-85643-71-8
- 246 Eriksson Gustavsson Anna-Lena, Samuelsson, Joakim. DIDAKTISKA SAMTAL I SPECIALPEDAGOGISKA KONTEXTER. En studie av undervisning i grundläggande svenska och matematik. Februari 2007. ISBN: 978-91-85715-68-8.
- 247 Österström, Stefan. OM KONSTEN ATT ÖVERBRYGGA GRÄNSER. En fallstudie om kommunal äldreomsorg och samspelet med andra organisationer. Maj 2007. ISBN: 978-91-85895-04-5.
- 248 Engström, Arne, Magne, Olof. MEDELSTA-MATEMATIK IV. En empirisk analys av Skolverkets förslag till mål att uppnå i matematik för årskurs 3. Mars 2008. ISBN: 978-91-7393-918-8.
- 249 Thornberg, Robert. Vilka värden elever enligt lärare ska få med sig från skolan. April 2008. ISBN: 978-91-7393-909-6.
- 250 Colnerud, Gunnel Karlsson, Ingrid Szklarski, Andrzej. ALLTID REDO Lärarstudenters handlingsberedskap för varierande uppgifter i klassrummet. 2008. ISBN: 978-91-7393-784-9.

- 251 Szczepanski, Anders. HANDLINGSBUREN KUNSKAP Lärares uppfattningar om landskapet som lärandemiljö. 2008. ISBN: 978-91-7393-889-1.
- 252 Thornberg, Robert. Ett resursteams samverkan med skola, elever och föräldrar – förtjänster, hinder och utmaningar. 2009. ISBN: 978-91-7393-599-9 (Finns bara i Pdf-format).
- 253 Hammar Chiriac, Eva. SLÄPP TANKARNA LOSS – DET ÄR NYTT. Kvalitetsgranskning av ett reformarbete. Ny speciallärarutbildning. 2009. ISBN: 978-91-7393-541-8
- 254 Eriksson Gustavsson, Anna-Lena, Holme Lotta. ATT GÖRA OLIKA LIKA. Universitetslärares uppfattningar om och erfarenheter av undervisning av funktionshindrade studenter. 2009. ISBN: 978-91-7393-529-6
- 255 Lönebrink, Thomas. PROCESSER I VÄXELVERKAN. En grundad teoretisk modell om landstingskommunal samverkan för personer med psykiska funktionshinder. 2010 (Licentiatavhandling). ISBN: 978-91-7393-242-4
- 256 Harlin, Eva-Marie. Överraskning och Reflektion. Lärarstudenters lärande från egen undervisning. 2010 (Licentiatarbete). ISBN: 978-91-7393-228-8
- 257 Eriksson Gustavsson, Anna-Lena. ”Det är tufft att plugga... men jag känner att jag klarar det”. En studie om akademiska studier och skriftspråkliga svårigheter. 2011. ISBN: 978-91-7393-183-0
- 258 Samuelsson, Joakim. Den skicklige matematikläraren. 2013. ISBN: 978-91-7519-609-1
- 259 Fredriksson Mårtensson, Åsa. Handledare och handledning - gymnasial yrkesutbildning på förskola. 2014 (Licentiatavhandling). ISBN: 978-91-7519-269-7
- 260 Wallin, Jessica. Entreprenörskap i skolan. Formulering och transformering av GY11 inom gymnasieskolans hantverksprogram. 2014. (Licentiatarbete). ISBN: 978-91-7519-263-5
- 261 Alm, F, Jungert, T och Thornerg, R: Nyantagna lärarstudenters motiv, motivation, självtillit och akademiska engagemang. 2014. ISBN: 978-91-7519-384-7 (finns bara i elektronisk version).
- 262 Kerekes, Klara. Undervisning om växande geometriska mönster. En variations-teoretisk studie om hur lärare behandlar ett matematiskt innehåll på mellanstadiet. 2014. (Licentiatavhandling). ISBN: 978-91-7519-135-5
- 263 Bergseth, Brita. Vägledande eller vilseledande? Kvalitetsmätning och ranking av universitet och högskolor. 2015 (Licentiatavhandling). ISBN: 978-91-7685-937-7.