Linköping Studies in Behavioural Science No. 129

PÅ TAL OM MATEMATIK

Matematiken, vardagen och den matematikdidaktiska diskursen

Eva Riesbeck

Linköpings universitet

Institutionen för beteendevetenskap och lärande

Eva Riesbeck

På tal om matematik
Matematiken, vardagen och den matematikdidaktiska diskursen

Copyright: © Eva Riesbeck och Institutionen för beteendevetenskap och lärande

Bild: Utförd av Jelina Olson m.fl. studenter på matematikinriktningen; Lärarprogrammet vid Linköpings universitet

Tryck: LiUTryck, Linköping, 2008

Linköping Studies in Behavioural Science No. 129
ISBN 978-91-7393-948-5
ISSN 1654-2029

Distribueras av:
Institutionen för Beteendevetenskap och lärande
Linköpings universitet
S-581 83 Linköping, Sweden

Skäms inte för att du är människa, var stolt.
Inne i dig öppnar sig valv bakom valv oändligt.
Du blir aldrig färdig och det är som det skall.

Tomas Tranströmer

Förord

När jag arbetade som lärare i grundskolan under drygt tjugo år fanns inte ens tanken på att skriva en avhandling. Men det uppenbarade sig ofta en utmanande nyfikenhet hos mig hur skolan kunde utvecklas, hur kompetensutbildning kunde göras bättre och hur jag tillsammans med elever och lärarstudenter skulle kunna förändra matematikundervisningen. Det var just i den här miljön mina forskningsprojekt kring kommunikation och matematik i skolan tog sin början när jag arbetade som lärarutbildare på Linköpings universitet.

Jag antog alltså utmaningen att delta i projekt om skolans matematikundervisning och den person som möjliggjorde detta först var professor Roger Säljö vid Göteborgs universitet som också var min handledare fram till min licentiatexamen. Tack!

En ytterst viktig person som gjort det möjligt för mig att 2004 återuppta min forskning och som betytt mycket för mig är min gode vän och kollega Jan Wyndhamn. Ett stort och innerligt tack! Utan din uppmuntran, kunnighet, handledning och utmärkta analysförmåga hade jag aldrig blivit färdig och det är du Jan som har lärt mig mera av noggrannhet, systematik och analys. Jag vill även rikta ett stort tack till Gerd, Jans fru som på ett så frikostigt sätt tog emot mig i ert hem i Helsingborg.

Jag vill även rikta ett stort tack till alla lärare och elever i skolan som på ett entusiastiskt sätt tog sig an mina uppgifter i matematik och samtalade och diskuterade om dessa. Utan er hade det inte blivit någon avhandling. Ett stort tack vill jag också rikta till de lärarstudenter som med sådan nyfikenhet deltog i samtal i och om matematik. Det har varit fascinerande att få utforska sin ”egna praktik”.

Mitt avhandlingsarbete vill jag beskriva som en spännande och lärorik orientering i matematikundervisningens värld. Nyfikenheten och utmaningen att hitta sådant som jag aldrig sett ledde till spännande upptäckter och det var just detta som höll mig vid liv i stunder av ensamhet.

Men det är omöjligt att skriva en avhandling helt på egen hand därför vill jag även rikta ett tack till de kolleger som har läst och analyserat delar av mitt material. Tack professor Kerstin Bergquist och lektor Joakim Samuelsson för de analyser och diskussioner som ni har bidragit med. Tack universitetsadjunkt Thomas Svensk för den översättning till engelska av

sammanfattningen av min avhandling som du har genomfört. Till mina kolleger på avdelningen för didaktik och pedagogiskt arbete vill jag rikta ett tack för de små stunder som ni skänkt mig er omtanke.

Jag vill också rikta ett tack till min opponent vid mitt slutseminarium professor Inger Wistedt vid Stockholms universitet, som öppnade upp mina ögon och fick mig att se det jag inte sett. Du gav mig en kompassriktning mot målet.

Men utan en handledare med stor erfarenhet på den egna institutionen, som tror att man ska klara av det och som har gett goda råd och synpunkter skulle arbetet inte heller vara möjligt att genomföra. Tack professor Lars Owe Dahlgren! Du har gjort det möjligt för din 30:e doktorand.

Jag vill även i detta sammanhang rikta ett tack till min biträdande handledare docent Ingrid Andersson för noggrann genomläsning av mitt manus, intressanta och utvecklande diskussioner och uppmuntrande tillrop!

Innan man når målet finns det fler kontroller och några till vill jag stanna upp inför. Ett stort tack till mina två kolleger docent Christer Bergsten och professor Jan Schoultz som med noggrannhet och analys i slutet av min avhandling har gett mig respons på mitt manus.

Men det finns fler som har hjälpt mig att orientera rätt, så att kartan blev fullkomlig. Först ett tack till Linköpings universitet för ekonomiska bidrag först med kompetensutvecklingsprogram för en licentiatexamen på tjugofem procent i två år och sedan tre och en halv månads ledighet som delvis bidragit till att målgången passeras. Ett tack vill jag också rikta till min prefekt Annika Rannström och institutionen för beteendevetenskap och lärande för en månads ledighet i avhandlingens slutskede.

Under årens lopp har jag haft små andningspauser, där jag har kunnat skratta, uppleva och slappna av tillsammans med goda vänner. Tack Ditte, B., Ewa, P., Ingrid, B., Ingrid, J., Kerstin, B., Kerstin, J., Kerstin, R., Marianne R. och Maj, T. för att ni finns och för alla goda middagar och träffar med diverse innehåll.

Tack min familj, min man och vuxna barn, Johan, Fredrik och Camilla min svärdotter, för att ni tålmodigt har accepterat min begränsade tid och väntat i bakgrunden. Ni har lärt mig att ta utmaningar!

Till sist tack Eva för att du antog utmaningen!

Linköping i februari 2008

Eva Riesbeck

Innehåll

INTRODUKTION 9

Avhandlingens syfte 12
Uppläggning av avhandlingen 13

TEORETISK REFERENSRAM 14

Att få grepp om begrepp 14
Diskurs 19

DISKURSIVA GRÄNSER 24

Vardaglig diskurs 24
Modellering och problemlösning 26
En historisk-matematisk diskurs 29
Matematisk diskurs 31

MATEMATIKDIDAKTIK 37

Diskursen om undervisning 37
Tidigare forskning om språk och matematik 39

METODOLOGI 43

Perspektiv 43
De empiriska studiernas utformning 43
Analysen av empiriska data 46

STUDIERNA – EN SAMMANFATTNING 48

Matematiska samtal i klassrummet. Introduktion av triangelns area i ett komparativt perspektiv. 48
Samtal, samarbete och samsyn: En studie av koordination av perspektiv i klassrumskommunikation. 51
Matematisering i en mångtydig verklighet. En studie av elevers förståelse av relationen mellan modell och omvärld. 53

Det hänger på decimalen! Om hur vi formar och bygger meningsmönster i vår omvärld. 55
Lärarstudenters problemlösande samtal om matematikundervisning. 57

SAMMANFATTNING OCH DISKUSSION 60

Diskurs som analysverktyg 60
Diskurs som riktningsangivare 64
Diskurs som teoretiskt – didaktiskt begrepp 68

SUMMARY 72

Speaking of Mathematics – Mathematics, Every-Day Life and School Mathematics Discourse 72

REFERENSER 83

ARTIKEL I Matematiska samtal i klassrummet. Introduktion av triangelns area i ett komparativt perspektiv

ARTIKEL II Samtal, samarbete och samsyn: En studie av koordination av perspektiv i klassrumskommunikation

ARTIKEL III Matematisering i en mångtydig verklighet – En studie av elevers förståelse av relationen mellan modell och omvärld

ARTIKEL IV Det hänger på decimalen! Om hur vi formar och bygger meningsmönster i vår omvärld

ARTIKEL V Lärarstudenters problemlösande samtal om matematikundervisning

Introduktion

> Learning mathematics or learning to think mathematically is learning to speak mathematically (Lerman, 2002, p. 107).

Detta citat återspeglar i koncentrat en viktig ståndpunkt i denna avhandling.

I samtalen utvecklas vårt tänkande och lärande och det är i samtalen som vi kan klargöra de övergångar som är nödvändiga för att gå från konkret till abstrakt verksamhet. Att tänka matematiskt är för mig ”att vara förtrogen” med matematiska idéer, så att man kan argumentera för ett sakförhållande eller en omständighet i utforskandet av ett problem. En sådan förtrogenhet kräver färdighet men kan inte ersättas av denna. Det krävs dessutom ett visst mått av påståendekunskap, som är språkligt formulerad, där man kan anföra argument.

De matematiska idéerna omfattar bland annat mönster, logik, spatiala konfigurationer och kan uttryckas i numeriska, algebraiska och geometriska relationer. Det är matematikens abstrakta natur som möjliggör allmängiltiga resonemang och därmed – litet paradoxalt – gör matematiken användbar eller tillämpbar i olika konkreta sammanhang. För att kunna ”se” och ”uppleva” detta krävs ett språkligt formulerat kunnande.

Arbetet med avhandlingen har väglett mig till en något annorlunda och konsekvent syn på skolundervisningen i matematik, för jag har inte alltid sett matematikkunnande ur ovanstående perspektiv. Det som startade min långa resa var när jag som lärare i matematik i grundskolan upplevde att mina elever såg matematiken som ointressant och tråkig. Skolans förhållningssätt till lärande i matematik präglades av inställningen att det var ett individuellt projekt och för att kunna tänka och räkna måste det vara tyst i klassrummet. ”Tyst räkning” kan ses som liktydigt med ”isolering” och betoningen på färdighetsträning förstärks av läroböckernas innehållsliga prioriteringar. Flera nationella och internationella utredningar om matematiken i skolan visar på det alltför stora utrymmet för tyst räkning i skolan även nu (Skolverket, 1996, 2003, 2004a, 2004b; SOU, 2004:97; Johansson, 2006). Samtidigt har under lång tid i skolans styrinstrument och andra studier, uttrycket ”att tala matematik” betonats (Lpo 94; Wyndhamn, 1993, 2002; Sfard, 1998; Malmer, 1999; Mercer, 2000; Riesbeck, 2000; Löwing, 2004; Johnsen Høines, 2004; Taflin, 2007). Men vad innebär detta uttryck? Är det att elever ska samtala om en vardaglig matematikupp-

gift? Är det att lärare och elever ska samtala om ett matematiskt problem? Innebär det att lärare ska samplanera sin matematikundervisning eller betyder det att samtala med hjälp av matematiska begrepp? Samtalet skulle kunna utgöra nyckeln till porten mellan matematiken och vardagen och särskilt med hjälp av vardagsanknuten problemlösning (The Essential Vygotsky, 2004). Men, det finns någonting mera, som vi kan utveckla genom att analysera samtal i olika matematiska situationer. I samtalen i och om skolmatematik kan man upptäcka en pendelrörelse mellan verklighet och matematiska begrepp och uttryck.

Det som också kan konstateras är att centrala läroplaner inte ger den hjälp åt lärare som skulle behövas när undervisning ska genomföras i den mycket specifika kontext som ett matematikklassrum utgör. Läro- och kursplaner är ofta för allmänt hållna och de ger lärare stor handlingsfrihet (Lpo 94; Skolverket, 2000). Det borde finnas ytterligare en dimension i läro- och kursplaner, som kan ge svar på reflekterande och utvecklande frågor (Charles et al., 1987; Emanuelsson, 2001).

Under mina år som lärarutbildare har jag upplevt hur vissa undervisningsbegrepp har tagits för givna av lärarstuderande och har ofta presenterats utan att de studerande har någon sammanhållen bild av hur undervisningen skulle kunna bedrivas. En studie av Wyndhamn (2000) visar hur olika inlärningsteorier och ämnesdidaktiska resonemang inte alltid ger de studerande önskvärda tankeverktyg för sin undervisning. Ord som konkretion, variation, tala matematik, problemlösning och vardagsmatematik har inte blivit ifrågasatta. Frågan varför vi gör si eller så får ofta olika svar.

Min bild av undervisningens komplexitet har mognat då jag deltagit i flera forskningsprojekt som har handlat om undervisning i matematik. Jag har varit i en forskningsmiljö där ”kommunikation” intar en central plats vid beskrivningen av människan och hennes villkor. Kommunikation kan ses som en grundbult i all mänsklig verksamhet och en förutsättning för allt samordnat socialt handlande. Kommunikation skapar en gemensam erfarenhetsgrund och ses som vägröjare för individuell kognition (Sfard & Kieran, 2001) och kommunikation i matematikklassrum kan ses som att lära sig ett matematiskt register (Chronaki, 2005). Den ursprungliga och viktigaste formen för kommunikativt handlande är vanligt tal, som vi kan kalla för ”prat” eller ”språkande”. Språket blir redskap för ett växelspel mellan tanke och erfarenhet (Vygotsky, 1986).

Ordet ”tanke” inrymmer två nyanser nämligen tänkande och det tänkta. Vi vet dock inte alltid vilket vi menar. När vi säger till en elev ”Tänk!” Vad avser vi då? Vi kan ju inte tänka utan att tänka på något.

Ordet ”tal” är mera entydigt och syftar företrädesvis på själva talhandlingen även om vi ibland syftar på ett specifikt anförande. Det är skillnad mellan ”tala” och ”säga”. Man kan inte tala utan att säga och man kan

inte säga utan att säga något, dessutom på ett bestämt språk. Om vi går tillbaka till det som sades om matematik ovan, så är påståendekunskapen språkligt formulerad. Men att påstå något är inte bara att utsäga, det innebär att hävda något. Och att hävda något kräver att man är beredd att anföra skäl, vilket i sin tur kräver förtrogenhet med området.

Det är därför utomordentligt intressant att lyssna till vad elever och lärare säger under en matematiklektion. Det är i skärningen mellan förtrogenhet och sägande dvs. i framförandet av påståenden som insikten eller förståelsen för ett sakförhållande eller ett problem visar sig.

Här följer ett exempel på samtal från en matematiklektion, där ett försök görs att visa på hur vi genom att analysera samtal kan upptäcka elevers kunskap och lärande i matematiken.

Ett exempel från ett elevsamtal

Rebecka:	Vad var det man tog gånger?
Fredrik:	Arean gånger nånting.
Rebecka:	Du skulle ha fram två tal som blir gånger. Vilka två tal blir det? Vad var det för nånting du mätte?
Martin:	Höjden.
Fredrik:	Med den här eller förut?
Rebecka:	Höjden gånger basen. Sen.
Fredrik:	Jaaa.
Rebecka:	Höjden gånger basen först. Sen är det? Kommer du … inte ihåg, du kunde det nyss.
Fredrik:	Ja, jag kommer inte ihåg det. Det står still i huvudet.
Lärare A:	Har ni kommit fram till någonting?
Rebecka:	Höjden gånger basen .... sen skulle vi få fram arean på triangeln.
Fredrik:	Det står still i huvudet.
Rebecka:	Vad är arean på rektangeln? Sen när du jämför rektangeln.
Fredrik:	Räkna ut omkretsen. Nej.
Rebecka:	Vad är arean på rektangeln?

(Citatet är hämtat från artikeln II).

Exemplet visar hur en situation frambringar en viss typ av yttranden. I kommunikationen hålls en viss matematisk diskurs uppe av Rebecka, medan Fredrik inte blir delaktig alls i denna. Vi kan anta att hans lärande är minimalt. Dessutom är det viktigt att påpeka att de inte skulle tala om detta om de inte befann sig på en matematiklektion.

Avhandlingens syfte

Det övergripande syftet med denna avhandling är att besvara frågan ”Hur kan diskurs som teoretiskt - didaktiskt begrepp bidra till att utveckla matematikundervisningen”? Den teoretiska referensramen innehåller en beskrivning och ett resonemang om begrepp, symboler och ord utifrån ett sociokulturellt perspektiv. Att genom språket socialiseras mot ett bestämt mål i en aktivitet som man gradvis blir mer och mer delaktig i är centralt i det sociokulturella perspektivet (Vygotsky, 1986; Lave, 1988; Lave & Wenger, 1991; Wertsch, 1991).

Mina studier handlar om kommunikation i klassrummet, då lärares och elevers interaktion uppmärksammas, alltså hur elever uppfattar lärarens språk och hur elever samtalar med varandra och med vilka begrepp. Vidare kan vi ta del av elevers uppfattning om problemlösningsuppgifter och interaktionen elever emellan samt på vilka sätt lärarstudenter samtalar om matematiksituationer. Fokus i avhandlingen är att undersöka om ett mera specifikt och precist samtal kan utvecklas mellan lärare, elever och lärarstudenter i olika matematiska situationer.

I mina studier beskriver jag hur elever, lärare och lärarstudenter utvecklar ett språk och ett samspel, både vardagligt och matematiskt i matematikundervisningen. Med hjälp av diskursanalys av samtalen går det att upptäcka hur begrepp, tecken och ord används för att uttrycka olika kunskap.

I de empiriska undersökningarna sker analyser av de små diskurserna för att upptäcka hur den språkliga processen ser ut i gränslandet mellan vardagliga och vetenskapliga begrepp (Vygotsky, 1978), men även i gränsöverskridandet mellan matematikens olika symboler och begrepp. Påståendet att läraren, studenten och eleven måste socialiseras in i den matematiska diskursen genom språket för att bli ”matematiserade”, blir tydligt och blir en del av det som ska undersökas.

Matematiska begrepp representerar relationer och det betyder att vi inte har tillgång till matematiska objekt direkt utan måste lita till användandet av ord och uttryck, tecken och symboler, bilder och diagram. Den matematiska kunskapen föreligger alltså inte tillrättalagd, uppenbar och färdig för ”inlärning” utan kräver ett aktivt deltagande i en social process från elevens sida. Det är därför det precisa och specifika samtalet blir viktigt att beskriva och förstå och diskursbegreppet kan förhoppningsvis utgöra ett tankeredskap för detta syfte.

Det hittills förda resonemanget kring den matematikdidaktiska diskursen kan sammanställas i två frågor som är centrala för arbetet.

Vad sker i mötet mellan vardagliga och vetenskapliga begrepp under samtal i och om matematik?

Hur synliggörs elevers lärande och lärares didaktiska förhållningssätt genom ett diskursanalytiskt perspektiv?

Uppläggning av avhandlingen

För att underlätta läsningen inleds avhandlingen med en presentation av det övergripande problem som kommer att studeras. Därefter följer en teoretisk behandling av begrepp som är relevanta för studien. Vidare beskrivs begreppet diskurs utifrån olika perspektiv. Sedan följer en beskrivning av hur en viss diskurs kan skiljas från andra diskurser genom diskursiva gränser. Didaktik- och matematikdidaktikbegreppen diskuteras därefter och definieras utifrån diskursen om matematikundervisning. I kapitlet om metodologi beskrivs metoder för studiens genomförande och analys av empiriska data. En sammanfattande beskrivning av studierna 1-5 följer därefter. Den sista delen utgörs av en sammanfattning av de empiriska studierna, en diskussion av dessa och slutsatser.

Efter denna introduktion följer nu en teoretisk genomgång av centrala begrepp.

Teoretisk referensram

> We don't have any perspective or instrumental access to mathematical objects, even the most elementary. We cannot see them, study them through a microscope or take a picture of them. The only way of gaining access to them is using signs, words or symbols, expressions or drawings. But, at the same time, mathematical objects must not be confused with the used semiotic representations. This conflicting requirement makes the specific core of mathematical knowledge (Duval, 2000, p.61).

Det huvudsakliga innehållet i ovanstående citat berör hur individer aktivt tillägnar sig matematisk kunskap utifrån tecken, ord och symboler. För att förstå på vilka sätt detta kan ske, börjar de teoretiska utgångspunkterna i denna avhandling med en fördjupning av innebörden i och relationerna mellan begrepp, ord och tecken.

Att få grepp om begrepp

Bakgrunden till denna genomgång är dels att matematiken är uppbyggd kring begrepp och dels att vi ständigt träffar på nya begrepp i vår vardagliga tillvaro. Framförallt är dock syftet att med hjälp av de teoretiska begreppen kunna ge svar på mina frågor kring hur språk, tanke och begrepp hör samman i matematikundervisningen.

I ett sociokulturellt perspektiv förekommer begreppen kontext, mediering och artefakter (Vygotsky, 1986), vilka också spelar en central roll i denna avhandling. Begreppet *kontext* kan sägas vara det sammanhang våra handlingar ingår i och hur dessa skapar och återskapar dessa sammanhang (Cole, 1996; Fairclough, 1992). Vi kan tala om fysisk, kognitiv, kommunikativ och historisk kontext (Duranti & Goodwin, 1992; Säljö, 2000). *Mediering* innebär att människan samspelar med hjälp av externa redskap, när hon uppfattar världen omkring sig (Daniels, 2001; Säljö, 2005). De medierande redskapen kan vara tecken eller symboler som gör att vi kan tolka omvärlden, ta ställning och handla på olika sätt (Säljö, 2005). Detta fenomen visar sig exempelvis när människan inte klarar av att tänka på flera saker samtidigt i huvudet. Hon räknar med hjälp av fingrar, en kulram eller en miniräknare. Men det finns också språkliga redskap som ramsor och metaforer. Både

språkliga och fysiska *artefakter* är resurser som är skapade av människor för att handla och lösa problem (Vygotsky, 1978). De resurser som människan utvecklar kan användas i olika situationer, att reflektera med, att skapa förmåga till inlevelse, kommunicera med andra och se olika händelser i skilda perspektiv. Länken mellan individ och kollektiv är de historiskt utvecklade redskap, som olika kulturer ger. Språket låter oss se på världen ur ett metaperspektiv, begreppsliggöra den, pröva så att vi kan dela erfarenheter med andra (Gärdenfors, 2000). Men i praktiska sammanhang går det inte alltid att skilja fysiska och intellektuella artefakter åt (Cole, 1996; Kozulin, 1998). Fysiska och språkliga redskap är kulturella resurser som bidrar till att kunskaper och färdigheter lever vidare i vårt samhälle. Interaktion mellan människor är en ständigt medierande process.

Med semiotiska utgångspunkter kan man belysa hur ett språkligt element binds ihop med sin betydelse (Fiske, 1990). Till exempel formas det allmänna begreppet triangel genom abstraktion och genom att vi bortser från egenskaper hos enskilda trianglar och enbart betraktar den allmänna egenskapen ”tresidig figur”. Ett matematiskt begrepp fixeras genom en definition.

> En triangel består av tre punkter, som inte ligger i linje och de tre sträckorna mellan dessa (Matematikterminologi i skolan, 1966, s.42).

Denna definition av begreppet triangel stödjer sig sålunda på termerna punkt, sträcka och linje.

Ett begrepps betydelse kan uppnås genom vägen fram till referenten eller kan sägas vara det sätt på vilket referenten görs närvarande och åskådliggörs. Betydelsen kan också sägas vara det vi tänker om referenten eller den föreställning vi gör oss om referenten. Ett begrepp kan sägas ha en *föreställningssida*. Denna består av ett nät av relationer och med språkets hjälp kan vi få elever att förstå ett visst begrepp. Begreppen utgör stommen i vårt tänkande och de matematiska begreppen utgör ryggraden i en matematisk struktur (Wyndhamn, 1987, s.34).

Eftersom begreppen bara existerar i föreställnings- eller tankevärlden ger vi dem benämningar när vi kommunicerar (Allwood & Andersson, 1976). Detta görs genom termer och tecken. Termen kan liknas vid en etikett som man sätter på ett begrepp. Kärnan i terminologiläran ligger i de inbördes relationerna mellan företeelser i verkligheten, begrepp i föreställningsvärlden samt termer och definitioner i den vetenskapliga världen. Det är viktigt att i diskussionen hela tiden veta i vilken värld man befinner sig. Ett språk, vilket som helst, som inte underhåller och utvecklar terminologier inom olika områden förblir ett fattigt språk. Det blir ett alltför enkelt språk som ingen kan använda i sammanhang, där det är viktigt att enty-

dighet och smidighet spelar stor roll, som till exempel i vetenskapliga sammanhang (Allwood, 1976; Linell, 1998).

Vad är det då för skillnad på ord och termer? Man kan uttrycka det som att alla termer också är ord men alla ord är inte termer. *En term är ett ord eller uttryck som genom tradition eller överenskommelse används inom ett speciellt fackområde i en väl avgränsad betydelse* (Svenska språknämnden, 2007).

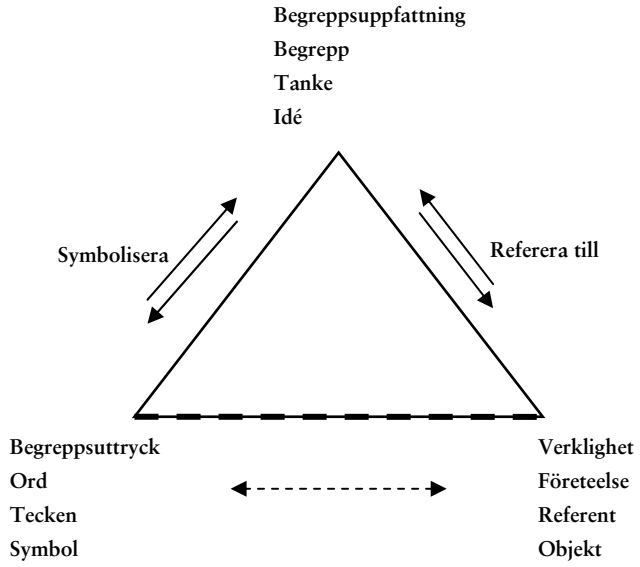
Ord i det vardagliga språket kan ha en vid och ibland ganska diffus betydelse. Men när dessa används som termer får de en betydligt snävare innebörd. En terminologisering av ordet har då skett. Att en fackspråklig text med många termer upplevs som svårtillgänglig beror på att den återspeglar en språkgemenskap, som stänger ute den oinvigde. Men termerna är nödvändiga, när fackexperter kommunicerar sinsemellan. Termerna behövs för att säkerställa en så effektiv kommunikation som möjligt. En term är alltså en benämning på något, till skillnad från ord som beskrivs som tecken (de Saussure, 1916/1983). Inom teckenläran ses ordet egentligen som något som betyder något bara därför att det betyder något utan att själva betydelsen är i fokus. Vad det talas eller tänks om finns inte med i denna beskrivning av tecken.

Enligt den amerikanske filosofen Peirce står ett tecken bara för något annat i ett bestämt avseende. Tecknet samlar intresset eller uppmärksamheten på något särskilt. Det står inte heller för sig självt utan kräver en tolkning av teckenrelationen eller en begripliggörande process. Peirce beskriver en tredelad modell som ger en diakronisk och dynamisk syn på ett teckens mening, då han inkluderar referenten (Peirce, 1931-58).

Att förstå ett visst uttryck innebär att kunna skilja på vad som faktiskt uttrycks från det som åsyftas (referenten). Vilken referenten är framgår ofta av kontexten för kommunikationen. Men lika ofta måste man ha en omfattande och utvecklad personlig erfarenhet av att ”kunna” teckenanvändning för att bringa reda i relationen uttryck – innehåll. Ser vi språket som ett teckenbaserat medium för kommunikation är det genom användning av det som referensen till världen skapas (Searle, 1969; Fiske, 1990).

Peirce (1994) behandlade tre teckenkategorier eller olika förhållanden mellan tecknet och objektet det hänvisar till. Detta kallade han för en teckendoktrin med orden *ikon, index* och *symbol*. Inom denna doktrin skulle alla vetenskapliga, filosofiska och vardagliga problem omformuleras. En ikon liknar objektet på något sätt, i ett index finns ett direkt samband mellan tecknet och objektet och i en symbol saknas både likhet och samband. Ett fotografi är ett exempel på en ikon, rök är ett index på eld och en symbol är ett ord eller ett nummer. Han ger oss sålunda användbara redskap, då vi ska tala om tecken av olika slag (Fiske, 1990).

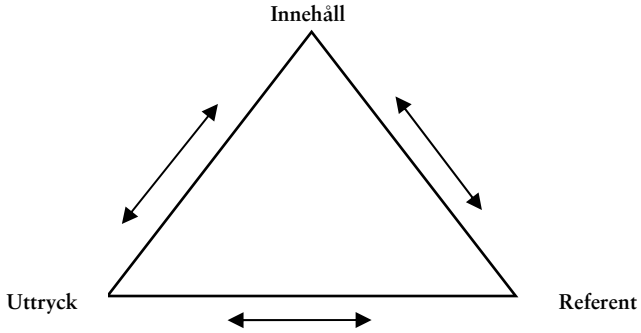
Jag vill klargöra ovanstående tankar från de Saussure och Peirce med en teckenmodell som vanligen kallas den semiotiska triangeln och bygger på ett arbete från 1923 utfört av Ogden och Richards. Den visar sambanden mellan begreppsuppfattning, begreppsuttryck och verklighet.



Figur 1. Den semiotiska triangeln, modifierad efter Ogden and Richards, 1923; Mellin- Olsen, 1984; Johnsen Høines, 2002.

Relationen mellan tanke och symbol är liksom den mellan tanke och referent orsaksmässig och direkt. Relationen mellan symbol och referent är indirekt och ”tillskriven”. Streckmarkeringen får antyda att relationen inte behöver vara observerbar. Objektet kan vara något abstrakt.

Till den semiotiska triangeln kan några begrepp inom ett sociokulturellt perspektiv knytas. I figur två kan vi tydligt se att relationen mellan uttryck U och innehåll I är huvudkomponent i kommunikationen. Relationen mellan uttryck U och referent R återspeglar ett teckenbaserat systems medierande funktion. Den tredje sidan i triangeln, relationen mellan innehåll I och referent R, pekar på den betydelsebärande rollen av ett tecken. De tre funktionerna av ett tecken kan dock bara förstås, då de verkar *samfällt*.



Figur 2. I ett sociokulturellt och även semiotiskt perspektiv (enligt Peirce) verkar alla tre delarna i triangeln samfällt.

Här kan framhållas att i ett sociokulturellt perspektiv är det viktigt att betrakta ett teckens materiella sida – exempelvis skrivna symboler på ett papper, talade ord, ritade symboler i vår vardag och ”bitmaps” på en datorskärm. Ett tecken är också ett materiellt ting. Otaliga är de tecken runt omkring oss som översköljer oss och intervenerar rent fysiskt i vårt sociala liv.

Vi kan alltså se tecken som ord, bilder siffror, symboler, diagram, ekvationer och bokstäver såsom x och y. När till exempel eleven ser, hör och läser språktecknet fem och skriver tecknet 5 är det ibland så att man tror att eleven förstått funktionen av tecknet 5. Att säga att ett tecken betecknar kan vara vilseledande. Tecknet uttrycker något annat än tecknet självt. Det är ett medium, som utgör kunskapens och språkets instrument. Ett teckens betydelse är en invention dvs. ett påhitt av någon. Accepteras tecknet av många blir det en social imposition, något vi måste finna oss i när vi förvärvar ett visst språk. Det viktiga här är att man finner en gemensam mening för varje ny kontext. *Tecken, objekt och mening eller begreppsuppfattning hänger ihop.*

Ett begrepp kan ge upphov till många olika föreställningar beroende på vilka människor, som talar om det och i vilken kontext det förekommer. Ofta identifieras ett begrepps referenter före dess betydelse. Med detta menas att beskrivningar av begrepp görs i vardagen och att många förklaringar till ett begrepps betydelse blir ett ”förgivettagande”.

> Vi gör vårt första steg i filosofin när vi blir intresserade av hur namnen inte står för enskilda företeelser utan för företeelsernas begrepp (Harris, 1995, p. 22).

Vi är dock oftast inte så filosofiska utan etablerar gärna ett rutiniserat förhållande till verkligheten (Israel, 1979). Alltså när vi befinner oss i vår vardag reflekterar vi inte över hur vi pratar eller när vi utför våra vardagliga sysslor.

De semiotiska systemen är sociala och kulturella och då även historiska (Vygotsky, 1986). Det överensstämmer med hur den sociala semiotiken ser till begreppet ”meaning” som en aktiv process som blir till genom social interaktion (Chapman, 1993).

Winslöw uttrycker det så här,

> Creation of signs is as an act of communication, in which some expression is deliberately used to represent some intended meaning. The sign implies a sender with intentions to indicate something to a receiver (Winslöw, 2004, p. 81).

Men matematiska tecken uppträder både i en global och en lokal kontext, så bara om vi vet vad tecknet betyder i den bestämda kontexten kan vi referera till objektet (Winslöw, 2004).

> A single thing, taken out of its context, is in this language characterized as ”abstract” (Israel, 1979, p. 64).

Här spelar alltså den bestämda diskursen stor roll för förståelsen av begreppet. Nedan beskrivs begreppet diskurs och därefter följer en utredning av hur detta begrepp skall användas i denna avhandling.

Diskurs

Begreppet diskurs kan förstås på olika sätt. Diskurs kan tolkas som ett bestämt sätt att tala om, förstå och förhålla sig i världen och dess skilda fenomen (Winther- Jörgensen & Phillips, 2000; Sfard & Kieran, 2001; Sfard, 2002).

I nationalencyklopedin definieras diskurs på följande sätt,

> Diskurs (fr. discours, samtal, yttrande, tal av lat. Discu’rsus samtal, eg, kringlöpande) betyder i dagligt tal samtal, dryftande. I filosofiska och besläktade sammanhang kan ordet beteckna en helhet av sammanhängande uttryck, utsagor och begrepp t.ex. den moraliska, den vetenskapliga eller den religiösa diskursen eller formen hos en sådan helhet (Nationalencyklopedin, Internet).

Vi kan se diskurs som olika *typer* av samtal till exempel formella/informella, monologiska/dialogiska, involverade/distanserade, men också berät-

tande, beskrivande, argumenterande, instruerande och utforskande. Vi kan också se att diskursen ser olika ut i olika *genrer* såsom föreläsning, lektion, predikan, lärobok, roman och reklam för att bara nämna några (Halliday, 1978; Fairclough, 1992; Winther- Jörgensen & Phillips, 2000).

Samtalet är ett viktigt verktyg både i arbetet och under fritiden. Ett samtal kan innehålla maktstrukturer, som kan visas i hur samtal inleds, utvecklas och avslutas, hur man genom samtalet kontrollerar och dominerar det som sägs och hur allianser kan bildas. Ett samtal kan vara ett underlag för förhandlingar, argumentationer och samstämmighet (Luckmann, 1990; Linell, 1998). *Dialog* kan äga rum mellan människor genom att artikulera mening i ord men det är också en dialog mellan texter eller inom texter (Bakhtin, 1998; Nyrnes, 2002). *Text* kan förstås som både individuell och social och som något som interagerar mellan dessa (Johnsen Høines, 2004). En *diskussion* kan sägas vara ett samtal som innebär överläggning och debatt. En diskurs kan således ses som ett speciellt samtal.

En diskurs kan också ses som språk i sammanhängande tal och skrift där det kan handla om utestängning och inneslutning, gränsdragningar utåt och standardisering inåt (Gee, 2005; Börjesson & Palmblad, 2007). Språk kan ses som ett system eller struktur och som en diskurs, praktik eller kommunikation. Den senare inrymmer att språket konstrueras genom hur vi agerar och tänker i världen och hur vi uppfattar denna. *Diskurs* skulle i det här perspektivet betyda,

> a discourse is a stretch of concrete, situated and connected verbal, spoken actions (Linell, 1998, p. 6).

Begreppet diskurs används i olika sammanhang och ges därför många olika definitioner, beroende på vilket teoretiskt perspektiv man har. Enligt Foucault konstruerar alla diskurser världen på bestämda sätt och utesluter därmed andra perspektiv. Diskursen består av olika kombinationer och integrering av språk, handlingar, interaktion, sätt att tänka, att tro, värderingar, redskap och objekt som hjälper till att forma en identitet (Foucault, 1985; Bourdieu, 1990; Gee, 1992, 2002).

Foucaults sätt att se på kunskap och världen berör inte i första hand språket utan han har ett bredare perspektiv. Han vill tydliggöra hur vi är fångade i och förblindade av resonemang utan att vara klart medvetna om detta. Diskurser lever inget fritt liv i samhället utan de utvecklas och reproduceras av institutioner. Detta visar inte minst Foucault (1972/2002). Han menar att en diskurs är en regelstyrd kunskapsinstitution, som frambringar en viss typ av yttranden (Foucault, 1971/1993). *Diskursen befinner sig inom lagarnas ordning* (Foucault, 1971/1993, p.6). En diskurs kan uppfattas som ett helt system av koder. Foucault har studerat diskurser i institu-

tioner men inte specifikt skolan (Foucault, 1985). Han knyter samman symbolsystemet med den institution, som är aktuell. Förhållandet mellan språket och institutionen är centralt i hans diskursbegrepp. Han säger vidare att genom historien omformas institutionen och i samband med denna omformning utvecklas diskursen. Foucaults syfte är att klarlägga *strukturen* alltså vad som kan sägas och vad som inte kan sägas och *reglerna* för vad som är sant och vad som är falskt. Diskursen är en motsättning mellan det sanna och det falska (Foucault, 1971/1993).

Foucault talar om diskursen som uteslutandets, begränsandets och tillgänglighetens former. Makt utvecklas i relation till andra och innebär begränsningar för vissa och möjligheter för andra. Det är genom makten som vår sociala omvärld skapas, som objekt skiljs åt och får relationer till varandra (Winther-Jörgensen & Phillips, 2000). Kunskapen styr vad som är möjligt att säga och hur. Foucault beskriver i sitt diskursbegrepp hur vi är fångade i särskilda sammanhang av olika resonemang och är omedvetna om vad vi säger. Vi kan här tala om den osynliga diskursen.

I diskursen om undervisning i matematik finns en osynlig diskurs som är svår att påverka om vi inte gör oss medvetna om dess existens. Ofta handlar denna om olika förhållningssätt till ämnet matematik. Vi ska studera hur diskursen utvecklas då aktörernas egna yttranden står i fokus och hur de själva formulerar och förändrar världen i diskursiva möten (Börjesson & Palmblad, 2007). Den synliga diskursen görs synlig!

En diskurs befinner sig i ett dialektiskt förhållande (Winther-Jörgensen & Phillips, 2000) och hjälper till att konstruera sociala relationer mellan människor och bidrar även till att konstruera olika kunskapssystem och värderingar (Fairclough, 1992).

Yrkesverksamheten i samhället har förändrats, så att det har blivit mycket viktigt att människor använder sig av språket både som talare, skrivare, läsare och lyssnare i sina arbeten. På samma sätt har skolan förändrats och nödvändigheten att tala och förstå i en gemensam diskurs är stor. Det har bildats nya diskursiva praktiker, som Fairclough (1992) uttrycker det. Han visar på hur man integrerar språkliga analyser och social teori. Med detta menar han att man kan se social förändring genom språket.

> My view is that discourse is use of language seen as a form of social practice and discourse analysis of how texts work within sociocultural practice (Fairclough, 1995, p.7).

Språket får flera olika funktioner hos Fairclough. Förutom att det konstruerar sociala identiteter vidmakthåller det befintliga sociala relationer. Vidare bidrar språket till att upprätthålla rådande maktstrukturer. Genom att utnyttja de redan etablerade diskurserna på nya sätt skapas en förändring. Des-

sa kan dock begränsas av maktrelationer och genom människors olika tillträde till olika diskurser och då uppstår en begränsning i nya kunskapsfält.

Fairclough (1992) försöker att föra samman tre analytiska traditioner, där den ena är analysen av text utifrån ett lingvistiskt perspektiv. Den andra är diskursiva praktiker som innehåller processer av produktion, distribution och konsumtion och som är nära knutet till sociala faktorer. Den tredje är en kommunikativ händelse, som visar på det konkreta språkbruket och interaktionen i en social kontext. Hans syn på diskursbegreppet innehåller även den sociala och kulturella aspekten, där han ser till social konstruktion ur ett makroperspektiv.

I ett sociokulturellt perspektiv är diskurser länken mellan kommunikation, kognition och materiella artefakter (Säljö, 1999). Lärande och utveckling blir i ljuset av detta en fråga om att behärska diskurser, eftersom orden inom diskursen styr individens uppfattning av vad som är relevant i situationen. Säljö (2000) definierar begreppet diskurs som att det mänskliga språket skapar och kommunicerar kunskap och att fysiska artefakter är språkligt genererade. Kunskapen finns inte hos objekten i sig utan i våra beskrivningar och analyser av vår omvärld. Kunskapen byggs in i våra språkliga system. Diskursen definieras som språket som ger och tar mening i skilda sammanhang och som utesluter och innesluter det som ska förstås (Säljö, 1999).

Geometri som diskurs är ett sätt att skapa mening om en uppsättning företeelser i omvärlden enligt Östman (1995). Så småningom når dessa meningssystem en grad av specialisering, som gör det omöjligt för en utomstående att följa med. All mänsklig kunskapsutveckling bygger på förädling och differentiering av diskursiva redskap, som kan sättas i arbete i olika verksamheter.

> The language of mental schemes, misconceptions and cognitive conflicts seems to be giving way to a discourse on activities, patterns of interactions and communication failures (Kieran et al., 2002, p.1).

Utifrån de ovan beskrivna förklaringarna till begreppet diskurs kan tydligheten synliggöras, då jag väljer att se diskursen metaforiskt som ett nät, där vissa tecken och därmed begrepp utgör noderna. Nätet fångar in ett visst grundläggande perspektiv på ett erfarenhetsområde, som hör till en viss social institution eller situation. Nät kan väljas eller skapas så att mening uppstår i såväl situerad interaktion som situationsöverskridande sociokulturella praktiker. Det diskursiva synsättet väver således samman språk och handling och det språkliga mönstret sätter gränser för vårt sätt att tänka och handla (Bergström & Boreus, 2005). Diskurs inrymmer en idé om att språket är strukturerat i olika mönster som vi följer när vi agerar i olika

sociala miljöer. Diskurs kan alltså vara ett sätt att tala, skriva, tänka och argumentera om ett innehåll i matematik.

I många diskurser uppstår ett etablerat eller förväntat mönster för kommunikation. Häri finns speciella tecken som elever lär sig att behärska. Vi kan här tala om kontext och kontextualiseringsignaler så kallade ”cues” (Gumperz, 1982). Ett tydligt exempel på detta är undervisningssituationer i matematik i skolans värld. Elever är oftast ”cueseekers” det vill säga de letar efter något, som de förväntas kunna och de får tecken från läraren vad de ska göra.

> When all participants understand and notice the relevant cues, interpretive processes are then taken for granted and tend to go unnoticed (Gumperz, 1982, p. 132).

Kontextualiseringssignaler, såsom ”sök summan” eller ”multiplicera”, är vanliga i matematikundervisningen, där kontexten i en benämnd uppgift har etablerats, så att elever tar tillvägagångssättet för givet.

Genom att studera de situerade diskurser som det konkreta språkbruket och interaktionen i och mellan den vardagliga och matematiska diskursen utgör, kan vi med hjälp av språket tydliggöra hur vi kan passera diskursiva gränser. Nedan följer en genomgång av de vardagliga, historiska och matematiska diskurserna.

Diskursiva gränser

I skolans värld blandas många olika diskurser, som både lärare och elever måste lära sig att bli delaktiga i, förstå och behärska. Inte minst viktigt är det att ta del av och lära hur meningen ändras i olika diskurser och att förstå hur vi kan passera diskursiva gränser och på så sätt förstå lärande (Wickman & Östman, 2002).

Jag börjar med att beskriva den vardagliga diskursen.

Vardaglig diskurs

Enligt många forskare idag är kommunikation och interaktion grundläggande processer när det handlar om den kognitiva socialisationen av individer (Nelson, 1996). Samtal förs i olika miljöer och tas över av nya generationer i en oändlig ström av interaktion. Språklig kommunikation är unik som medierande redskap (Wertsch, 1998). Språket är rikt och vi kan samtala utifrån många olika perspektiv och för olika syften.

För att kunna föra samtal i ett specifikt sammanhang måste vi utveckla ett metaspråk som gör det möjligt att perspektivera det vi vill föra fram. Att perspektivera omvärlden på de sätt som är intressanta för oss och dem vi talar med i ett visst sammanhang är mycket viktigt enligt Voloshinov (1930/1973). För Tomasello är perspektivtagande en förutsättning för språkliga praktiker (Tomasello, 1999). På så sätt skapas olika diskurser om världen, som perspektiverar händelser, processer och objekt på specifika sätt. Dessa blir sen till ny kunskapsbildning i samhället, i skolan och för människan.

> Att utveckla diskurser om omvärlden är ett av de mest påtagliga sätt genom vilket människan samlar erfarenheter och omskapar sin verklighet (Säljö, 2000, s. 35).

Våra yttranden har alltid en anknytning till något vi har hört, läst eller diskuterat och våra yttranden anknyter också till framtida svar. Den dialogiska interaktionen mellan yttranden och förståelse är den viktigaste delen i all kommunikation (Dysthe, 2003). Språket består av kulturellt och institutionellt betingade värderingar och synsätt. De språkgemenskaper som vi

tillhör och de sociala språk som är våra påverkar vårt sätt att tänka, handla och uttrycka oss. Genom att lyssna, samtala, härma och samverka med andra kan människan ta del av kunskaper och färdigheter och dessa båda är nära förankrade i varandra (Vygotsky, 1978).

En vardaglig situation kan således vara en viktig plattform för kunnande och är en del i arbetet och transformeringen till ”fullgoda” medlemmar i samhället. Kunnandet utvecklas inom ramen för individens praktik, av de artefakter som tillhör praktiken, den sociala organisation och de politiska frågeställningar som tillhör den. Allt äger rum i en social värld, som är dialektiskt konstruerad i sociala praktiker, bestående av processer av reproduktion, transformation och förändring (Lave & Wenger, 1991).

> As a conceptual bridge, legitimate peripheral participation has allowed us to generate analytic terms and questions fundamental to this analysis (Lave and Wenger, 1991, p.123).

Lave och Wenger har alltså studerat lärande i miljöer, där deltagarna socialiseras in i verksamheten. De talar om ”person-in-practice”. Människorna blir delaktiga i att bidra till att ett gemensamt mål utvecklas, genom att se hur andra gör, hur andra blir motiverade, hur andra samtalar och hur aktiviteten går till. Ser vi till tänkande i vardaglig miljö, brukar det kännetecknas av flexibilitet och improvisation. Enligt Wallin (2003) är det besvärligt att förklara vårt vardagliga tänkande. Det som gör det svårt att förstå är att det både är konstant och flexibelt. Hon menar att vi bäst kan förklara vardagstänkandet genom den information som handlar om varför olika saker inträffar. Detta kan till exempel vara orsak - verkan - relationer, ett annat kan vara den kunskap vi tar del av om varför andra människor väljer att bete sig på ett visst sätt. Vårt tänkande bör alltså utsättas för mycket information kring vad det innebär om jag gör på det ena eller andra sättet.

I de sammanhang som har att göra med problemlösning och då vi ska fatta välgrundande beslut, brukar vi tala om att dessa tankar även är bra för att kunna utnyttjas för att lösa matematiska problem. Vi skulle sålunda i skolmatematiken kunna tillämpa delar från den vardagliga världens tala och tänka, när vi blir uppmärksammade på dessa strukturer.

Vårt vardagsspråk blir en viktig diskursiv gräns, som efterhand utvecklar matematikens diskursiva gränser bland annat genom att vi i matematiken har många strukturer som passar för modellering, till exempel tabeller, grafer, diagram, ekvationer, algoritmer eller problemlösning.

Modellering och problemlösning

Modeller används i många sammanhang i vardags- och arbetslivet för att få oss att förstå hur världen är konstruerad. Vi tänker då oftast på att modellen förminskar eller förenklar ett objekt (Wyndhamn, 2000). En teoretisk modell består av en uppsättning regler och lagar som mer eller mindre precist beskriver ett fenomen.

En matematisk modell är å ena sidan en relation mellan matematiska objekt och relationer och å andra sidan en situation eller ett fenomen av en icke matematisk natur (Blomhøj, 2006). Vi kan uttrycka oss som att den matematiska modellen befinner sig mellan verkligheten och teorin. Verkligheten i modellen kan handla om ränte-, hastighets- eller affärsproblem. Teoretiska modeller kan vara ekvationslösning eller reguladetriproblem. I problemlösning i matematik rekommenderas ibland lösningar av rutinkaraktär och då varnas det för att elever övar in särskilda strategier för att lösa vissa uppgifter. Vi befinner oss alltså i det gränsland som vi kan kalla för diskurs, sättet att samtala dels i vardagen och teorin, dels med ett vardagligt och ett matematiskt språk. Vygotsky (1978) menar att i en kommunikativ kompetens bör ingå ett kunnande, där vi kan skilja mellan ett språks form och funktion och att vi kan anpassa oss efter social situation.

Forskning kring problemlösning visar på den specifika kontext som en matematiklektion utgör och de olika etablerade uppfattningar som påverkar elevers sätt att förstå matematiken. I benämnda uppgifter har elever exempelvis upptäckt att de inte behöver använda sig av det vardagliga språket och begreppen, utan de väljer i stället att fokusera på de fyra aritmetiska operationerna och kontextualiseringssignaler, vilket har påpekats tidigare (Nesher, 1980; Reusser, 1988). Här följer två exempel på benämnda tal och hur elever har gått till väga, då de har löst uppgifterna.

Det första exemplet, hämtat från Reusser (1988), visar att elever väljer ut de siffror som finns i texten och genom ett vardagligt uppskattande av ålder, får eleverna fram ett rimligt svar.

> There are 125 sheep and 5 dogs in a flock. How old is the shepherd?

De flesta barn ger ett svar och ett protokoll från en elev såg ut som följer.

> 125+5=130…this is too big, and 125-5=120 is still too big….while 125/5=25..- that works. I think the shepherd is 25 years old.

Här kan vi se hur elever fokuserar på kunskap, som berör de fyra räknesätten i aritmetiken och ger inte uttryck för andra möjligheter.

Ett annat benämnt tal illustrerar hur elever fokuserar på siffrorna och den fråga, som finns i slutet av en uppgift. Frågan är av vardaglig karaktär och problematiserar inga andra möjligheter. Eleverna ger sitt svar utifrån denna information och utesluter allt annat. Denna studie är utförd av Verschaffel, De Corte och Lasure (1994, p. 277) och uppgiften lyder:

> Carl has 5 friends and George has 6 friends. Carl and George decide to give a joint party. They invite all their friends. All friends are present. How many friends are at the party?

80 % av eleverna svarade 11 på detta problem utan vidare kommentarer. Uppgiften visar tydligt hur elever i matematikundervisningen tänker när de utför den beräkningen (Freudenthal, 1991; Greer, 1993, 1997; Reusser, 1988; Schoenfeld, 1989). Många elever på matematiklektioner förstår och löser textproblem utan att se någon koppling mellan den vardagliga situationen och matematiska operationer. Studier visar att elever löser problemen utan att i egentlig mening förstå dem.

I en studie utförd av Freudenthal (199l, p.70) gav man elever följande uppgift:

> Herr Smith, slaktaren, hade 26 kilo kött i sin affär och beställer 10 kilo mer. Hur mycket kött har han nu?

Uppgiften tolkas av flertalet elever i enlighet med en additionsmodell och svaret blir 36 kilo. Men man kan se olika tolkningar av den här uppgiften, där tankar från hur det är i vardagslivet kommer in. Hur många människor har köpt kött i hans affär innan det han beställer kommer dit? Man hör yttranden från elever i en sådan här situation "Men det kan ju inte vara matematik om det inte blir 36 kilo". Dessa regler och antaganden hör mycket ihop med sociala och kulturella kontexter, i detta fall inom skolmatematiken. Vad som händer hos eleven är en balansakt mellan vad som står och vad som ska räknas inom matematiken. Det som är karakteristiskt för dessa problem är att de finns inbäddade i skolpraktiken och elever löser den här typen av uppgifter enbart utifrån en skolkontext och den matematiska modell som de har lärt sig.

> The ability to change from one representation system to another is very often the critical threshold for progress in learning and for problem solving (Duval, 2006, p. 107).

De har sålunda inte förmåga att byta från vardag till matematik eller tvärtom.

Greer (1993), Reusser (1995) och Verschaffel, De Corte och Lasure (1994, 2000) har visat i flera studier att elever har lättare att lösa ”reality problems” om de får extra hjälp med påståenden och frågor. Tre studier genomfördes, den ena innehöll ett test som bestod av två sorters textproblem. Forskarna kallade uppgifterna för ”standard problems” (s-problems), som kan lösas utifrån ovanstående exempel på uppgifter och ”problematic problems” (p-problems), där elever kan svara på många olika sätt.

Ett exempel på s-problem är,

> Chris tog en promenad. På morgonen promenerade han 8 kilometer och på eftermiddagen gick han 15 kilometer. Hur många kilometer promenerade Chris?

I p-problemen höjdes svårighetsgraden just genom att problemet kräver ett annat slags ”realistic considerations.”

> Bruce och Alice går i samma skola. Bruce bor på ett avstånd av 17 kilometer från skolan och Alice 8 kilometer. Hur långt bor Bruce och Alice från varandra?

Eleverna måste alltså tänka på att man i detta fall inte kan ge ett enda rätt svar. Resultatet blev emellertid att flertalet elever löste p-problemen på samma sätt som de löste s-problemen. Här svarade de flesta elever likadant på de olika uppgifterna och i dessa studier dras slutsatsen att elever i skolan ger svar på en matematikuppgift utan att reagera på om uppgiften innehåller vad man kallar ”realistic considerations.”

Elever förefaller således att använda sig av liknande strategier när de löser alla sorters textproblem. I ytterligare en studie lät man elever arbeta tillsammans två och två och de fick frågor till p-problemen av typ ”Tänk efter noggrant innan du svarar. En del av problemen är svårare än du tror”. I de grupper som löste dessa p-problem, blev de realistiska antagandena fler än i de grupper som inte fick något påpekande. Men resultatbilden förändrades trots detta inte mycket. Ovanstående studier visar att elever är starkt präglade av skoldiskursen, då de ska lösa benämnda uppgifter. En specifik inneslutande diskurs har etablerats. För att förändra denna diskurs behöver vi utveckla en språklig interaktion mellan symbolen, begreppet och verkligheten. Detta skulle kunna ske genom att uppmärksamma elever på skilda företeelser i matematiken och i vardagen.

Kunskapen och språket är således beroende av i vilken situation man befinner sig och hur man samtalar, med vilka begrepp, ord och termer. På samma sätt måste elever lära sig att veta i vilken situation de befinner sig och vilken företeelse som uppvisar vad. De måste veta i vilken diskurs de förväntas agera. Vardagsspråket tillåter att man löser många kvantitativa

uppgifter i ”verkligheten” på ett fullt tillfredställande sätt utan att ”krångla till” det med matematiska termer och strategier. Vi har helt enkelt två parallella språk som fungerar i vardagen nämligen ett som bygger på ord ”ordspråk” och ett annat som bygger på tal och enkla räkneoperationer ”talspråk”.

Sakförhållandet eller det matematiska objektet uppkommer ur vardagserfarenheter. Representationen innebär att vi tilldelar sakförhållandet mening. Det kan vara ett aritmetiskt uttryck. Det gäller att uppmärksamma att det i en matematisk uppgift finns två olika former av kommunikation, en kontextreducerad, alltså en formell matematikuppgift och en kontextinbäddad, som befinner sig i en vardaglig situation. I en så kallad vardagsuppgift krävs ofta enbart ett vardagsspråk medan en formell uppgift kräver ett matematikspråk. Den formella uppgiften kan således utgöra en diskursiv gräns nämligen mellan ett vardagsbetonat och ett strikt matematiskt resonemang (Wyndhamn, 2000). Formen eller processen skiljer sig åt. Man ställer olika frågor och undersöker situationen på olika sätt. Elever söker och prövar kunskap på annorlunda vis. Den skrivna symbolhanteringen blir ett viktigt inslag i matematiken.

Modelltänkande och problemlösning har varit en väg över bron till matematikens värld, en annan kan vara den historiska utvecklingen av matematiken (Thompson, 1991).

En historisk-matematisk diskurs

Tecken och symbolsystem har under den mänskliga kulturens historia skapats av människor. Högre psykologiska processer blir till med hjälp av den kultur som utvecklas genom historien och kommer till uttryck via en rad tecken och symbolsystem av varierande komplexitet. Individen applicerar dessa tecken och symbolsystem som blir till psykologiska tankeredskap, då de genomsyrar samspelet mellan individen och det sociala sammanhanget. När Vygotsky (1986) talade om högre psykologiska processer, ägnade han tänkande och tänkandets relation till språket en speciell uppmärksamhet.

> Thought is not merely expressed in words; it comes into existence through them (Vygotsky, 1986, p.218).

Han ställde sig frågan hur en tanke eller ett begrepp förhåller sig till sin betydelse och denna betydelse till sina olika verbala uttryck.

> In working its slow way upward an everyday concept clears a path for the scientific concept and its downward development (Vygotsky, 1986, p. 194).

När vi ser till den matematiska utvecklingen upptäcker vi snabbt att den semiotiska representationen var viktig för utvecklingen av matematiska tankar. Människan använde sig av notation, som till skillnad från våra tankar och föreställningar är ett yttre fenomen, som vi kan betrakta tillsammans med andra. Notationen skiljer sig från det talade ordet genom att den är permanent i den betydelsen att vi kan återkomma till den och kopiera den. Utvecklingen av den matematiska notationen motsvarar en allt högre grad av abstraktion. Ser vi tillbaka, kan de allra äldsta notationsbeläggen vara benpinnar inkarvade med regelbundet grupperade streck. Man tror till och med att vissa former av enkel matematisk notation förekommit före skriftspråkets uppkomst (Sällström, 1991).

Det enklaste sättet att notera ett antal var genom att sätta ut ett antal streck. Detta är en form av matematisk representation. Resultatet blev en abstrakt bild av det som man ville återge.

I den sumeriska civilisationen möter vi för första gången ett positionssystem, som kan sägas utgöra det första steget mot vårt nuvarande positionssystem. Det innebär att värdet av ett taltecken är beroende av vilken plats och position det har i talet. Men det sumeriska talbeteckningssystemet har en stor brist. Det saknar ett tecken för tom plats (Noel, 2001; Thompson, 1991). Vårt moderna positionssystem kan sägas vara uppbyggt av tre idéer. Positionsidéen har redan nämnts, den andra är indisk. Systemet är decimalt dvs. baserat på 10 men är inte ett positionssystem för tom plats. Under det sjunde århundradet är det fullständiga positionssystemet med de nio siffrorna och nollan - positionssystemets tredje idé i form av en punkt helt infört. I den första representationen med additiva operationer gick det att förstå positionssystemet med enbart en bild, men i vårt nuvarande system räcker inte detta. Duval skriver,

> Access to numbers is bound to the use of a system of representations that allows them to be designated (Duval, 2006, p. 107).

Vi måste sålunda använda oss av representationer och uppmärksamma dessa.

Först på 1500-talet hade decimalsystemet segrat, vilket sammanhänger med att vid denna tid kom det att innefatta tal mindre än ett, vilket ökade dess effektivitet. Matematiken kom därefter mycket snabbt att frigöra sig från rent praktisk verksamhet och mera inrikta sig mot logik och teori (Noel, 2001).

Man brukar skilja mellan en orientalisk tradition, som är algoritmisk-algebraisk och en grekisk, som är konstruktiv-geometrisk. I Europa förenas omkring 1600 dessa bägge traditioner i den symboliska abstraktionen, då ett nytt talbegrepp föds och den moderna algebran skapas (Thompson, 1991). I och med att algebran börjar utvecklas, bildas en matematik som vi kan säga kommer att befinna sig ”bakom det sedda” medan den grekiska matematiken är ”den sedda”. På det sättet kan vi tala om abstrakt och vardaglig matematik. Det skriftliga positions- eller placeringssystemet är mycket abstrakt jämfört med de additiva talsystemen. Det är inte omedelbart lätt att förstå att 24 och 42 är två olika tal, att en nolla till eller ifrån innebär radikala ändringar av talvärdet eller vad en nolla i decimalsystemet betyder.

Euclides *Elementa* skrevs från början med mycket lite av matematisk symbolism, men har under århundraden förändrats till att innehålla en hel del notationer som ska förtydliga figurerna (Sällström, 1991). Matematiken har en omfattande historia, som tillhör både det vardagliga livet och den strikta vetenskapen. Behov uppstod att mäta spannmålsvolymer, beräkna skatter, bedriva handel, anlägga bevattningskanaler och konstruera byggnader i människors vardag. Det var först i antikens Grekland som geometrin blev en vetenskap, där man bevisade satser utgående från ett system av axiom och där notationssystemet blev viktigt. Att rita en geometrisk figur som vi kan ta i betraktande är notation. Men när vi föreställer oss en triangel i vårt inre då är det inte en notation. När vi betraktar det skrivna tecknet vid ett bestämt tillfälle sida vid sida med andra tecken, upptäcker synintrycket föreställningen om den motsvarande symbolen (Sällström, 1991).

Genom att vi uppmärksammar hur matematiken har utvecklats i olika kulturer och hur den abstrakta matematiken har tillkommit kan vi förstå den skolmatematik, som våra elever ska lära sig.

Jag fortsätter här att beskriva diskursen men nu ur ett matematiskt perspektiv.

Matematisk diskurs

Finns det då någon skillnad mellan matematiskt och vardagligt tänkande, skrivande och talande? Enligt en del forskare (Halliday, 1978; Duval, 2006; Steinbring, 2006) blir denna skillnad synlig, när det gäller användandet av speciella semiotiska register. Begreppet register handlar om ord och uttryck, som används av en speciell grupp av individer och har då ett speciellt syfte (Halliday, 1978). I matematiken förekommer ord både från en vardaglig kontext och ord som tillhör ett register specifikt för ämnet

matematik. Man kan se begreppet register som ett språk att användas som resurs för att handla i en specifik situation. Detta kan vara att rita, skriva, tala eller att använda en symbolisk form av representation. Ämnesspecifika register kan medverka till att skapa en genre och allt meningsskapande är både handlande och reflektion. Reflektionen är då en del av tänkandet och talandet (Halliday, 1978).

Den skrivna symbolhanteringen är ett viktigt inslag i matematiken, för att särskilja ämnet och förståelsen av detsamma.

De matematiska begreppen är abstrakta objekt och kan enbart förstås genom dessa semiotiska register (Bergsten, 1990; Duval, 2006). *Ett register ses här som ett system av tecken med vissa egenskaper.* Det finns språkliga register, som kan jämföras med termer inom räkning och geometri. Det finns symbolregister som används inom algebran. Ett visualiseringsregister kan innehålla grafer, figurer och scheman och inom ikoniska register används bilder och teckningar. Att använda sig av konkret material som positionsplatta för åskådliggörande av tals storlek, kan ses som ett materiellt register. Register sätter upp diskursiva gränser. Objektet knyts till en representation – ett tecken som hänvisar till det. *Representation betyder ungefär "återskapad närvaro"*. Om man ska förstå det matematiska objektet krävs bruk av minst två register (Winslöw, 2004). I en matematiskt logisk diskurs kan ett begrepp ges olika representationsformer antingen inom ett och samma register eller mellan olika register. I geometri är det ofta nödvändigt att använda sig av minst två representationssystem. Det ena är för verbala uttryck och numeriska uttryckssätt och det andra är det visuella. När uttrycket geometrisk figur behandlas så associeras det till både diskursiv och visuell representation. Matematik är det område där vi finner flest semiotiska representationssystem. Att lära sig matematik innebär att lära sig dess register.

> No kind of mathematical processing can be performed without using a semiotic system of representation, because mathematical processing always involves substituting some semiotic representation for another. The part that signs play in mathematics is not to be substituted for objects but for other signs. What matters is not representations but their transformations (Duval, 2006, p. 107).

Det förekommer två typer av transformationer av semiotiska representationer. Duval kallar den ena typen för "treatment" (som kan betyda behandling) och den äger rum när transformationer sker inom samma register. När man beräknar en produkt enligt multiplikationsalgoritmen gäller bestämda regler, liksom vid lösandet av en ekvation. På samma sätt kan det bli då arean av en triangel ska bevisas med hjälp av visuell representation från en rektangel till en triangel. Byter man register, det vill säga när man förändrar ett register utan att förändra objektet kan vi tala om "conver-

sion" (övergång). Exempel på detta kan vara när man går från en algebraisk lösning av en ekvation till dess grafiska representation och även från det naturliga språket till bokstavstecken. När vi gör denna transformation berör vi den kognitiva komplexiteten av förståelse i att lära sig matematik och den speciella process som uppstår i elevens tänkande i den här typen av matematisk aktivitet (Duval, 2006). Transformationer är således mycket viktiga delar i förståelsen av de matematiska begreppen.

Winslöw (2004) ger liknande exempel på tecken i ett geometriskt register och visar att dessa inte tillhör samma register som tecken i ett algebraiskt register.

Registret av naturligt språk spelar en betydelsefull roll i nästan alla matematiska diskurser, formella eller informella. Det naturliga språket innehåller inte något sammanhållande matematiskt register, men det är dock intressant att se att i vårt vardagsspråk kan vi urskilja olika grupper av ord som har matematisk anknytning. Vi träffar på grupper och ord som handlar om orientering i rummet och däri begreppen läge och riktning. Exempel på ord kan då vara bakom, före, mellan respektive bort, från, längs och upp. Begreppen form, storlek, jämförelse, obestämt antal eller mått är fler exempel på hur matematiken har varit av betydelse för människan att uttrycka. Ord som beskriver dessa begrepp kan vara rund, trekant, punkt, rymd, stor, liten, många, få eller nästan.

Referenten i en matematisk diskurs kan vara ett matematiskt problem eller en vardaglig situation som innehåller kvantitativa data.

> These various kinds of language within the school mathematics register will be more mathematical or less mathematical, depending on the nature of the activity (Chapman, 1993, p. 38).

Det språk som lärare eller elever använder sig av i en situation är beroende av om aktiviteten är av matematisk eller mera vardaglig art.

> In order to become mathematical signs it must become clear in the children's sign construction that these signs refer to structures and that conceptual knowledge relations are presupposed and applied (Steinbring, 2006, p. 158).

Elever måste alltså lära sig hur de passerar diskursiva gränser med hjälp av språket och ett nätverk av relationer inom de matematiska tecknen och objekten.

Den strikta matematiska diskursen kommer alltså in som ett meta-språk då man analyserar vad tecknen handlar om. Abstraktionen får liv och mening genom att den anknyter till och strukturerar erfarenheten. Man kan lösa många problem om kvantitativa förhållanden genom praktiskt förnuft

såsom vardagsresonemang och erfarenhet. Vi kan säga att man ”växer in i” ett vardagligt språk genom egna försök att tala. Vill vi upptäcka och begreppsligt hantera det vi redan vet genom erfarenhet, måste vi lära ett nytt språk. Vi måste ”skolas in i” nya språkliga kategorier – bli deltagare i ett ”språkspel” (Wittgenstein, 1978), i vårt fall ett matematiskt. Abstraktionsprocesser gör att ord eller begrepp ackumulerar nya innebörder. Vi kan tala om ”här ligger två äpplen” och ”två är ett naturligt tal”. Två som matematiskt begrepp är ju inte knutet till äpplen, utan till iakttagelsen att vi har två objekt. Meta-språket för orden är till exempel grammatiken, där man kan diskutera ordens anpassning till regler, böjning och ordföljd. Man kan säga att ”äpplet är rött”, som exempel på hur adjektivets böjning påverkas av substantivet och att ”äpplet är ett substantiv”. Men sen går det ju inte att säga att substantivet är rött. Det är inte längre intressant med den konkreta verkligheten. Kopplingen är bruten. Det som utmärker matematiken som en slags ”grammatik” är att dess påståenden har en allmängiltig karaktär och är formallogiskt kopplade till varandra (Sfard, 2002). Faran är att det allmängiltiga vilseleds av det specifika i exempelvis en divisionsuppgift, där eleven kan dividera i vardagen men när divisionen förekommer i en uppställning har den vardagliga förståelsen försvunnit.

Vi kan lösa ett problem med vardagstänkande på ett ”intuitivt” sätt. Man ser då lösningen därför att man känner igen sig genom gjorda erfarenheter. Vi kan utvidga vår arsenal av verktyg för problemlösning genom att ordna och jämföra nya erfarenheter med befintligt kunnande och artikulera iakttagelserna – i samspel med andra och sätta ord på det som är gjort.

> The mathematical meaning in the interplay between a reference context and a sign system is produced by means of transferring possible meanings from a relatively familiar reference domain to a new, still meaningless sign system (Steinbring, 2006, p. 138).

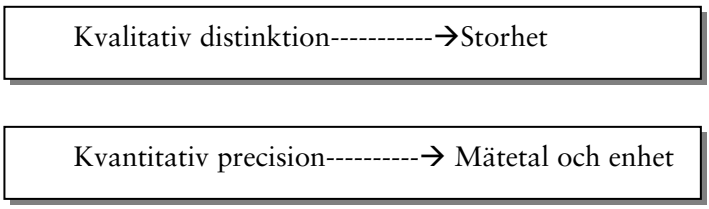
Matematik är starkt förknippad med ett register av symboler och formler av olika slag. Vi når också en allt högre grad av abstraktion. I varje abstraktion eller generaliseringssteg har vi att göra med tecken eller symboler vilka representerar objekt som härstammar från en abstraktion och en generalisering. Vi kan här tala om ett förspråkligande men framför allt ett åskådliggörande, som ska vara vägledande för tanken, ett yttre stöd, en minneshjälp, en nyckel till abstrakta konstruktioner. Hoffmann (2005) talar om en teckenprocess och beskriver relationen mellan objektet, representationen och tolkningen som en interaktion. Detta synsätt blir viktigt då vi ser på begreppsförståelse i matematik (Radford, 2001). Att ”förstå” någonting innebär att kunna representera detta någonting både internt och externt. Diskursen kan ses som en process av tillägnelse och utveckling av re-

presentationssystem. Att representera innebär att tolka. Vi tilldelar de tecken som vi använder för att representera sakförhållanden en viss mening.

En sammanhängande matematisk diskurs utmärks av en kedja av semiotiska transformationer. Matematiska tecken och symboler har en avgörande roll, då elever ska kunna koda, konstruera och kommunicera matematisk kunskap. Men de matematiska tecknen innehåller inte matematisk förståelse eller begreppsliga idéer. Å andra sidan, utan tecken har vi inget mänskligt tänkande och inga generaliseringar skulle kunna existera. De matematiska tecknen står för någonting. De ses som instrument för kodning och ett beskrivande av matematisk kunskap, de är till för att vi ska kunna kommunicera matematisk kunskap eller arbeta med dem och till sist kunna generalisera den. I det här perspektivet är matematiska tecken också kulturella verktyg (Vygotsky, 1978; Wertsch, 1991; Radford, 2001). Dessa används i kommunikation med andra för att utveckla den matematiska kunskapen. En del semiotiska system kan enbart användas för en kognitiv funktion nämligen matematiska processer och en del andra semiotiska system kan uppfylla många olika kognitiva funktioner som exempelvis kommunikation, medvetenhet, fantasi och informationsprocesser.

> Not all semiotic systems are registers, only the ones that permit a transformation of representations (Duval, 2006, p.111).

”Den matematiska människan” måste skapa precision på två fronter. En där kvalitativa kategorier fastställs och en där kvantitativa skillnader konstateras. Motsvarande matematiska fackord är *storhet* respektive *storhetsvärde*. Storhet är en egenskap hos en företeelse eller ett föremål som kan anta olika värden och fastställas eller mätas, exempelvis antalet barn i en familj, längden av en soffa, lufttemperaturen i ett rum eller hastigheten på en bil. Ett storhetsvärde eller mätvärde består av ett tal följt av en enhet. Enhet för angivande av antal är stycken. Enheten för andra storheter vilar på vissa överenskommelser. Vi kan här sammanfatta det ovan beskrivna i en enkel figur.



Figur 3. Analysenhet för en utvecklingslinje inom matematiken.

Begreppsförståelse var från början i det naturliga språket och vi blev tilldelade matematikens betydelser genom sociala konventioner, som i sin tur förbands genom olika tecken. Här tänker man sig språkets struktur, som ett fisknät där varje tecken har sin bestämda plats. Vi kan genom ovanstående exempel se hur utvecklingen av matematiken blir mer och mer precis.

I en matematisk logisk diskurs kan ett begrepp ges olika representationsformer antingen inom ett och samma register eller mellan olika register. Varje aktivitet fordrar sitt speciella språk. Flera forskare har utvecklat teorier om kunskap, språk, tecken och mening (Vygotsky, 1978; Habermas, 1996; Peirce, 1994; Halliday, 2004). Genom att fokusera på olika tecken som ger mening genom språket i diskursen kan vi alltså bli medvetna om hur vi kan passera diskursiva gränser. Att bli medveten om hur man kan passera diskursiva gränser utgör således en viktig kunskap för att lära sig matematik. Det handlar dels om att veta hur vi passerar från vardagligt språk till matematiskt och tvärtom och dels att i problemlösningsuppgifter uppmärksamma gränsöverskridningar av text och även att veta hur vi går från ett register till ett annat i matematiken. Mediering med olika artefakter spelar här en mycket stor roll. Medvetenheten om vad det är att kunna matematik kan kanske med hjälp av diskursbegreppet bli en del av matematikdidaktiken. I nästa avsnitt skall vi närmare undersöka diskursen om undervisning i matematik.

Matematikdidaktik

Diskursen om undervisning

Matematikdidaktik består av två ord, matematik och didaktik. Matematik är härlett ur det grekiska verbet manthanein som betyder ”att lära sig” och det man kan lära sig är vetenskap (Thompson, 1991). I den vetenskapliga strävan ligger sökandet efter exakt och säker kunskap (Englund, et al., 2006). Matematiken uppfyller båda dessa krav. Enligt Nationalencyklopedin är matematik en abstrakt och generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling.

Didaktik i sin tur härstammar från det grekiska uttrycket didaskein techne och betyder konsten att lära ut och konsten att undervisa (Dahlgren, 1990). Techne är i grunden beteckningen på vår förmåga till handling, att uträtta något. Termen didaktik betyder läran om undervisning, undervisningslära, undervisningens och i en senare betydelse även lärandets teori och praktik. Praktik kommer från grekiskan och betyder ”handling” eller ”att göra”. Härleder vi begreppet didaktik från stammen av det grekiska ordet ”visa” skulle didaktiken också betyda konsten att visa och att föra någon till någonting som den inte förstår av sig själv (Hopmann, 1997). Ordet didaktik användes redan av Homeros och Platon för att beskriva den undervisningsmetod som Sokrates kallade *maieutik* (som betyder förlossningskonst) (Comenius, 1999; Kroksmark, 2003).

Återgår vi då till matematikdidaktik kan man som Firsov (1995) diskutera samband mellan de matematiska vetenskaperna och matematik som skolämne och detta skulle forma den självständiga karaktären av matematikdidaktik som ett vetenskapligt område. Under många år har forskare i matematikdidaktik fått argumentera för att kunna skriva in sig i det vetenskapliga fältet. Men internationellt är forskning i matematikens didaktik omfattande (se Biehler et al., 1994; Kilpatrick, 1995; Bishop et al., 1996, 2003). Matematikdidaktiken uppträder under olika benämningar såsom “mathematics education research, science of mathematics education or didactics of mathematics” (Kilpatrick, 1992, 1995; Niss, 2001). En definition av matematikens didaktik skulle allmänt kunna uttryckas som hela den verksamhet som främjar och förbättrar elevers och studenters matematikinlärning och den matematiska kompetens, som de tillägnar sig (Niss, 2001). Marton (1986) definierar fackdidaktik i termer av frågor om val och behandling av undervisning-

ens innehåll inom olika kunskaps- och färdighetsområden. Matematikdidaktiken blir då innehålls- och undervisningsspecifik och den erbjuder läraren olika handlingsalternativ. Han visar på att ämnesdidaktik kan ses som en bro mellan pedagogik, ämnesteori och metodik. I matematikdidaktiken lägger man tyngdpunkten mellan matematik och matematikmetodik och intar positionen skolmatematik (Sandahl, 1997). Skolmatematiken definierades även 1986 som ”en vetenskap, ett hantverk och konst, ett språk för kommunikation, ett hjälpmedel men också en del av vår kultur” (Ds U, 1986:5, s. 9). Gruppen menade då att det är förståelsen och logiken som är det viktigaste.

Enligt Uljens är den didaktiska teorins uppgift idag att erbjuda ett språk där vi på ett systematiskt sätt kan tala om undervisnings- och fostransverklighet. Uppgiften blir att skapa ett sådant språk med vars hjälp alla inom skolan kan tala om undervisning på ett rättvisande sätt (Uljens, 1997). Den didaktiska triangeln där hörnen är läraren, eleven och ämnesinnehållet har saknat den samhälliga och kulturella kontexten och därmed inte problematiserats på ett grundläggande sätt. Uljens (1997) beskriver hur ett begreppssystem kan skapas med vars hjälp den institutionaliserade skolans undervisning och fostran kan hanteras.

Synen på den didaktiska kommunikationen kan sägas växla mellan ett aktions- och ett interaktionsperspektiv. Om vi ser till undervisning enligt ett aktionsperspektiv, är fokus på den agerande läraren och det innehåll som utgör undervisningen. Om undervisning ses som interaktion innebär det att lärarens medverkan styrs av hur eleverna talar och vad de tänker om verksamheten (Dahlgren, 1990). Enligt Dahlgren kan en didaktisk teori vara en teori för hur en viss form av lärande av ett visst innehåll kan stödjas av en viss typ av kommunikation. Vi kan här välja att se lärande som något dynamiskt som hela tiden försöker att göra det obegripliga begripligt (Liedman, 2001). Lärandebegreppet är alltså helt avhängigt av vilket förhållningssätt till lärande, som har utvecklats. Synen på lärande och utveckling har genom århundradena pendlat mellan rationalism och empirism (Dewey, 1963). Vi kan här välja att befinna oss i gränslandet mellan dessa två begrepp. Meningsfullt lärande kan ses som en kvalitativ förändring i sättet att uppfatta fenomen i omvärlden (Dahlgren, 1990, s. 23). Marton & Booth (2000) skriver att lärande är en förändring i individens sätt att se, erfara, hantera och förstå aspekter av världen.

En annan vinkling är matematikdidaktiken i bildningsteoretisk belysning (Mouwitz, 2006). Den utgår som de flesta andra från den didaktiska triangeln bestående av innehållet, läraren och eleven (Hopmann, 1997). Det intressanta är att man under senare år har lagt allt större vikt vid innehållet, läraren och bildningsvärdet. Till exempel så leder Shulmans (1986) modell om ”pedagocical content knowledge” raka vägen till frågor om un-

dervisningsinnehållets betydelse. Idag handlar det om ”subject matter knowledge” alltså mera om kunskapen och om olika representationer. Didaktik skulle alltså kunna vara ett ämnesområde som hjälper läraren att sätta ord på sin pedagogiska vardag och vara en förutsättning för fördjupad reflektion, förståelse och handling. Den skulle kunna vara ett tankeverktyg för ämnesområdet. Didaktiska frågor berör skärningspunkten mellan ett kunskapsområde och lärande inom detta kunskapsområde. Enligt Schüllerqvist (2001) kan ämnesdidaktiken benämnas som ett mittfält. Hans bild öppnar upp för en förståelse av ett fält där mycket är i rörelse. Vad vi ska undervisa om, hur vi ska undervisa och varför är de analytiska frågor vi behöver ställa oss för att säkerställa att mål och resultat av undervisningen är i samklang.

Tidigare forskning om språk och matematik

Alla som befinner sig i en undervisningssituation i matematik ska sålunda känna till det speciella språk, som behövs så att elever och lärare kan skapa en gemensam plattform eller bro för förståelse i ämnet. I denna avhandling är det språk, kunskap och matematik, som är i fokus och det har under årens lopp funnits en del kritisk forskning om lärares och elevers sätt att behandla skolmatematiken.

Forskningen har handlat om hur lärarna saknar planerings- och problemlösningsspråk som ett metaspråkligt inslag och de verkar sakna verktyg och strategier för ett didaktiskt resonemang (Runesson, 1999; Samuelsson, 2003; Löwing, 2004; Nilsson, 2005). Lika tydligt blir det när det handlar om elever och deras förmåga att diskutera, beskriva eller argumentera i den matematiska diskursen (Bergqvist, 1990; Wyndhamn, 1993; Wistedt, 1994; Åberg-Bengtsson, 1998; Riesbeck, 2000; Möllehed, 2001; Taflin, 2007).

Runeson (1999) beskriver hur en lärare samtidigt måste urskilja kritiska aspekter av innehållet och kritiska aspekter av elevernas lärande och att det är detta som skapar innehållet och förståelsen ur ett lärandeperspektiv. Olika individer kommer att uppfatta objekt och företeelser i denna omvärld på olika sätt. Att använda den variation som finns i elevernas förståelse förefaller att göra undervisningen mer variationsrik. Eleverna möter olika ämnesinnehåll i matematikundervisningen och man presenterar skilda ämnesinnehåll under samma ämnesrubrik i matematik.

Ytterligare två studier kring lärares förhållningssätt till matematikundervisningen ur ett kommunikationsperspektiv har behandlats under senare år. Den ena studien handlar om laborationer i geometri. Genom laboratio-

ner har Nilsson (2005) velat uppnå en rad syften som att skapa motivation, ett meningsfullt lärande och att underlätta förståelse. Studien visar att man i arbete med laborationer kan skapa förståelse och nya insikter i geometri (Nilsson, 2005). Men att laborationer utförs garanterar inte förståelse och nya insikter (Bergqvist, 1990). Lärare behöver peka på kritiska punkter och ställa utvecklande frågor. Deras sätt att leda laborationen blir därmed betydelsefull. Det är viktigt för lärare att fokusera syftet med laborationen och att kunna avgöra om en elev har de nödvändiga förkunskaperna och att kunna kommunicera. Lärarnas centrala roll i arbetet med laborationer är ett tydligt resultat av undersökningen. Den attityd som lärare har på matematikundervisning påverkar också elevernas lärande. Studien bekräftar också att elever saknade ett adekvat språk, när de skulle tala om geometriska objekt. Det vardagliga språket som i sig är ett symboliskt system hjälper till att tränga in i och tolka ett annat symbolsystem och att integrera olika symbolsystem (Nilsson, 2005).

Löwing (2004) ställer sig frågan hur lärare organiserar matematikundervisningen och hur de kommunicerar ett matematiskt innehåll med eleverna. Kommunikationens didaktiska kvalitet bygger på tre komponenter: Lärarens egen kunskap om det hon skall undervisa, hennes förmåga att lyfta fram poängerna i det hon skall undervisa om och att då ta hänsyn till elevens förförståelse och abstraktionsförmåga. Löwing menar att dialogen saknar precision eftersom lärare och elever ofta talar förbi varandra. Lärare saknade kännedom om elevernas förkunskaper. En omfattande lotsning av eleverna ägde rum i hennes undersökningar. Vidare fann hon att lärarna ansåg det viktigare att deras elever räknade många uppgifter än att låta dem reflektera över lösningsmetoderna.

Vi har här tagit del av forskning i matematikdidaktik som har fokus på språket och kommunikationen på flera olika sätt. Men på vilka sätt kan vi hjälpa lärare, elever och studenter att förändra det som ovanstående forskning beskriver om undervisning i matematik?

I en omtalad rapport från USA jämförde Liping Ma (1999) kinesiska och amerikanska lärares sätt att förstå centrala matematiska samband. Hon beskriver hur de kinesiska lärarna börjar sin lärarkarriär med en bättre förståelse av elementär matematik än de flesta amerikanska lärare. De kinesiska lärarna verkar ha en större kunskap om olika modeller för exempelvis bråkräkning, alltså det som Shulman (1986) kallar för pedagogisk innehållskunskap.

Ma menar vidare att det är viktigt för lärare att kunna en standardalgoritm men även att ha alternativa lösningssätt. Lärarna kunde använda sig av icke standardiserade metoder som inte fanns i böckerna. De kinesiska lärarna kunde också se sammanlänkningar mellan olika matematiska områden. De började med en enkel version av subtraktion och gav sedan för-

klaringar till den på olika sätt. Hon påvisar därmed en omfattande procedur- och begreppskunskap hos lärarna. En annan undersökning handlar om att finna felet i en multiplikationsuppgift. De kinesiska lärarna låter elever undersöka uppgiften och använder ord som att observera, examinera, analysera och diskutera. De ställer också frågor till eleverna som ska underlätta för dem att hitta felet. Frågor handlar om hur talet ser ut, platsvärdet och den distributiva lagen. Trettionio procent av de amerikanska lärarna och 92 procent av de kinesiska använde sig av begreppsliga förklaringar till algoritmen i multiplikation.

De kinesiska lärarna använde sig av de matematiska orden addera, summa, differens, produkt och divisor. De visade en förmåga att vara genomtänkta och de använde matematiska termer för att diskutera något inom matematiken och förde fram sin åsikt med matematiska argument.

Dessa studier i matematikdidaktik fokuserar ett behov av att kommunicera och utveckla ett matematikdidaktiskt språk. I USA idag beskrivs det matematiska språket som ord, symboler, diagram och alla former av text. Att göra matematik innebär att läsa, skriva, tala och en interaktion mellan dessa. Språket är nödvändigt för den matematiska kommunikationen, grunden till ett matematiskt resonemang, precisionen i matematik och ord, symboler och diagram. Vikten av ett matematiskt språk kan sammanfattas i tre punkter (enligt Ball, et al., 2006).

1. Mathematical knowledge and reasoning depends on and is supported by mathematical language.
2. Teaching and learning mathematics depends on and is supported by language.
3. Mathematical language is both mathematical content to be learned and medium for learning mathematical content. (www.personal.umich.edu/~dball/).

Här följer fyra påståenden som betonar det matematiska språkets väsentlighet.

1. Language is the medium of teaching and learning.
2. Language is foundational to mathematical proficiency
3. Developing fluency and skills with mathematical knowledge for teaching
4. Tasks designed to engage teachers in aspects of the work of teaching that involve language can help to develop that fluency. (www.personal.umich.edu/~dball/).

Alla som befinner sig i en undervisningssituation ska sålunda kunna och känna till de speciella representationer som behövs så att elever och lärare ska kunna skapa en gemensam plattform eller bro för förståelse i ett ämne. Didaktik ska sålunda hjälpa lärare att göra strategiska val för sin undervisning.

Det som jag vill betona i denna avhandling är att språk, kunskap och matematik rör ytterligare en dimension av kvalitet i språket, nämligen att en skolmatematisk diskurs kan ses som ett didaktiskt begrepp.

Diskursanalys som metod har gett mig den hjälp som behövs så att jag har kunnat att på djupet analysera det vardagliga och matematiska språket, interaktionen och kunskapen i samtalen hos lärare, studenter och elever.

Metodologi

Perspektiv

Det teoretiska perspektiv, som har använts för att nå fram till det didaktiskt teoretiska begreppet diskurs är i huvudsak hämtat från ett sociokulturellt perspektiv med hur vi skapar diskurser i olika kontexter, med hjälp av mediering och artefakter (Vygotsky, 1978, 1986, 2004). Med hjälp av begrepp som register och representationer har tydligheten i att passera diskursiva gränser i matematiken uppmärksammats (Halliday, 1978; Duval, 2006; Steinbring, 2006). För att se vad som händer i interaktionen lärare och elever, elever och elever och lärarstuderande emellan har diskursanalysen varit användbar. Kritisk diskursanalys har bidragit med begreppen aktivitet och kommunikation, situerat i social och historisk kontext (Fairclough, 1992, 1995).

Jag har valt att i mina studier följa hur lärare, lärarstudenter och elever har utvecklat kunskap i samtalet om matematiska begrepp, problemlösning och formell matematik. Genom att analysera språket, begreppen, det vardagliga och matematiska samtalet i interaktion har jag kunnat följa elevers och lärares sätt att passera diskursiva gränser i matematikundervisningen.

Den diskursanalys som jag har använt mig av i mina studier och som även används i sammanfattande analyser av dessa, utgår från det sociokulturella perspektivets beskrivning av relationen mellan språk och tanke (Vygotsky, 1986), hur vi genom att samtala utvecklar ny kunskap. Redskap och begrepp finns inbyggda i den miljö som har skapat dem (Wertsch, 1985; Kozulin, 1998) och därför är det viktigt att elever blir delaktiga i matematikens sociala och kulturella del (Fairclough, 1992, 1995).

Jag försöker påvisa detta i min empiriska del av denna avhandling. Här följer först en beskrivning av databildningen.

De empiriska studiernas utformning

Jag har i mina undersökningar använt mig av video och audioinspelningar.

Videoinspelningarna valdes för att bättre synliggöra det som utspelades i interaktionen i ett klassrum. Det visade sig också vara lyckat då både lärarnas och elevernas aktiviteter blev tydliga.

I audioinspelningarna analyseras samtalet som en interaktionssituation (Börjesson & Palmblad, 2007). Gruppinteraktion är en väl vald strategi, då det är möjligt att följa elevers samtal både vardagligt och matematiskt.

Olika skolor i skilda miljöer har utnyttjats, där lärare och elever har diskuterat olika problemlösningsuppgifter, studenter från olika matematikkurser i lärarutbildning har deltagit i samtalet om undervisning och lärare har undervisat. Allt inspelat material har transkriberats ordagrant och analyser har sedan skett genom att läsa igenom materialet åter och åter igen.

Tabell 1 nedan visar på den databildning som har använts i de empiriska studierna I-V.

Design av de empiriska studierna i avhandlingen.

Studie I	**Studie II**	**Studie III**	**Studie IV**	**Studie V**
7 lärare	14 grupper	26 grupper	68 grupper	10 grupper
Lärar-elev Interaktion Klassrum	Elevinteraktion Klassrum	Gruppsamtal Tre elever	Gruppsamtal Tre elever	Gruppsamtal Tre studenter
Video	Video	Audioband	Audioband	Audioband
Matematiskt innehåll				
Triangelns area	Triangelns area	Problemlösning	Rationella tal	Triangeln Area/ Rationella Tal

Studie I

Sju lärare deltog i den första studien. De fick i uppgift att planera och genomföra undervisning av en inledningslektion om triangelns area i år 5 i grundskolan. Val av innehåll var ett vanligt matematiskt begrepp. Fokus för dessa videoinspelningar var att filma den publika och lärarstyrda interaktionen i de klassrum som blev dokumenterade. Varje inspelning varade mellan fyrtio och sextio minuter. Tjugofem tillfällen har dokumenterats med fokus på interaktionen lärare och elev. Fokus i studien har varit hur lärare passerar diskursiva gränser när de undervisar i triangelns area.

Studie II
Inledningslektionen om triangelns area fortsätter även i denna studie men nu analyseras elevers interaktion under en laborativ situation, där läraren ger explicita direktiv till grupperna. Skilda direktiv från läraren i klassrummet visar på elevers olika handlande och språkliga begrepp. Sammanlagt är det fjorton gruppers interaktion som filmas och analyseras i klasserna. Grupperna består av fem eller sex elever. De laborativa situationerna beskrivs utifrån aktivitet och språklig interaktion. Eleverna uppvisar ett görande genom att rita, klippa och vika papper. Det vardagliga språket är vanligt förekommande och förblir vardagligt.

Studie III
Utgångspunkt för denna studie var att följa 26 grupper med tre elever i varje, då de tar sig an en textuppgift i matematik. Uppgiften är av öppen karaktär och innehåller olika information som elever ska bestämma sig för. Ordet rättvisa är ett av de begrepp som kommer att bli fokus för eleverna. Elever söker, samtalar, gissar, prövar och räknar sig fram till ett svar. Men det finns inget självklart sätt hur uppgiften ska lösas av eleverna. De hamnar dels i en vardaglig diskurs och dels i en matematisk och de har svårigheter i att göra bedömningar när de resonerar. Varje grupp har spelats in på audioband vilka transkriberats och analyserats. Eleverna var grupperade efter sina färdigheter i matematik enligt klasslärarens bedömning. Inspelningen skedde i grupprum utanför klassrummet.

Studie IV
I denna studie användes en uppgift från Nationella provet i matematik i år fem. Uppgiften handlar om rationella tal. Fem olika delstudier genomfördes. Sextioåtta grupper med tre elever i varje samt etthundratjugo enskilda elever deltog i de olika delstudierna. Den första delstudien genomfördes med 30 elever i år 5 där de löste uppgiften enskilt och fick i uppgift att ge en skriftlig förklaring. Den andra genomfördes i tre klasser med trettio elever i varje.

I den tredje delstudien utnyttjas fem skolor inom olika områden i en stor kommun och trettioen gruppintervjuer med elever i år 5 genomfördes. Varje grupp bestod av tre elever. När eleverna löser uppgiften hamnar de i en vardaglig diskurs. I nästa undersökning deltog 31 nya elevgrupper. De får använda redskapet miniräknare och de deltar enbart i en räknande diskurs. Den sista delen av denna studie genomfördes med sex grupper om tre elever i varje och här handlar det om att arbeta sig fram med hjälp av en tallinje. Resultaten visar att beroende av vilka redskap och vilken situation elever befinner sig i, så blir utfallet i olika diskurser.

Studie V
De studenter som deltog i denna undersökning studerar matematik och matematikdidaktik inom lärarprogrammet på ett universitet i Sverige. Studenternas första år på utbildningen har starkt fokus på samtalskultur i grupp, så detta sätt att arbeta är välbekant för studenterna. De fick under sitt andra studieår i uppgift att samtala kring två undervisningstillfällen i matematik. Den ena uppgiften handlar om triangelns area och den andra om rationella tal. Sammanlagt studerades samtalet i tio grupper. Varje grupp bestod av tre studenter, både manliga och kvinnliga. Sammankomsterna spelades in på band för senare utskrift och analys. En tid efter samtalet fick informanterna var och en för sig skriva ned en planering över hur de skulle undervisa om de diskuterade förslagen. Detta för att se vad som kom ut av gruppsamtalen. Här behandlas både form och innehåll.

Analysen av empiriska data

Jag har i analysen av mina studier valt att se mitt inspelade material ur ett mikroperspektiv.

En viktig sak att påpeka i det här sammanhanget är skillnaden mellan den lilla och stora diskursen. Diskursen med stort D kan ha en betydande utsträckning i tid och är alltid språket plus allt annat i en situation (Börjesson & Palmblad, 2007).

> All life for all of us is just a patchwork of thoughts, words, objects, events, actions and interactions in Discourses (Gee, 2005, p. 7).

I den lilla diskursen ses språket som ”language - in- action” vilket alltid är en aktiv process i kunskapsbildning. En diskursanalys är baserad på detaljerna i det talade och det skrivna i en situation. Fokus ligger på hur deltagarna själva talar om världen i interaktion med varandra. På så sätt kan man studera hur de små diskurserna bidrar till att bygga upp de stora (Fairclough, 1992; Gee, 2005). I min diskursanalys studerar jag enbart interaktionen individer emellan och på vilka sätt kunskap, språk och matematik utvecklas.

> Discourse with little ”d” means language-in-use or stretches of language and ”big D” discourses are always language plus ”other stuff”(Gee, 2005, p. 26). When ”little d” discourse is melded integrally with non language ”stuff” to enact specific identities and activities then you can say that ”big D” Discourses are involved (Gee, 2005, p. 7).

Diskursanalysen leder till att man kan ställa frågor hur språket och tanken vid en given tid och plats kan konstruera skilda uppfattningar av situationen. Detta kallar Gee för diskursmodeller och säger följande.

> The human mind is, at root, a pattern recognizer and builder. Since the world is infinitly full of potentially meaningful patterns and subpatterns in any domain, something must guide people in selecting which patterns and subpatterns to focus on. And this something resides in the discourse models of the person´s sociocultural groups and the social practices and setting in which they are rooted (Gee, 2005, p. 68).

Vi reflekterar och konstruerar samtidigt situationen eller kontexten där språket används. Vi använder språket för att peka ut betydelsefulla aspekter och för att bygga upp en förståelse och bygger diskursmodeller, som blir kopplade till simuleringar i våra hjärnor. Vi skapar specifika sätt att tala, skriva, läsa, agera, interagera, göra val, tro på något och känna av.

> Discourse models are an important tool of inquiry because they mediate between the micro level of interaction and the macro level of institutions (Gee, 2005, p.71).

Genom att analysera samtal uppstår det frågor om situationer, referenter, vardagliga och matematiska begrepp. Diskursanalysen blir ett verktyg för att kunna följa elever, lärare och studenters sätt att samtala och röra sig inom och över diskursiva gränser i skolmatematiken.

Nedan ges en sammanfattning av huvuddragen i de fem studierna.

Studierna – en sammanfattning

Matematiska samtal i klassrummet. Introduktion av triangelns area i ett komparativt perspektiv.

Eva Riesbeck Roger Säljö Jan Wyndhamn

Klassrumskommunikation ger upphov till en komplex och mångfasetterad typ av data att analysera och arbeta med. Under senare år har klassrummet varit i fokus för att ta reda på elevers och lärares kommunikation och lärande i matematik (Stevenson & Stiegler, 1992; Runesson, 1999; Löwing, 2004).

I föreliggande studie handlar det om klassrumsinteraktion i år fem i grundskolan i ämnet matematik, närmare bestämt ämnesområdet geometri. Syftet med den genomförda studien är att ge en beskrivning av hur undervisningen förlöper, vilken ämnesmässig ansats de deltagande lärarna anslår och vilken interaktion som uppkommer. I studien är temat för undervisningen triangelns area. En inledningslektion i detta ämne videoinspelas. Ett utmärkande mönster i de svenska klassrum som har videofilmats är att lärare och elever för en slags dialog under stora delar av lektionerna. Det som är speciellt för denna kommunikativa miljö är att läraren talar till ett kollektiv som behandlas mer eller mindre som en individ. Läraren leder eleverna genom lektionen. Eleverna blir som en kollektiv samtalspartner, då de följer med i lärarens resonemang och initiativ. Ett annat tydligt drag i lärarens agerande är det konsekventa pendlandet mellan helklassundervisning och grupporganiserad verksamhet. I grupperna ska eleverna med hjälp av konkret material klippa, färglägga, bevisa och diskutera sig fram till något. Eleverna ska försöka att med hjälp av ett papper bevisa att triangelns area är hälften av rektangelns. De har ett papper framför sig, där de kan se en triangel i rektangeln och läraren har bett dem att bevisa att triangeln är hälften av rektangeln. De svårigheter eleverna får är att lärarens budskap inte är tydligt och att de inte har ett språk för att förklara vad de gör och tänker. Vi kan här se olika kommunikativa händelser där det publika samtalet och gruppsamtalet växlar och att eleverna byter diskurs.

Vid en närmre analys av elevernas samtal och användandet av konkret material i gruppen, upptäcker man att eleverna inte riktigt vet varför de ska

utföra uppgiften eller vad den går ut på. Samtalen eleverna emellan förs oftast på ett vardagsspråk, som är svårt att förankra i eller förena med det matematiska språket. I samtalen lärare och elever emellan kan man följa då läraren använder sig av matematiska begrepp och sen uppmanar elever att tala och diskutera i grupp. Men de matematiska uttrycken blir inte förankrade i gruppen. De geometriska begrepp som läraren försöker förankra hos eleverna försvinner i de laborativa övningar i grupp, som äger rum. Ett ämnesmässigt förankrat utbyte av tankar, idéer och åsikter i grupparbetets form äger inte rum bara för att läraren föreslår eller uppmanar till diskussion. Här byter man diskurs från lärarens uppmaning att diskutera och bevisa till det konkreta utförandet och talandet i gruppen. Det sker ingen utredning om skillnader/likheter mellan begrepp och vad exempelvis orden diskutera eller ”bevisa” betyder för eleven.

Lärarens uppläggning av momentet triangelns area följer vissa mönster och det är intressant att ta del av hur lärarna väljer ingångar via två olika matematiska diskurser, en geometrisk och en algebraisk/aritmetisk, och hur de sedan arbetar med detta.

Inom varje område kan också en vertikal begreppslig progression spåras. Lärarna hanterar denna progression på skilda sätt. De geometriska begreppen ingår i kedjan kvadrat→rektangel→parallellogram → triangel eller i kedjan kvadrat→rektangel→triangel. Utvidgningen medför eller framtvingar systematiska namnbyten till sida→längd→bas, för att förhållandena skall kunna uttryckas så exakt, tydligt och uttömmande som möjligt. Utgångspunkten är oftast kvadratens och rektangelns area. Här kan en kvadrat med sidan s helt täckas med enhetskvadrater. Nästa steg mot formeln för triangelns area kan vara att finna formeln för arean av en godtycklig parallellogram. Två olika sätt kan tydliggöras. För det första att göra om parallellogrammen till en rektangel genom en förflyttning av en rätvinklig triangel och för det andra att tänka sig en rektangel indelad i små tunna remsor som förskjuts i sidled. Varje triangel kan sen betraktas som en halv parallellogram.

En annan väg att nå formeln för triangelns area är att utgå från rektangeln på följande vis. En rektangel kan delas i två lika stora delar av en diagonal. Triangelns area är hälften av hela den stora rektangelns area. För att nå fram till formeln för triangelns area diskuterar lärarna inom två olika matematiska områden samtidigt. En väg in i problemet är att i huvudsak gå via en geometrisk kontextualisering och en andra väg är att gå den aritmetiska/algebraiska vägen. Wyndhamn (1995) visar hur vissa lärare pendlar mellan siffror och längden och bredden för att åskådliggöra för sina elever. Problemet vi kan se är att eleverna blandar ihop de olika sätten att tänka, då man pendlar mellan för många olika språkliga begrepp utan att förankra dessa hos eleverna. Eleven har alltså svårigheter i att förstå att hon befinner

sig i skilda diskurser och att lära sig att pendla mellan dessa. Lärarna försöker åstadkomma en specifik diskurs som gör det möjligt att skapa gemensamma innebörder i det som sägs. Läraren rekontextualiserar ett visst matematiskt innehåll, här triangelns area. Avsikten är att eleverna ur detta meningsbärande sammanhang skall avslöja underliggande idéer och strukturer i det abstrakta innehållet. Lärarna i undersökningen använder sig dels av kunskaper från geometrin och dels kunskaper från aritmetiken och algebran.

De två olika begreppsliga domänerna exemplifierar tydligt olika sidor av matematiken. I det ena fallet studeras de matematiska begreppen som objekt i sig, medan de i det andra fallet kan ses som redskap eller verktyg för en konceptualisering av en ny situation. Sammantaget kan man säga att de beskrivna dimensionerna visar hur resonemanget om triangelns area hela tiden pendlar mellan ett sammanhang, där observationen är viktig och ett där den logiska analysen och slutledningen är avgörande. Detta är en intressant iakttagelse, då det fordrar att eleverna kan koppla vad de ser till slutsatser formulerade i symbolisk notation.

Det vanligaste är att läraren presenterar en situation för sina elever, som klassen kan samtala omkring. Situationen skall ge erfarenheter som kan beskrivas matematiskt. Lärarens ambition är att få eleverna att själva upptäcka formeln och förstå ett resonemang. Manipulerandet förutsätter att man tänker sig matematiska begrepp som objekt, vilket kan möjliggöra och innebära att laborera med rent fysiska föremål eller att rita av bilder på papper eller att metaforiskt hantera abstrakta symboler.

Elevernas språkliga tillväxt och begreppsliga utveckling förutsätter en växelverkan mellan det konkreta och det allmänna, mellan det subjektivt upplevda och det språk, som man behärskar för att hantera detta. Man måste också göra sig förtrogen med de distanserade institutionella språk som undervisningen presenterar som alternativ till att förstå och tolka olika företeelser. Det matematiska språket kan inte utvecklas genom att det personliga språket förträngs.

En avgörande fråga i studien är om det sker ett verkligt utvecklande tankeutbyte i samtalet mellan lärare och elever. Detta möte kan beskrivas som ett möte mellan två olika språk, ett vardagligt och ett vetenskapligt språk, ytterst mellan en muntlig och en skriftlig kultur (Ong, 1982). Detta är själva kärnan i den medierande processen mellan lärare och elever.

Samtal, samarbete och samsyn: En studie av koordination av perspektiv i klassrumskommunikation.

Roger Säljö Eva Riesbeck Jan Wyndhamn

Det pedagogiska innehållet i dessa lektioner är hämtat från elementär geometri och rör i samtliga fall triangeln som geometriskt objekt och hur man beräknar triangelns area. Att genom samtalet utveckla, bevara och anpassa kunskaper och färdigheter är ett tydligt fokus. Den metod som används är videoinspelning av elevgrupper. Elevers samtal i grupp studeras med fokus på hur de bearbetar det aktuella stoffet, hur de interagerar och vilka begrepp som används. Vidare analyseras vilka förutsättningar lärarna skapar för elevers undersökande arbete. Det som är av särskilt intresse är vad elever gör under dessa grupparbetspass inom ramen för de lektioner vi dokumenterat.

När vi interagerar öppnar vi upp för våra egna och andras tankar och kan genom att reagera och resonera kring någonting gemensamt skapa förståelse kring ett begrepp. Språket hjälper oss att hålla distans till det vi ser och hör, det medger en kodifiering av omvärlden i olika begreppsliga kategorier och det hjälper oss att tala om det icke-närvarande och om abstrakta företeelser. Språket är också bryggan mellan yttre och observerbara kommunikativa aktiviteter och vårt inre tänkande och vår föreställningsvärld. Språklig kommunikation, dess kategorier och begrepp är således den medierande länken mellan social interaktion och individers tänkande. I sociokulturell teori uttrycks detta släktskap mellan kommunikation och tänkande ibland genom att man talar om det förstnämnda som interpsykologiska eller intermentala processer och det sistnämnda som intrapsykologiska eller intramentala processer (Vygotsky, 1986; Wertsch, 1998). Genom kommunikation blir vi delaktiga i hur våra medmänniskor förstår händelser i vardagen och hur de handlar genom språket. Genom dessa erfarenheter kommer vi att formas som psykologiska varelser och kunna använda många av dessa språkliga redskap. Att tänka är således att individen använder sig av språkliga redskap inom sig själv.

Kommunikation och interaktion är således grundläggande processer inte bara för att reglera mellanmänskliga förhållanden och skapa komplexa mönster av samarbeten utan också för den kognitiva socialisationen av individer (Nelson, 1996). För att kunna föra den typ av samtal vi vill i ett specifikt sammanhang, måste vi perspektivera föremålet på ett sådant sätt att de aspekter vi vill lyfta fram hamnar i fokus. Språket hjälper oss att göra just detta. När vi talar om världen, måste vi alltid tala om den på något specifikt sätt och utifrån några utgångspunkter. Men perspektivering är

inte enbart något som händer i stunden och som är tillfälligt. Det är också en del av vår kunskapsbildning. En viktig beståndsdel i kunskapsutvecklingen kan beskrivas som skapandet av olika diskurser om världen.

I ett sociokulturellt perspektiv består lärande och kunskapsbildning i betydande utsträckning av att människor lär sig behärska diskurser av olika slag. Att bli förtrogen med begrepp i geometrin innebär att man lär sig begrepp som kvadrat, rektangel, parallellogram, bas, höjd och så vidare och att dessa hör ihop enligt specifika mönster. Geometrin förutsätter att man håller isär dessa begrepp och inser att de definieras på olika sätt. Ett gemensamt drag i många av de diskurser som dominerar skola och utbildning är att de är abstrakta. Som ett verksamhetssystem måste skolan i stor utsträckning arbeta med språket som medierande resurs och utbildning är till övervägande del en språklig verksamhet. Den situation som presenteras här handlar om hur elever agerar i grupparbeten och de frågor som berör just perspektivering.

I analysen av studien väljer vi att först besvara frågan om vilka instruktioner eleverna får inför sina grupp- respektive pararbeten om trianglar och triangelns area. Här finner vi att man kan urskilja två olika typer av direktiv. Den ena typen har karaktär av uppmaningar till eleverna att ägna sig åt konkret verksamhet, som innebär att man skall rita, räkna, måla, vika eller liknande. Eleverna befinner sig på ”göra – nivån”. Noterbart är vid direktiv av detta slag hur tydligt dessa leder till att samtalet elever emellan blir fåordigt. Varje elev kan vidare arbeta var för sig. Man behöver inte samarbeta i någon större utsträckning för att gruppen skall nå önskat resultat på arbetsuppgiften. Någon samsyn etableras inte. Det konkreta klippandet, ritandet, färgläggandet eller mätandet i sig utgör alltså ingen garanti för att aktiviteterna styrs in mot att pröva matematiska perspektiv och resonemang. Den andra typen av direktiv har en problematiserande karaktär. Här använder lärarna sig av verb som pekar mot en analytisk och argumentativ verksamhet och de uppmanar eleverna att beskriva, bevisa, berätta och fundera. Här befinner sig eleverna mera på en ”berätta- och förklara- nivå”.

Eleverna beskriver med hjälp av sina pappersfigurer att det ”hela tiden” blir ett visst förhållande mellan triangel och rektangel. De ser ett samband som kan uttryckas med ”hälften” eller ”en halv”. Men det är ändå oklart om eleverna är medvetna om vad det innebär att ”bevisa” att en triangels area är hälften av en rektangels.

Samtalen förs till allra största delen på ett helt vardagligt språk och utan att de matematiska innebörderna i de termer som används beaktas och preciseras. Man kan också konstatera att se och att göra är ingen garanti för att förstå. Ett undersökande arbetssätt leder således inte automatiskt till ökad insikt hos eleverna. Vardagliga förklaringsformer och uttryckssätt

blandas med matematiskt språk. Olika matematiska områden beträds då elever dels talar om geometriska och dels om aritmetiska förhållanden.

Lärarens direktiv som presenteras i kedjan göra-berätta-förklara-bevisa ställer krav på tankemässig ordning och reda inom ramen för en matematisk diskurs. De två förstnämnda aktiviteterna kräver inte den precisering av begrepp som de båda sistnämnda gör. Eleverna kan delta i en livlig diskussion och undvika språkliga luckor genom att hålla upp en triangel, vrida och vända på den, peka på en rektangels bas och så vidare. Men skall man förklara eller bevisa uppkommer behov av ord och språkliga bestämningar. En rektangel kan sägas ha längd och bredd eller bas och höjd, medan en triangel enbart kan sägas ha bas eller höjd. Det är genom kognitiv bearbetning av egna erfarenheter i kombination med förmedlad undervisning som eleven tillägnar sig medvetna begrepp. Sådana medvetna begrepp gör det sedan möjligt att tänka på ett begrepp utifrån ett annat begrepp. Och begrepp är nödvändiga när något skall förklaras eller bevisas.

Det matematiska språket är grunden för analys och generaliseringar inom ämnesområdet skolmatematik. Om man nöjer sig med det vardagliga språket, riskerar man att stanna upp i sitt lärande. Läraren har en viktig uppgift i att markera och hos eleverna medvetandegöra diskursiva gränsöverskridanden och perspektivbyten.

Matematisering i en mångtydig verklighet. En studie av elevers förståelse av relationen mellan modell och omvärld.

Eva Riesbeck Roger Säljö Jan Wyndhamn

Syftet med denna studie är att belysa hur elever använder sig av ett matematiskt resonemang för att lösa problem som är formulerade språkligt och hur de argumenterar med varandra, då de löser uppgiften.

Studien behandlar matematisk modellering utifrån en benämnd uppgift. Matematisk modellering innebär att händelser, objekt och relationer mellan dessa i omvärlden beskrivs och bearbetas med hjälp av begrepp, symboler och algoritmer hämtade från matematikens värld. När man räknar och tillämpar matematiska resonemang, måste man bestämma sig för hur relationen ser ut mellan den matematiska begreppsvärlden och dess redskap å ena sidan och en yttre verklighet å den andra. För analytiska syften kan man välja att betrakta en sådan övergång från ett språkligt system till ett annat som ett slags översättning, där uttryckens innebörd i vardagsspråket

skall fås att korrespondera med de begrepp och termer man använder i aritmetiska och matematiska sammanhang.

Att matematisera sin omvärld är en fråga om att tolka världen i de symboler och operationer som matematiken tillhandahåller. Symbolerna och operationerna skall tjäna som medel för att argumentera om relationer mellan storheter. Vad forskningen om elevers sätt att hantera benämnda tal visar är att elever ofta läser in förutsättningar i problemen som inte är givna eller som är orimliga om man tar hänsyn till vad problemen handlar om. Ledtrådarna så kallade ”cues” tolkas olika av eleverna. Matematisering förutsätter en medvetenhet om att betydelsen hos språkliga utsagor alltid måste förstås situerat och i relation till en konkret miljö. Översättningen mellan språken – det naturliga och det matematiska – måste ta hänsyn till de restriktioner och villkor som är giltiga i ett specifikt sammanhang. Så länge resonemang förs inom matematiken som en analytisk vetenskap, avgörs termernas och begreppens innebörd av inommatematiska referenser hos uttrycken. Så snart man börjar uttala sig om en fysisk verklighet, uppkommer frågan om hur denna yttre verklighet skall representeras i de språkliga former som matematiken erbjuder.

I en studie på detta tema visar Wyndhamn och Säljö (1997) hur elever i grupp diskuterar olika möjliga skolvägar och tar till vara den information som vägskyltar med avståndsangivelser faktiskt ger. Eleverna gör då realistiska överväganden genom att resonera i termer av ”Det beror på”.

Även om skolsituationen i allmänhet presenterar standardproblem, kan man anta att i många andra situationer är matematisering en fråga om att lära sig inse relationen mellan matematikens språk och vad som gäller i en yttre verklighet.

Den uppgift som användes i denna studie var formulerad på ett mångtydigt sätt och man kan tänka sig olika principer för att dela pengar för ett arbete som genomförts gemensamt. Beroende på vilken princip man väljer, blir den matematiska behandlingen olika. Problemet har avsiktligt formulerats så att det innehåller ett ställningstagande om vad som är ”rättvist”, vilket tvingar fram en diskussion om vad som är rättvist i en situation av detta slag när tre kamrater samarbetar. Den princip om rättvisa som man utgår från kommer således att styra vilka beräkningar man gör.

På en allmän nivå framgår att samtliga grupper på ett eller annat sätt konstaterar att uppgiften är komplicerad och att det inte är självklart hur man skall resonera, när man skall dela pengarna. Elevernas diskussion är i den meningen fylld av realistiska överväganden. Samtidigt är det uppenbart att elevernas resonerande är situerat i den speciella kommunikativa praktik som en matematiklektion utgör. Man arbetar således med antaganden som att det skall finnas en matematisk lösning och att alla uppgifter i problemet skall användas.

Ett av de tydligaste resultaten i denna studie är att ingen av grupperna konstaterar att det inte går att samtidigt använda sig av alla de uppgifter som är givna när man skall fördela pengarna. I stället drivs arbetet framåt av en inställning som innebär att man synes förutsätta att det skall gå att hitta en modell som ger en entydig lösning som kan motiveras beräkningstekniskt. Detta är ett intressant fynd och kan återigen knappast förstås som ett utslag av bristande kunskaper eller förutsättningar. I stället är detta sätt att resonera en produkt av den inställning till problemlösning med en benämnd uppgift, som eleverna förväntar sig i en skolsituation.

Det är därför förståeligt att eleven under en matematiklektion ibland stannar kvar i den matematiska världen och låter den matematiska diskursen helt bestämma ett svar på ett praktiskt problem. Vi kan här se två diskurser som lever parallellt med varandra. Bakgrunden utgörs av den matematiska modellen, en bakgrund som förstärks av själva den matematiska skolkulturen (Bruner, 1996). Till denna kultur hör just bland annat de benämnda uppgifter som i stor mängd föreläggs eleverna. Problemen är omgärdade av tysta antaganden att varje uppgift är lösbar, att uppgiften innehåller all nödvändig information för dess lösande, att uppgiften kan lösas med den kunskap eleven redan besitter, att det finns en enda korrekt tolkning av problemet och att det finns ett enda korrekt svar.

Det hänger på decimalen! Om hur vi formar och bygger meningsmönster i vår omvärld.

Eva Riesbeck

Utgångspunkten för den här studien är att pröva en teori för hur vi människor formar och bygger meningsmönster i vår omvärld. Jag vill utifrån begreppet tolkningshorisont exemplifiera hur elever på grundskolan nalkas en matematisk uppgift, där decimaler ingår. Genom att systematiskt variera förutsättningarna för uppgiften kan jag tydliggöra hur elever tillskriver uppgiften mening genom olika tolkningar. Syftet är att ta del av hur språket i den kommunikativa situationen kan förstås som medel för ett meningsbyggande.

Vårt lärande och vår kunskap om omvärlden börjar i den värld som vi kan kalla vår livsvärld (Habermas, 1996). Den värld som vi dagligen lever i, erfar, upplever, talar om och tar för given, sker vårt lärande i och härigenom utvecklar vi kunskap om omvärlden. Människor handlar utifrån sin uppfattning av en situation eller en företeelses innebörd. Det betyder att en problemställning, ett fenomen eller vad det nu kan vara kan ges mening på

flera olika sätt. Vi har en vardagskunskap, ett bakgrundsvetande eller en förförståelse som hjälper oss att förstå nya saker. Livsvärlden och vardagsverkligheten tillåter att en viss typ av vetande och kunnande skapas. Denna kunskap kan fördjupas och vidareutvecklas eller i grunden förändras genom att individen blir delaktig i nya situationer. Ny kunskap kan utvecklas genom att i dialogen måla upp nya utmanande bakgrunder, skapa överraskande perspektiv och variera tolkningsförutsättningarna (Dysthe, 2003). Distansering från den vardagliga världen innebär ett teoretiserande och abstraherande i olika grader eller på olika nivåer. Sättet att tala om något kommer att skilja sig från det vardagliga.

Olika sammanhang utlöser olika slag av kognitiva aktiviteter och aktualiserar skilda föreställningar hos vuxna och hos våra elever. Elever som löser en matematikuppgift tar sig an den på skilda sätt beroende på hur de tolkar problemlösningssituationen.

Uppgiften som användes i studien är hämtad från Nationellt prov för år 5, år 2000 och behandlar tal i decimalform. Lösningsfrekvensen i ett riksgenomsnitt var 40 %. Uppgiften tillhör de problemlösningsuppgifter som vi kallar ”benämnda uppgifter” och handlar om när elever ska springa sextio meter. Eleverna ska känna igen sig i den uppmålade vardagliga situationen. Genom en tolkningsprocedur som bygger på kunskap om tal i decimalform kan en resultatlista göras upp. Problemet flyttas in i en matematisk kontext. Två olika meningshorisonter öppnar sig för eleven. Den ena är en tanke om mätvärden och den andra rent räknetekniskt. För att få syn på elevers olika möjligheter till ställningstaganden, lät jag dem möta kontextuella variationer på uppgiften och observerar då hur elever behandlar dessa olika inramningar. Olika tolkningsförutsättningar skapas.

Två studier genomförs med elever enskilt. Den ursprungliga uppgiften ändras till att den innehåller lika antal decimaler och utfallet blir att samtliga elever ger ett rätt svar. Talen med lika många siffror tyder eleverna som lika stora och blir därmed lätta att rangordna. Här framkommer att uppgiftens utformning påverkar elevers tolkningshorisont. För att kunna se om elevers tolkningar av en ”benämnd” uppgift går att förändra genom kommunikation och med hjälp av olika redskap genomförs andra studier. För att få syn på elevers delaktighet och förhållandet mellan matematisk förståelse och en personlig tolkning genomförs samtal i interaktion med elever, där redskapen är en vardaglig bild, miniräknare och tallinjen.

I den första undersökningen som genomförs med elever i grupp används en bild på elever som deltar i en löpartävling. Samtalet rör sig kring denna bild dels om tävlingar och dels om hur fort de själva tror sig springa 60 m eller 100 m. Elever löser uppgiften och därefter ställs frågan ”Kan ni nu diskutera varför ni anser att svaret är rätt” och ett nytt samtal följer.

I den andra gruppstudien förekommer en formell uppgift med talen 333/37, 138/15 och 228/25, vilka elever med hjälp av en miniräknare ska beräkna. Därefter får de i uppgift att rangordna de tal som de har räknat ut från det lägsta till det högsta värdet. I den tredje gruppundersökningen används i samtalet mellan försöksledaren och gruppen redskapet tallinjen, för att få elever att förstå decimaltal. Tallinjen är utformad som en rak sträcka på ett papper och de enda tal som finns är 0 och 10 i vardera änden av sträckan. Elever får i uppgift att dela in sträckan i lika delar. Sedan bryts delen 0-1 ut och förstoras upp och eleverna får fortsätta att konstruera en ny tallinje.

Resultaten visar på elevers olika tolkningar av en benämnd uppgift och dialogens betydelse för att utveckla nya perspektiv.

Tre olika perspektiv framkommer i analysen av samtalen med elever i grupp. Elevernas olika förklaringar visar på tre tolkningar, nämligen ett vardagligt, ett algoritmiskt och ett matematiskt perspektiv. I uppgifterna ges tydliga möjligheter att passera diskursiva gränser, såsom mellan vardaglig bild och matematiska symboler, mellan formell och vardaglig uppgift och i en matematisk diskurs. Men eleverna uppvisar svårigheter med det decimala registret vid representation av tal. Eleverna opererar på symbolerna och inte på vad tecknen står för. När eleverna säger ”lägga till en nolla” är det ytterligare ett exempel på detta fenomen. I uppgiften med tallinjen visar sig den laborativa representationen som referent och den hjälper eleverna att komma rätt.

Lärarstudenters problemlösande samtal om matematikundervisning.

Eva Riesbeck

Samtalet i pedagogiska sammanhang i skolan i ämnet matematik studeras här och hur denna form av samtal ger förutsättningar för lärande och utveckling genom förändring av individens förhållningssätt. Kunskapen finns integrerad i situerade praktiker som skolan. Institutioner är kulturspecifika, vilket gör att handlandet, samtalet och tänkandet formas i olika diskurser. I denna studie kan vi uttrycka oss som att vi studerar en dialogisk didaktisk diskurs. I studien får begreppet diskurs ha innebörden ”sätt att tala”. Ett språkbruk handlar inte enbart om kommunikation mellan människor utan också om ett inbegripande av gemensamma synsätt och uppfattningar. Diskursen skapar ett sätt att bli delaktig på.

I föreliggande studie analyseras hur lärarstudenter tar sig an en matematisk uppgift och vad de samtalar om. Jag vill alltså studera hur de samtalar och utvecklar en kunskap om några matematiska situationer. Syftet utformas på följande sätt: Vad utmärker det eller de ”sätt att tala” om undervisningsproblem i matematik som upprättas?

Tre följdfrågor är:

Kan sådana problemlösande samtal stärka en lärarkompetens i vardande?
Vilken typ av diskursiva möten anordnar studenterna för sina elever?
Hur synliggörs samtalen i skriven planering?

Lärarstudenterna ålades två uppgifter där den ena handlar om hur de ska få elever att förstå begreppet triangelns area och den andra behandlar en benämnd uppgift där förståelse för positionssystem ska tydliggöras.

Gruppdeltagarna fick ta sig an ett abstrakt upplägg, där det enbart fanns ”tänkta elever”. Kursplaner, läroböcker eller annat material fanns inte tillgängligt.

Vid analysen ville jag ha svar på frågan, vad som kännetecknar samtalen till den yttre formen? Tre tydliga faser kunde identifieras. Studenterna utvecklade effektiva och utvecklande diskurser i sina samtal. Inledningen till samtalen har karaktären av brainstorming, sedan följer en slags dialog och på många ställen under samtalets gång förs en argumentation. I nästa analys av det transkriberade materialet fokuserade jag på vilken typ av diskursiva möten som studenterna planerar att anordna för sina elever. Här framträder flera olika diskurser som de menar kan hjälpa till att få eleverna att förstå positionssystem och area. Studenterna talar om hur de ska få elever att förstå matematiken utifrån olika referensmodeller såsom vardaglig-, laborativ- och grafisk aktivitet. De samtalar vidare om att det matematiska språket ska vara i fokus, vilket kan tolkas utifrån tre begreppsmodeller. Jag har valt att skilja mellan *begreppsuttryck* och *begreppsrelation* och vill med detta visa att matematiken innehåller olika uttryck som kan betyda en sak i vardagen och en annan sak i matematiken och att matematiska begrepp kan ha inbördes relationer. Den tredje modellen kallar jag för *begreppsanvändning*, då studenterna talar om att elever ska använda sina matematiska begrepp. Vid genomläsningen av samtalen märkte jag att studenterna tog spjärn mot en bakomliggande diskurs. Jag har kallat den för en elevdiskurs eftersom elevens utveckling är i fokus. Här talar de om att elevens förförståelse är nödvändig för uppläggningen av undervisning i matematik. Utifrån de här samtalen analyseras sedan fram det som jag har valt att kalla ”lärardiskurs”.

Sammanfattas och granskas resultatet av analysen om vad som utmärker lärarstudenters ”sätt att tala” om ett undervisningsproblem framträder vissa

fenomen mer än andra. I början av samtalen talade studenterna om vardagsanknytning, matematiskt språk och laborativt material. Allteftersom samtalet fortskred utvecklades resonemang och slutledningar. Samtalen utvecklades till att göra var och en i gruppen delaktig i den matematiska diskursen. När de studerande sedan diskuterade olika strategier lutade de sig bildligt talat mot en ”lärardiskurs”. Den innefattar den ovan påvisade elevdiskursen kompletterad med begrepp från inlärningsteoretiska skolor såsom *förklara, förstå, förförståelse* och *variation*. Dessa ord utgör noderna i fisknätet och dessa ”står fast” utan att någon nämnbar förståelse görs klar. En formel kan skönjas: ”Genom att utgå från elevernas förförståelse och sedan genom varierande förklaringar kan läraren få eleven att förstå det nya.” När lärarstudenterna söker en lösning på det undervisningsproblem de ställdes inför letar de först efter en ändamålsenlig diskurs som de två startuppgifterna kan ingå i. De fastnar för en tydligt vardagsanknuten respektive en mer matematiskt betonad diskurs. Som de studerande diskuterar föreligger dock stor risk att de två diskurserna kommer att löpa parallellt. Men med hjälp av diskursbegreppet kan man söka konstruktiva svar genom att diskutera hur ett överskridande av diskursiva gränser kan göras.

Sammanfattning och diskussion

Lärande kan enligt flera forskare (Lave & Wenger, 1991; Säljö, 2000; Sfard & Kieran, 2001) ses som att bli delaktig i en diskurs. Det innebär att en elev bör bli involverad i och efterhand bemästra bestämda sätt att tala om, skriva, förstå och förhålla sig till en företeelse.

> All kinds of activities which come together with production of a text and serve the purpose of communication will count as constituting the discourse (Sfard, 1997, p. 125).

Det specifika samtalet i och om matematik vill jag här diskutera med hjälp av att se diskurs som analysverktyg, riktningsangivare och teoretiskt - didaktiskt begrepp.

Diskurs som analysverktyg

Utgångspunkten i avhandlingen har varit att genom diskursanalys närmare beskriva elevers, lärares och lärarstudenters vardagliga och matematiska samtal, hur de upprätthåller samtalen och vilka ord, uttryck och begrepp som används. Jag har genom diskursanalysen försökt fånga ”language-in-action” för att lättare kunna se vad som händer i olika lärandesituationer. I skolmatematiken samtalar lärare och elever med hjälp av vardagliga och matematiska begrepp, tecken och ord och i denna interaktion måste en gemensam förståelse skapas.

Analysen av det som sägs i de olika samtalen visar att det inte är så stora skillnader mellan en vardaglig och matematisk diskurs som mina enskilda undersökningar kanske gör gällande. Jag vill visa att diskurserna inte är varandra uteslutande. Det är kanske mera lämpligt att se de olika diskurserna i studierna som placerade på en skala med två poler, som samtalet pendlar mellan.

Vardaglig diskurs----------Matematisk diskurs

Jag har tidigare beskrivit ord och tecken som elever och lärare använt sig av i mina studier och jag har analyserat dessa både från en vardaglig och en ma-

tematisk diskurs. Ord som öka, lägga till eller lägga samman benämns som vardagliga ord medan ord som addera, addition och komplexa tal befinner sig i en skolmatematisk diskurs. Varje individ befinner sig på olika ställen på en sådan skala från vardaglig till matematisk diskurs beroende på hur långt i abstraktionsprocessen man kommit. Samma sak kan tyckas gälla för tecken. Vissa tecken i matematiken förekommer mera allmänt i vardagen än andra men för att förstå dem måste vi skapa referenser till dem.

Tecken

1 3 7 + / * = % √ ∞ ∫ ∑

----------→

Innehållet till vänster på skalan känns väl igen av de flesta elever utifrån deras vardagliga referenser. Där finns en matematisk kunskap som de finner förståelig och hanterbar och som de är bekväma eller förtrogna med. Tecknen till höger kan uppfattas som obegriplig och synnerligen abstrakt. Här står eleven på tröskeln till ett matematiskt ”finrum” – matematikens esoteriska inslag. I mina studier har jag försökt kartlägga var på denna skala eleverna befinner sig.

I mitt empiriska material, där läraren samtalar med eleverna i omväxlande klass- och gruppsamtal använder sig läraren av olika tecken och byter register i sin undervisning, genom att ibland befinna sig i en geometrisk och ibland i en aritmetisk/algebraisk diskurs. I huvudsak utspelar sig lärare–elev interaktionen inom en matematisk diskurs. Analys av samtalen visar tydligt elevers sätt att tala om och förstå begreppen. Om elever ska kunna ha en meningsfull dialog med sin lärare måste de häri utveckla en förståelse för vad de matematiska begreppen innebär. Alla begrepp är abstrakta och av den anledningen försöker lärare att i undervisningen använda laborativt material. Genom att i analysen av en lärares undervisning försöka urskilja vilka register de befinner sig i och vilka begrepp de talar om, har jag kunnat följa hur lärarna passerar diskursiva gränser i matematikundervisningen. Men frågan är om eleverna är i samma diskurs som läraren? Det framgår tydligt hur lärarna befinner sig i en diskurs och eleverna i en annan.

Vid en närmare analys av elevers samtal i grupp upptäcker jag att de utsätts för olika semiotiska system, när de pendlar mellan att arbeta med konkret material och samtidigt med hjälp av matematiska tecken eller symboler och begrepp bevisa formeln för triangelns area utan att veta i vilken diskurs de befinner sig. Eleverna har svårigheter att förankra ett samtal i ett adekvat register. När elever löser vardagsproblem hamnar de i olika diskurser som inte är så lätta att direkt förena. Eleverna i denna studie blir kvar i sitt konkreta register och är inte delaktiga i lärarens sätt att passera

diskursiva gränser. I de samtal som jag har analyserat om elevers gruppinteraktion och deras arbete med laborativt material i matematik vet varken lärarna eller eleverna vilka de gemensamma målen för aktiviteten är. Eleverna arbetar laborativt men tillägnar sig inte de matematiska begrepp som läraren har tänkt sig. Eleverna hamnar i en distanserad diskurs i stället för som läraren planerat en involverad.

Jag har studerat karaktärerna hos dessa olika diskurser och sett vad som skiljer dem åt. Många gånger lär sig och använder elever det enskilda fallet, det partikulära och har svårt för att uppfatta samband och förhållanden i skolmatematiken. De får då svårt att förstå vad som är generaliserande. I exemplet med den vardagliga uppgiften, som handlar om att fördela rättvist söker elever efter ledtrådar och utför uppgiften i enlighet med det enskilda fallet. När de löser uppgiften hamnar de ofta i en vardaglig diskurs om vad ordet rättvisa kan betyda och när de försöker sig på en matematisk diskurs blir det ett försök att räkna. De klarar inte av att förena dessa två diskurser. Elever passerar diskursiva gränser men kan inte argumentera för den ena eller andra eller bestämma sig för vilket beräkningssätt som blir mest rättvist. Jag kan här se att elevers förhållningssätt till matematik i klassrummet är att utföra en beräkning inte att ta ställning och argumentera. De väljer antingen att befinna sig i en vardaglig diskurs eller en matematisk. Men genom våra samtal uppmärksammas problemlösningsuppgiftens utformning för eleverna och de genomför uppgiften ur både ett vardagligt och matematiskt tänkande.

Den personliga inställningen och förståelsen av begreppet är utgångspunkten för lärande men får inte förbli vid det.

> Var och en har en personlig föreställning som han faller tillbaka på när han arbetar med begreppet. Givetvis kan han de abstrakta definitionerna, men de finns långt tillbaka i medvetandet. Det är således idén och ”funktionen” av begreppet som i första hand används, inte den matematiska konstruktionen eller den formella definitionen (Carleson, 1968, s.134).

Det avgörande är med andra ord en förståelse av begreppens roll i den matematiska diskursen. Men ”användandet” eller ”görandet” blir ofta det synliga i den instrumentella hanteringen av teckensystemet. Inser man inte detta blir operationerna med tecken en fälla – matematik reduceras till teknik och trick. Detta kan vi se i ytterligare en vardaglig uppgift, där målet var att lära sig positionssystemet. Eleverna i studien fick ta sig an uppgiften från skilda håll och först när de blev delaktiga genom för uppgiften rätt matematiskt verktyg, kunde de fånga de matematiska orden och göra dem till sina. En elevgrupp arbetar med en vardaglig bild som utgångspunkt och samtalar utifrån sin egen verklighet och håller sig först till en vardaglig

diskurs. En del av dem når inte fram till de matematiska orden och förståelsen. Andra grupper av elever får en formell uppgift att lösa med hjälp av en miniräknare. De blir kvar och inlåsta i teckensystemet med decimaler. En annan grupp av elever ritar gemensamt olika tallinjer för att förstå decimaler och genom att de kan ta del av de matematiska tecknen som 0,5 eller 0,05 och orden tiondel och hundradel blir de delaktiga i samtalet. De börjar tala, tänka och skriva ”matematiska”(Lennerstad & Mouwitz, 2004). Det visar sig här att när elever har förmågan att kombinera den vardagliga och matematiska diskursen så infinner sig förståelse för de matematiska begreppen. Ser vi till att skapa samband mellan de matematiska begreppen, uttrycken och vardagliga referenserna blir det lättare för elever att lämna ”görandet”.

Matematiska begrepp och tecken har tilldelats mening och skapats för bestämda syften. Men meningen förstås bara av den som är deltagare i en matematisk diskurs. Lösandet av ett problem kräver alltså ett visst mått av överskottskunnande, såsom ett reflekterande förhållningssätt.

Lärarstudenter som ska planera olika undervisningssituationer i matematik, utvecklar interaktionen genom brainstorming, dialog och argumenterande samtal. Ibland befinner de sig i den informella vardagliga diskursen och ibland i den formella matematiska, men därvid sker få diskursiva gränsöverskridanden. När de däremot diskuterar begrepp som *förståelse* och *variation* och vad dessa ord innebär i skolsammanhang, ser jag i samtalen hur de passerar diskursiva gränser. Det intressanta här är att upptäcka hur meningen förändras i samspelet. I dialogen finns både argumenterande och kritiska modeller som är utvecklande för samtalet men i min analys av språket, befinner sig lärarstudenterna i en vardaglig diskurs och når aldrig fram till en matematisk.

Genom att analysera hur lärare och elever samtalar om matematiska företeelser i olika situationer kan jag med diskursbegreppet som verktyg konstatera att det sällan sker några möten mellan vardagliga och matematiska begrepp. Jag har studerat interaktionen och följer de förändringar som äger rum dels mellan individer dels mellan individer och kontext. Vidare har jag analyserat i mina studier hur de matematiska begreppen behandlas ur referens- och tecken/symbolperspektiv. Vi kan tala om att matematiken förtingligas när exempel från verkligheten och olika redskap, som geometriska figurer och tallinjer används som exempel för att få eleverna att förstå. Detta blir en paradox då matematiska begrepp är abstrakta och för att förstå dessa måste vi gå mellan flera olika register och diskursiva gränser. Det blir ett stort problem för eleverna, om de inte kan samtala och bilda begreppsliga nätverk, som hjälper dem till ett medvetet tänkande. Lärare, lärarstudenter och elever behöver alltså utveckla det matematiska språket i samklang med det vardagliga.

Studierna visar att energi, tankekraft, tid och samtal ägnas åt att avgränsa en lämplig diskurs. Detta sker ofta då eleven utsätts för en matematisk uppgift. Det kan röra sig om att eleverna letar efter ledtrådar, som att ”nu är det matte”, rubriken i läroboken, olika ord i uppgiften som leder till ett räknesätt, vilken strategi som läraren vill att eleverna ska kunna och så vidare. Lärare har till uppgift att visa elever vilka strategier som används i en viss diskurs. Valet av diskurs innebär inte att söka någon sanning men väl att förstå, hur en situation kan hanteras bättre eller sämre.

Sammanfattningsvis har jag belyst hur elever och lärare lätt hamnar i svårigheter när de behandlar olika matematiska uppgifter, hur diskurser uppstår och hur lärande kan uppfattas som att bli delaktig i en diskurs.

Diskursanalys kan således användas som ett verktyg, där beskrivningar av elevers lärande i och förståelse av matematik kan tydliggöras. Diskurs är såväl ett analysinstrument som ett didaktiskt instrument. I mitt empiriska material försöker jag att urskilja den diskurs i skolmatematiken som kan bilda en bro, där lärare och elever kan mötas och bli delaktiga i förståelsen av begrepp, uttryck och referenser. Jag sätter således diskursen i centrum och vidareutvecklar den som en riktningsangivare.

Diskurs som riktningsangivare

Om jag ser diskursen som en tydlig riktningsangivare för undervisning i matematik, så är det lärarens uppgift att medvetandegöra eleverna om olika sätt att passera diskursiva gränser, så att de blir klara över de matematiska begreppens natur. En diskurs består av artefakter och produkter som människan själv skapat med bestämda syften och språket kan förstås av den som blir delaktig i diskursen. Undervisningen ska ge elever en invit till att bli deltagare i en matematisk diskurs.

Både Peirce’s (1931-1958) och Wittgensteins idé (1978) om att ett ord får mening genom dess användning stärker betydelsen av att få lärare att åstadkomma situationer så att ”språkbollen” kommer i rullning.

Det vardagliga språket finns att tillgå som gränsöverskridare med funktioner som att lära sig att benämna och beteckna något, utläsa meningar, utvidga ordförråd, reflektera och argumentera (Linell, 1998). Lärare måste samtala med elever genom att använda specifika ord, som behövs i olika diskurser. Det kan vara att elever lär sig det matematiska språket som addition, subtraktion, division, positionssystem och kan förklara dessa begrepp på olika sätt. Linell menar att det är viktigt, att vi startar ett ”språkande” med situationer eller kommunikativa händelser, som utvecklar talande, tänkande och skrivande i dialogen.

Om jag utgår ifrån orden tala, tänka och skriva och att dessa ord involveras i undervisningen kan elevens väg till medvetenhet och delaktighet i matematiken förstärkas. Dessa tre begrepp ska ses i perspektivet att de är helt beroende av varandra, när det gäller utveckling av elevers matematiska språk och kunskap. Genom att tala och skriva om ett matematiskt uttryck på många olika sätt, förstärker vi elevens tänkande om objektet och därmed lärandet. Detta skulle kunna utgöra den *gestaltande* diskursen.

Den kommunikation som äger rum mellan lärare och elever eller mellan elev och elev i ett matematiskt klassrum ger exempel på olika diskurser som uppstår, där man sällan förstår varandra (Dysthe, 2003; Bergqvist, 1990; Bergqvist & Säljö, 2004). Det kan vara då någon befinner sig i en vardaglig diskurs och någon annan i en matematisk och dessa individer inte är medvetna om hur de kan passera diskursiva gränser. Lärare skulle genom att ställa reflekterande och utmanande frågor till elever få dem att utveckla olika former av kommunikation och tänkande. Exempel på frågor som förändrar kan vara följande: Vad innebär det att? Hur ser du på detta? Varför blir det på det sättet? (Ahlberg, 1992; Unenge, Sandahl & Wyndhamn, 1994; Emanuelsson, 2001; Moyer, P. & Milewicz, E. 2002; Nilsson, 2005).

Att genom problemlösningsuppgifter och laborativa redskap få elever att utveckla sin retorik i rika dialoger och få dem att ta ställning, värdera och argumentera för sin matematik är en viktig kunskap. Denna kan uppstå först, då eleven eller läraren vet målet med uppgiften och är förtrogen med de matematiska begreppen (Nilsson, 2005). Det framgår tydligt i mina analyser av elevers diskussioner om ett matematikproblem med hjälp av konkret material, att de inte vet målet med uppgiften.

Vidare behöver vi skapa medvetenhet om vad som förändras när man byter diskurs i matematiken. Att kunna urskilja när man samtalar i en vardaglig eller en matematisk diskurs, att känna igen om man befinner sig i en geometrisk eller en algebraisk diskurs eller hur pendlingen mellan olika register i matematiken äger rum är en viktig kunskap för lärare, elever och lärarstudenter (Duval, 2006). Det väsentliga här är att bli medveten om vad man talar om, hur man talar och varför man talar om just det och vad det innebär att man talar om just det. Ryve (2004) använder begreppen ”ett effektivt sätt” och ”en matematiskt produktiv diskurs”, när han beskriver studenters kommunikation i matematik. Jag har använt mig av begreppen brainstorming, dialog och argumentation i samtalet om undervisning i matematik. När en individ talar kan sättet att tala utvecklas kvalitativt genom att lära sig värdera, kritiskt granska och argumentera i det vardagliga och matematiska språket.

Det är själva diskursen som blir fokus för förståelsen av tanken (Mercer, 2000; Sfard, & Kieran, 2001) och genom samtalet tillför individen fler tankar som utvecklas (Vygotsky, 1986). Harré och Gilbert uttrycker det så här,

> The idea that the mind is a social construction is true in that our concepts arise from our discourse and shape the way we think (Harré and Gilbert, 1994, p. 22).

I diskursen utvecklas tänkandet och genom att använda språkliga och konkreta artefakter samtidigt stimuleras individens tänkande (Vygotsky, 1978). Språket kan användas som redskap för ett växelspel mellan tanke och erfarenhet. När elever hanterar miniräknaren utan att få frågeställningar som leder till argumentation sker ingen dialog. Att använda språket som ett redskap att tänka med är ett av de viktigaste verktygen i en diskurs (Mercer, 2000). Wyndhamn och Säljö uttrycker följande,

> Thinking and learning in a sociocultural perspective is a matter of being able to use artifacts created and designed by human beings for particular purposes (Wyndhamn & Säljö, 1997, p.10).

Genom att samtala kan våra elever utveckla reflektion, lyssnande, medvetenhet och perception. Men för att elevens tänkande i just den specifika situationen ska ske är det enligt Wallin (2003) viktigt att de blir uppmärksamma på vad orden innebär och kan betyda i samtalet. Schütz (1967) beskriver olika tankescheman som vi kan utveckla för att skapa mentala bilder. Han utgår från livsvärldens vardagskunskap och talar om begreppen ömsesidighet och meningskongruens i samtalet och hur man utvecklar ett tänkande. I matematiken kan vi nå detta genom att utveckla ett precist och specifikt samtal när vi passerar olika register.

> The true challenge of mathematics education is first to develop the ability to change representation register (Duval, 2006, p.128).

I matematik räcker det inte att elever talar och tänker utan vi bör också betona begreppet skriva. Jag har tidigare beskrivit matematikens utveckling genom skrivandet och hur generaliseringen blir till just genom utvecklingen från konkret till abstrakt matematik. Vi kan välja att se matematiken som ett språk, som tidigare sagts, och då är det viktigt att samtala både med vardagliga och vetenskapliga begrepp, vilka tillhör olika diskurser och som måste läras av eleven i varje ny situation. Det är här som vi kan se till helheten i en matematisk diskurs och göra ett försök att binda samman begreppen tala, tänka och skriva. Genom att utveckla dessa aktiviteter och

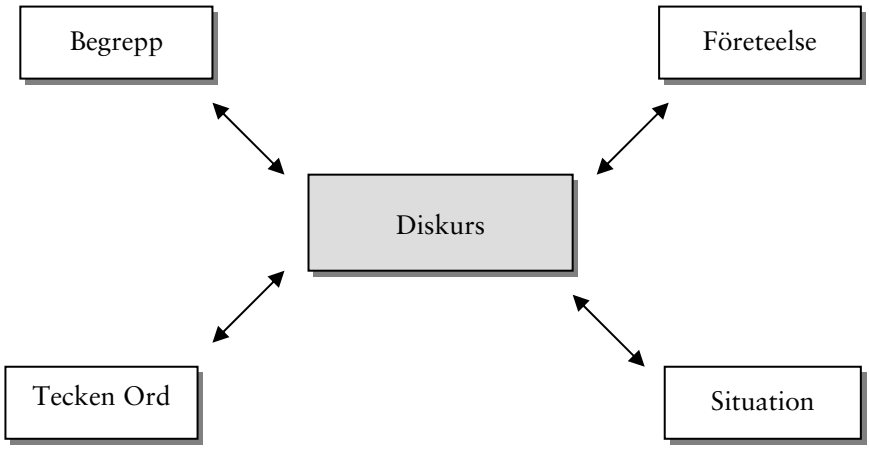
fokusera på orden mediering, artefakter och kontext kan vi få dessa att samverka i en meningsskapande matematisk diskurs i undervisningen.

Matematiken har börjat i en tecken- och skrivarkultur och denna kultur har i sin tur utvecklat texter och läsning inom matematiken (Österholm, 2006). Enligt Österholm använder sig elever av en allmän läsförståelse när de hanterar problemlösningsuppgifter i matematik. Detta pekar mot att det är viktigt att låta eleverna arbeta parallellt med vardags- och matematikspråket. Om vi låter elever arbeta med problemlösning, som ger dem nya vägar att tala, skriva och tänka och om vi får dem att samtidigt arbeta i både en vardaglig och en matematisk diskurs, att kritiskt granska och argumentera, skulle de kunna bli framgångsrika i sitt meningsskapande. I denna diskurs måste vi också betona orden lyssna och läsa, som leder till begreppet *tolka*. Eleverna kommer då att aktivt *gestalta* och *tolka* sin kunskap.

Grundläggande i ett sociokulturellt perspektiv är att vetenskapliga begrepp och sätt att tänka kommer att strukturera individens sätt att resonera, lösa problem och kommunicera. Detta innebär att lärande ger upphov till ”inre tal” som man använder sig av och följer diskursiva mönster som i viss utsträckning är specifika för institutionella verksamheter. Vi kan uttrycka det som att man växer in i en vardaglig diskurs medan man skolas in i en matematisk och institutionell diskurs. Symbolspråket skulle kunna utgöra bryggan mellan benämnda uppgifter och formella i mötet mellan vardagliga och vetenskapliga begrepp (Wyndhamn, 2000). Eleverna ska kunna gå åt två håll utifrån ett uttryck som 120-30=90. Det ena hållet leder elever till ”skrivna räknesagor” och det andra hållet att bli bekant med olika register, terminologier och tecken. Eleverna kommer då att kunna utveckla både den vardagliga referenten och fördjupa uttrycken. Ser vi det ur språklig dimension så kan vi åskådliggöra ovanstående genom att använda oss av de retoriska grundfigurerna metafor och metonymi. Här kan vi då tala om en språklig dimension av ett matematiskt uttryck, som omformas och byter register. Enligt Aristoteles var metaforen inte namnet på ett ord utan namnet på en handling som bestod i att, på vissa grunder, ersätta ett uttryck med ett annat. Metafor betydde ordagrant ”överföring” och metonymi ”namnbyte” (Ramínez, 2000). I Studentlitteraturs ordbok (2006) står metafor för bildligt uttryck eller liknelse och metonymi är användning av ett annat men närliggande ord för det ord som egentligen avses.

Metafor och metonymi kan användas då vi beskriver hur elever lär sig att koordinera olika representationer från den vardagliga världen och de matematiska symbolerna och begreppen som en pendelrörelse. Men detta är inte tillräckligt utan elever och lärare måste bli medvetna om hur man passerar diskursiva gränser och hur ord och begrepp har olika betydelse i olika situationer (Steinbring, 2006; Duval, 2006). När vi befinner oss i en vardaglig situation tänker, talar och skriver vi på ett sätt och på ett annat

sätt i en matematisk. Ett tydligt exempel handlar om begreppet volym, som i en situation kan betyda ljudvolym, i en annan volymschampo och i en tredje ett matematiskt begrepp med dess olika uttryck. Ytterligare ett exempel är begreppet bas som i musikens värld är ett instrument och i matematiken en sträcka i en triangel. Elever kan fortfarande använda sig av samma företeelse, men med olika associationer. Samma begrepp kan vi använda i olika diskurser.



Figur 4. Diskursen utgör bryggan mellan begrepp, tecken, olika företeelser och situationer.

Diskursen skulle kunna ses som ett nätverk, där lärare, elever och studenter är medvetna om skolmatematikens olika ord, begrepp och tecken. Jag vill i diskursbegreppet även införliva orden *gestalta* och *tolka*. För att detta ska få substans argumenterar jag här för diskurs som ett teoretiskt-didaktiskt begrepp.

Diskurs som teoretiskt – didaktiskt begrepp

I mina teoretiska analyser har jag försökt att beskriva diskursbegreppets centrala roll i skolmatematiken. Foucault beskriver den osynliga diskurs som uppstår i den specifika institution där vi befinner oss. Vi kan synliggöra den matematiska skoldiskursen genom att analysera språk och sättet att passera diskursiva gränser och på så sätt förändra synen på undervisning och lärande i matematik. Vi kan uppmärksamma den diskurs som har blivit till och som vi har tagit förgiven i matematiksammanhang.

Jag har velat synliggöra diskursbegreppet. Vi kan genom att inta ett diskursperspektiv rikta uppmärksamheten mot språkliga dimensioner i undervisningen i matematik. Detta skulle också kunna hjälpa oss att ersätta viss tyst räkning med matematiska samtal. Elever kan genom att gestalta och tolka sin matematiska kunskap lära sig ny kunskap i matematik. Vi får en igenkännande närhet genom erfarenhet och distanserande genom utveckling av och förtrogenhet med teckensystemet. Genom att ha kvalitet i de samtal som blir till i lärandesammanhang kan vi utveckla språket och därmed förbättra förståelsen. Kvalitet innebär i det här sammanhanget att lärare och elever aktivt använder ord, tecken, begrepp och situationer och är medvetna om den speciella diskursen. Vi ska även vara medvetna om att en matematisk diskurs utvecklas efterhand. Vi skulle kunna uttrycka oss som att ”teaching is a learning process” och att ”learning is a process of becoming” (Wenger, 1998).

Tänkande, talande, skrivande, lyssnande och läsande är delar av aktiviteter, innehållsliga till sin karaktär och situerade i sociala praktiker. Lärande i matematik blir i detta perspektiv mycket specifikt. Språk och kunskap förstås i ett sociokulturellt perspektiv som en process där elever, lärare och lärarstudenter tar till sig delar av de kunskaper och färdigheter som utvecklas efter hand. Våra sätt att lära får nya förutsättningar. Men lärande måste alltid ses som innehållsberoende, situationsbundet och det måste också förstås som dynamiskt och föränderligt.

Detta innebär att elever, studenter och lärare lär sig specifika termer och begrepp i den omgivning där de befinner sig. Utvecklingen av begrepp, begreppssystem och diskurser finns inte i naturen utan skapas i människans sätt att kommunicera i olika kontexter.

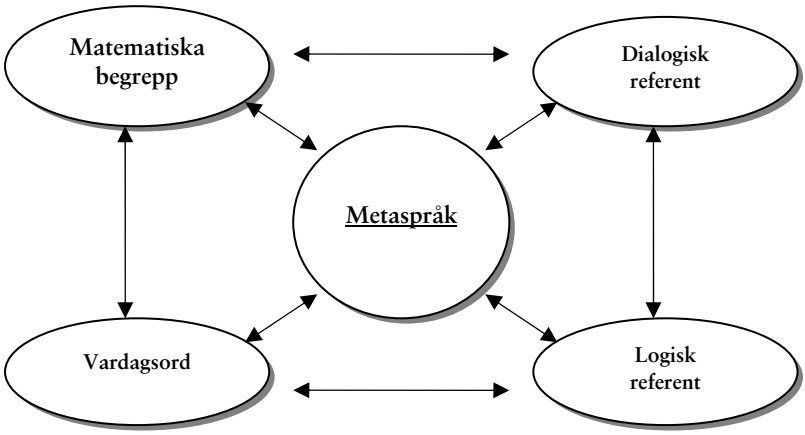
Vi har under många år fått höra att matematiken finns omkring oss och att det bara är att lära sig i sin vardag och referera till sin verklighet. I det perspektiv som jag har beskrivit och de empiriska studier som jag har genomfört och analyserat visar det sig att det inte räcker att enbart räkna eller att se. Det måste till betydligt mera för att elever ska utveckla förståelse för vetenskapliga begrepp i matematik. Det krävs att man arbetar i flera olika register och vet när man passerar diskursiva gränser (Steinbring, 2006; Duval, 2006). Styrkan med mitt diskursbegrepp i matematiksammanhang är att lärare, elever och studenter alltid måste uppmärksamma och pendla mellan alla delarna i nätverket.

Forskningen idag uppvisar många tillståndsbilder: ”så här är det”. Men mitt diskursperspektiv pekar på möjliga förändringar. Jag vill visa på en diskursteori som ser kvaliteter i språket och kunskapen både i den vardagliga och den matematiska världen och därmed tydliggör vardagliga och vetenskapliga begrepp. Kvalitet innebär då att vi talar, skriver, läser, tänker om och lyssnar till ett begrepp, ett tecken, en referent och en situation ge-

nom att kritiskt granska det, argumentera för eller emot och till sist veta vilken värdering vi lägger i detta kunskapande. Det är helt klart att ju mer vårt lärande blir en fråga om att lära abstrakta och komplexa intellektuella och praktiska redskap desto mer nödvändigt blir det att delta i kommunikativa praktiker i vilka vi kan lära oss hur vi ska använda och koordinera med en värld utanför genom att använda dessa verktyg, både språkliga och fysiska, för att nå en matematisk kunskap. Modellen eller symboluttrycken kan prövas kritiskt i fråga om kopplingen till den vardagliga världen och till andra begrepp, i fråga om logisk konsekvens och sanningsvärde.

> Det är en fråga om att förstå hur en företeelse kan konstitueras genom specifika språkliga resurser, hur den kan analyseras och förklaras inom ramen för en speciell begreppsapparat (diskurs) (Säljö, 2005, s.128).

Jag sammanfattar i figuren nedan hur jag ser på diskursen som en slags begreppsapparat. Diskurs kan i det här perspektivet utgöra ett tankeredskap och tydliggöra olika alternativ för lärares undervisning.



Figur 5. Modell att passera diskursiva gränser.

Språket uppfattas som ett intellektuellt redskap för tänkande och talande och en källa för att skapa och producera mening för sig själv och andra.

När våra elever och lärare blir delaktiga i ett metaspråk om skolmatematiken, vilket då utgör ett specifikt och precist språk i och om matematik, skapas kvalitet. Vi kan tala om att vi blir matematiska genom att gestalta och tolka. Språket konstrueras genom hur vi agerar och uttrycker oss genom tecken och argumenterar och tolkar i dialogen. En dialogisk referent är därför viktig att fokusera på. Kunskap är att tillägna sig förståelse ge-

nom att veta när vi passerar diskursiva gränser och växelspelet mellan tanke och erfarenhet i matematiken. Logisk referent betyder här att sätta förståelse i centrum. Vi lever i en värld bestående av historiska diskurser, men genom att skapa nya diskurser och bli medvetna om diskursiva gränser kan vi frigöra oss och bidra med nya värderingar inom skolmatematiken. Jag vill alltså till sist betona att metaspråket kan utveckla en förståelse för analys och generalisering och en kunskap om regler och grammatik i skolmatematiken.

Summary

Speaking of Mathematics - Mathematics, Every-Day Life and School Mathematics Discourse

Introduction and aim of the study

> Learning mathematics or learning to think mathematically is learning to speak mathematically (Lerman, 2002, p. 107).

This thesis deals with teachers, pupils and student teachers discussing with each other in different situations within and about mathematics in school. The theoretical points of departure are first and foremost an in-depth study of the meaning of and relationships between concepts, words and signs in order to demonstrate how mathematical discussions can be understood. The concepts of context, mediation and artefacts are central to the socio-cultural perspective chosen and thus play an important role in this thesis. The concept of context can be described as being the environment where our actions take place and thus create and re-create the context as such. Mediation implies that human beings interact with external tools in their perception of the world around them. Linguistic as well as physical artefacts are created by mankind to perform actions and solve problems. They are cultural resources which contribute towards maintaining and developing knowledge and abilities in society (Vygotsky, 1978, 1986). Using semiotic tools one can demonstrate how a linguistic element is connected to its meaning. We can picture a semiotic triangle made up of concept, expression and reference. If we look upon language as a medium for communication based on conventional signs it is by applying language that the reference to the world at large is created.

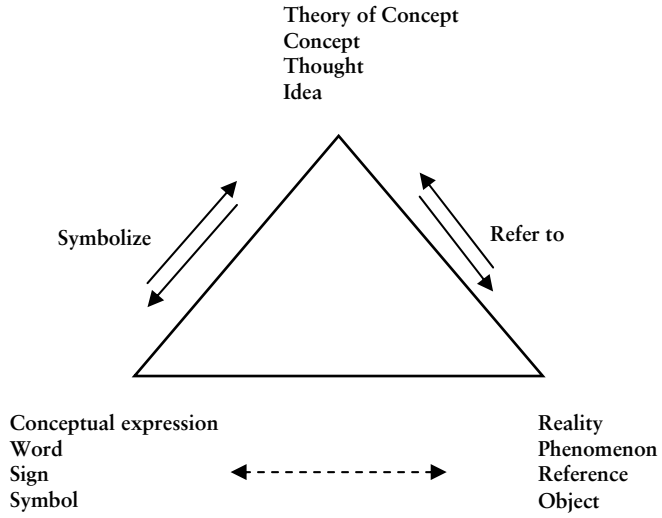


Diagram 1. The semiotic triangle

The relationship between thought and symbol is, like the one between thought and reference causal and direct. The relationship between symbol and reference, on the other hand, is indirect and attributed. It may not be possible to observe which is indicated by the dotted lines in the figure above. Concepts within a socio-cultural perspective which may be applied to the semiotic triangle are expression, content and reference. These three functions of a sign can only be understood when they are applied simultaneously. Thus we must use signs such as words, numbers, symbols, diagrams, equations and the letters x and y when dealing with mathematics. The sign expresses something separate from the sign itself. Signs and objects are related to the meaning or conception of them. Mathematical knowledge must be actively constructed in relationship to signs, words and symbols.

I have chosen to describe mathematical discussions out of a discourse perspective. The concept of discourse can be understood in different ways. It can be interpreted as a set of conventional rules for discussing, understanding and conceiving the world and its different phenomena (Winther-Jörgensen & Phillips, 2000; Sfard, 2002). A discourse can be understood as a linguistic system which delineates issues of exclusion and inclusion, boundaries on what is excluded and inner standardization (Gee, 2005; Börjesson & Palmblad, 2007).

Foucault (1972/2002) wants to clarify how we are caught up in and blinded by lines of reasoning without really being conscious of what we say. We can refer to this as an invisible discourse. In the discourse on teaching mathematics there is an invisible element which is difficult to affect unless we make ourselves aware of its existence.

From a socio-cultural perspective discourse is defined as the language which gives and is attributed meaning in various contexts and which excludes and includes things to be understood (Säljö, 1999). In this work I have chosen to metaphorically regard discourse as a network where signs, concepts and references make up the nodes. Nets can be chosen or created in such a way that meaning is constructed in situated action as well as socio-cultural practices which transgress defined situations. Thus, a discourse can also be a set of rules for talking, writing and thinking about a specific content. Many discourses are mixed in school which both teachers and pupils must learn to become involved in, understand and master. This includes knowing when boundaries between different discourses are crossed. Mathematical instruction means that teachers and pupils are placed in different discourses, ranging from those applied every-day life to purely mathematical ones. This means that they move over boundaries and between registers all the time. An example of this occurs when pupils work with concrete materials and are to express themselves using numbers and symbols. In doing so, they will move over different boundaries. When working in school we must learn to understand when we are situated in a specific discourse.

A mathematics lesson contains a number of words and expressions from every-day life. The language applied is rich and we talk departing from many different perspectives and towards many different aims. To be able to conduct conversations in a context as specific as school mathematics we have to develop a meta-language which makes it possible to put what we want to express into perspective. In every-day life we build models in order to understand reality and we use every-day methods for solving problems in order to describe connections to mathematics. We seek the history of mathematics to be able to see how every-day applications developed into pure mathematics. This thesis mirrors how teachers, pupils and university students apply different types of discussions to deal with problem-solving tasks in and about mathematics. In these discussions we develop our thinking and our methods for learning and it is in the same discussions that we shed light on the transitions required in order to move from concrete to abstract activities. A knowledge rendered in linguistic terms is required. This is something that I aim to disclose in my empirical studies. In the discussions in and about school mathematics a movement back and forth between reality and mathematical concepts and expressions is to be seen.

Communication in a mathematics classroom can be described in terms of learning a mathematical register. It can also be looked upon as a situation where there are two parties involved – a sender and a receiver – which means individuals who speak, think, write, read and listen. It is therefore highly interesting to study what learners and teachers have to say in and about mathematical practices.

The over-riding aim of this thesis is to raise this issue: "How can discourse as a theoretical and didactical concept contribute towards further developing mathematical teaching?"

Two issues central to my work are:

What happens when every-day concepts and their scientific counterparts meet with each other in discussions within and about mathematics?

How can light be shed on what pupils learn and on didactical approaches of teachers by applying a perspective which analyses the discourse used?

Method

I have for many years been interested in communication and interaction within and about mathematical teaching. In my studies I have chosen to monitor how teachers, student teachers and pupils have generated knowledge in discussions on mathematical concepts, problem-solving and formal mathematics. I did so in order to be able to establish what happens in interaction between teachers and pupils, between pupils and between student teachers.

In these studies I have made use of video and audio recordings. Video recordings were applied in order to make sure that it became clearly visible what went on in the interaction within a classroom. It also proved to be fruitful in that the activities on both teachers' and pupils' part became evident. The audio recordings were used as a means analyzing the discussions as interactive situations. Group interviews are a well-chosen strategy for trying to capture discourse as regards what they include and exclude. This is a cumulative thesis consisting of five articles. The table below describes the environment used to acquire data in the respective studies.

Design of the Empirical Studies in the Thesis

Study I	**Study II**	**Study III**	**Study IV**	**Study V**
7 teachers	14 groups	26 groups	68 groups	10 groups
Teacher-pupil Interaction Classroom	Pupil interaction Classroom	Group talks Three pupils	Group talks Three pupils	Group talks Three students
Video	Video	Audio tapes	Audio tapes	Audio tapes
Mathematical Content				
The Area of a Triangle	The Area of a Triangle	Problem-solving	Rational Numbers	The Area of a Triangle Rational Numbers

Table 1. Structure of the empirical studies I-V

Study I
Seven teachers took part in my first study. They were assigned to plan and carry out an introductory lesson on the area of the triangle in year 5 in compulsory school. Choosing mathematical content was a regular concept to the teachers who took part. Focus for these video recordings lay on documenting the public and the teacher-led interaction in the classrooms involved. Each recording lasted between forty and sixty minutes. Twenty-five occasions were recorded and focus on interaction between teachers and pupils. The study further describes how teachers cross discourse boundaries in teaching on the area of the triangle and in what ways they carried out their lessons as regards interaction between teachers and pupils, as well as what types of questions they used in their talks with pupils.

Study II
The introductory lesson on the area of the triangle is carried on into this study but here focus is on pupils' interaction in a laboratory situation, where the teacher gives explicit directives to the groups of pupils. Varying directives from the teacher in the classroom leads to different trains of action and linguistic concepts on the pupils' part. In total the interaction of fourteen groups has been recorded and analyzed in the classes involved.

The groups were made up of five to six pupils. The laboratory situations are described as regards activity and linguistic interaction. The pupils are active in that they draw, cut and fold pieces of paper. Every-day language is used to great extent and retains its every-day character.

Study III
The point of departure for this study was to monitor 26 groups of pupils when they set about written mathematical task. The task is of an open variety and contains different pieces of information that the pupils are to decide on. One of the concepts which stay in focus for the pupils is the word fairness. Pupils seek, talk, make guesses, test and calculate an answer. There is, however, no evident way to go about solving the task. On the one hand the pupils end up in an every-day discourse and on the other hand in a mathematical discourse. They have difficulties making judgments as they reason with each other. Each group has been recorded on audio tape which has then been transcribed and analyzed. The pupils were put into groups on the basis of their mathematical skills as deemed by their teachers. The recordings took place in small room next to the classroom.

Study IV
For this study one of the assignments from the National Test of Mathematics for year five was used. The assignment deals with rational numbers. Five different partial studies were carried out. Sixty-eight groups of three pupils each and 120 individual pupils took part in the different studies. The first partial study was carried out with 30 pupils in year five who solved the assignment on their own and asked to provide a written explanation. The second study took place in three classes of 30 pupils each.

For the third partial study I used five schools from different parts of a large municipality. Thirty-one group interviews with pupils in year five were carried out, each group consisting of three pupils. When the pupils solve their assignment they rely on an every-day discourse. The next study involved 31 new groups of pupils. They were allowed to use a pocket calculator and they engaged in a solely mathematical discourse. The last part of this study was carried out with six groups of three pupils each and it deals with the issue of reasoning with the help of a numerical line. The results show that, depending on what tools are applied and what situation the pupils are in, the outcome turns out differently in different discourses.

Study V
The university students who took part in this study were studying mathematics and the teaching of mathematics at a Swedish university in order to become teachers of mathematics. The first year of their education has a

strong focus on group discourse cultures, so this type of work is well-known to the students. During the second year of their education they were assigned to discussing two lessons of mathematics. The first assignment deals with the issue of the area of triangles and the second was about rational numbers. In total I studied the discussions of ten groups. Each group consisted of three students, both male and female. Their discussions were recorded on audio tape for later transcription and analysis. After some time the informants were asked to write down a plan for teaching these aspects of mathematics, based on the suggestions put forward in the discussions. The aim of this was to establish what the group discussions contributed. In the analysis both form and content are dealt with.

I have used a discourse analysis to analyse the group discussions and the discussions in the classroom. A discourse analysis is based on details in what is written and said in a particular situation. In the restricted discourse language can be seen as "language-in-action" which is always an active process in constructing knowledge. My study focuses on the interaction between individuals and in what ways knowledge, language and mathematical skills develop.

Results

Discourse analysis can be used as a tool with help of which descriptions of how pupils learn and develop their understanding of mathematics can be made clear. Looking at my empirical material I have come to discern the discourse in school mathematics which can provide the bridge upon which teachers and pupils can meet and become mutually involved. The following issues will be answered on the basis of analyses made from my studies.

How is a discourse established and upheld, be it of the every-day kind or of a mathematical kind?
What does the crossing over from one discourse to another look like?
What is the character of a particular discourse?
What type of discourse can be seen from my material?
What boundaries between different types discourse are to be seen in mathematical discussions?

In school mathematics teachers and pupils talk using every-day concepts and mathematical concepts, signs and words. This intercourse demands that a mutual understanding takes place. The analysis of what is aid in the different groups shows that the discussions are situated somewhere on a scale between two extremes – on the one hand every-day concepts, on the

other hand purely mathematical concepts. Words such as "put on" and "put together" are based in every-day practice whereas words such as "add/addition" and complex numbers are situated in a purely mathematical discourse. Any individual is to be found somewhere in this continuum depending on how far this individual he/she has come in the process of developing an understanding of abstract reasoning. If we consider signs and expressions the same thing can be said for them.

In my empirical material where teachers talk to pupils in whole-class discussions and in group talks, teachers utilize different signs and change registers in their teaching. They go from geometrical into arithmetical/algebraic discourse and back. Analysis of these talks clearly reveals how pupils talk about and understand the concepts. Most pupils use every-day language and it demonstrates that teachers are situated in one discourse and pupils in another. The same thing can be seen when pupils work with concrete materials, performing acts but not acquiring the mathematical concepts which the teacher had planned. Pupils find themselves in a distanced discourse rather than an inclusive as the teacher had intended. In the example of the every-day assignment dealing with fairness we can see the pupils looking for clues and performing the task based on the case in question. When they solve the assignment they tend to engage in an every-day discourse on what the word as such can be taken to imply and when they set about a mathematical discourse it evolves into an attempt at counting. In our talks the construction of the assignment to solve a problem is focused to the pupils and they carry out the assignment using both every-day concepts and mathematical thinking.

In another assignment of a problem-solving character the pupils had to work with an every-day picture as a point of departure and their talks are thus carried out in an every-day discourse. Some pupils do not arrive at the mathematical terms and an understanding of them. Other groups are given a formal assignment to be solved using a pocket calculator and they remain there, locked up in the system of signs and decimals. Yet another group of pupils draw lines together in order to understand the decimals and can accommodate the mathematical signs and words, which makes them involved in the discussion. They start to speak, think and write "mathematish". If we see to it that connections are created between every-day references and mathematical concepts and expressions, it becomes easier for pupils to leave the idea of "doing". Meaning has been attributed to mathematical concepts and signs and these have been created for defined ends. But the meaning can only be understood by those who are able to take part in a mathematical discourse.

By analyzing how teachers and pupils talk about mathematical phenomena in different situations I can use the concept of discourse to establish

that connections are often not created between every-day concepts and their mathematical counterparts. If pupils cannot interact and thus form networks of concepts which assist them on their path to conscious mathematical thinking this becomes a major problem for them. Consequently teachers, student teachers and pupils must develop their mathematical language in concord with every-day language.

Discourse analysis can thus be used as a tool where descriptions of pupils' learning processes and understanding of mathematics can be made clear. I have displayed the results of my documented discussions and will place discourse in focus and further develop it as a means of establishing a direction.

Discussion

If the discourse is viewed as a distinct means of establishing the direction for teaching mathematics, it becomes the teacher's task to bring to a conscious level the different ways pupils use for passing boundaries between different discourses, so that pupils become aware of the nature of mathematical concepts. A discourse is made up of artefacts and products created by mankind for specific ends and the language used can be understood only if the discourse itself is understood. Teaching should invite pupils to become participants in a mathematical discourse.

The words *speak, think* and *write* can be viewed as parts of a discourse and when teachers and pupils apply them in the teaching and learning process, it can reinforce consciousness and participation in mathematical thinking. This could constitute the formative discourse. Furthermore, teachers and pupils must learn to realize what is changed when going from one discourse to another in mathematics. To be able to discern whether the discussion is carried out in an every-day or a mathematical discourse, to be able to recognize whether one is situated in a geometrical or an algebraic discourse and how the movement between registers manifests itself in mathematics is important knowledge for teachers, student teachers and pupils. When an individual speaks the way language is applied can develop qualitatively by the process of learning to value, scrutinize and put forth arguments in both every-day and mathematical discourses. In these, thinking is developed and by using linguistic and concrete artefacts in interplay thinking is further prompted. We can thus create a connection between every-day life and mathematics. Since mathematics started in a culture which used conventional signs and written language it has also developed texts and thus reading is a part of mathematics. The concepts of listening and reading should also be entered into the discourse, leading onto the

concept of interpreting. In this perspective pupils will actively form and interpret their knowledge.

Discourse can be defined as a "way of speech" but I would prefer to widen the definition in so much that I view discourse as a network where teachers, student teachers and pupils acquire knowledge by moving between and utilizing mathematical and every-day concepts, expressions and situations by talking, thinking, writing, listening and reading.

It has been my ambition to put the concept of discourse into perspective in the following manner. By adopting a discourse perspective we can direct attention to linguistic dimensions of teaching mathematics. It would also assist us in letting individual, silent calculation interact with a communicative aspect. By formulating and interpreting their mathematical knowledge pupils can acquire new knowledge. We will create a recognizing nearness through experience and distancing, fostered in a development and a familiarity with the system of mathematical signs. Through quality in the discussions which arise in a learning process we can develop the language concerned and thus improve understanding. In this context quality means that teachers and pupils use words, signs, concepts and situations in awareness of the specific discourse. We should also keep in mind that a mathematical discourse is something that develops over time.

Current research presents many images of the existent situation – "this is what it is like". My discourse perspective, however, focuses possible changes. I want to present a discourse theory which recognizes qualities in language and knowledge from both the every-day world and the mathematical sphere and in doing so clarifies both every-day and mathematical concepts. In this context quality means that we communicate around a concept, a sign, a reference and a situation by looking critically at it, putting forth arguments for and against, and eventually arriving at understanding what I take with me from this learning process. It is absolutely clear that the further our acquisition of new knowledge develops into an issue of learning to apply abstract and complex intellectual and practical tools, the more essential it becomes to engage in communicative practices. Thus we can learn how to apply and co-ordinate these tools, both linguistic and physical, to reach new mathematical knowledge. Models and symbolic representations can be tested critically as regards their connections to the every-day world and other concepts as well as their logical consequence and explanatory value. The table below (table 5) reinforces discourse as a theoretical and instructional concept.

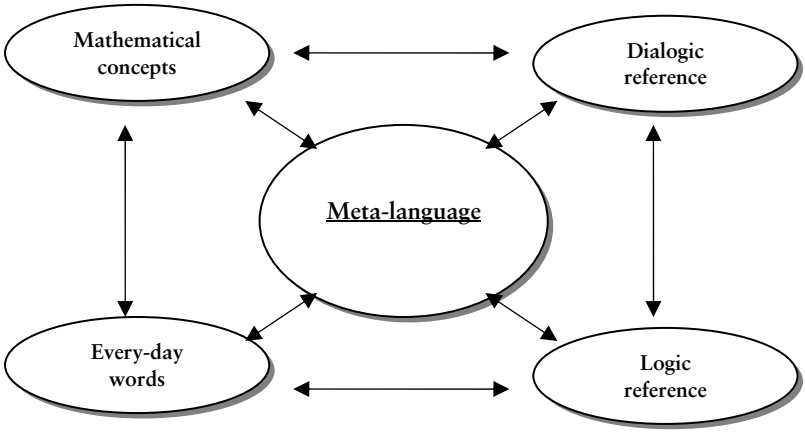


Diagram 5. Model describing the passing of boundaries between discourses.

By placing focus in learning processes on the concept of discourse our teachers, student teachers and pupils can grow to master a meta-language for school mathematics. This will then constitute a specific and precise language in and about mathematics. Language is constructed in our actions and how we express ourselves using the appropriate signs. By putting forth arguments and making interpretations in a dialogical environment we can acquire knowledge as regards knowing when boundaries between discourses are passed, as well as regarding the interplay between thought and experience in mathematics.

Referenser

Ahlberg, A. (1992). *Att möta matematiska problem. En belysning av barns lärande.* Diss. Göteborgs universitet: Göteborg Studies in Educational Sciences 87.

Allwood, J. (1976). *Linguistic communication as action and cooperation. A study in pragmatics.* Diss. Göteborgs universitet: Göteborg Studies in Linguistics Sciences.

Allwood, J., & Andersson, L-G. (1976). *Semantik*. Göteborg: Göteborgs Universitet.

Bakhtin, M. M. (1998). *Spörsmålet om talegenrane.* Bergen: Ariadne Forlag.

Bergqvist, K. (1990). *Doing schoolwork. Task premises and joint activity in the comprehensive classroom.* Diss. Linköpings universitet: Linköping Studies in Arts and Sciences 55.

Bergqvist, K., & Säljö, R. (2004). Learning to plan. A study of reflexivity and discipline in modern pedagogy. In J. van der Linden, & P. Renshaw (Eds.), *Dialogic learning.* (pp. 109-124). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bergsten, C. (1990). *Matematisk operativitet: En analys av relationen mellan form och innehåll i skolmatematiken.* Diss. Linköpings universitet: Linköping Studies in Education 29.

Bergström, G., & Boreus, K. (2005). *Textens mening och makt.* Lund: Studentlitteratur.

Biehler, R., Scholz, R.W., Strasser, R., & Winkelmann, B. (Eds.). (1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., & Kilpatrick, C. (Eds.). (1996). *International handbook of mathematical education.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bishop, A. J., Clements, M. A., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. (Eds.). (2003). Part one. *Second international handbook of mathematics education.* Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Bishop, A. J., Clements, M. A., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. (Eds.). (2003). Part two. *Second international handbook of mathematics education.* Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Blomhøj, M. (2006). Matematisk modellering. I J. Boesen, G. Emanuelsson, A. Wallby, & K. Wallby. (Red.), *Lära och undervisa matematik - internationella perspektiv*. (ss. 81-94). Göteborg: Nationellt Centrum för Matematik.

Bourdieu, P. (1990). *In other words: Essays towards a reflexive sociology.* Stanford: Stanford University Press.

Bruner, J. S. (1996). *The culture of education.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Börjesson, M. & Palmblad, E. (Red.). (2007). *Diskursanalys i praktiken.* Malmö: Liber AB.

Carleson, L. (1968). *Matematik för vår tid.* Stockholm: Prisma.

Chapman, A. (1993). Language and learning in school mathematics: A social semiotic perspective. *Issues in Educational Research,* 3(1), 35-46.

Charles, R., Lester, F., & O'Daffer, P. (1987). *How to evaluate progress in problem.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Chronaki, A., & Christiansen, I. M. (Eds.). (2005). *Challenging perspectives on mathematics classroom communication.* Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing.

Cole, M. (1996). *Cultural psychology: A once and future discipline.* Cambridge, MA: The Belknap Press.

Comenius, J. A. (1999). *Didactica Magna – Stora undervisningsläran.* (i övers. av Tomas Kroksmark). Lund: Studentlitteratur.

Dahlgren, L-O. (1990). *Undervisningen och det meningsfulla lärandet.* Skapande Vetande. Rapport 1990:16. Linköping: Linköpings Universitet.

Daniels, H. (2001). *Vygotsky and pedagogy.* London: Routledge Falmer.

Dewey, J. (1963). *Experience and education.* New York: Collier Macmillan.

Ds U (Departementsserie Utbildningsdepartementet). 1986:5. *Matematik i skolan. Översyn av undervisningen i matematik inom skolväsendet.* Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Duranti, A., & Goodwin, C. (1992). *Rethinking context: Language as an interactive phenomenon.* Cambridge: Cambridge University Press.

Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. In T. Nakahara, & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th international*

*conference for the psychology of mathematics Education, (*pp.55-69). Hiroshima, Japan: Nishiki Print Co.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61, 103-131.

Dysthe, O. (2003). Sociokulturella teoriperspektiv på kunskap och lärande. I O. Dysthe (Red.), *Dialog, lärande och samspel* (ss. 31-74). Lund: Studentlitteratur.

Emanuelsson, J. (2001). *En fråga om frågor*. Diss. Göteborgs Universitet: Göteborg Studies in Educational Sciences 168.

Englund, T., Pettersson, A., & Tambour, T. (2006). *Matematikdidaktiska texter. Beprövad erfarenhet och vetenskaplig grund*. Stockholm: PRIM-gruppen vid Lärarhögskolan i Stockholm.

Fairclough, N. (1992). *Discourse and social change*. Great Britain: Polity Press.

Fairclough, N. (1995). *Critical discourse analysis. A critical study of language*. London: Longman.

Firsov, V. (1995). Mathematics education as theoretical knowledge. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 3(4), 7 – 19.

Fiske, J. (1990). *Introduction to communication studies*. New York: Routledge.

Foucault, M. (1971/1993). *Diskursens ordning*. Installationsföreläsning vid College de France den 2 december 1970. (Sv. övers., 1993, Mats Rosengren). Stockholm: Brutus Östlings Bokförlag Symposium.

Foucault, M. (1972/2002). *Vetandets arkeologi*. (Sv. övers., 2002, C.G. Bjurström). Lund: Arkiv Förlag.

Foucault, M. (1985). *The Foucault reader*. (Ed.) P. Rabinow. Harmonsworth: Penguin Books.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gee, J. P. (1992). *The social mind: Language, ideology and social practice*. New York: Bergin & Garvey.

Gee, J. P. (2002). *Social linguistics and literacies: ideology in discourses*. (2nd ed.). London: Routledge Falmer.

Gee, J. P. (2005). *An introduction to discourse analysis theory and method*. New York and London: Routledge Falmer.

Greer, B. (1993). The modelling perspective on world problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 239-250.

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction,* 7(4), 293-307.

Gumperz, J. (1982). *Discourse strategies.* Cambridge: Cambridge University Press.

Gärdenfors, P. (2000). *Hur homo blev sapiens.* Nora: Nya Doxa.

Habermas, J. (1996). *Kommunikativt handlande: texter om språk, rationalitet och samhälle.* Göteborg: Daidalos.

Halliday, M.A.K. (1978). *Language as social semiotic the social interpretation of language and meaning.* London: Edward Arnold.

Halliday, M.A.K. (2004). *An introduction to functional grammar.* (2nd ed.). London: Arnold.

Harré, R., & Gillett, G. (1994). *The discursive mind.* London: SAGE Publications.

Harris, H. S. (1995). *Phenomenology and system.* Cambridge: Hackett Publishing Company.

Hoffmann, M. H. G., Lenhard, J., & Seeger, F. (Eds.). (2005). *Activity and sign. Grounding mathematics education.* USA: Springer.

Hopmann, S. (1997). Wolfgang Klafki och den tyska didaktiken. I M. Uljens (Red.), *Didaktik*. (ss.198-214). Lund: Studentlitteratur.

Israel, J. (1979). *The language of dialectics and the dialectics of language.* Copenhagen: Munksgaard.

Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks – A classroom and curricular perspective.* Diss. Luleå: Luleå Tekniska Universitet 23.

Johnsen Høines, M. (1987/2002). *Matematik som språk. Verksamhetsteoretiska perspektiv*. Stockholm: Utbildningsförlaget.

Johnsen Høines, M. (2004). Understanding constituted by understandings. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 9(2), 63-79.

Kieran, C., Forman, E., & Sfard, A. (Eds.). (2002). *Learning discourse. Discursive approaches to research in mathematics education.* The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 3 – 38). New York: Macmillan.

Kilpatrick, J. (1995). Staking claims. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 3(4), 21 - 42.

Kozulin, A. (1998). *Psychological tools. A sociocultural approach to education.* England: Harvard University Press.

Kroksmark, T. (Red.). (2003). *Den tidlösa pedagogiken.* Lund: Studentlitteratur.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life.* Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation.* Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Lerman, S. (2002). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. In C. Kieran, E. Forman, & A. Sfard (Eds.), *Learning discourse. Discursive approaches to research in mathematics education.* (pp. 87-113). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lennerstad, H., & Mouwitz, L. (2004). Mathematish – a tacit knowledge of Mathematics. In C. Bergsten, & B. Grevholm (Eds.), *Mathematics and Language. Proceedings of MADIF 4. The 4th Swedish Mathematics Education Research Seminar.* (pp.168-184). Malmö, January 21-22, 2004. Linköping: SMDF.

Liedman, S-E. (2001). *Ett oändligt äventyr. Om människans kunskaper.* Stockholm: Bonniers.

Linell, P. (1998). *Approaching dialogue. Talk, interaction and contexts in dialogical perspectives.* Philadelphia: John Benjamins Publishing Company.

Loewenberg Ball, D., Sleep, L., & Bass, H. (2006). *Exploring the use of mathematical language in teaching: what do teachers need to know?* National council of teachers of mathematics research pre session. www.personal.umich.edu/~dball/ 2006-09-20. Michigan: University of Michigan.

Lpo 94. Läroplaner för det obligatoriska skolväsendet. Utbildningsdepartementet.

Luckman, T. (1990). Social communication, dialogue and conversation. In I. Markova, & K. Foppa (Eds.), *The dynamics of dialogue.* (pp. 45-61). Hemel Hempstead: Harvester & Whitsheaf.

Löwing, M. (2004). *Matematikundervisningens konkreta gestaltning. En studie av kommunikationen lärare-elev och matematiklektionens didaktiska ramar.* Diss. Göteborgs universitet: Göteborg Studies in Educational Sciences 208.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Malmer, G. (1999). *Bra matematik för alla*. Lund: Studentlitteratur.

Marton, F. (Red.). (1986). *Fackdidaktik vol.1-3*. Lund: Studentlitteratur.

Marton, F., & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematiken og samfundet*. Rud: NKI-forlaget.

Mercer, N. (2000). *Words and minds. How we use language to think together*. London: Routledge.

Mouwitz, L. (2006). *Matematik och bildning – berättelse, gräns, tystnad*. Stockholm: Dialoger.

Moyer, P., & Milewicz, E. (2002). Learning to question: categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 293-315.

Möllehed, E. (2001). *Problemlösning i matematik: En studie av påverkansfaktorer i årskurserna 4-9*. Diss. Malmö Högskola: Institutionen för Pedagogik 157.

Nationalencyklopedin. http://www.nationalencyklopedin.se/jsp/search/ article.jsp?i_art_id=154318&i_word . 2006-04-12

Nelson, K. (1996). *Language in cognitive development. The emergence of the mediated mind*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Nesher, P. (1980). The stereotyped nature of school word problems. *For the Learning of Mathematics,* 1(1), 41- 48.

Nilsson, G. (2005). *Att äga pi. Praxisnära studier av lärarstudenters arbete med geometrilaborationer*. Diss. Göteborgs universitet: Göteborg Studies in Educational Sciences 228.

Niss, M. (2001). Den matematikdidaktiska forskningens karaktär och status. I B. Grevholm (Red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv*. (ss. 21-47). Lund: Studentlitteratur.

Noel, E. (Red.). (2001). *Matematikens gryning*. Lund: Studentlitteratur.

Nyrnes, A. (2002). *Det didaktiske rommet. Didaktisk topologi i moralske tanker av Ludvig Holberg*. (Thesis, Dr. Art). Bergen: Bergen University.

Ogden, C., & Richards, I. (1923). *The meaning of meaning*. London: Routledge & Kegan Paul.

Ong, W. (1982). *Muntlig och skriftlig kultur*. Göteborg: Anthropos.

Peirce, C. S. (1931-58). *Collected writings*. (8 vols.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Peirce, C. S. (1994). *Semiotik og pragmatisme*. Kopenhavn: Gyldendal.

Radford, L. (2001). On the relevance of semiotics in mathematics education. Paper presented to the discussion group on semiotics and mathematics education at the 25th PME international conference, The Netherlands, University of Utricht, July 12-17, 2001. This paper is part of a research program ended by the Social Sciences and Humanities Research council of Canada. www. Math.uncc.edu/^^sae/dg3/ RADFORDSUMMARY-PME25-DG3.pdf. 20080129.

Ramírez, J. L. (2000). Retoriken och retorikerna. *Rhetorica Scandinavica,* 16, 72-77.

Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: Contextual effects on understanding and solving wordproblems. *Instructional Science,* 17, 309-338.

Reusser, K. (1995). *The suspension of reality and sense-making in the culture of school mathematics: The case of wordproblems*. Paper presented at the Sixth European Conference for Research on Learning and Instruction, Nijmegen, The Netherlands.

Riesbeck, E. (2000). *Interaktion och problemlösning. Att kommunicera om och med matematik*. FIF-avhandling nr 42-00. Institutionen för Pedagogik och Psykologi. Linköping: Linköpings Universitet.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll*. Diss. Göteborgs Universitet: Göteborg Studies in Educational Sciences 129.

Ryve, A. (2004). Can collaborative concept mapping create mathematically productive discourses? *Educational Studies in Mathematics,* 26, 157-177.

Samuelsson, J. (2003). *Nytt, på nytt sätt? En studie över datorn som förändringsagent av matematikundervisningens villkor, metoder och resultat i skolår 7-9*. Diss. Uppsala Universitet: Uppsala Studies in Educational Sciences 246.

Sandahl, A. (1997). *Skolmatematiken – kultur eller myt? Mot en bestämning av matematikens didaktiska identitet*. Diss. Linköpings Universitet: Linköping Studies in Education 51.

Saussure, F. de (1916/1983). *Course in general linguistics* (trans. Roy Harris). London: Dockworth.

Schoenfeld, A. H. (1989). Problem solving in context. In R. I. Charles, & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem-solving* (pp. 82-92). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Schüllerqvist, B. (2001). Ämnesdidaktik som lärarutbildningens mittfält. I B. Schüllerqvist, & R. Nilsson (Red.), *Lärarutbildningens ämnesdidaktik*. (ss. 9-20). Gävle: Högskolan i Gävle-Sandviken.

Schütz, A. (1967). *The phenomenology of the social world*. (trans. G. Walsh & F. Lehnert). Evanston: Northwestern University Press.

Searle, J. P. (1969). *Speech acts*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sfard, A. (1997). From acquisitionist to participationist framework: Putting discourse at the heart of research on learning mathematics. In T. Lingefjärd, & G. Dahland (Eds.), *Research in mathematics education* (pp. 109-136). A report from a follow-up conference after PME 1997. Report 1998:02. Gothenburg: Gothenburg University.

Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as communication. Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students´ mathematical interactions. *Mind, Culture and Activity,* 8(1), 42-76.

Sfard, A. (2002). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. In C. Kieran, E. Forman, & A. Sfard (Eds.), *Learning Discourse*. (pp. 13-57). London: Kluwer Academic Publishers.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 15(2), 4-14.

Skolverket (1996). *TIMSS. Svenska 13-åringars kunskaper i matematik och naturkunskap i ett internationellt perspektiv*. Rapport 114. Stockholm: Liber distribution.

Skolverket (2000). *Kommentarer till kursplan och betygskriterier 2000*. Stockholm: Skolverket och Fritzes.

Skolverket (2003). *Lusten att lära-med fokus på matematik*. Rapport 221. Stockholm: Skolverket och Fritzes.

Skolverket (2004a). *Nationella utvärderingen av grundskolan2003. Sammanfattande huvudrapport*. Rapport 250. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2004b). *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003. Huvudrapport svenska/svenska som andraspråk, engelska, matematik och undersökningen i årskurs 5*. Rapport 251. Stockholm: Skolverket

Skolöverstyrelsen (1966). *Matematikterminologi i skolan*. Skolöverstyrelsens skriftserie nr 87. Stockholm: SÖ-förlaget/Skolöverstyrelsen.

SOU 2004:97. *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens*. Betänkande av matematikdelegationen. Stockholm: Fritzes.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics* 61, 133-162.

Stevenson, H. W., & Stiegler, J. W. (1992). *The learning gap: Why our schools are failing and what we can learn from Japanese and Chinese education.* New York: Summit Books.

Studentlitteraturs ordbokspaket, (2006). CD-rom. Lund: Studentlitteratur.

Svenska språknämnden, (2007). www.spraknamnden.se/sprakfakta/ sprakfakta.htm. 20071011.

Säljö, R. (1999). Kommunikation som arena för handling – lärande i ett diskursivt perspektiv. I C. A. Säfström, & L. Östman. (Red.), *Textanalys.* (ss.76-94). Lund: Studentlitteratur.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken.* Stockholm: Prisma.

Säljö, R. (2005). *Lärande & kulturella verktyg. Om lärprocesser och det kollektiva minnet.* Stockholm: Norstedts Förlag.

Sällström, P. (1991). *Tecken att tänka med.* Stockholm: Carlssons Bokförlag.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Diss. Umeå Universitet: Department of Mathematics and Mathematical Statistics.

Tomasello, M. (1999). *The cultural origins of human cognition.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Thompsson, J. (1991). *Historiens matematik*. Lund: Studentlitteratur.

Uljens, M. (Red.). (1997). *Didaktik – teori, reflektion och praktik*. Lund: Studentlitteratur.

Unenge, J., Sandahl, A., & Wyndhamn, J. (1994). *Lära matematik*. Lund: Studentlitteratur.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction,* 4, 273-294.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Voloshinov, V. N. (1930/1973). *Marxism and the philosophy of language.* (Trans. L. Matejka, & I. R. Titunik). New York: Seminar Press.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society.* (Eds.). M. Cole, V.John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman. Cambridge, Massachusetts, London: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1934/1986). *Thought and language*. Cambridge, Massachusetts London: The Mit Press.

Vygotsky, L. S. (2004). *The essential Vygotsky*. (Eds.). R. W. Rieber, D. K. Robinson in collaboration with J. Bruner. New York: Kluwer Academic Publishers.

Wallin, A. (2003). *Explaining everyday problemsolving*. Diss. Lunds Universitet: Studies in Cognitive Studies 99.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wertsch, J. V. (1985). *Vygotsky and the social formation of mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the mind. A sociocultural approach to mediated action*. London: Harvester Wheatsheaf.

Wertsch, J. V. (1998). *Mind as action*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wickman, P-O., & Östman, L. (2002). Learning as discourse change: A sociocultural mechanism. *Science Education,* 86, 1-23.

Winslöw, C. (2004). Semiotics as an analytic tool for the didactics of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 9(2), 81-99.

Winther-Jörgensen, M., & Phillips, L. (2000). *Diskursanalys som teori och metod*. (Sv. övers. Sven-Erik Torhell). Lund: Studentlitteratur.

Wistedt, I. (1994). Reflection , communication and learning mathematics: A case study. *Learning and Instruction,* 4(2), 123-138.

Wittgenstein, L. (1978). *Filosofiska undersökningar* (Sv. övers. A. Wedberg). Stockholm: Bonnier.

Wyndhamn, J. (1987). *Matematikdidaktiska reflexioner*. Skapande vetande. Rapport 1987:2. Linköping: Linköpings Universitet.

Wyndhamn, J. (1993). *Problem-solving revisited – On school mathematics as a situated practice*. Diss. Linköpings Universitet: Studies in Arts and Sciences 98.

Wyndhamn, J. (1995). *Lärarens triangel och elevens trekant. En deskriptiv studie över matematiska samtal i klassrummet*. Linköping: Arbetsrapport Tema Kommunikation, 1995:1.

Wyndhamn, J., & Säljö, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning – A study of children´s mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction,* 7(4), 361-382.

Wyndhamn, J., Riesbeck, E., & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik*. Linköping: Linköpings Universitet.

Wyndhamn, J. (2002). Att lära med och av ett datorprogram. I R. Säljö, & J. Linderoth (Reds.), *Utm@ningar och e-frestelser. IT och skolans lärkultur*. (ss. 97-118). Stockholm: Prisma.

Åberg-Bengtsson, L. (1998). *Entering a graphicate society: Young children learning graphs and charts*. Diss. Göteborgs Universitet: Göteborg Studies in Educational Sciences 127.

Österholm, M. (2006). *Kognitiva och metakognitiva perspektiv på läsförståelse inom matematik*. Diss. Linköpings Universitet: Linköping Studies in Science and Technology 1057.

Östman, L. (1995). *Socialisation och mening. No-utbildning som politiskt och miljömoraliskt problem*. Diss. Uppsala universitet: Uppsala Studies in Education 61.

Artikel I

MATEMATISKA SAMTAL I KLASSRUMMET

Introduktion av triangelns area i ett komparativt perspektiv

Klassrumsinteraktion

Eva Riesbeck *Roger Säljö* *Jan Wyndhamn*

Den forskning som här avrapporteras har finansierats av Skolverket genom anslag till projektet Matematiska samtal i klassrummet – Tvärkulturella studier. Artikeln bygger på en text i Riesbeck (2000) men har här utvecklats med en teoretisk referensram (2008).

Inledning

Bakgrunden till det projekt som denna deskriptiva studie ingår i är en stor komparativ undersökning i USA och Japan av skolan i allmänhet och matematikundervisningen i synnerhet. Resultaten av denna jämförelse har presenterats utförligt i olika sammanhang och mest ingående av Stevenson och Stigler i den flitigt citerade volymen *The Learning Gap* (Stevenson & Stigler, 1992). Undersökningen innehåller jämförelser mellan amerikanska och japanska skolor i en rad avseenden och resultaten är intressanta och tankeväckande. Stora skillnader fanns i exempelvis elevernas dagliga liv, skoldagens längd, läsårets längd, sätt att läsa läxor och så vidare. Vidare fann man skillnader i uppfattningar rörande elevens sociala liv, tidpunkten för introduktion av olika typer av undervisningsinnehåll, samspelet och ansvarsfördelningen mellan föräldrar och lärare samt metoder att överföra normer och värderingar beträffande skolan. Skillnader i synen på ansträngning och förmåga hos eleven framkom, men alla ansåg att skolframgång kräver arbete. Skolundervisningens organisation och lärarprofessionen undersöktes också. (för ytterligare beskrivning, se Wyndhamn, 1994).

I denna stora tvärkulturella undersökning valde man vidare att förfina bilden av skolan genom att göra ingående studier i ett begränsat antal klassrum med hjälp av videoinspelningar. En jämförelse av detta slag kräver, för att resultaten skall bli intressanta, att ämnesinnehållet är lika. Därför studerades hur triangelns area introducerades i år 5 i tjugotalet klasser i vardera landet (Stigler, Fernanedez, Yoshida, & Hatano, 1992). I studien fokuserades intresset på de tillfällen under en lektion, då eleverna fick möjlighet att utveckla sitt eget tänkande omkring hur en triangels area beräknas.

Datainsamlingen organiserades på ett gemensamt sätt. Mellanstadielärare i de båda länderna kontaktades. De lärare som var villiga att delta i datainsamlingen fick själva meddela när de skulle ha sin introduktionslektion till området triangelns area. Efter inspelningen transkriberades den ungefär 40 minuter långa lektionen ordagrant. I första hand studerades ”public discourse”, det vill säga det samtal som utspelade sig mellan lärare och elever i klassrummet när det var meningen att alla skall höra på. Man fann stora skillnader mellan de båda länderna (vilka beskrivs i detalj av Wyndhamn, 1994). Till de principiellt mer intressanta skillnaderna hör att de kognitiva och kommunikativa utmaningar som de japanska och amerikanska barnen ställdes inför innehöll vissa olikheter. Dessa olikheter illustreras med hjälp av typlektioner från respektive land.

Utan att gå alltför mycket i detalj, kan vi säga att i det amerikanska klassrummet följs en disciplinärt motiverad organisation av undervisningen. Undervisningen om triangelns area följer således på motsvarande undervisning om parallellogrammers. I Japan är upplägget tämligen annorlunda. Till det

mest intressanta hör att eleverna ställs inför en annan typ av intellektuella utmaningar än de som karaktäriserar det amerikanska klassrummet. Eleverna ges ett betydligt större utrymme för egna initiativ och eget arbete, och detta trots att den japanska klassen i genomsnitt har mer än dubbelt så många elever som den amerikanska. Istället för att få sig förelagt den traditionella ämnesmässiga uppbyggnaden under inledningslektionen, ges eleverna uppgifter som innebär att de exempelvis uppmanas att finna en metod för att bestämma triangelns area. Elevernas arbete (vilket sker enskilt och i helklass) går således ut på att hitta en metod och att lära sig argumentera för denna inför kamraterna. De får sig inte förelagda en metod, som de sedan skall öva på, vilket var den dominerande ansatsen i USA.

Komparativa studier av klassrumskommunikation är intressanta och upplysande, eftersom de visar på likheter och olikheter som är svåra att observera när man håller sig till en, åtminstone i relativa termer, homogen sociokulturell miljö. Den övergripande ambitionen för det projekt som föreliggande studie härrör från är att, med utgångspunkt i den japansk-amerikanska jämförelsen, ge en bild av hur svensk matematikundervisning ter sig vid en jämförelse. Är vår skolkultur och vårt sätt att kommunicera besläktade med den ena eller andra av dessa här antydda poler?

Syfte

Klassrumskommunikation ger upphov till en komplex och mångfasetterad typ av data att arbeta med. Många olika typer av kommunikation pågår samtidigt, och det elever säger och gör i ett givet ögonblick kan vara mer eller mindre relaterat till temat för undervisningen. Detta har visats av exempelvis Sahlström & Lindblad, (1998), som ger intressanta inblickar i elevkommunikation i svensk, naturvetenskaplig undervisning. Utgångspunkten för denna text är att ge ett bidrag till projektets övergripande syfte att jämföra svensk pedagogisk tradition med utfallet av studien i Japan och USA. Det som kommer att fokuseras är några iakttagelser kring den publika och lärarstyrda interaktionen i de klassrum vi dokumenterat. I en andra rapport (Riesbeck, Säljö & Wyndhamn, 2000) har det elevstyrda arbetet analyserats mer i detalj. Motivet för att göra just denna uppdelning är att pendlingen mellan helklassundervisning och arbete i grupp visade sig vara mycket karaktäristisk för de svenska lärarnas ansats till detta område (och det är också en modell som amerikanska lärare använder, om än i mindre utsträckning). I flera andra rapporter (se exempelvis Wyndhamn, 1995a, b) har andra aspekter av samma material analyserats i olika avseenden.

Temat för undervisningen är således triangelns area. Syftet med studien är att belysa hur lärare och elever kommunicerar inom ramen för skolans matematikundervisning och tydliggöra hur matematikundervisningen förlöper, vilken ämnesmässig ansats de deltagande lärarna anslår och vilken typ av interaktion som uppkommer. Den analysmodell med kategorier på frågor och utmaningar som användes i den svenska studien har även använts i den japansk/amerikanska studien.

Teoretisk bakgrund

För att förstå och inse språkets roll i kommunikationen i ett klassrum under matematiklektioner är det viktigt att ta del av aktiviteter som frågor och instruktioner och det matematiska innehållets utformning (Chapman, 1993). Här ges en bakgrund utifrån forskning om den didaktiska diskursen i ett matematikklassrum.

En didaktisk diskurs

Lärarens sätt att föra samtal i ett klassrum kan mycket väl både innesluta och utesluta elevers möjlighet att vara delaktiga. Det kan leda till att fördjupa resonemang och föra utvecklande samtal eller förvirring. Hur ser kommunikationen ut som leder till den ena eller den andra diskursen? Den tidigare klassrumsforskningen beskriver tydligt att det är läraren som bestämmer, talar mest, förbereder och att det är eleverna som lyssnar, gör det läraren ber dem om och som låter sig styras (Jackson, 1968; Mercer, 1981; Mehan, 1979; McNeil, 1986; Edwards & Mercer, 1989). Dessa studier bekräftar att klassrumsundervisningen ter sig ganska lika världen över. Lundgren (1979) beskriver en interaktionsmodell där han delar in kommunikationen i fråga - svarsmönster som först består av strukturerande, frågande, sedan svarande och slutligen reagerande. Ungefär 85 procent av all verbal interaktion i klassrummet följer ovanstående indelning, så att läraren frågar 25 procent, elever svarar 25 procent och läraren reagerar 35 procent. Översätter vi detta till antal ord använder läraren sig av 7-8 ord per mening. Eleven svarar med 3-4 ord och läraren reagerar med 4-5 ord per mening. Detta är intressant, då även Zevenbergen (2000) visar att det är triaden, alltså fråga-svar-reaktion, som är den dominerande kommunikationsformen vid matematikundervisning i klassrummet.

Liknande undersökningar genomfördes i det japansk-amerikanska projektet av Stigler et al. (1992). Här studerade man det genomsnittliga ordflödet per minut hos både lärare och elever i två länder och analyserade

vilken sorts frågor som användes. Resultatet av undersökningen blev bestämningsfrågor, beräkningsfrågor, förklaringsfrågor och kontroll- eller uppföljningsfrågor. Beroende på vilka frågor lärarna ställde till sina elever varierade elevers ordfrekvens i svaren.

Emanuelsson (2001) beskriver att det är lärares bedömning av rätt och fel svar som dominerar i matematikundervisningen. Detta förstärker bilden av den matematiska kommunikationen mellan lärare och elever till att domineras av beräknings- och benämningsfrågor. Ahlberg (1992) visar på en något annorlunda bild där hennes lärare, när de arbetar med problemlösning, bemöter elevernas uttalanden genom att upprepa, omformulera eller förklara och utvärdera. Klassrumsinteraktion har således med några få undantag samma mönster världen över.

De studier som har beskrivit klassrumsinteraktion, visar på att lärare och elever behöver utveckla ett matematiskt språk, så att interaktion kan uppstå mellan lärare och elever, elev och elev som leder till en förståelse av matematiken. Elever kan utveckla sitt sätt att samtala med ett specifikt språk som matematik.

Löwing (2004) beskriver hur läraren bör komma bort ifrån begreppet lotsning och Nilsson (2005) visar hur lärare i interaktion med elever behöver utveckla argumenterande samtal i matematikundervisningen. Hans studie av elever visar att kommunikation i klassrummet stärks genom utvecklande frågor och genom att elever och lärare blir delaktiga i ett specifikt språk. Det kommunikativa mönstret kan utvecklas genom ett systematiskt sätt att tänka, tala, skriva och argumentera om en företeelse i ett klassrum. Här spelar även innehållet i matematik stor roll. En annan forskningsstudie visar hur lärarstudenter i samtal med elever utvecklar frågor som kontrollerar elevers kunskap, instruerar elever och frågor som följer upp elevers svar. Denna typ av frågor utgör ett bra redskap för lärarstudenter att få syn på och reflektera över effektiva frågetekniker med elever i matematik (Moyer & Milewicz, 2002).

Skolmatematisk diskurs

Forskningen om hur lärare undervisar om ett matematiskt begrepp och hur de förhåller sig till detta visar många gånger på ett förhållningssätt som pekar mot olika pedagogiska utvecklingslinjer (Wyndhamn, Riesbeck, & Schoultz, 2000). Men om vi ser på forskning ur ett diskursperspektiv, där vi på ett mikroplan kan följa hur lärare går mellan olika register, det vill säga mellan vardagligt och vetenskapligt ordbruk beroende på talsituation, för att få elever att förstå det vetenskapliga begreppet, då ser vi annat. Duval (2006) visar på olika sätt att presentera ett geometriskt objekt. Han

menar att det förekommer två typer av semiotiska representationer. Ett exempel kan vara då formeln för arean av en triangel ska bevisas med hjälp av en visuell representation av övergången från en rektangel till en triangel. Genom detta exempel visar sig enbart en visuell bild för eleverna. Vi ser hur visuell förståelse ger en intuitiv förklaring men Duval menar att det inte räcker ur en matematisk synvinkel. Han kallar denna semiotiska representation för treatment. Duval menar att det inte räcker utan man behöver använda andra former av representation. Byter man register, det vill säga när man förändrar ett uttryckssätt utan att förändra objektet kan vi tala om en övergång. Exempel på detta kan vara när man går från en algebraisk lösning av en ekvation till dess grafiska representation och även från det naturliga språket till bokstavstecken.

När vi gör dessa övergångar beskriver vi den kognitiva komplexiteten som krävs för att lära sig matematik och den speciella process som uppstår i elevens tänkande i den här typen av matematisk aktivitet (Duval, 2006). Att lära sig när och hur man passerar diskursiva gränser är således mycket viktiga delar i förståelsen av de matematiska begreppen.

Wyndhamn (1995a) visar på att förståelse för formeln för triangelns area kan uppnås då lärare och elever pendlar mellan tre olika register. Han benämner dessa vertikal begreppslig progression, horisontal progression och transformationer mellan ett perceptuellt fält och ett abstrakt fält. I en horisontal progression beskriver han en geometridiskurs på den ena sidan och en algebraisk/aritmetisk på den andra sidan och hur man här integrerar kunskapsstrukturer. Den vertikala progressionen kan förklaras genom att de geometriska begreppen ingår i olika kedjor som utvecklas. De tre beskrivna registren visar på hur resonemanget om triangelns area hela tiden pendlar mellan ett sammanhang där observationen är viktig och ett där den logiska analysen och slutledningen är avgörande. Att förstå kan innebära att vara förtrogen med olika termer och symboler i en diskurs och att se sambanden mellan dem. Elever måste uppmärksamma det som betecknas det vill säga det som ord, tecken, symboler, föremål representerar och kunna argumentera och att dra slutsatser. Genom abstraktion och generalisering kan eleven distansera sig och till slut förstå de vetenskapliga begreppen (Vygotsky, 1986).

Lektionerna om triangelns area innehöll, som redan sagts, många olika inslag som var och en kan göras till föremål för analys. Med tanke på den övergripande målsättningen för vårt projekt att skapa data och analyser som skulle gå att jämföra med det japansk-amerikanska materialet, kommer analyserna i denna studie att beröra följande:

> En granskning av lektionernas form och förekomsten av inslag som grupparbete, gruppdiskussioner och enskilt arbete.

Det matematiska innehållet i kommunikationen.

Samspelet mellan lärare och elever i klassrummet under klassrumssamtalet (”public discourse”).

Metod

Data har insamlats genom videoupptagningar av en introduktionslektion till området triangelns area. Datainsamlingen gjordes på ett sätt som så långt möjligt påminner om originalstudien. Åtta lärare kontaktades och ombads hålla en introducerande lektion på momentet triangelns area när det var lämpligt. När lektionen genomfördes, videobandades den. Endast en av de lärare som ursprungligen kontaktades, avböjde medverkan. Sju olika klasser (år 5) med elever i åldern 11-12 år deltog således i undersökningen. Klasserna kom från skolor på olika orter i södra Sverige. De sju klasslärarna har alla den utbildning som krävs för undervisning i aktuella årskurser och dessutom mångårig lärarerfarenhet. En av de sju lärarna var man och övriga kvinnor. Lektionstiden varierade mellan 40 och 60 minuter. (En detaljerad beskrivning av det insamlade materialet, finns i Riesbeck, 1995).

Videoupptagningarna har analyserats och det ”publika samtalet”, där läraren vänder sig till hela klassen, har skrivits ut på en nivå där turtagning och ordflöde tydligt framgår. I analysen har både kvantitativa och kvalitativa analyser genomförts enligt samma kategorier som i Stigler, Fernandez, Yoshida & Hatano (1992). I varje klass har dessutom arbetet i en utvald grupp på 3-4 elever dokumenterats genom videoinspelning. Dessa gruppsamtal har också transkriberats, analyserats och redovisats på annat sätt men kommer inte att användas i detta sammanhang (se Riesbeck, Säljö & Wyndhamn, 2000).

Efter det att allt material hade samlats in, besöktes lärarna igen och de fick ta del av den inspelade lektionen. De fick ge sina kommentarer till hur lektionen förflöt och de blev också intervjuade. Även detta material har spelats in på band och kommer att analyseras i annat sammanhang.

Resultat

När man kommer till en svensk mellanstadieskola, ser den i allmänhet mycket fräsch ut. Ofta är mellanstadieskolor relativt nybyggda envåningshus av internationellt sett mycket hög standard. Klassrummen är välvårdade med övervägande nya bänkar eller bord. Eleverna är placerade i grupper

och läraren har ofta ställt katedern i ett hörn. Klasserna har mellan 20 och 25 elever. Klassrum med elevernas arbeten uppsatta på väggarna ger ett ombonat intryck och att sitta i grupp visar på visst samarbetsklimat. Man hälsas ofta med ett ”Välkommen hit!”, ”Vem är du?”, osv. Eleverna visar att de tar ansvar för sin skola och sitt klassrum. Redan detta säger oss att det finns vissa särdrag i svensk undervisningstradition och sociala umgängesformer som utgör kulturella markörer i svensk skola.

Alla lärare som ingår i studien menar sig använda någon typ av ”undersökande arbetssätt” av det slag som förespråkas i läroplanen (Lpo 94). Enligt lärarna tycks detta innebära att eleverna under lärarens ledning arbetar med någon form av konkret material. I det område som denna studie rör, tycks det undersökande arbetssättet oftast bestå i att eleverna arbetar med olika former av klipp- och klistraövningar med geometriska figurer. Också denna samstämmighet i sättet att tala om undervisning som baserad på ”ett undersökande arbetssätt” förefaller att vara en gemensam nämnare för de sju klassrummen och ingå i en pedagogisk kultur.

Inför introduktionslektionen om triangelns area hade flera av lärarna studerat olika böcker och klargjort för sig själva vilka övningar och förslag man kunde ha användning av. De hade också planerat vilken sorts material eleverna skulle arbeta med. Det som fanns nedskrivet till lektionen var lektionsgången i grova drag. Lärarna gjorde inga anteckningar efter lektionen.

Lektionens form, växling mellan klassamtal och gruppsamtal

Ett utmärkande mönster i dessa svenska klassrum är att lärare och elever för en dialog under stora delar av lektionerna. Det som är speciellt för denna kommunikativa miljö i förhållande till många andra är att läraren talar till ett kollektiv som behandlas mer eller mindre som en individ. Lärarna leder eleverna genom lektionen. Eleverna, som en kollektiv samtalspartner, följer med i lärarens resonemang och initiativ, och svaren på frågorna kommer från olika delar av kollektivet men riktas hela tiden till läraren (jämför Sahlström & Lindblad, 1998).

Ett mycket tydligt drag i den svenska lärarens agerande är också det konsekventa pendlandet mellan helklassundervisning och grupporganiserad verksamhet (Wyndhamn, 1995a). Lärarna lägger ut tillämpningsuppgifter på grupperna att lösa och detta signalerar inriktningen mot vad man kallar ett konkret undersökande arbetssätt, en undervisningsideologi som det finns stor uppslutning kring.

Ett exempel på detta är följande excerpt när eleverna sitter i grupper och har var sitt papper som de själva har färglagt. Eleverna skall försöka

att med hjälp av papperet bevisa att triangelns area är hälften av rektangelns. Klasserna i studien har tilldelats bokstäverna A – F och här benämns lärare och elever i enlighet med detta.

Elev C 1: Så där kan man göra. [eleven har en färgglad rektangel som han ska rita en triangel i och efter det försöker han att vika för att bevisa att den är hälften av rektangeln] Det går att bevisa. Så där kan man göra sen hälften av det blir en fyrkant det viker man in så triangeln, sen viker man så.

Lärare C: Vad vill du visa nu då?

Elev C 2: Det går att bevisa att det här [att triangelns area är hälften av rektangelns] blir lika stort. Det blir ju lika stort. Det blir hälften. Om man har en triangel uppdelad i tre delar så viker du upp dem. Det är lika stort som en kvadrat sen viker man in dem det är lika stort som triangel och det är lika stort som en kvadrat.

Elev C 3: Det här blir hela tiden en rektangel.

Eleverna försöker sig här på ett resonemang om att bevisa att en triangels area är hälften av en rektangels. Men det förefaller ofta oklart om de förstår den sökta relationen eller vad det innebär att bevisa något i detta sammanhang. Eleverna har ett papper framför sig där de kan se en triangel i rektangeln och läraren har bett dem att bevisa något. De svårigheter eleverna får är att lärarens budskap inte är tydligt och att eleverna inte har ett språk för att förklara vad de gör och tänker.

Lärarna har också anammat tanken att man lär sig när man förklarar för andra. Eleverna förväntas därför lära av varandra i gruppen, utan att läraren hela tiden behöver närvara. Detta är ett av de skäl man anger till det flitiga utnyttjandet av grupparbetsformen under lektionerna. Vid en närmre analys av elevernas samtal och användandet av konkret material i gruppen, upptäcker man att eleverna sällan riktigt vet varför de ska utföra uppgiften eller vad den går ut på. Samtalen eleverna emellan förs också i ett vardagsspråk som är svårt att förankra i eller förena med det matematiska språket som vi såg i citatet ovan och som också framgår av följande.

Elev C 1: Jag sa basen gånger höjden.
Elev C 2: Okej, basen gånger höjden det chansar vi på.
Lärare C: Kontrollera gärna med den triangel som ni har.
Elev C 3: Regel för att räkna ut arean av en triangel.
Elev C 4: Basen gånger höjden är lika med.
Lärare C: Har du basen där? [Läraren pekar på höjden]

Elev C 1: Men någon av dem måste det vara.
Elev C 2: Det här är basen. Höjden är där. [Eleven pekar på den nedre sidan].
Elev C 3 : Det var ingen annan som vågade skriva. [Basen gånger höjden]
Lärare C: Stämmer era teorier?
Elev C 4: Ska man ta hela basen där eller ska man bara ta halva?
Elev C 3: Jag vet inte, jag vet inte.
Elev C 4: Jag avrundar min.
Elev C 1: Om vi räknar rutor i stället. Halva rutor.
Elev C 2: Jag avrundar.

Det framgår av citatet från denna gruppinteraktion att eleverna mycket väl kan operera med relevanta termer men det är mer tveksamt om, och i vilken mening, de har den begreppsliga innebörden under kontroll. Utsagan av läraren om ”Har du basen där?” följs av elevens uttalande ”Men nån av dem måste det vara”. Ur detta framgår att eleven inte har förankrat begreppen bas och höjd. Det fortsatta samtalet blir inte förenat med en tydlig insikt i vad som skall betecknas som bas. Ett ämnesmässigt förankrat utbyte av tankar, idéer och åsikter i grupparbetets form äger tydligen inte rum bara för att läraren föreslår eller uppmanar till diskussion. Den önskade samtalsformen förverkligas förmodligen först efter en tids inskolning.

En intressant fråga att bearbeta vidare (se Riesbeck et al., 2000) är vilka premisser eleverna ges för gruppaktiviteter och hur de förmår uppfatta poängen med sådan verksamhet. Preliminära iakttagelser i materialet antyder att eleverna ofta har svårigheter att identifiera det specifika målet med sådan verksamhet och därmed är det osäkert om potentialen i gruppsamtal och laborationer utnyttjas fullt ut. En verksamhet blir ett gemensamt projekt först när avsiktliga handlingar har ett gemensamt mål. Inskjuts samtal och laboration som medel eller instrument att nå vissa inlärningsmål, tycks det föreligga viss risk att vägen dit blir oklar.

Efter detta exempel på gruppinteraktion övergår vi till att mer specifikt behandla aspekter av den kommunikation som sker i hel klass, vilket är fokus i denna studie.

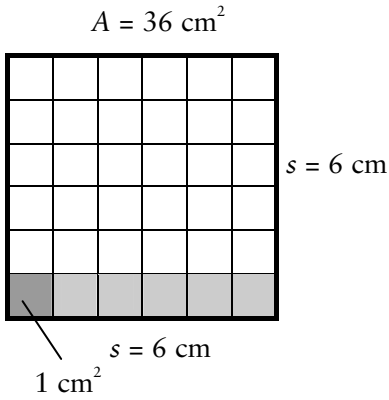
Tematisering av det matematiska innehållet i helklassundervisning

Området triangelns area är ett vanligt moment i geometriundervisningen i skolan. Lärare har möjlighet att välja olika vägar in i hur man skall närma sig detta problem och till formeln för triangelns area. Man kan använda

olika slags övningar med konkreta material. En sådan variation i ansatser kan urskiljas bland de sju lärarna. Vid en analys av materialet fann vi att undervisningen följde vissa mönster som representerar två matematiska diskurser: en geometrisk och en algebraisk/aritmetisk, och hur de sedan arbetar vidare.

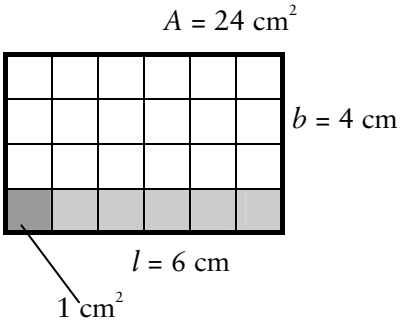
Inom varje område kan också en vertikal begreppslig progression spåras. De geometriska begreppen ingår i kedjan *kvadrat* --> *rektangel* --> *parallellogram* --> *triangel* eller i kedjan *kvadrat* --> *rektangel* --> *triangel*. Utvidgningen medför eller framtvingar också systematiska namnbyten, till exempel *sida* --> *längd* --> *bas*, för att förhållandena skall kunna uttryckas så exakt, tydligt och uttömmande som möjligt. Här kan vi se hur man passerar diskursiva gränser. Begreppen på den aritmetiska eller algebraiska sidan ”trappas” också upp: från enkel ruträkning till strikt formelhantering.

Utgångspunkten är oftast kvadratens och rektangelns area. En kvadrat med sidan s kan helt täckas med enhetskvadrater (se Figur 1).



***Figur 1*. Area med utgångspunkt i en kvadrat.**

Kvadraten kan indelas i remsor innehållande *s* stycken enhetskvadrater, där *s* sådana remsor täcker hela kvadraten. Arean av kvadraten är alltså $A = s \cdot s$.



***Figur 2*. Area som enhetskvadrater i en rektangel.**

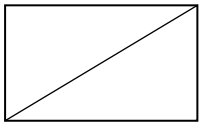
En rektangel med sidorna l och b kan täckas med b remsor innehållande l enhetskvadrater. Arean av rektangeln blir alltså $A = b \cdot l$ eller $A = l \cdot b$, där l är rektangelns längd och b dess bredd.

Nästa steg mot formeln för triangelns area kan vara att finna formeln för arean av en godtycklig parallellogram. Två olika sätt att resonera är brukliga

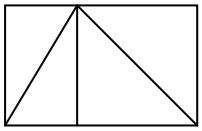
> att göra om parallellogrammen till en rektangel genom en förflyttning av en rätvinklig triangel,
>
> att tänka sig en rektangel indelad i små tunna remsor som förskjuts i sidled.

Varje triangel kan sedan betraktas som en halv parallellogram.

En annan väg att nå formeln för triangelns area (spetsvinklig triangel) är att utgå från rektangeln på följande vis.



En rektangel delas i två lika stora delar av en diagonal.



Triangelarean är hälften av hela den stora rektangelns area.

***Figur 3*. En triangels area med utgångspunkt i en rektangel.**

Denna del av undersökningen visar således på, att för att nå fram till formeln för triangelns area, för lärarna en diskussion inom två olika matematiska områden samtidigt, dels i ett algebraiskt/aritmetiskt register och dels i ett geometriskt.

Nedanstående exempel visar en i huvudsak geometrisk kontextualisering.

Lärare A: Nu ber jag dig att klippa en rektangel. Vänta, den får inte vara alltför liten! En rektangel som inte är alltför liten, varsågod. Ni behöver alltså inte rita rektangeln, ni kan klippa den direkt, alla vet hur en rektangel ser ut. Klipp i stället bara, klipp i stället.

Elev A 1: Måste det vara, det är ingen speciell längd eller så?

Lärare A: Nej bara det är en rektangel och inte alltför liten. Du behöver inte rita först, okej. Medan vi väntar på några, är det någon som kan beskriva en rektangel då?

Elev A 2: Det är en…med två sidor och sen två.

Läraren fortsätter att resonera med eleverna och efter en liten stund utspelar sig följande dialog.

Lärare A: Har alla lyckats skapa en rektangel? Okej. Försök nu att på det enklaste sättet dela den här rektangeln i två trianglar. Gärna diskutera i gruppen hur ni ska göra och gör ingenting förrän ni har kommit överens. Gör ingenting utan resonera först. Okej. Ni har bestämt er för hur ni ska göra? Hur?

Elev A 3: Vi tänker dela från hörn till hörn, upp från vänster hörn, vänster övre hörn och ner till höger.

Lärare A: Är det nån som möjligtvis kommer ihåg vad det här kallas när man delar en rektangel från hörn till hörn. Ingen. Karin.

Elev A 4: Rätvinklig.

Den lektion som dessa exempel är hämtade från visar en tydlig fokusering från lärarens sida på de geometriska begreppen. En andra väg in i problemet med beräkningen av triangelns area är att gå den aritmetiska vägen.

Lärare E: Jag var ju tvungen att veta hur långa sidorna var på rektangeln för att kunna räkna ut arean på rektangeln och vet jag det då kan jag alltså räkna ut hur stor hälften är. Om ni nu gör så att ni ritar en triangel på papperet då får den se ut, den får vara hur stor, liten som helst men den ska ha en rät vinkel, minst en rät vinkel ska ni ha. Den ska alltså gå längs

med en utav de här rutorna ni har, en triangel. Fick du en rät vinkel här nu? Vilken vinkel är rät? Där har du en rät vinkel. Var har du din räta vinkel? Nej, nu måste du göra så att du ritar den så. Då undrar jag hur stor area är det på den här triangeln du har ritat nu? Du kan mäta och skriva bredvid. Då ska vi se. Är det någon av er som har fått ut hur stor den här är? Hur stor har du ritat din triangel? Hur ser den ut?

Elev E 2: Nio centimeter, ett streck.

Lärare E: Du hade, den var väldigt stor 5 centimeter och den andra som går vid den vinkeln var bara 1 centimeter. Det blev alltså en ganska tunn och smal. Du sa 5 där och 1 där. Hur stor har du ritat din triangel? Hur ser den ut?

Elev E 3: 2,5.

Lärare E: 2,5. Hur vet du det?

Elev E 3: Det var en rektangel 5 gånger 1 är 5. Sen delat med två blir 2,5.

I den här lektionen arbetar läraren med en rektangel och en triangel på tavlan och eleverna får ange sina mått till läraren. Utifrån ett aritmetiskt och algebraiskt resonerande kommer man fram till att triangelns area är hälften av en rektangel.

Lärare E: Hur räknar man ut triangelns area?

Elev E 5: Man tar det som blir och sen delar man det med två.

Lärare E: Jaha, man tar det som blir säger du, vad är det som blir? Vad måste man veta först?

Elev E 5: Sidorna hur långa de är.

Lärare E: Bra och vad kallar vi sidorna för med två ord?

Elev E 5: Längd och bredd.

Lärare E: Ja och sen när du har fått reda på vad längd och bredd är och räknar ut det vad måste du göra?

Elev E 5: Dela med två.

Wyndhamn (1995a) visar med ingående analyser hur vissa lärare pendlar mellan siffror och längden och bredden för att åskådliggöra för sina elever. Problemet vi kan se är att eleverna blandar ihop de olika sätten att tänka då lärarna pendlar mellan för många olika språkliga begrepp inom matematikämnet.

Vid närmare analys av materialet upptäcks att läraren försöker åstadkomma en specifik kontext som gör det möjligt att skapa gemensamma innebörder i det som sägs. Läraren rekontextualiserar ett visst matematiskt innehåll, här triangelns area. Avsikten är att eleverna ur detta meningsbä-

rande sammanhang skall avslöja eller återupptäcka underliggande idéer och strukturer i det abstrakta innehållet. Lärarna i undersökningen använder sig dels av kunskaper från geometrin och dels av kunskaper från aritmetiken och algebran.

De två olika begreppsliga domänerna exemplifierar tydligt olika sidor av matematiken. I det ena fallet studeras de matematiska begreppen som objekt i sig, medan begreppen i det andra fallet kan ses som redskap eller verktyg för en konceptualisering av en ny situation eller ett nytt problem.

I de lektioner som har jämförts, använder läraren i ett fall enbart det geometriska området. Hos andra lärare överväger det aritmetiska/algebraiska området. Bilden över läraragerandet under lektionerna kan göras skarpare om en tredje dimension – diskussionen om konkreta och abstrakta geometriska figurer – samtidigt tas hänsyn till i samtalsanalysen. Fem lärare blandade abstraktionsnivå på det geometriska innehållet i sina samtal med eleverna. Två lärare avvek härvidlag från de övriga. Lärare F höjde genomgående abstraktionsnivån och talade i generella termer om samtliga begrepp och figurer, medan lärare G hela tiden diskuterade förhållanden i det konkreta, laborativa materialet. Den tredje dimensionen går alltså in på abstraktionsnivån i den geometriska kontextualiseringen. Resonemanget pendlar mellan ett perceptuellt fält och ett abstrakt fält.

Sammantaget kan man säga att de tre beskrivna dimensionerna visar hur resonemanget om triangelns area hela tiden pendlar mellan ett sammanhang där observationen är viktig och ett där den logiska analysen och slutledningen är avgörande. Detta är enligt vår mening en mycket intressant skillnad, som fordrar att eleverna kan koppla vad de ser med slutsatser formulerade i symbolisk notation.

För att nå fram till formeln för triangelns area utgår lärarna från en rektangel och kvadrat. Eleverna får klippa, rita och färglägga papper. I varje matematisk situation föreligger ett stort behov av att konkretisera det man överlägger om. Matematiken är abstrakt och de matematiska idéerna måste bäras upp av något. Det vanligaste är att läraren presenterar en situation för sina elever som klassen kan samtala omkring. Situationen skall ge erfarenheter som kan beskrivas matematiskt. Lärarens ambition är att få eleverna att själva upptäcka formeln och förstå ett resonemang. Manipulerandet förutsätter att man tänker sig matematiska begrepp som objekt, vilka kan möjliggöra ett laborerande med rent fysiska föremål eller att rita av bilder på papper eller att metaforiskt hantera abstrakta symboler. Laborativa material kan i ogynnsamma fall uppfattas lika abstrakta som främmande tecken på ett papper, samtidigt som siffror och bokstäver kan vara lika påtagliga som konkreta föremål (Bergqvist, 1990; Bergqvist & Säljö, 1994).

Innehåll och form i klassrumssamtalet - "public discourse"

För att kunna analysera kvantitativa och kvalitativa aspekter av klassrumssamtalet har ett urval gjorts. Vi har begränsat analysen av ordflödet hos lärare och elever till att omfatta det som sägs under en minut var femte minut. Detta ger en bild av lektionens gestaltning och genomförande. Lektionerna omfattar ungefär 40 minuter. Det är således åtta minuter som dokumenterats och analyserats mer i detalj (se Stigler et al. 1992).

Om vi först ser till de kvantitativa aspekterna av ordflödet, blir skillnaden i antalet ord relativt stor både om man jämför de olika lärarna och eleverna i de olika klasserna (se Tabell 1). En lärare hade ett sammanlagt ordflöde av 552 ord under de åtta minuter som insamlandet ägde rum, vilket motsvarar ett tempo av 69 ord per minut. Eleverna i samma klass förde ett flerpartssamtal dels med läraren, dels med varandra (klassrumssamtal). Under dessa åtta minuter blev det sammanlagda ordflödet 181 ord, vilket ger 23 ord per minut. Minst antal ord, som en lärare talade var 255 ord under stickprovsperioden, vilket motsvarar 32 ord per minut. Motsvarande lägsta siffra för elevkollektivet var 4 ord per minut. Skillnaderna mellan lektionerna i aktivitet hos de olika parterna var således ganska stora.

Resultatet visar att läraren, föga överraskande, talar mycket mer än eleven. Medelvärdet för läraren är 53 ord per minut och medianvärdet är 55 ord per minut och för eleven är motsvarande värden 11 ord per minut respektive 9 ord per minut. Detta är en ännu starkare dominans av samtalsutrymmet än den man vanligtvis finner i litteraturen, där man ofta konstaterar att läraren talar två tredjedelar av tiden och eleverna en tredjedel (Gustafsson, 1977; Lundgren, 1979). Man måste dock betänka att detta var en introducerande lektion som på sätt och vis inbjöd till lärardominans. I en sådan uppställning framgår inte heller den tid eleverna ägnar åt eget arbete i smågrupper då lärardominansen av naturliga skäl blir betydligt mindre.

Klass	Ord/min lärare	Ord/min elev
A	47	9
B	32	19
C	69	23
D	45	11
E	64	7
F	58	4
G	55	7
Medel	**53**	**11**
Median	**55**	**9**
Standardavvikelse	**13**	**7**

***Tabell 1*. Ord per minut yttrade av elever och lärare i respektive klass.**

Den kvantitativa karaktäristiken av klassrumsinteraktionen säger givetvis inte särskilt mycket om hur innehållet behandlas eller vilken typ av krav som ställs i situationen. Inte heller får man någon bild av de utmaningar eleverna ställs inför när de väl bereds tillfälle att bidra till den gemensamma kommunikationen. För att besvara frågor av detta slag kan man göra en ingående innehållslig analys av varje lektion för sig. Eftersom syftet med vårt projekt är att kunna bidra med en generell jämförelse som också möjliggör komparationer med utgångsmaterialen insamlade i andra länder, är det nödvändigt att ha någon form av kategorier som indikerar pedagogiska delar av kommunikationen.

Ett intressant element i undervisningssammanhang är frågor. Som ett diskursivt drag är frågan ett kraftfullt sätt att styra kommunikation. Den som frågar bestämmer i allmänhet både struktur och innehåll i det efterföljande samtalet genom att frågan definierar vad man skall tala om och också ofta hur man skall tala om det samtalet gäller. I ett pedagogiskt sammanhang är frågan också intressant eftersom den anger vad läraren i praktiken (och oavsett vederbörandes deklarerade övertygelser) menar med lärande liksom den typ av krav som eleverna ställs inför. Vi beslutade därför att försöka karaktärisera frågandet i materialet med hjälp av kategorier som ligger nära det innehållsliga området.

Resultaten av denna analys visar att den typ av frågor som ställs kan klassificeras i ett relativt litet antal kategorier (se också Stigler et al., 1992; Riesbeck, 1995). För det första förekom vad man kan kalla b*enämningsfrågor*. Dessa är av typen ”Vad är detta för figur?” eller ”Vilken sorts vinkel ser du?”. Svaren på dessa frågor utgörs nästan uteslutande av ett eller ett par ord som återger termer, beteckningar och definitioner. Genom att läraren ställer den typen av frågor till sina elever, förväntar hon sig att ele-

ven skall redovisa att hon känner till beteckningar och namn på de företeelser man talar om.

Lärare F:	Vad är det här för figur?
Elev F 1:	En kvadrat.
Lärare F:	Kvadrat. Vad kännetecknar en kvadrat?
Elev F 2:	Alla sidor är lika långa.
Lärare F:	Ja, finns det någonting mer som en kvadrat kännetecknas av?
Elev F 3:	Den är fyrkantig.
Lärare F:	Ja, har fyra hörn menar du.
Elev F 4:	Ja.
Lärare F:	Ja, fyra sidor, lika långa, fyra hörn, någonting annat?
Elev F 5:	Fyra räta vinklar.
Lärare F:	Fyra räta vinklar. Kan du tala om vad en rät vinkel är? Den är precis som de flesta hörn är som vi ser. Ibland säger man att den är 90 grader. Kanske man har hört. Den är rät. Det är en rät vinkel, förresten kan ni fler vinklar, en rät vinkel är en kan ni fler vinklar?
Elev F 6:	Trubbig.
Lärare F:	Trubbig, nån mer.
Elev F 7:	Spetsig.
Lärare F:	Ja, rät, trubbig, spetsig. Nu ska vi vika det här papperet mitt itu, så att det bildas två trianglar, för att man skulle få vad då för någonting, två stycken?
Elev F 8:	Trianglar.

Detta utdrag är intressant på flera sätt. Det illustrerar den specifika form av kommunikation som är så vanlig i klassrumssammanhang men som inte förekommer på så många andra ställen i samhället. Läraren talar till ett kollektiv (klassen) och olika elever kommer in och ger sina små bidrag till det pågående samtalet. Förutsättningen för ett sådant samtal är att alla följer med inte bara i vad läraren säger och vad de själva tänker, utan också i vad kamraterna svarar och huruvida detta svar är adekvat eller inte. Utdraget visar också hur de luckor eleverna får sig tilldelade under det publika samtalet innebär att de får återge specifika termer. Detta kan naturligtvis ge intrycket av att elever och lärare delar innebörd i de använda termerna. Det framgår dock i materialet att det ibland är tveksamt om så är fallet. Det förefaller ofta vara ett betydande avstånd mellan att å ena sidan på lärarens direkta fråga svara med termer som ‘fyrkantig’, ‘kvadrat’, ‘trubbig’ och att å andra sidan kunna använda sig av dessa termer som re-

surser för att förstå situationer på egen hand. Detta är också en fråga värd att studera vidare.

Ett annat inslag i lärares frågestrategi under matematikundervisning är, föga överraskande, att använda vad vi kan kalla *beräkningsfrågor*. Här frågar läraren hur mycket någonting är eller blir och eleven utför en mer eller mindre komplex matematisk beräkning som är relevant i sammanhanget.

Elev D 1:	Ja, först så mätte vi på den långa sidan då.
Lärare D:	Hur lång var den?
Elev D 1:	Den var 6 cm om man avrundar och den här korta var 4 centimeter om man avrundar eller centimeter.
Lärare D:	Ja, frågan är hur lång var bredden? Längden var 6 centimeter och bredden var?
Elev D 1:	4.
Lärare D:	Vaddå?
Elev D 1:	Cm.
Lärare D:	Cm ja, och vad kom ni fram till, vad arean var då?
Elev D 1:	24 cm
Lärare D:	Är arean 24 centimeter? Håller ni med om det ni andra?
Elev D 2:	Nej.
Lärare D:	Vad håller ni med om? Vad ska ni svara?
Elev D 3:	Vi räknar med 3,5 centimeter.
Lärare D:	Ja men räkna med 6 cm och 4 cm men vad kommer du fram till att arean är? Kommer du också fram till 24 cm? Det gör du. Jaha, är det någon annan som kommer fram till något annat? Vad säger Sanna?
Elev D 4:	24 kvadratcentimeter.
Lärare D:	Det är riktigt alltså. Enheten är viktig. 24 kvadratcentimeter.

Lärarens användande av beräkningsfrågor förstärker i det här sammanhanget elevers aritmetiska tänkande och inte det geometriska.

Ytterligare ett exempel följer här som visar på de beräkningsfrågor som läraren ställer.

Lärare E:	Då frågar jag hur stor area är det på den ena triangeln?
Elev E 2:	Tolv.
Lärare E:	Hur fick du det?
Elev E 2:	Delade.
Lärare E:	Du delade 24 med två. Tycker ni att han har tänkt rätt?

En annan typ av frågor utgörs av vad vi har kallat *förklaringsfrågor*. Dessa innebär att eleverna ställs inför uppgiften att utreda ett sakförhållande som

innehåller en förklaring eller analys av ett sakförhållande. I vårt material är dessa frågor av typen ”Hur kommer du fram till arean av triangeln?” Följande utdrag illustrerar ett par frågor av denna karaktär. Eleverna svarar i kör:

Lärare B: Börja med att berätta i gruppen för varandra hur man räknar ut arean på en rektangel eller kvadrat.
Eleverna: Arean. Ena sidan gånger andra sidan. Ja, bara hur man räknar ut. Man plussar inte.
Lärare B: Ni har fått fem stycken. Jag vill att ni ska ta de här fem och i gruppen nu rangordna dem, lägga dom så att ni lägger den största först som på en rad, den som har den största arean, sen den näst största den som kommer trea, fyra och femma. Rangordna dom, diskutera med varandra i gruppen. Dom ska ligga så att dom ligger var för sig. Ni får inte använda linjal.
Eleverna: Ni får inte linjal. Den där är störst, jag tror den. Lägg dom i rangordning.
Lärare B: När ni lagt ut de här sen på en rad så här så vill jag att ni diskuterar med varandra. Varför är det bra att kunna areaberäkning?
Eleverna: Därför att det är bra att kunna det då, man lägger golv, sätter tapet och så vidare.

Här framgår tydligt hur lärarens sätt att ställa frågor bestämmer och avgränsar elevens samtalsutrymme och de bidrag till konversationen som man kan komma med. Eleverna förs fram till en punkt där de skall ge ett tämligen väl definierat bidrag. Det framgår också att eleverna svarar i kör, vilket är en illustration både av hur tydliga förväntningarna är på vad som skall sägas och dessutom visar hur effektiv den kommunikativa socialisationen fungerar i detta avseende. Eleverna kan på en given punkt så tydligt definiera vad nästa bidrag skall vara att de kan tala i kör. Denna typ av frågor är dock intressant i detta sammanhang, eftersom den förefaller ställa eleverna inför delvis annorlunda krav där argumentation och begreppsanvändning prövas på ett annat sätt än när man bara återger en enstaka term. Detta slags krav, som innebär att eleverna får föra längre och sammanhängande resonemang, synes också vara ett mer framträdande drag i det japanska klassrummet jämfört med det amerikanska. Det kan därför vara intressant att utröna hur detta ser ut i de svenska klassrummen.

Den sista typen av frågor som vi menat oss finna, är *kontroll- och uppföljningsfrågor* kan vara av typen ”Vad funderar du på?” eller ”Vilka instämmer i detta lösningsförslag?”. Dessa frågor är också intressanta, efter-

som de förväntas ge längre och mer artikulerade svar från eleven, även om detta inte alltid blir fallet.

Lärare B:	På vilket sätt skiljer sig den här triangeln från dem ni har framför er, som de ni har jobbat med?
Elev B 1:	Alla sidorna är inte lika långa.
Elev B 2:	Den har inte kommit från en fyrkant.
Lärare B:	Den har inte kommit, är du säker på att den inte kommit från en fyrkant?
Elev B 2:	Ja, man har i alla fall inte delat den på diagonalen.

Vi kommer senare att göra en mer ingående analys av hur frågandet går till i de olika klasserna med utgångspunkt i dessa kategorier. Antydningsvis kan det dock påpekas att i samtliga klasser är elevernas möjligheter att yttra sig inom ramen för den offentliga kommunikationen i helklass starkt reglerad. Lärardominansen är tydlig. Det är dock en klar skillnad mellan vilka typer av frågor läraren föredrar och därmed också vilken typ av krav eleverna ställs inför. Hos tre av lärarna ställs flest benämningsfrågor och beräkningsfrågor. Man kan också se att förklaringsfrågor leder till en annan typ av interaktion med större inslag av mer komplexa och argumentativa svar från eleverna som innehåller principiella utsagor och förslag till lösningar av problem man diskuterar. Men det är alltjämt en stark lärardominans i den meningen att lärarna har initiativet och styr interaktionen.

Analys av klassrumskommunikation är central för att förstå de svårigheter och möjligheter till utveckling som elever har i det komplexa samhället de lever i. I klassrumssituationen ställs eleverna inför uppgifter och krav som de inte möter i andra sammanhang och behärskningen av kommunikationens form och innehåll är avgörande för deras framtida möjligheter att följa med i skolans abstrakta och starkt skriftspråksorienterade verksamhet (Säljö, 2000). Man måste också göra sig förtrogen med de 'distanserade' institutionella språk som undervisningen presenterar som alternativ till att förstå och tolka olika företeelser. Frågan om hur subjektivt relevanta 'levda' språk möter institutionella, skriftspråksbaserade språk är likaledes en viktig fråga för vårt projekt.

Diskussion

Syftet med denna studie har varit att ge en bild av klassrumsinteraktion i matematik. Även om materialet omfattar endast sju lektioner, blir detta en omfattande mängd data när man vill göra mer ingående analyser av inter-

aktionen. Samtliga lektioner uppvisar ett kommunikationsmönster där klassrumssamtalet styrs från lärarens sida. Samtalets form bestäms av dess funktion att demonstrera eller bevisa ett påstående genom att länka eller binda det till andra uttalanden på formellt logiska grunder. Diskursen är till största delen av ett argumenterande och förklarande slag och inte berättande.

Det kommunikativa mönstret i lektionen kan ses som ett svar på frågan: Hur kan önskad systematik och logik förenas med praktiska aktiviteter? Läraren väljer en strategi där gemensamma klassdiskussioner avlöses av överläggningar i smågrupper. Läraren bestämmer agendan - svarar för systematiken - och eleverna löser förelagda uppgifter. Syftet med själva ”talandet” i gruppdiskussionerna eller dess funktion i sammanhanget synes dock inte alltid helt klart formulerat av läraren, varken under lektionen för eleverna eller vid uppföljningen av lektionen.

”Görandet” utförs i smågrupperna, medan ”talandet” verkställs såväl i helklass som gruppvis. Till övergången mellan de två aktiviteterna kan Vygotskys begrepp ”mediering” knytas (Vygotsky, 1986). Erfarenheten bygger på den rent fysiska interaktionen med det laborativa materialet som ett slags ”verktyg” (Säljö, 1998). Samspelet å sin sida förutsätter språket som ”verktyg”. Laborerandet skall ge uppslag till formulering av upptäckter. Men eleverna i grupperna har inte ord och begrepp för att beskriva vad de ser i de laborativa övningarna och blir därför kvar i görandet. Vi har två olika diskurser som blir tydliga, den vardagliga och den vetenskapliga, och däremellan sker ingen mediering.

Det stereotypa mönstret i klassrumsinteraktionen står sig alltså även om frågorna i grundstrukturen byts ut mot eller kompletteras med kortare eller längre ”laborativa uppgifter” eller moment då ”eleverna ska göra något”. Avsikten med en undersökning är ju att samtalet tillförs nytt stoff och att nya geometriska samband upptäcks eller belyses. Men för att lärarna skall kunna fortsätta att uppehålla den sociala kontrollen, så får eleverna veta vad de skall arbeta med precis före aktivitetens början. Lärarens frågor är också alltför lite utformade som uppföljningsfrågor utan de vanligaste är beräknings- och benämningsfrågor. Detta bidrar till att undersökandet i grupperna inte blir särskilt utforskande i samtliga klasser.

Slutsatsen blir att för den som befinner sig i en undervisningssituation och deltar i detta språkspel (Wittgenstein, 1978), så framträder egentligen undervisning som ett komplext förlopp - det enkla grundmönstret till trots. Det laborativa arbetssättet och gruppdiskussionerna, som förordas i retoriken om skolans arbete som motorer eller drivfjädrar för lärande, riskerar därmed att i klassrummet reduceras till produktion av ”att göra”. Läraren vill uppnå social kontroll och eleverna smärtfritt komma igenom uppgifterna. I och med att verksamheten kanske får olika - inte uttalade - mål för

lärare och elever utnyttjas inte potentialen i gruppsamtal och laborationer fullt ut ur ett inlärningsperspektiv. Inskjuts samtal och laboration som medel eller instrument för att nå vissa inlärningsmål, tycks risk föreligga att avståndet till detta mål oförutsett ökar och vägen dit blir oklar.

Lärarnas olika sätt att presentera det matematiska innehållet för eleverna visar på en svårighet som elever har att gå från en vardaglig diskursiv gräns till en matematisk men även att följa lärarens sätt att i undervisningen gå mellan olika register (Duval, 2006). Här visas tydligt att det inte räcker för elever att få det visuella utan man måste även få tillgång till geometrins ord och begrepp.

En avgörande fråga är om det sker ett verkligt utvecklande tankeutbyte i samtalet mellan lärare och elever i de besökta klassrummen. Elevernas subjektiva och sinnligt påtagliga erfarenheter ska möta strukturell kunskap. Detta möte kan beskrivas som ett möte mellan två olika språk, ett vardagligt språk och ett lärt språk, ytterst mellan en muntlig och en skriftlig kultur (Vygotsky, 1986; Ong, 1990; Säljö, 2000).

Här berörs alltså själva kärnan i den medierande processen och en kritisk punkt för all undervisning. Elevernas språkliga tillväxt förutsätter en växelverkan eller en oavbruten rörelse mellan det konkreta och det erfarna, mellan det subjektivt upplevda och det objektivt reflekterande. Genom att sätta ord på elevernas ”upplevelser” blir dessa lättare att få grepp om, att ordna och relatera till varandra. Lärare och elever måste skapa en gemensam diskurs där de blir delaktiga i målet med undervisningen och att innesluta både det vardagliga och det matematiska språket i interaktionen. Läraren kan ställa utvecklande frågor till grupperna och få elever att kritiskt granska och argumentera utifrån de uppgifter som har förelagts dem.

Referenser

Ahlberg, A. (1992). *Att möta matematiska problem. En belysning av barns lärande.* Diss. Göteborgs universitet: Göteborg Studies in Educational Sciences 87.

Bergqvist, K. (1990). *Doing schoolwork. Task premisses and joint activity in the comprehensive classroom.* Diss. Linköpings universitet: Linköping Studies in Arts and Sciences 55.

Bergqvist, K., & Säljö, R. (1994). Conceptually blindfolded in the optics laboratory: Dilemmas of inductive learning. *European Journal of Psychology of Education, 9*(2), 149-158.

Chapman, A. (1993). Language and learning in school mathematics: A social semiotic perspective. *Issues in Educational Research,* 3 (1), 35-46.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61, 103-131.
Edwards, D., & Mercer, N. (1989). *Common knowledge.* London: Routledge.
Emanuelsson, J. (2001). *En fråga om frågor*. Diss. Göteborgs Universitet: Göteborg Studies in Educational Sciences 168.
Gustafsson, C. (1977). *Classroom interaction: A study of pedagogical roles in the teaching process*. Stockholm: Stockholm Institute of Education.
Jackson, P. (1968). *Life in classrooms*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
Lpo 94. Läroplaner för det obligatoriska skolväsendet. Utbildningsdepartementet.
Lundgren,U. P. (1979). *Att organisera omvärlden. En introduktion till läroplansteori.* Stockholm: Publica.
Löwing, M. (2004). *Matematikundervisningens konkreta gestaltning. En studie av kommunikationen lärare – elev och matematiklektionens didaktiska ramar*. Diss. Göteborgs universitet: Göteborg Studies in Educational Sciences 208.
McNeil, L. (1986). *Contradictions of control.* London: Routledge, & Kegan Paul.
Mehan, H. (1979). *Learning lessons*. Cambridge: Harvards University Press.
Mercer, N. (1981). *Language in school and community*. London: Edward Arnold.
Moyer, P., & Milewicz, E. (2002). Learning to question: categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 5, 293-315.
Nilsson, G. (2005). *Att äga pi. Praxisnära studier av lärarstudenters arbete med geometrilaborationer*. Diss. Göteborgs Universitet: Göteborg Studies in Educational Sciences 228.
Ong, W.J. (1990). *Muntlig och skriftlig kultur. Teknologiseringen av ordet.* Göteborg: Anthropos.
Riesbeck, E. (1995). *Från start till mål. En deskriptiv studie av matematiska samtal i klassrummet.* Linköpings universitet: Tema Kommunikation.
Riesbeck, E.; Säljö, R., & Wyndhamn, J. (2000). Matematiska samtal i klassrummet 2. Elevgruppens undersökande arbetssätt under en matematiklektion. I E. Riesbeck. *Interaktion och problemlösning. Att kommunicera om och med matematik*. (ss. 93 – 121). FIF-avhandling nr 42-00. Institutionen för pedagogik och psykologi. Linköping: Linköpings Universitet.

Riesbeck, E. (2000). *Interaktion och problemlösning. Att kommunicera om och med matematik*. FIF-avhandling nr 42-00. Institutionen för pedagogik och psykologi. Linköping: Linköpings Universitet.
Sahlström F., & Lindblad, S. (1998). Subtexts in the science classroom - An exploration of the social construction of science lessons and school careers. *Learning and Instruction, 8*(3), 195-214.
Stevenson, H.W., & Stigler, J.W. (1992). *The learning gap: Why our schools are failing and what we can learn from Japanese and Chinese education.* New York: Summit Books.
Stigler, J.W:, Fernandez, D., Yoshida, M., & Hatano, G. (1992). *Children's thinking during mathematics instruction in Japanese and American elementary school classrooms.* Manuskript.
Säljö, R. (1998). Thinking with and through artifacts: the role of psychological tools in human learning and cognition. In D. Faulkner, K. Littleton & M. Woodhead (Eds.), *Learning relationships in the classroom* (pp. 54-66). London: Routledge.
Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma.
Zevenbergen, R. (2000). "Cracking the code" of mathematics class-room: School success as a function of linguistic, social and cultural background: In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 201-223). Westport CT: Ablex Publishing.
Vygotsky, L.S. (1934/1986). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press.
Wittgenstein, L. (1978). *Filosofiska undersökningar*. Stockholm: Bonnier.
Wyndhamn, J. (1994). *Matematiska samtal i klassrummet, tvärkulturella studier. Presentation av ett intresseområde*. Linköping: Arbetsrapport från tema K 1994:7.
Wyndhamn, J. (1995a). *Lärarens triangel och elevens trekant. En deskriptiv studie över matematiska samtal i klassrummet*. Linköping: Arbetsrapport från Tema K 1995:1.
Wyndhamn, J. (1995b). *Likt och olikt. Två lektionssamtal kring triangelns area*. Linköping: Arbetsrapport från Tema K 1995:17.
Wyndhamn, J., Riesbeck, E., & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik*. Linköping: Linköpings Universitet UniTryck.

Artikel II

Samtal, samarbete och samsyn

En studie av koordination av perspektiv i klassrumskommunikation

Roger Säljö, Eva Riesbeck, Jan Wyndhamn

Inledning

Det helt odramatiska samtalet ansikte mot ansikte är i all sin vardaglighet människans främsta resurs för att bevara, anpassa och utveckla kunskaper och färdigheter. Samtalet tillåter människor att dela erfarenheter med varandra. När vi interagerar gör vi våra tankar och iakttagelser publika och tillgängliga för andra att reagera på och resonera vidare med. Vi kan inte skåda in i människors hjärna för att avläsa deras reaktioner, begreppsbildning och omvärldsuppfattning, men vi kan ta del av det de uttrycker i ord och fysisk handling.

I ett mycket långt historiskt perspektiv var det människors förmåga att kommunicera med varandra som gjorde det möjligt att utveckla sofistikerade kunskaper och intellektuella och manuella färdigheter. Förmågan att uttrycka sig med mimik, gester och allt mer betydelsebärande signaler av olika slag utvecklades så småningom till språklig kommunikation med en differentierad och komplex föreställnings- och begreppsvärld (Donald 1991). Även om exempelvis mimik, gester och bilder kan uttrycka reaktioner och mening på ett rikt och nyanserat sätt, är språklig kommunikation unik som medierande redskap (Wertsch 1998) på flera nivåer. Språket hjälper oss att hålla distans till det vi ser och hör, det medger en kodifiering av omvärlden i olika begreppsliga kategorier och det gör det möjligt att tala om det icke-närvarande och om abstrakta företeelser som exempelvis skönhet, makt och rättvisa. Och det gör det, som sagt, möjligt att dela med andra det vi erfar med en hög grad av precision.

© Studentlitteratur

Men språket är inte enbart en mekanism för att kommunicera med andra människor. Det är också bryggan mellan ”yttre” och observerbara kommunikativa aktiviteter, och det ”inre”, det vill säga vårt tänkande och vår föreställningsvärld. Språklig kommunikation, dess kategorier och begrepp, är således den medierande länken mellan social interaktion och individers tänkande. I sociokulturell teori uttrycks detta släktskap mellan kommunikation och tänkande ibland genom att man talar om det förstnämnda som interpsykologiska eller intermentala processer och det sistnämnda som intrapsykologiska eller intramentala processer (Vygotsky 1986, Wertsch 1998). Genom kommunikation blir vi delaktiga i hur våra medmänniskor förstår händelser i vardagen och hur de handlar genom språket, och genom dessa erfarenheter kommer vi att formas som psykologiska varelser och kunna använda många av dessa språkliga redskap. En viktig poäng är således att vårt tänkande är socialt till sin karaktär; vi tänker och resonerar med hjälp av språkligt medierade kategorier och vi använder samma redskap för att göra oss förstådda i samtal med andra. Att tänka är således, i detta perspektiv, att kunna använda språkliga redskap inom individen på ungefär samma sätt som vi använder dem när vi kommunicerar med andra människor. Därmed försvinner också behovet av att tala om kommunikation och tänkande som något ”yttre” respektive ”inre”; båda aktiviteterna försiggår med hjälp av de medierande resurser som språket tillhandahåller. Språket har en utsida vänd mot andra och en insida vänd mot brukaren[1]. Detta är en del av den insikt Wittgenstein (1953/1995, § 329) uttrycker när han skriver att ”[w]hen I think in language, there aren’t ’meanings’ going through my mind in addition to the verbal expressions: the language is itself the vehicle of thought”.

Språkliga praktiker och perspektivering

Kommunikation och interaktion är således grundläggande processer inte bara för att reglera mellanmänskliga förhållanden och skapa komplexa mönster av samarbeten utan också för den kognitiva socialisationen av individer (Nelson 1996). Föreställningar om tid, rum, rörelse, demokrati och andra kulturellt medierade tanke-

 © Studentlitteratur

gångar cirkulerar i samtal i olika miljöer och tas över (och utvecklas) av nya generationer i en ständig ström av pågående interaktion. Språket är ett oändligt rikt medium för att representera omvärlden och för att prata om den ur olika perspektiv och för olika syften. Vi kan tala om en så enkel företeelse som ett träd på många olika sätt: som en råvara för att tillverka tändstickor, som bränsle till den öppna spisen, som en botanisk företeelse, som en del av kretsloppet, som en farlig plats att vistas vid under åska, som ett estetiskt objekt och så vidare i all oändlighet. För att kunna föra den typ av samtal vi vill i ett specifikt sammanhang, måste vi således perspektivera (eller konstituera) föremålet eller händelsen på ett sådant sätt att de aspekter vi vill lyfta fram hamnar i fokus. Språket hjälper oss att göra just detta; att perspektivera omvärlden på de sätt som är intressanta för oss och dem vi talar med i ett visst sammanhang (Voloshinov 1930/1973).

När vi talar om världen, måste vi alltid tala om den på något specifikt sätt och utifrån några utgångspunkter. Perspektivtagande är både en förutsättning för, och en oundviklig konsekvens av, språkliga praktiker (Tomasello 1999, s. 150ff). Vi kan inte beskriva ens den enklaste företeelse på ett helt uttömmande sätt, och vi har faktiskt inte heller något intresse av att försöka göra det. De vi talar med skulle tröttna på oss om vi hade sådana ambitioner. All kommunikation förutsätter således perspektivering, att vi gör något till figur (färg, form, storlek, hastighet eller något annat) och låter det andra som finns med i sammanhanget vara bakgrund.

Men perspektivering är inte enbart något som händer i stunden och som är tillfälligt. Perspektivering är också en väsentlig del av vår kunskapsbildning. En viktig beståndsdel i kunskapsutvecklingen kan beskrivas som skapandet av olika diskurser om världen som perspektiverar händelser, processer och objekt på specifika sätt. Med diskurs menar vi i detta sammanhang systematiskt organiserade sätt att tala och tänka om omvärlden (Östman 1995). I vetenskapens värld är fysikern, psykologen och historikern exempel på personer som behärskar olika diskurser om världen och som kan använda dem för specifika syften. Men snickaren, journalisten, försäljaren, prästen, arbetsförmedlaren och många andra yrkesgrupper använder sig också av specifika, och i många fall ganska komplicerade, diskurser när de genomför sina arbetsuppgifter.

© Studentlitteratur

I ett sociokulturellt perspektiv består lärande och kunskapsbildning i betydande utsträckning (men inte uteslutande) av att människor lär sig behärska diskurser av olika slag. Att lära sig om fotosyntesen, om betingning eller om tempus i grammatiken innebär att man gör sig bekant med systematiskt uppbyggda diskurser i biologi, psykologi och språkvetenskap där termer, begrepp och påståenden hänger samman och definierar varandra och där de perspektiverar världen utifrån speciella utgångspunkter. Om vi tar geometri som exempel, hänger termer/begrepp som kvadrat, rektangel, parallellogram, bas, höjd och så vidare ihop enligt specifika mönster. Medan man i många sammanhang inte behöver skilja mellan uttryck som ”linje”, ”streck”, ”bas”, ”sträcka”, förutsätter lärande av geometri som systematisk diskurs att man håller isär dessa och inser att de definieras på olika sätt och/eller inte är gångbara alls i ett visst sammanhang. Medan exempelvis uttrycken ”streck på snedden” och ”diagonal” kan ses som likvärdiga, och kanske till och med synonyma, kan det ena vara brukbart och utvecklingsbart som begrepp i exempelvis geometriundervisningen medan det andra inte är det (Wyndhamn 1995a, b). Och att gå från att uppfatta (eller perspektivera) något som ett ”streck på snedden” till att se det som en ”diagonal” med vissa bestämda egenskaper i geometriska figurer kan man förmoda tar ganska lång tid och kräver en hel del möda.

Klassrumskommunikation som kontext för lärande

Skola och utbildning är de miljöer där människor kommer i systematisk kontakt med diskurser om samhälle, kultur och natur som de inte nödvändigtvis stöter på i särskilt stor utsträckning i sin vardag. Vygotskij (1986) uttrycker detta som att undervisning är en kommunikativ miljö där barnens spontant utvecklade begrepp möter vetenskapliga begrepp. Vardagliga förklaringsformer, perspektiv och sätt att resonera (”ett föremål sjunker för att det är tungt”) ställs mot vetenskapligt grundade begrepp och modeller (om, i detta fall, bland annat densitet och volym), och elever skall försöka förstå och tillgodogöra sig de begreppsliga resurser som lig-

© Studentlitteratur

ger i den sistnämnda typen av diskurser och den perspektivering de bygger på.

Ett gemensamt drag i många av de diskurser som dominerar skola och utbildning är att de är abstrakta. Den lärande har vanligtvis inte någon förstahandserfarenhet av miljöer där dessa kunskaper och färdigheter är nödvändiga och funktionella. Den begreppsvärld man tar till sig i den primära socialisationen inom familjen och i vardagliga sammanhang, går – med Vygotskijs metaforik – ”nerifrån och uppåt”. Generaliseringar och begreppsbildning sker i stor utsträckning på basen av personliga erfarenheter i bekant terräng. I den sekundära socialisationen i formaliserad utbildning däremot, sker förståelse och begreppsbildning ”uppifrån och ner” för att fortsätta med samma bildspråk. Barnet möter termer, modeller och beskrivningar och måste i stor utsträckning lära sig inse vad de betyder och hur de fungerar genom explicita definitioner och genom att arbeta sig ner till konkreta iakttagelser och erfarenheter.

Som ett verksamhetssystem (Säljö 2000) måste skolan i stor utsträckning arbeta med språket som medierande resurs, och utbildning är till övervägande del en kommunikativ verksamhet. Detta är nödvändigt för att kunna presentera kunskapsformer och färdigheter som är relevanta i olika sektorer av ett komplext och kunskapsrikt samhälle, där man inte kan lära sig allt genom egna erfarenheter. Detta leder emellertid också i sig till att undervisning ofta blir abstrakt.

Ur ett kommunikativt perspektiv kan klassrummet beskrivas som ett typiskt exempel på institutionell kommunikation. I en sådan miljö produceras mening inom diskurser som inte alltid är helt bekanta för deltagarna, och problem att förstå och identifiera relevanta perspektiveringar kan förväntas vara ganska vanliga. Att utmana människors förståelse och förgivettaganden är på en nivå skolans funktion, och studier av hur man ger och tar mening i sådana miljöer är därför viktiga för att utröna hur människor tar till sig kunskaper och färdigheter.

I det följande skall vi rapportera några iakttagelser som har att göra med hur lärare och elever förstår varandra i klassrumssituationer. Den situation vi skall presentera data om handlar om hur elever agerar i grupparbeten, det vill säga verksamheter där de själva – men dock i allmänhet på uppmaning av lärare – bearbetar olika problem. Det vi intresserar oss för är just frågor om perspektivering

© Studentlitteratur

och i vilken mån elever kan identifiera de sätt att resonera som är de förväntade.

En bakgrund till detta intresse för vad som ofta kallas elevstyrt arbete eller elevaktiva arbetsformer är den centrala roll som sådana arbetsformer spelar i modern pedagogik. Som diskuterats utförligt av bland andra Edwards och Mercer (1987) och Bergqvist (1990) är grupparbetet den kanske viktigaste komponenten i den progressiva – barncentrerade – syn på utbildning som växte fram på 1960- och 1970-talen och som inspirerades av Jean Piagets och hans uttolkares utvecklingspsykologiska teser. Piaget såg barnets självständiga och konkreta manipulerande av omvärlden som den främsta grunden för kunskapsutveckling. Han beskrev traditionell undervisning som resulterande i meningslösa abstraktioner och förordade istället arbetsformer som tog barns egen aktivitet som utgångspunkt. Den elevaktiva arbetsformen blev den pedagogiska lösningen på detta problem; där blir förståelsen ett resultat av barnets egna konkreta iakttagelser och manipulationer av omvärlden.

Deltagare och genomförande av studien

Arbete i grupp under lektionen är ett vanligt inslag också i den svenska skolan (se exempelvis Bergqvist 1990). Följande analyser bygger på ett empiriskt material insamlat i sju mellanstadieklasser som en del av en komparation mellan undervisningsmönster i Japan, USA och Sverige, men vi kommer i detta sammanhang inte att ägna dessa jämförelser något utrymme (se exempelvis Wyndhamn 1994, 1996). Sammanlagt är det sju lektioner (mellan 40 och 60 minuter) som är videoinspelade. Det pedagogiska innehållet i dessa lektioner är hämtat från elementär geometri och rör i samtliga fall triangeln som geometriskt objekt och hur man beräknar triangelns area.

Den aktuella undervisningen i de sju lektionerna pendlar mellan samtal i helklass med läraren som centralpunkt och samtal mellan eleverna i mindre konstellationer. I det jämförande material vi har tillgång till, är detta frekventa pendlande mellan helklassundervisning och olika former av gruppaktiviteter typiskt för den undervisningstradition som de svenska lärarna använder sig av. Det är i fyra

© Studentlitteratur

av de sju klasserna som man tydligast utmärkte sig genom att på detta sätt arbeta i grupp. I de övriga arbetade man i par, men idén med dessa inslag är densamma; eleverna skall själva få vara aktiva. Vad vi särskilt kommer att fokusera i fortsättningen är vad elever gör under dessa grupparbetspass inom ramen för de lektioner vi dokumenterat. Dessutom är det av intresse att analysera de förutsättningar som lärare skapar för elevers arbete genom de instruktioner man ger. Mer precist kommer följande teman att belysas:

1. Hur bearbetar eleverna det aktuella stoffet om triangelns area när de arbetar på egen hand i smågrupper? Vilka begrepp använder man och i vilken utsträckning kan man applicera de aktuella begreppen på det material man bearbetar? Vilken perspektivering på innehållet i undervisningen innebär elevernas samtal?
2. Vilka förutsättningar för elevers undersökande arbete skapar lärare genom sina instruktioner till elever?

Sammanlagt är det tjugofem tillfällen i det inspelade materialet där läraren ger explicita direktiv till grupper om hur de skall arbeta. I klasserna är det sju grupper med elever som agerar framför videokameran. Detta urval av elevgrupper är motiverat av inspelningstekniska begränsningar (för en utförligare beskrivning av material och metod, se Riesbeck 2000).

Resultat

Sammanställningen av de sju lektionerna (här markerade med A, B, C, D, E, F eller G) visar att samtliga lärare inleder sin lektion med att ta reda på om eleverna känner till begreppen rektangel och kvadrat. Lärarna talar med eleverna kring begreppen hälften av en kvadrat och rektangel, och de låter eleverna arbeta med pappersmaterial för att de ska få en ”upplevelse” och ”förståelse” av begreppet triangelns area. Målet för lektionen är att nå fram till formeln för triangelns area b*h/2 (”basen gånger höjden delat med två”). Lärarna har valt att eleverna skall sitta i grupp. Samtliga lärare har, som vi redan påpekat, valt som arbetsform att undervisa i helklass (med en informell samtalston) med eleverna, och att mellan dessa moment ge

© Studentlitteratur

eleverna olika direktiv för diskussionerna i grupp. Därefter följer en genomgång på tavlan av läraren och återigen läggs någon uppgift ut på gruppen. På det sättet genomförs lektionerna. Lärarna bestämmer agendan och eleverna får lösa förelagda uppgifter (se Wyndhamn 1995b, Riesbeck 1995). Grupparbetspassen är i allmänhet fem till tio minuter långa.

Om vi inleder analysen med att besvara fråga 2 ovan om vilka instruktioner eleverna får för sina grupp- respektive pararbeten om trianglar och triangelns area, finner vi att man på en allmän nivå kan urskilja två olika typer av direktiv (Minick 1993) som ges av lärarna. Den ena typen av direktiv har karaktär av uppmaningar till eleverna att ägna sig åt konkret verksamhet som innebär att man skall rita, räkna. måla, vika eller liknande. Instruktionerna är således riktade mot att få eleverna att fysiskt manipulera de objekt de har framför sig liksom att göra illustrationer och exempel (samtal och samarbete på ”göra-nivå”). Den andra typen av direktiv för elevernas egna arbete har en annorlunda karaktär. Här använder lärarna sig av verb som pekar mot en analytisk och argumentativ verksamhet och man uppmanar eleverna att beskriva, bevisa, berätta och fundera (samtal och samarbete på ”berätta- och förklara-nivå”).

Direktiv med uppmaning till eleven att ägna sig åt konkret verksamhet

Lärarna använder här ord som göra, rita, mäta, klippa, dra, skriva, räkna ut, färglägga, när de uppmanar elever till aktivitet i grupperna. Följande exempel 1 är hämtat från klass A. Lektionen inleds med att eleverna får ett rektangulärt papper. Eleverna uppmanas av läraren att klippa ut en rektangel och därefter skall de försöka att dela rektangeln på enklast möjliga sätt, så att den bildar en triangel. Eleverna avser att dela den från hörn till hörn. Efter en del elevprat om hur stor triangeln är i jämförelse med rektangeln, får eleverna i uppgift att rita ytterligare en rektangel. Elevgruppen består av tre pojkar (Peter, Göran och Alexander) och en flicka (Sofia). De sitter vid ett runt bord. Lärare A ger eleverna följande direktiv.

Exempel 1.

Lärare A: Rita ännu en rektangel eller klipp ut. Ni har säkert papper kvar. Alla har en rektangel nu. Nu ska du i din rektangel rita en triangel, lyssna noga, som har en sida här

 © Studentlitteratur

och har spetsen nånstans här. Förstår ni hur jag menar? Jag tar därifrån och så tar jag linjalen och gör så. Varsågoda.

Alexander: Så här. Det är inte en. [Elever klipper och ritar under tystnad.]

Eleverna är var och en helt koncentrerade på sin egen rektangel och talar knappt med varandra. De fullgör uppgiften utan att ifrågasätta varför man skall göra detta. Målet är klart för eleverna och de vet hur man skall utföra uppgiften.

I lektionen i klass B sitter eleverna på motsvarande sätt med sina ”fyrkanter” och får följande uppmaning från läraren.

Exempel 2

Lärare B: Dra en diagonal på allihop och klipp itu dem. [En elev, Johan, ritar in diagonalerna med hjälp av linjal. De övriga tittar på.]
Lena: Vi skulle väl klippa?
Sara: Jag hämtar en sax.
Johan: Det här blir rakt va.
Sara: Den blev rätt så bra.
Lena: Den här blev inte så bra.
Sara: Det är jag som har ritat.
Lena: Ska vi blanda dem? [Alla urklippta bitar blandas.]
Sara: Vad ska vi göra nu då? Pussel, eller?

Eleverna utför det som läraren säger till dem att göra: ”dra en diagonal och klipp itu”. Samtalet handlar här mycket om hur figuren ser ut, om strecket är rakt eller snett, och om det blev ”bra.” Den enda matematiska term som explicit används är diagonal. Efter en stunds resonemang i helklass får grupperna i uppgift att räkna ut arean på en serie trianglar. En grupp som består av en flicka (Jenny) och tre pojkar (Joakim, Ola och Markus) hanterar uppgiften på följande vis.

Eleverna har fått ett rutat papper och en triangel. Jenny börjar med att mäta och rita på papperet och under tiden talar pojkarna om för Jenny hur hon ska göra. Alla är mycket engagerade i uppgiften. Samtliga ligger över sina bänkar. Själva görandet är klart och tydligt i fokus. En elev ritar och resten ser på. Man byter efter en stund och får en ny triangel.

© Studentlitteratur

Exempel 3

Lärare B: Ni får varsin triangel av mig. Ni ska räkna ut arean på den här.
Jenny: Vi mäter här. [En elev ritar med linjal.]
Markus: Du lägger den så.
Joakim: Sen mäter du den där långsidan.
Markus: Nej, det behövs inte.
Joakim: Det blir ju sexton med den där. [Eleven räknar rutor.]
Jenny: Sex gånger fem.
Markus: Trettio.
Jenny: Ta fem där.
Ola: Nu tar jag bort den här.
Markus: Tretton, femton.

Eleverna i gruppen är engagerade i sitt görande. De får en ny triangel, ritar av, mäter, räknar ut och når till slut produkten.

Markus: 56.
Joakim: Ja, 56.

Eleverna tycker sig ha ”knäckt koden” för hur man skall räkna ut triangelns area. Man hör dem ivrigt efterfråga ”fler trianglar”. Rutnätet hjälper eleverna att bestämma areans storlek. Några geometriska termer används egentligen inte i samtalet utan samarbetet och samsynen underlättas av framtagna mätetal och uträknade produkter.

Lektion C övergår, när vi nu kommer in, till att behandla trianglar och läraren ger direktiv till eleverna vad de skall utföra i gruppen.

Exempel 4

Lärare C: Varje figur ska innehålla två trianglar utan att klippa. Ni får använda penna om ni vill och när ni har fått fram trianglarna så färglägger ni dem i olika färger. Två lika stora.

Eleverna i gruppen börjar med att vika sina rektanglar och kvadrater.

Stina: Det är ju lätt att bara göra så här.[Eleven viker in en sida av papperet så att det blir en triangel.]

© Studentlitteratur

Beatrice:	Det går inte.
Kalle:	Det beror vilken sort man gör.
Stina:	Man kan göra så.
Måns:	Rita först på papperet.
Stina:	Man kan göra så.
Kalle:	Det blir en triangel om man gör så här.
Måns:	Tre sidor så också.

Eleverna viker här sina papper så att det blir trianglar av dem. Man ger olika förslag på trianglarnas utseende och visar varandra. Elevernas gemen-samma arbete är ensidigt inriktat på tillverkningen av trianglar. Härvid införs endast två begrepp som kan förstås som matematiska perspektiv-eringar på det man gör, nämligen triangel och sidor. I det efterföljande momentet fick eleverna i uppgift av läraren att rita och färglägga trianglarna, vilket man också gjorde utan att komma in på något egentligt matematiskt innehåll.

Noterbart vid direktiv av detta slag är hur tydligt de leder till att samtalet elever emellan blir fåordigt. Varje elev kan vidare arbeta isolerat var för sig. Man behöver inte samarbeta i någon större utsträckning för att gruppen skall nå önskat resultat på arbetsuppgiften. För att lösa uppdragen att forma och färglägga trianglar använder sig eleverna av några få matematiska termer och distinktioner. Trianglarnas storlek bestäms dessutom oftast genom enkel ruträkning, något som inte kräver en utvecklad teori eller begreppsapparat. Analys av upptäckta relationer eller mönster uteblir därmed i samtalen. Någon samsyn etableras inte. Det konkreta klippandet, ritandet, färgläggandet eller mätandet i sig utgör alltså ingen garanti för att aktiviteterna styrs in mot prövandet av matematiska perspektiv och resonemang. Läraren måste här vara beredd att introducera och ge sammanhang åt termer och begrepp om eleverna skall få tillgång till avsedda matematiska instrument. Eleverna tar inte det steget själva vid denna typ av uppgifter.

© Studentlitteratur

Direktiv med uppmaning till eleven att ägna sig åt diskussion och reflekterande verksamhet

Den andra typen av direktiv omfattar uttryck som bevisa, redogöra, prata, diskutera, berätta, fundera, jämföra som inspel till elevernas egna aktiviteter. Med dessa verb vill läraren signalera att eleven skall reflektera och argumentera kring det de gör. Elevernas förhållningssätt i grupperna blir vid dessa uppmaningar helt annorlunda jämfört med föregående. Följande exempel är hämtat från klass A där en grupp som består av fyra elever, tre pojkar (Peter, Göran och Alexander) och en flicka (Sofia).

Exempel 5.

Lärare A:	Det börjar på D. Diagonal. Hur många har hört diagonal? Alla hade hört. Bra. Gör nu detta och nu kanske du behöver ta fram linjalen för att det här ska bli rakt. Okej. Lägg nu pussel och lägg ihop den här rektangeln igen och så ska ni resonera om … ni ska alltså göra en jämförelse mellan rektangelns area. Är du med Erik? Du tycker det här är så kul det ser jag. Rektangelns area och triangelns … jämför arean i en sån här triangel med rektangeln. Ni ska inte mäta. Bara titta, bara ögonmått. En rektangel, rektangelns och en triangel. Om ni lyssnar på ... Ni köpte det direkt.
Alexander:	Alla är olika, eller. Vi kan mäta.
Göran:	Jag tror de är lika mycket.
Lärare A:	En rektangel och en triangel.
Göran:	Ja, det tror jag.
Alexander:	Det kan ju inte vara lika mycket.
Göran:	Nej, det kan det väl inte.
Lärare A:	Om ni lyssnar på, ni köpte det direkt.
Göran:	Vad då dubbelt så mycket.
Alexander:	Om man tar bort den här då blir det dubbelt så litet.
Göran:	Tycker ni att det ska vara så här.
Alexander:	Vad smart.
Alexander:	Om man tar bort den då är arean hälften.
Göran:	Hälften så mycket.

© Studentlitteratur

Göran: Det där är mitt räknehäfte, det behöver du inte skriva i och så linjalen här, använder jag också. Men det spelar ju ingen roll jag är ju van vid att fara illa.
Alexander: Kolla här, titta.
Göran: Jag tror att vi har gjort fel.

Eleverna börjar här samtalet med att diskutera samtidigt som man experimenterar med materialet för att komma fram till en lösning. Man vrider och vänder och tittar på sina urklippta rektanglar och man jämför vad man ser. Eleverna använder i sitt samtal i gruppen uttryck som olika, lika mycket, dubbelt så mycket, dubbelt så litet, arean hälften, hälften så mycket som på olika sätt uttrycker relationer mellan figurerna. Uttrycket hälften vinner till slut i samtalet.

I det fortsatta samtalet i samma grupp vill läraren att eleverna skall ”bevisa” att triangeln är hälften så stor som rektangeln. Själva ordet bevisa är kraftfullt och när vi kommer tillbaka till gruppen, gör medlemmarna tydliga ansträngningar för att just bevisa.

Exempel 6.
Lärare A: Okej, det var ni överens om allihopa, vad sa ni och ni. Då vill jag att ni bevisar det med hjälp av era figurer. Bevisa … ni påstår alltså att triangeln är hälften så stor som rektangeln. Bevisa det med hjälp av era rektanglar.
Göran: Kolla här. Det är helt rätt. Den ena sidan är längre. Jag tror vi får svårigheter att bevisa det här. Kolla här. Kolla här. [Eleven räknar rutor.] Vi mäter.
Peter: Jag vet inte hur man ska mäta.
Göran: Vi sätter ihop. Då måste man klippa.
Alexander: Kan ni ta det där en gång till. Min blir inte så där.
Jenny: Inte min heller.
Alexander: Så ska den vara.
Jenny: Vi hade rätt.

Eleverna räknar rutor, de försöker mäta, de diskuterar hur man kan klippa, de viker sina figurer allt för att hitta en lösning som kan ”bevisa” att triangelns area är hälften av rektangelns. En elev (Göran) i gruppen ger de andra många förslag: ”vi mäter”, ”vi sätter ihop”, ”vi klipper.” Gruppens medlemmar försöker följa Görans initiativ, men en viss osäkerhet råder. Alexander tar över och säger ”så

© Studentlitteratur

ska den vara." Eleverna samtalar om olika sätt att mäta och även om hur man kan sätta ihop figurerna för att finna en lösning. Hela tiden stöttas resonemanget av de figurer man har framför sig. Samtalet i sin helhet tyder på att eleverna är överens om att triangelns area är hälften av rektangelns. Den påtagliga osäkerheten återspeglar snarast den svårighet eleverna har med att tolka lärarens uppmaning att "bevisa det med hjälp av trianglarna."

Eleverna får senare av läraren veta att termerna längd och bredd enbart är relevanta för en rektangel. När man talar om en triangel är istället termerna bas och höjd nödvändiga. De nya termerna bas och höjd kan dock även användas på rektangeln. Läraren ger därmed ett nytt perspektiv på hur figurerna och deras egenskaper kan betraktas och beskrivas.

Exempel 7.

Lärare A:	Okej, nu har ni fått veta då att det kallas bas och höjd. Nu vill jag att ni i grupperna resonerar om hur man räknar ut arean på en triangel med hjälp av det som vi nu har gjort hitintills. Prata i grupperna.
Rebecka:	En triangel är ju hälften av rektangeln. Vi mäter hur lång och hur hög får vi fram längden då tar vi den gånger så här och då får vi fram hur hela den här blir.
Fredrik:	Vi måste ju veta vad vi har för längd först.
Rebecka:	Ja, men du mäter här längden och sen höjden och gångar med varandra. Rektangeln var när vi dela den. Så delar vi det med två eftersom triangeln är hälften så stor. Fattar du? Du mäter så i alla fall. Höjden gånger längden så får du fram nånting. Det är arean av hela den här rektangeln som vi hade den här rektangeln som vi hade innan vi delade den till en triangel. Eftersom triangeln är halva rektangeln så tar du och delar arean på två.
Fredrik:	Jag fattar i alla fall. Det är ju smart.
Rebecka:	Att rektangeln är dubbelt så stor. Två trianglar.

Rebecka tar direkt kommandot och utför det som läraren ville, nämligen resonera och prata kring triangelns area. Hon är verkar vara ensam om att tydligt inse hur man ska "dela med två" för att få triangelns area. Med hjälp av den ritade rektangeln och triangeln

© Studentlitteratur

för Rebecka ett resonemang kring ”hur lång” och ”hur hög” den är. Man pratar om en triangel i största allmänhet men utgår ifrån den papperstriangel man har framför sig. Trots oklarheter i begreppsanvändningen samtalar eleverna intensivt kring hur man skall räkna ut triangelns area. Samsyn råder dock i gruppen om konstaterandet att ”triangeln är halva rektangeln.”

Läraren vill senare höra hur resonemanget har gått i de olika grupperna och tar fram två elever till tavlan. Eleverna ritar upp en rektangel på tavlan och en triangel inuti. De ska förklara för klassen varför triangeln är hälften av rektangeln, men lyckas inte klara ut detta. Läraren är inte nöjd utan säger till eleverna:

Exempel 8.

Lärare A: Jag tror ni får gå tillbaka och resonera hur ni ska formulera det här nu på enklast möjliga sätt.

Alla i den grupp vi följt deltar i det samtal som följer på uppmaningen att ”formulera det här nu på enklast möjliga sätt.”

Rebecka: Vad var det man tog gånger?
Fredrik: Arean gånger nånting.
Rebecka: Du skulle ha fram två tal som blir gånger. Vilka två tal blir det? Vad var det för nånting du mätte?
Martin: Höjden.
Fredrik: Med den här eller förut?
Rebecka: Höjden gånger basen. Sen.
Fredrik: Jaaa.
Rebecka: Höjden gånger basen först. Sen är det? Kommer du … inte ihåg, du kunde det nyss.
Fredrik: Ja, jag kommer inte ihåg det. Det står still i huvudet.
Lärare A: Har ni kommit fram till någonting?
Rebecka: Höjden gånger basen …. sen skulle vi få fram arean på triangeln.
Fredrik: Det står still i huvudet.
Rebecka: Vad är arean på rektangeln? Sen när du jämför rektangeln.
Fredrik: Räkna ut omkretsen. Nej.
Rebecka: Vad är arean på rektangeln?
Lärare A: Ska vi utgå ifrån den här första igen nu då, Mikael. Vi är överens om att den här är en rektangel och jag har

© Studentlitteratur

	delat den i två lika stora delar. Hur stor är arean av triangeln jämfört med rektangeln?
Fredrik:	Lite mindre.
Lärare A:	Lite mindre, jag vill inte ha lite mindre.
Fredrik:	Mycket mindre. Hälften, tack Erik. Det där är hälften.
Lärare A:	Jaså var det Erik som sa det, eller hur? Titta! Om jag tar bort den biten. Är du med?
Fredrik:	Ja, nu är jag med.
Lärare A:	Är det sant det? Hur ska vi nu få till ...
Fredrik:	Det där är hälften.
Lärare A:	Ja, hälften av rektangeln. Hur ska vi få till en formel då?

Rebecka tar åter kommandot genom att fråga ”Vad var det man tog gånger?” Hon förefaller nu aningen osäker trots att hon tidigare klarat ut frågan om hur man beräknar arean på en triangel och en rektangel. Hon håller sig till en aritmetisk diskurs när hon talar, och hon försöker få de andra eleverna att tänka i samma banor, alltså att räkna ut någonting. Då kommer från Fredrik, som tidigare sagt ”jag fattar”, lite oväntat påståendet ”arean gånger nånting”. Rebecka försöker få igång samtalet genom att fråga efter ”två tal som blir gånger?” Men plötsligt så byter hon begreppsram från en aritmetisk till en geometrisk genom att försöka fastställa ”Vad var det för nånting du mätte?” Man kommer först fram till ”höjden” och sedan till ”höjden gånger basen”. Den tidigare använda termen längd är här utbytt mot bas. Elevernas problem är nu att aritmetiskt uttrycka det de kommit på tidigare som ”halva rektangeln” eller ”hälften av rektangeln”.

Läraren bryter dock in i gruppen, övertar Rebeckas roll som ledare av samtalet och börjar om från början. När läraren säger ”vi är överens om att den här rektangeln”, återgår hon helt kort till diskussion om den konkreta praktiska situationen. Hon gör det för att få in det operationella uttrycket ”delat i två delar” i samtalet. Läraren är emellertid inte konsekvent utan glider tillbaka till relationer genom frågan ”Hur stor är arean av triangeln jämfört med rektangeln?” Fredrik är inte med på det inflikade snabba perspektivbytet. Han ser på förhållandet mellan figurernas storlek och svarar med den relativa frasen ”lite mindre”. Han uppfattar inte lärarens vink eller antydan om ”delat med två” – något som Rebecka

© Studentlitteratur

påpekat tidigare. Läraren är inte heller nöjd; hon vill inte ha ”lite mindre” som svar. Fredrik fortsätter i nästa tur av samtalet med ”mycket mindre” vilket är ytterligare en indikation på att han inte identifierat den diskurs som läraren är ute efter. Han räddas skenbart av en kamrat som flikar in ”hälften” – ett konstaterande som man ju gjort långt tidigare under lektionen. Lärarens mål att laborativt nå fram hela klassen till en speciell verbal formel för bestämning av triangelns area (”basen gånger höjden delat med två”) gäckas under detta pass.

Avslutningsvis tar vi åter upp vilken innebörd elever kan ge begreppet ”bevisa”. Efter att ha konstaterat att triangeln är hälften av rektangeln skall man nu försöka ”bevisa” detta.

Exempel 9.

Lärare C: Hälften, ja. Ni har ju börjat bevisa det lite. Använd sax, penna och bevisa.

Följande exempel illustrerar några av de problem som uppstår för eleverna i grupparbetssituationen.

Måns: Jag bevisar att. Vad skulle vi bevisa? Det är jätteenkelt.
Beatrice: Min är lite knäckt.
Kalle: Visa på en ny i stället.
Beatrice: Jag har bevisat att det går att rita in.
Kalle: Om man viker in här har jag bevisat.
Måns: Det blir samma yta.
Kalle: Viker in så mot kanten.
Stina: Jag klipper av bägge kanterna.
Måns: Min är så kladdig. Ingen tror på att den blir så kladdig.
Kalle: Den här kan vi också fixa så att den blir hälften.
Beatrice: Den blir en fyrkant, kvadrat.
Stina: Kan du vika allt i papper? Jag kan inte vika någonting.
Måns: Det får man ju lära sig att vika om man vet hur man ska vika.
Kalle: Grunderna, att kunna vika grodor, fast jag kan inte, de hoppar inte så.
Stina: Jag kan vika flygplan.
Kalle: Det finns två böcker på skolan. Däri finns det massor.
Måns: Titta otroligt snygg!
Kalle: Den har inte varit inne på skolan på länge. Vet du när man kan köra på datorn?

© Studentlitteratur

Måns: Nej, det är på onsdag. Det är rätt. Vi kom också på det. Här inne är en triangel. Här ute är också en triangel. Då har de samma yta. Här är beviset.

Eleverna sitter med sitt material, viker in kanter och klipper. Man gör sina egna manipulationer för att – som man menar – komma fram till ett bevis. Eleverna samtalar kring att papperet är ”kladdigt” och de diskuterar en del andra aspekter. Resonemanget förs kring materialet. Samtalet glider så småningom över på annat – som att vika grodor, flygplan och så vidare. Det är tveksamt om eleverna här har en klar bild av vad det innebär att ”bevisa” något i detta sammanhang. I samtalet finner man inte något explicit reflekterande med hjälp av matematiska termer om relationer mellan figurerna. Läraren märker osäkerheten och griper in och frågar om det inte finns ”något annat sätt att bevisa” än det vikande som eleverna ägnar sig åt.

Exempel 10.

Lärare C: Bevisa. Finns det något annat sätt att bevisa?

Kalle: Finns det något annat sätt att bevisa? Man kan klippa itu. Man kan göra den mindre. Man kan ta en halv.

Läraren: Man kanske inte behöver vika.

Kalle: Jo, det tycker jag. Så där kan man göra. Det går att bevisa. Så där kan man göra sen hälften av det är ju det. Det blir en fyrkant det viker man in så triangeln. Sen viker man så.

Kalle: Man har den här.

Måns: Man kan klippa där. Man kan göra den mindre. Man kan ta en halv. Det går att bevisa.

Kalle: Så här kan man vika. Så där kan man göra, så hälften av den är det där en fyrkant, sen en triangel och det där, en fyrkant det går att bevisa att det här blir lika stort. Det blir ju lika stort. Det blir ju hälften ändå om man har en triangel uppdelad i tre delar, viker du ihop den lika stort, då är det här lika stort som de här kanterna och det är lika stort som en kvadrat, så viker man in där det är lika stort som triangeln och det är lika stort som en kvadrat.

Måns: Det här blir hela tiden en rektangel.

© Studentlitteratur

Eleverna beskriver med hjälp av sina pappersfigurer att ”hela tiden” blir det ett visst förhållande mellan triangel och rektangel. Eleverna ser ett samband som kan uttryckas med ”hälften” eller ”en halv”. Men det är ändå oklart om eleverna här är medvetna om vad det innebär att ”bevisa” att en triangels area är hälften av en rektangels. Den speciella perspektivering som det innebär att fastställa riktigheten i ett påstående känns ovan för eleverna.

Diskussion

I samtliga klassrum som vi har tittat in i råder hög aktivitet. Elever klipper, målar, mäter, ritar, räknar och pratar med varandra och med läraren. Lärarens uppmaningar på göra-nivå genererar verkligen samarbete och samtal. Lärarna i vår studie förefaller sedan lita på att det laborativa materialet är ”genomskinligt” för eleverna. Man kan uttrycka det som att läraren ”vill tala om vad eleverna skall leta efter utan att tala om vad de skall finna” (Wyndhamn 1995a, s. 19). Materialet och manipulerandet av detta antas avslöja matematiska samband som direkt kan upptäckas och uppfattas av eleven – ett förhållningssätt som är tydligt Piaget-inspirerat. Med hjälp av det laborativa materialet förväntas dessutom eleverna samtala om olika matematiska företeelser och förhållanden. Direktiven på berätta-förklara-nivå uppenbarar dock – som vi sett – brister i elevernas förståelse av eller snarare samsyn på gjorda iakttagelser.

Samtalen förs till allra största delen på ett helt vardagligt språk och utan att de matematiska innebörderna i de termer som används beaktas och preciseras. Det är sällan som skillnader i innebörder mellan uttryck såsom ”sida” och ”bas” eller ”längd” och ”höjd” uppmärksammas och klaras ut. Och när eleverna använder sig av exempelvis de geometriskt definierade begreppen ”triangel” och ”vinkel”, så är de snarast synonymer för de vardagliga ”trekant” och ”hörn”. Den verkligt stora stötestenarna är dock att ”bevisa” formeln och inse att svaret på operationen ”delat med två” har en motsvarighet i relationen ”hälften”.

Ur ett Piagetanskt perspektiv skulle vi kunna säga att en önskad ackommodation uteblir. Eleven ändrar inte sin mentala tankestruk-

© Studentlitteratur

tur så att ny information kan fogas in. Eleven förstår inte omvärlden på ett nytt sätt. Att se och att göra är ingen garanti för att förstå. Den logiska karaktären hos ett bevis noteras dessutom enligt Piaget först när barnet blir äldre, runt 13 år. Ett undersökande arbetssätt leder således inte automatiskt till ökad insikt hos eleverna. Lärarna är påfallande okänsliga inför detta faktum och ingriper därför endast motvilligt i elevernas samtal. I de passager vi registrerat har lärarna för övrigt svårt att tillsammans med eleverna åstadkomma och upprätthålla en samsyn på uppkomna problem.

Med Vygotskianska utgångspunkter skulle vi istället kunna säga att eleven tillägnar sig ny kunskap först genom om- och genomarbetning av olika tolkningar av det praktiska arbetet. Samarbete i form av en ”förhandling” med läraren eller någon annan kamrat (jämför med Rebeckas insatser) öppnar vägen till nya insikter. I ett sådant läge behövs samsyn eller annorlunda uttryckt ett gemensamt perspektiv och ett adekvat språk med vars hjälp man kan tala om det som det fysiska materialet skall åskådliggöra. En tydlig diskurs måste etableras.

Exemplen i föregående avsnitt visar att många diskursiva gränser passeras under ett arbetspass. Vardagliga förklaringsformer och uttryckssätt blandas med matematiska. Olika matematiska områden beträds då det talas dels om geometriska, dels aritmetiska förhållanden.

Andra gränser är mer subtila. Lärarens direktiv presenterade i kedjan göra-berätta-förklara-bevisa ställer stegrade krav på tankemässig ordning och reda inom ramen för en matematisk diskurs. De två förstnämnda aktiviteterna kräver inte den precisering av begrepp som de båda sistnämnda gör. En vardaglig perspektivering är till fyllest. Eleverna kan delta i en livlig diskussion och undvika språkliga luckor genom att hålla upp en triangel, vrida och vända på den, peka på en rektangels bas och så vidare. Men skall man förklara eller bevisa uppkommer behov av ord och språkliga bestämningar. Ett namn eller en beteckning måste introduceras för att frigöra ett förhållande från den ursprungliga konkreta kontexten och göra det till ett begrepp. Denna procedur blir nödvändig när det gäller att observera skillnader hos det som studeras. Därför är terminologin viktig. En rektangel kan sägas ha längd och bredd eller bas och höjd, medan en triangel enbart kan sägas ha bas och höjd. Det är genom kognitiv bearbetning av egna erfarenheter i kombination med för-

 © Studentlitteratur

medlad undervisning som eleven tillägnar sig – som Vygotskij säger – medvetna begrepp.

Sådana medvetna begrepp gör det sedan möjligt att tänka på ett begrepp utifrån ett annat begrepp. Och begrepp är nödvändiga när något skall förklaras eller bevisas. Att förklara är att utreda något så att det kan bli förstått av någon annan. Samsyn är en förutsättning. Det räcker alltså inte med att förstå själv. En förklaring ger bakgrunden eller orsaken till något. Bevisföring tillhör en annan typ av diskurs. Det gäller här att anföra fakta och resonera logiskt för att på ett oemotsägligt sätt fastställa riktigheten hos ett påstående.

Eleverna i vår studie nådde i det praktiskt-konkreta fallet fram till att ”triangelns area är hälften av rektangelns area”. Det var något man tydligt ”såg” framför sig. När läraren sedan ber eleverna att bevisa sambandet uppstår förvirring. Perspektivbytet infinner sig inte. En elev i exempel 10 ser dock att ett visst förhållande måste gälla ”hela tiden.” Eleven gör här försök att generalisera resonemanget men möter ingen vidare förståelse. Lärarna vill gärna att eleverna skall säga ”basen gånger höjden delat med två” med utgångspunkt i ”hälften.” Samtalet befinner sig här i en strikt matematisk diskurs. Läraren tycker förmodligen att detta borde vara självklart för eleverna. Men det läraren glömmer är att denna tolkning är resultatet av inskolning i en speciell kultur som institutionaliserat vissa betraktelsesätt och inte andra. Har man en gång i tanken skapat det matematiska sambandet och tillämpat det på ett framgångsrikt sätt är det svårt att föreställa sig att det skulle kunna vara på något annat vis (Goodman 1986). Lärarna anlägger ett perspektiv på det laborativa materialet just som medlemmar i en speciell skolkultur och tar det inträngade sättet för givet och menar att matematiken finns där – färdig att återupptäckas av eleverna.

Vi har i denna studie tagit del av hur elever uttrycker sig i ord och handling när de på lärarens uppmaning ger sig i kast med olika matematiska problem. Det är lätt att få eleverna att samarbeta och samtala. De är uppenbarligen väl tränade i att ta sig an ett problem och arbeta i sådana former. Men frågan är om de förmår identifiera de sätt att resonera som läraren förväntar sig. Vi vill påstå att eleverna trots variation i direktiv oftast anlägger ett vardagligt och handlingsorienterat perspektiv på förelagda uppgifter. Tiden verkar för knapp för att de skall bli förtrogna med en matematisk diskurs (jämför Fredriks osäkerhet i exempel 8). Eleverna hinner inte känna

© Studentlitteratur

betydelsen och bruket av nya termer och än mindre använda sig av dem i sitt eget samtal och sin egen tankeverksamhet. Det matematiska språket är grunden för analys och generaliseringar. Om man nöjer sig med det vardagliga språket, riskerar man att stanna upp sitt lärande. Läraren har en viktig uppgift i att markera och hos eleverna medvetandegöra diskursiva gränsöverskridanden och perspektivbyten. Samsyn innebär samordning av perspektiv och samordning kräver stöd.

Noter

1 Detta betyder dock inte att kommunikation och tänkande är identiska företeelser. Kommunikation är en yttre och observerbar företeelse som sker i interaktion med andra och som följer komplexa regler för socialt samspel. Tänkande är en ”tyst” och ”privat” aktivitet som sker utan att man behöver ta hänsyn till att kommunikationen skall vara förståelig eller acceptabel för en samtalspartner. (Se vidare Säljö 2000, s. 107ff.)

Litteratur

Bergqvist, K. (1990) *Doing schoolwork*. Linköping: Linköping Communication Studies.

Bergqvist, K., & Säljö, R. (1994) Conceptually blindfolded in the optics laboratory: Dilemmas of inductive learning. *European Journal of Psychology of Education, 9*(2), 149 –158.

Donald, M. (1991) *Origins of the modern mind. Three stages in the evolution of culture and cognition*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Edwards, D., & Mercer, N (1987) *Common knowledge*. London: Methuen.

Freudenthal, H. (1991) *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

IEA-undersökningar, International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

Goodman, N. (1986) Mathematics as an objective science. I: T. Tymoczko (red.): *New directions in the philosophy of mathematics* (s. 79–94). Boston: Birkhauser.

 © Studentlitteratur

Lave, J. (1988) *Cognition in practice*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Minick, N. (1993) Teachers' directives: The social construction of "literal meanings" and "real worlds" in classroom discourse. I: S. Chaiklin & J. Lave (red.): *Understanding practice* (s. 343–374). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Nelson, K. (1996) *Language in cognitive development. The emergence of the mediated mind*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Ong, W. (1982) *Muntlig och skriftlig kultur*. Göteborg: Anthropos.

Piaget, J.(1973) *Språk och tanke hos barnet*. Lund: CWK Gleerups.

Riesbeck, E. (1995) Från start till mål. En deskriptiv studie av matematiska samtal i klassrummet. Linköpings universitet: Tema Kommunikation.

Riesbeck, E. (2000) Interaktion och problemlösning. Att kommunicera om och med matematik. Institutionen för pedagogik och psykologi, LiU-PEK-R-221, Linköpings universitet.

Rommetveit, R. (1974) *On message structure*. London: Wiley.

Säljö, R. (2000) *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma.

Tomasello, M (1999) *The cultural origins of human cognition*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Voloshinov, V. N. (1973) *Marxism and the philosophy of language*. [L. Matejka & I. R. Titunik, Övers.]. New York: Seminar Press. (Original publicerat 1930).

Vygotsky, L. (1978) *Mind in society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotsky, L. (1986) *Thought and language*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Wistedt, I. (1991) Att se matematiken i vardagen – en fallstudie. Rapport 2 från projektet Vardagskunskaper och skolmatematik. Stockholm: Stockholms universitet, Pedagogiska institutionen.

Wertsch, J. V. (1998) *Mind as action*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wittgenstein, L. (1995) *Philosophical investigations*. [G. E. M. Anscombe, Övers.]. Oxford: Blackwell. (Original publicerat 1953).

Wyndhamn, J. (1993) *Problem-solving revisited*. Linköping: Department of Communication Studies. Linköping University.

© Studentlitteratur

Wyndhamn, J. (1994) Matematiska samtal i klassrummet – tvärkulturella studier. Presentation av ett intresseområde. Arbetsrapport 1994 från Tema K. Linköping: Linköpings universitet.

Wyndhamn, J. (1995a) Lärarens triangel och elevens trekant. En deskriptiv studie över matematiska samtal i klassrummet. Arbetsrapport 1995:1 från Tema K. Linköping: Linköpings universitet.

Wyndhamn, J. (1995b) *Likt och olikt i två lektionssamtal kring triangelns area*. Arbetsrapport 1995:17 från Tema K. Linköping: Linköpings universitet.

Wyndhamn, J. (1996) Klassrummet som mötesplats. En komparativ studie av matematiska samtal från skolor i tre olika länder. Arbetsrapport 1996:6 från Tema K. Linköping: Linköpings universitet.

Wyndhamn, J., & Säljö, R. (1999) Quantifying time as a discursive practice. Arithmetics, calendars, fingers and group discussions as structuring resources. I: J. Bliss, P. Light & R. Säljö (utg.), *Learning sites: Social and technological aspects* (s. 80–96) Oxford: Pergamon/Elsevier.

Östman, L. (1995) *Socialisation och mening. No-utbildning som politiskt och miljömoraliskt problem.* Uppsala: Acta Universitatis Uppsaliensis.

 © Studentlitteratur

Artikel III

9 Matematisering i en mångtydig verklighet

En studie av elevers förståelse av relationen mellan modell och omvärld[1]

Eva Riesbeck Roger Säljö Jan Wyndhamn

Inledning

Matematikämnet har en central ställning i de flesta skolsystem. Matematikundervisningen syftar till att ge förtrogenhet med ämnet i sig, men under senare decennier har betoningen av matematiken som ett redskap för problemlösning blivit allt tydligare (Wyndhamn, 1997). De kunskaper som förmedlas skall hjälpa människor att tolka information och lösa problem i olika sammanhang; de matematiska kunskaperna skall kunna tillämpas som metaforen lyder.

Den speciella klass av problem som brukar kallas benämnda uppgifter, eller av elever ofta: lästal, har en viktig roll när det gäller att förmedla kunskaper och ge träning i just problemlösning. Här ges, antar man, eleven tillfälle att öva matematiska resonemang och algoritmer på vad som beskrivs som realistiska problemställningar hämtade från en yttre verklighet. Reusser (1995) uttrycker denna idé genom att säga att benämnda tal (word problems) utgör ”an important part of mathematics education, inasmuch as they represent the interplay between mathematics and reality, and they give a basic experience in mathematical modelling” (s. 1).

Vad som här något högtravande kallas matematisk modellering innebär således att händelser, objekt och relationer mellan dessa i omvärlden beskrivs och bearbetas med hjälp av begrepp, symboler och algoritmer hämtade från matematikens värld. När man räknar och tillämpar matematiska resonemang, måste man således bestämma sig för hur relationen ser ut mellan den matematiska begreppsvärlden och dess redskap å ena sidan och en yttre verklighet å den andra. Man måste avgöra hur objekt eller händel-

[1] Den forskning som här avrapporteras har finansierats av Skolverket genom anslag till projektet Matematiska samtal i klassrummet.

 Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

ser skall betecknas med hjälp av siffror och symboler och man måste bestämma sig för vilka typer av operationer som är tillämpliga och fruktbara, givet den frågeställning man har.

Traditionellt har relationen mellan kunskaper och färdigheter i matematik å ena sidan och förmågan att omsätta dem i olika empiriska sammanhang å den andra uppfattats som en tämligen enkel ekvation. Kunskaperna och färdigheterna kommer först. Därefter lär man sig tillämpa. Ofta har man också uppfattat att tillämpningen är tämligen självklar. Kan man sin matematik, så ser man också hur den kan användas för att lösa problem. I skolan har de problem som skall lösas dessutom i regel tillrättalagts så att valet av matematiska operationer varit tämligen entydigt. Man har övat på vad man i princip redan kan. I vetenskapliga sammanhang däremot ägnas ofta mycket tid åt att reflektera kring vilka alternativa modeller som kan vara informativa för att beskriva ett förlopp. Matematiseringen av det man vill förklara och predicera ses som en utdragen process som kräver prövning, diskussion och analys.

Men föreställningen om att användning av matematiska kunskaper i empiriska sammanhang kan ses som en enkel tillämpning har för länge sedan rasat samman. Samspelet är mycket mer komplext. Man kan således visa att människor, exempelvis när man handlar och skall avgöra vad som är bästa köp (se Lave, 1988), hanterar ganska komplexa relationer i det närmaste felfritt utan att använda precisa matematiska algoritmer. När man däremot kräver att exakt samma problem skall lösas som matematikuppgifter i en papper-och-penna-värld, blir resultaten genast mycket sämre. Den amerikanska antropologen/psykologen Sylvia Scribner (1984) visar i en studie av hur lagerhantering i ett mejeri går till, hur ett lokalt, men samtidigt tämligen sofistikerat, sätt att kvantifiera varor vuxit fram. Dessutom menar Scribner sig kunna visa hur försök att tilllämpa vad som kallas skolmatematik i denna miljö leder till betydligt fler fel i hanteringen än det hemgjorda systemet. Under senare decennier har det också vuxit fram ett mer generellt intresse för vad som kallas etnomatematik (d'Ambrosio, 1985) och som analyserar hur människor i olika kulturer och med olika numeriska och matematiska system hanterar kvantifieringar. I Sverige har Inger Wistedt och hennes kollegor (Wistedt, 1994; Wistedt & Martinsson, 1996) i olika studier visat hur komplext samspelet är mellan matematik som ämne i skolan och elevers vardagliga resonerande. Bland annat visar man att de svårigheter elever kan ha att lösa problem ofta är grundade i en obekantskap med hur man skall förstå ett problem när det blir föremål för matematiska övningar.

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

Benämnda uppgifter och tillämpning av matematiska kunskaper

Forskningslitteraturen kring hur elever hanterar benämnda uppgifter är intressant läsning, eftersom resultaten så entydigt pekar på de svårigheter människor har att matematisera resonemang och att gå från en beskrivning i naturligt språk av en företeelse eller ett förlopp till en matematisk tolkning (för en mer utvecklad analys, se exempelvis Greers, 1997, diskussion av så kallade word problems). För analytiska syften kan man välja att betrakta en sådan övergång från ett språkligt system till ett annat som ett slags översättning där uttryckens innebörd i vardagsspråket skall fås att korrespondera med de begrepp och termer man använder i aritmetiska och matematiska sammanhang. Så länge resonemang förs inom matematiken som en analytisk vetenskap, avgörs termernas och begreppens innebörd av inom-matematiska referenser hos uttrycken. Så snart man börjar uttala sig om en fysisk verklighet, uppkommer frågan om hur denna yttre verklighet skall representeras i de språkliga former som matematiken erbjuder. Låt oss förtydliga detta ganska abstrakta resonemang genom några exempel.

Säljö och Wyndhamn (1988) genomförde en enkel studie som illustrerar det problem kring referentialitet, dvs. vad ord, uttryck och symboler syftar på, som kan uppkomma när man löser problem som kräver att innebörden i utsagor uppmärksammas. Mellanstadieelever (årskurs fem och sex) fick i uppgift att lösa en uppgift med följande lydelse:

> En ko ger omkring 18 liter mjölk per dag. Hur många liter mjölk ger kon under en vecka?

Ett problem av detta slag erbjuder få svårigheter. Den korrekta lösningen 7 x 18 föreslås av de allra flesta elever (omkring 90 procent) och oavsett deras prestationsnivå i matematik. Annorlunda uttryckt innebär detta att gången från den språkliga beskrivningen till det matematiska resonemanget i termer av en multiplikation är helt oproblematisk för eleverna. I studien användes emellertid också en annan typ av problem som bygger på ett identiskt matematiskt resonemang, men där relationen till den omgivande verkligheten är annorlunda.

> Kalle går i skolan och har i genomsnitt sex lektioner per dag. Hur många lektioner har han i veckan?

Resultaten på denna uppgift blev annorlunda. Här är det 70 procent av eleverna som löser problemet korrekt och som alltså uppmärksammar att

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

referensen till termen vecka skall vara fem dagar. De högpresterande elevernas resultat påverkas i relativt liten grad av bytet av referens för termen vecka (drygt 80 procent svarar rätt), medan däremot de svagpresterande elevernas resultat går ner till 40 procent korrekta svar. Det sistnämnda problemet är således svårare trots att det ur matematisk synpunkt kan sägas vara identiskt med det föregående i den mening att det (i Sverige) kräver en multiplikation 5 x 6 som lösningsmodell. Det förefaller knappast rimligt att anta att eleverna inte vet att de går i skolan fem dagar i veckan. Inte heller kan man anta att deras kognitiva förmåga brister eller att deras färdigheter i matematik är otillräckliga. Istället kan man förstå deras sätt att göra övergången från beskrivningen av situationen i naturligt språk till den matematiska modellen som ett utslag av att de inte förväntar sig att stöta på denna typ av svårigheter. Detta kan i sig ses som ett tecken på den kommunikativa kultur som matematikundervisning utgör.

De båda belgiska forskarna De Corte och Verschaffel har i en serie studier sytematiskt belyst vilka svårigheter elever har att hantera relationen mellan vad som är sant, riktigt och rimligt i en fysisk verklighet å ena sidan, och hur en matematisk beskrivning av samma företeelse bör se ut å den andra (jämför exempelvis Verschaffel, De Corte & Lasure, 1994; Yoshida, Verschaffel, & De Corte, 1997; se också Reusser & Stebler, 1997, för ytterligare exempel). Deras undersökningar bygger på parvisa jämförelser mellan uppsättningar av vad de kallar S(tandard) problem och P(roblematiska) problem. Ur matematisk synpunkt är dessa båda problemtyper mer eller mindre identiska, men P-problemen fordrar någon form av bedömning av vad uppgiften egentligen handlar om. Man ser den som en utsaga om en fysisk verklighet eller också är den information som ges otillräcklig. De båda följande exemplen (hämtade ur Reusser och Stebler, 1997) illustrerar två P-problem som är olösbara (om man inte gör vissa tilläggsantaganden).

S-problem	*P-problems*
Chris made a walking tour. In the morning he walked 8 km and in the afternoon he walked 15 km. How many kilometres did Chris walk?	Bruce and Alice go to the same school. Bruce lives at a distance of 17 km from the school and Alice at 8 km. How far do Bruce and Alice live from each other?
A boat sails at a speed of 45 km/h. How long does it take the boat to sail 180 km?	John's best time to run 100 m is 17 sec. How long will it take him to run 1 km?

Medan S-problemen har en lösningfrekevens på mellan 80 och 90 procent, är det ytterst få elever (i de flesta studier under 5 procent) som antyder att P-

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

problemen inte går att lösa eller att de innehåller oklarheter. Istället löser man dem som om de vore standardproblem. I de andra exemplet multiplicerar man helt enkelt 10 x 17 och får fram 170 sekunder. Det första problemet löser man antingen genom en subtraktion (17 – 8) eller genom en addition (17 + 8). Detta kan tolkas som ytterligare en illustration av att elever inte förväntar sig att benämnda uppgifter skall innehålla denna typ av svårigheter. Återigen förefaller det orimligt att anta att de flesta elever är okunniga om att man som löpare inte kan hålla samma hastighet över en kilometer som över 100 meter, vilket är den konkreta innebörden i multiplikationen 10 x 17.

Litteraturen erbjuder många ytterligare exempel på hur elever behandlar uppgifter av det sistnämnda slaget som om de vore standardproblem. Det misstag eleverna gör kan emellertid inte reduceras till matematikkunskaper i sig; 10 x 17 blir förvisso 170. Istället handlar det om att man inte uppmärksammar att P-problemen inte innehåller tillräcklig information för att man skall kunna hantera dem. Eleverna bortser emellertid från detta, åtminstone när de arbetar på matematiklektionen. De Corte och Verschaffel, liksom många andra i litteraturen, menar att eleverna inte gör vad man kallar realistiska överväganden – realistic considerations – när man löser denna typ av problem. Man tänker således inte på vad det står i uppgiften och om informationen är rimlig eller tillräcklig.

I en studie på detta tema visar dock Wyndhamn och Säljö (1997) det motsatta. Elever fick gruppvis diskutera sina olika möjliga skolvägar och vilken information vägskyltar med avståndsangivelser faktiskt ger – alltså en motsvarande situation som det nyss nämnda P-problemet. Eleverna gjorde verkligen realistiska överväganden genom att resonera i termer av exempelvis ”Det beror på …”. Eleverna kunde själva föra in olika antaganden i diskussionen och därmed visa att entydiga svar inte alltid kunde ges på vissa frågor.

Att matematisera sin omvärld är således en fråga om att tolka världen i de symboler och i de operationer som matematiken tillhandahåller. Symbolerna och operationerna skall tjäna som medel för att argumentera om relationer mellan storheter. Vad forskningen om elevers sätt att hantera benämnda tal visar är att elever ofta läser in förutsättningar i problemen som inte är givna eller som är orimliga om man tar hänsyn till vad problemen handlar om. Den matematiska logiken att 10 x 17 är 170 går inte att tillämpa på en fysisk verklighet som löpning i uppgiften ovan, medan den däremot skulle fungera utmärkt om den första tidsangivelsen avsåg den tid det tar för en traktor att färdas 100 meter respektive 1 kilometer. På samma sätt har uttrycket vecka olika innebörder i olika sammanhang; en arbets-

 Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

eller skolvecka är fem dagar (för de flesta) medan en kalendervecka är sju dagar. Matematisering förutsätter därför en medvetenhet om att betydelsen hos språkliga utsagor alltid måste förstås situerat och i relation till en konkret miljö. Översättningen mellan språken – det naturliga och det matematiska – måste ta hänsyn till de restriktioner och villkor som är giltiga i ett specifikt sammanhang.

Problemlösning i en mångtydig verklighet

Även om skolsituationen i allmänhet presenterar standardproblem, kan man anta att i många andra situationer är matematisering en fråga om att lära sig inse relationen mellan matematikens språk och vad som gäller i en yttre verklighet. Argumentationens giltighet hänger på att de matematiska symbolerna och operationerna används på ett visst sätt och att de villkor som finns är uppfyllda. Att räkna ut avståndet mellan 16 och 31 är en sak om man skall bestämma skillnaden mellan hur mycket pengar två personer har, en annan sak om man skall fastställa hur många dagar en idrottstävling pågår om den börjar den 16 juli och slutar den 31 (Wyndhamn & Säljö, i tryck). Att dividera 1128 med 36 blir 31,33, men om man skall räkna ut hur många bussar som behövs för att transportera de 1128 eleverna i en skola om varje buss tar 36 barn, så blir det rimliga svaret 32 (eftersom en tredjedels buss är en knepig enhet i just detta sammanhang).

Den fråga vi ställde oss som utgångspunkt för vår undersökning är hur elever resonerar om de hamnar i en situation där det matematiska resonemanget förutsätter att man tar ställning till vad som är en rimlig matematisk modell. Stommen till den uppgift vi valde har ingått i provbanken för den nationella utvärderingen i matematik för årskurs fem (men har, såvitt vi vet, inte använts). I vår version är uppgiften annorlunda i den mening att flera beräkningar är möjliga. Uppgiften var formulerad på följande sätt:

> Två pojkar, Kalle och Martin, ska hjälpa Niklas att kratta löv på hans tomt. Tomten är 1200 kvadratmeter.
> Kalle krattar i fyra timmar 700 kvadratmeter och Martin i två timmar 500 kvadratmeter. De får 180 kr tillsammans för arbetet. Hur ska pojkarna dela på pengarna så att det blir rättvist?
> Visa med dina uträkningar eller på annat sätt när du löst uppgiften.
>
> Kalle ska ha …….. kr
> Martin ska ha …… kr

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

Som framgår är uppgiften avsiktligt mångtydig och man kan tänka sig olika principer för att dela pengarna. Beroende på vilken princip man väljer, blir den matematiska behandlingen olika. Problemet har avsiktligt formulerats så att det innehåller ett ställningstagande om vad som är ”rätttvist”, vilket tvingar fram, som vi skall visa, en diskussion om vad som är rättvist i en situation av detta slag när två kamrater samarbetar. Den princip om rättvisa (är det till exempel hur lång tid man arbetat eller hur mycket man gjort?) som man utgår från kommer således att styra vilka beräkningar man gör. Eller annorlunda uttryckt, den matematiska modellen måste underordnas ett ställningstagande om hur man beter sig i en komplex, sociokulturell verklighet där människor skall dela på pengar för ett arbete de utfört. Och som vi skall se, kommer deltagarnas resonemang att handla om tämligen grundläggande frågor om vad som är rimliga principer för att ge människor ersättning för deras prestationer.

Deltagare och genomförande av studien

Studien genomfördes inom ramen för ett grupparbete bland elever i årskurs 5. Eleverna arbetade i grupper om tre och all konversation spelades in på band. Samtalen skrevs sedan ut. Inspelningarna skedde i ett litet rum bredvid det ordinarie klassrummet, i de flesta fall när klassen hade matematiklektion. Försöksledaren (ER) läste först uppgiften högt för gruppen och sedan fick deltagarna också en skriftlig version. Försöksledaren var närvarande hela tiden och hjälpte eleverna på traven med neutrala kommentarer när de kört fast eller när arbetet avstannade. Hon försökte också få eleverna att verbalisera sina tankar genom att fråga efter bakgrunden till de olika förslagen och genom att summera vad man sagt.

Sammanlagt 26 grupparbeten har spelats in. Eleverna var grupperade efter sina färdigheter i matematik enligt klasslärarens bedömning. Från varje deltagande klass valdes en grupp av hög-, mellan- respektive lågpresterande elever ut. Varje grupp var således homogen och bestod av elever på ungefär samma prestationsnivå i matematik. I redovisningen nedan används beteckningarna (H), (M) respektive (L) efter gruppnumret. Arbetet med uppgiften tog mellan 9 och 20 minuter och genomsnittet för grupperna var 14 minuter. Utskrifterna från samtalen omfattar cirka 32 sidor.

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

Resultat

På en allmän nivå framgår att samtliga grupper på ett eller annat sätt konstaterar att uppgiften är komplicerad och att det inte är självklart hur man skall resonera när man skall dela pengarna mellan Kalle och Martin. I någon mening inser man därför att beräkningarna måste underordnas en analys av problemets natur och av vad det innebär att dela ersättningen rättvist mellan pojkarna. Elevernas diskussion är i denna mening fylld av så kallade realistiska överväganden. Samtidigt är det uppenbart att elevernas resonerande är situerat i den speciella kommunikativa praktik som en matematiklektion utgör. Man arbetar således i allmänhet med antaganden som att det skall finnas en matematisk lösning, att alla uppgifter i problemet skall användas och liknande. Dessa antaganden om vad som räknas som matematik i en klassrumssituation blandas med argument som har med problemställningen att göra på ett ibland ganska svåröverskådligt sätt.

Innan vi går vidare, vill vi påpeka att det i en mening tydligaste resultatet, som vi skall återkomma till, är att ingen av grupperna konstaterar att det inte går att samtidigt använda sig av alla de uppgifter som är givna när man skall fördela pengarna. Istället drivs arbetet framåt av en inställning som innebär att man synes förutsätta att det skall gå att hitta *en* modell som ger en entydig lösning som kan motiveras beräkningstekniskt. Detta är ett intressant fynd och kan återigen knappast förstås som ett utslag av bristande kunskaper eller förutsättningar. Istället är detta sätt att resonera en produkt av den inställning till problemlösning som eleverna förväntar sig i en skolsituation av detta slag med ett benämnt tal.

I grupperna används i princip fyra olika modeller för att resonera. Dessa leder i sin tur till olika beräkningar. De flesta av dessa modeller förekommer på ett eller annat sätt hos samtliga grupper under loppet av diskussionen. Låt oss först betrakta modellerna i deras mer eller mindre renodlade form:

Tabell 9.1

Princip för delning	Illustration	
I) Dela lika (180/2)	Grupp 19 (L)	
	David:	Är det Kalle och Martin som ska dela på pengarna?
	I:	Vad tycker ni andra? (lång tystnad)
	I:	Hur tror ni att de ska bära sig åt nu om de ska dela pengarna rättvist?
	David:	90.
	Henrik:	Då får dom lika mycket var.

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

Tabell 9.1

Princip för delning		Illustration	
II)	Mängden utfört arbete	Grupp 3 (M)	
		I:	Vad får ni reda på i uppgiften?
		Samuel:	Att en krattar 700 kvadratmeter och en annan 500 kvadratmeter.
		I:	Ni ska komma fram till i den här gruppen vad de ska ha betalt och vad som är rättvist.
		Samuel:	Rättvist kan ju vara om Kalle får 100 kronor och den andre får 80 kronor.
		Rikard:	Jag tycker att dom skall få lika mycket.
		Samuel:	Kalle krattar ju mera än Martin gjorde.
		I:	Ja, men varför just 100 kr och 80 kr?
		Samuel:	Det blir ungefär det. 200 kvadratmeter [dvs. skillnaden mellan hur mycket pojkarna krattar]
III)	Tiden man arbetat	Grupp 13 (H)	
		I:	Hur många är det som krattar?
		Carl:	Två.
		Anna:	En krattar i fyra och en i två timmar.
		I:	Vad tycker du om han som krattar i fyra timmar?
		Anna:	Han måste få mer.
		I:	Tycker i det med?
		Gustav:	Ja, han krattar ju bara i två timmar.
IV)	Ackords- eller prestationsprincip	Grupp 2 (H)	Man får väl inte betalt för tiden. Man
		Jenny:	får väl betalt för hur mycket man gör (…) Det är hur mycket de har krattat. Jag tycker vi skall ta hur mycket de krattar. Det är krattningen som är det jobbiga.
		Kattis:	Kalle han krattade i fyra timmar men Martin krattade i två. (…) Men Martin krattade mer på två timmar än vad Kalle gjorde på fyra. På fyra timmar krattade han sju hundra medan Martin på två timmar krattade fem hundra. Martin krattade mer.

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

Samtliga dessa sätt att resonera om hur betalningen skall delas är sociokulturellt rimliga och representerar olika tänkbara principer. Utgångspunkten att Kalle och Martin är kamrater, leder exempelvis ofta inledningsvis till att man argumenterar för att de skall dela lika på det sätt som gruppen som representerar princip I ovan argumenterar. Ingen grupp håller dock fast vid detta förslag särskilt länge och ingen för fram det som sitt slutliga förslag. Det förefaller rimligt att anta att de flesta deltagare inte tror att en så enkel lösning kan accepteras på en matematiklektion. Resonemangen enligt princip II innebär att det är mängden utfört arbete som skall premieras. Att kratta 700 kvadratmeter är en större arbetsinsats än 500 och skall ge mer betalt. Vid den tredje varianten är det tiden som ger utslag. Kalle skall ha mer betalt eftersom han arbetar fyra timmar mot Martins två. I den sista varianten är det principen om betalning efter prestation, ackord, som åberopas. Martin har arbetat kortare tid och inte krattat en lika stor yta, men han har haft ett högre arbetstempo och varit effektivare. Detta bör ge utslag i hur mycket han skall få.

Resonemangen I–IV är således renodlade och förekommer hos de flesta grupper under någon del av arbetet. Samtalen visar också att eleverna för in tämligen sofistikerade resonemang och analogier när de skall argumentera för sin modell. Man är också ofta medveten om att de olika principerna kommer i konflikt med varandra och man argumenterar för vad som är rimligt i situationen. Kattis, som deltar i gruppen som illustrerar ackordsprincipen ovan om att ju mer du gör per timma, desto mer skall du ha betalt, ger en ingående och livfull förklaring till skillnaden mellan att få betalt för tiden man arbetat respektive för hur mycket man gör.

Utdrag 1: Grupp 2 (H)

> Kattis: Nu är du [Jenny] doktor, min pappa är det. Du jobbar från sju noll noll till klockan fem. Karin du är också doktor och du jobbar från klockan åtta till klockan fyra. Men Karin här hon gör åtta operationer på en dag medans Jenny här gör fem. Det gör tre operationers skillnad och hon [Jenny]jobbar mindre. Får deras föräldrar betalt för hur många operationer de gör eller för hur länge de jobbar? För att min pappa säger att i Tyskland och England då får man betalt för hur många operationer man gör, här får man betalt för hur länge man arbetar.

Den intressanta frågan för vår del blir nu hur eleverna översätter dessa principer till kvantifieringar, dvs. hur de matematiserar problemet. Hur lyckas man fastställa vilken modell för beräkning som fungerar, när man skall tolka detta problem i en matematisk språkdräkt?

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

Matematiserande som kommunikativt arbete

I grupperna ges en rad olika förslag till hur den modell för beräkning bör se ut som skall tillämpas. För att ge en inledande överblick kan man först betrakta de principer för delning av pengarna enligt I till IV som kommer upp som första förslag från respektive grupp respektive de man slutar med.

Tabell 9.2 Princip för fördelning av ersättning som framkommer i gruppernas första förslag.

Princip för delning		Första förslag Antal grupper	Avslutande förslag Antal grupper
I	dela lika	11	0
II	tiden	6	14
III	mängden arbete	9	3
IV	ackordsprincipen	0	7

Som framgår är det vanligaste första förslaget att man skall dela lika, det vill säga ta 90 kronor var. Detta förslag överges dock av alla grupper. Möjligtvis är det så, som vi redan påpekat, att detta sätt att resonera inte ger en lösning av problemet som eleverna tycker är tillräckligt sofistikerad för att den skall passa in på en matematiklektion. Att dela 180/2 är för enkelt för att lösningen skall kvalificera som bidrag till arbetet med en matematikuppgift.

När det gäller vad man slutligen bestämmer sig för, får siffrorna i andra spalten tas som ungefärliga. Det är i vissa fall svårt att avgöra vilken princip man använder sig av när man avslutar uppgiften, och i något fall stämmer inte resonemanget man för med den uträkning man gör. Men vi skall inte här fördjupa oss i detta. Det framgår dock tydligt att tiden är den vanligaste modellen för beräkning av hur man skall dela pengarna och att försök att tillämpa ackordsprincipen kommer därefter. Två grupper avger inget slutligt förslag. Låt oss betrakta de olika modellerna lite närmare.

Beräkningar med utgångspunkt i den tid pojkarna använt

I resonemangen som utgår från den tid som de båda kamraterna krattat, är den vanligaste lösningen att man räknar ut hur många timmar de arbetat tillsammans (sex) för att sedan utföra en division 180/6, vilket ger 30 kronor. Enligt denna logik får Kalle 4 x 30 kronor och Martin 2 x 30 kronor. I sin mest distinkta form ser detta resonemang ut på följande sätt.

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

Utdrag 2: Grupp 17 (H)

Ingrid: Det är sex timmar och om man delar 180 med sex och så får Kalle fyra sjättedelar och Martin två sjättedelar.

Nedan följer ett utdrag ur slutet av en gruppdiskussion där man, efter diverse argumentation och med stöd av intervjuaren, också fastnar för just denna uppdelning.

Utdrag 3: Grupp 5 (H)

Daniel: Om jag skulle kratta i fyra timmar och sjuhundra meter och du skulle kratta i två timmar och fem hundra meter, då skulle jag vilja ha mest pengar. För jag har jobbat längst.
Elina: Så egentligen borde Kalle ha mest pengar.
I: Intressant resonemang du för. Om vi går på ditt resonemang, vem ska då ha mest?
Daniel: Då ska Kalle ha mest.
Niklas: Han jobbade ju egentligen dubbelt så länge.
Daniel: Kanske han skulle ha dubbelt så mycket.
Elina: Han krattade ju mycket mer.
Niklas: Han krattade dubbelt så lång tid också.
Daniel: Det var kanske mer löv på hans mark.
Elina: Om jag hade gjort det, då skulle jag vilja ha mest pengar.
I: Ni skulle alltså vilja att Kalle skulle ha mest pengar.
Niklas: Ja.
Daniel: Ja.
Elina: Ja.
Niklas: Kalle borde egentligen få dubbelt så mycket.
Daniel: Jamen han har ju inte jobbat så mycket heller.
Elina: Nej det förstås.
Daniel: Han kanske skall ha en tredjedel.
Niklas: Jag har räknat ut. Dom vill veta vem som får mest.
Daniel: Ja, hur då?
Niklas: Nej, det blir fel.
I: Om ni fortsätter att gå på det resonemanget att Kalle krattar i fyra timmar och Martin i två. Hur mycket ska var och en ha då?
Niklas: Då ska Kalle ha hundratjugo och Martin sextio. Om de krattar lika mycket. Men dom krattade inte lika mycket.
Daniel: Men Kalle ska väl ha mest va? Vi säger att Kalle ska ha mest! Vi säger att det är sju meter och fem meter, det är mycket lättare.
Elina: Det här var svårt. Martin krattar ju mer.
Daniel: Men det är ju mer löv på Kalles mark.

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

I: Det kan ju ha varit så att det var mycket mer löv på Kalles mark.
Niklas: Då ska han [Kalle] ha hundratjugo och han [Martin] ha sextio.

Niklas återvänder här på slutet till att fastställa den uppdelning efter tid som man varit inne på tidigare och som ger uppdelningen 120 mot 60. Det är 14 grupper som fastnar för detta förslag som sin slutliga lösning. Men diskussionen i Grupp 5 illustrerar den grundläggande svårighet som eleverna har, nämligen att hålla fast vid en modell i taget. I detta fall har medlemmarna svårt att se hur de skall kunna integrera det förhållandet att de båda pojkarna inte krattar lika mycket eller lika effektivt under den tid de arbetar. Förslaget att Kalle kan ha haft mer löv på sin tomt som I inför på slutet kommer ursprungligen från gruppen själv och infördes som en tänkbar förklaring till att pojkarna är olika effektiva i sitt krattande. Uppgiften hur många kvadratmeter pojkarna krattar förs också in i vissa diskussioner utan att det görs klart att det finns en oklarhet inbyggd i resonemangen om man försöker kombinera de båda variablerna tid och mängden arbete. I Grupp 22 nedan integrerar Christian båda beräkningsgrunderna i sin argumentation, men utan att kommentera att de båda principerna leder till olika resultat.

Utdrag 4: Grupp 22 (M)

Christian: Den ena snubben han får hundratjugo kronor och den andra får sextio kronor. För Kalle krattar fyra timmar sjuhundra kvadratmeter och Martin två timmar och femhundra kvadratmeter. Sju och fem blir tolvhundra kvadratmeter. Eftersom han gjorde två timmar mer än Martin. Då måste han ju få hundratjugo och sextio.

Det förslag som Christian kommer med här är inte alldeles lättolkat. Han förefaller mena att hans lösning tar hänsyn både till tiden och till mängden arbete men det är inte helt klart hur hans argument ser ut.

Ytterligare en modell för beräkning som tar sin utgångspunkt i tiden pojkarna krattat är följande.

Utdrag 5: Grupp 24 (M)

Kristina: Jag tog hundraåttio och delade det på två, så blir det nittio. Kalle jobbade ju dubbelt så länge, därför ska han ha fyrtiofem kronor till.

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

Utdrag 6: Grupp 25(H)

> Jonathan: Det måste ju vara hundratrettiofem. Först delar man på halva, då blir det nittio och sen har han krattat dubbelt så mycket. Halva på nittio är ju fyrtiofem kronor.

Denna beräkningsprincip och förslaget med 135 respektive 45 kronor till var och en av pojkarna är det slutliga förslaget från två grupper.

Beräkningar som tar mängden arbete och/eller ackordsprincipen som utgångspunkt

Även i de resonemang som eleverna för att på något sätt ta hänsyn till hur mycket arbete pojkarna utfört, finns i allmänhet tiden med som en aspekt av diskussionen. Det är också detta förhållande som komplicerar problemlösningen för grupperna. De beräkningar som inbegriper hänsynstagande till hur mycket pojkarna krattat totalt eller hur snabbt (eller hårt) de arbetat per tidsenhet kompenseras genom en justering som grundar sig på en uppskattning snarare än en beräkning. Man delar på hälften och kompenserar därefter i de flesta fall Kalle för att han arbetat mer genom att kratta 700 kvadratmeter. Detta resulterar i två olika svar. I det ena fallet blir fördelningen 100 respektive 80 och i det andra 110 respektive 70.

Utdrag 7: Grupp 21 (H)

> Nina: Om vi har nittio var, så ska den ene ha mindre och den andre ha mer. Skillnaden bör kanske vara lite större. En ska ha sjuttio och den andre ska ha hundratio.

Utdrag 8: Grupp 22 (M)

> Maria: Jag tror att Kalle får hundra kronor och Martin får åttio kronor. För att Kalle jobbade två timmar längre och två hundra kvadratmeter mer. Därför får han tjugo kronor mer.

I det sistnämnda exemplet är det möjligt att Maria menar att det finns en principiell relation mellan två timmar, två hundra kvadratmeter och tjugo kronor som gör att kompensationen till Kalle bör vara just 20 kronor. Problemet är dock att beräkningen innebär att Kalle kommer att få 40 kronor mer, eftersom det totala beloppet är konstant.

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

De grupper som ger sig in på att försöka väga in prestationsskillnaden mellan de båda pojkarna hamnar i ganska komplicerade resonemang. Dessa är ibland svåra att översätta till en beräkningsprincip som uppfyller de villkor som finns i problemet. Två grupper hamnar i avancerade beräkningar med flera decimaler i syfte att fastställa hur snabbt de båda pojkarna krattade en kvadratmeter. Därifrån vill man sedan extrapolera till en rättvis fördelning som svarar mot arbetstempot. I andra fall går man inte så i detalj utan nöjer sig med att konstatera att det finns en skillnad i arbetstempo och att detta bör ge utslag i betalningen, vilket i detta fall innebär att skillnaden inte blir lika stor som om man gått efter tiden pojkarna arbetat.

Utdrag 9: Grupp 23 (L)

Sara: Tomten är ju tolvhundra kvadratmeter. Kalle krattar i fyra timmar och sjuhundra kvadratmeter.

Lars: Martin krattar ju snabbare (…) Martin jobbar femhundra och två timmar. Han är snabbare.

Sara: Kalle krattar längre och mer

Lars: Martin jobbade flitigare.

Sara: Kalle måste ju ha tjugo kronor mer än Martin för han krattar ju två hundra meter mer.

Lars: Men Martin gjorde det på kortare tid (…) Han är mycket flitigare. Kalle krattade väldigt kort. Ett hundra och åttio (…)
Nej, egentligen Martin jobbar i två timmar och gjorde fem hundra och den andre jobbade i fyra timmar och gjorde sjuhundra. Det är ju tvåhundra mer. Kanske han jobbade i tre timmar sjuhundra. Jag tycker att Martin jobbade flitigare. Det kan ju inte vara en som slöar och får mera pengar för att han gör av med mer tid. Ju snabbare man jobbar, ju mera pengar får man.

Om man ser vilka förslag till fördelning som de 26 grupperna till slut fastnar för (och i många fall med betydande assistans från försöksledaren), finner man, som vi påpekat att modellen att utgå från tiden är den vanligaste. Fjorton grupper stannar för att hålla sig till tiden som utgångspunkt och då hamnar man med fördelningen 120 respektive 60 eller 135 respektive 45. Bland dem som använder prestationsprincipen, så höftar man i allmänhet till hur stor skillnaden skall vara eller också menar man sig finna något samband i siffrorna som ges i uppgiften. I dessa tolv grupper kommer man fram till att fördelningen skall vara antingen 110 mot 70 eller 100 mot 80. I två grupper kan man inte komma fram till något slutligt förslag utan trasslar in sig i olika resonemang som man inte kommer ur.

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

Elevernas svårigheter som diskursivt problem

Det framgår omedelbart av interaktionen att eleverna inte förväntar sig eller är förberedda för ett problem av detta slag. De svårigheter de har är dock av ett något annat slag än dem vi finner i litteraturen kring benämnda uppgifter. Där framgår att eleverna ofta är ovana att göra så kallade realistiska överväganden och tänka efter vad som står i texten om man läser den som en beskrivning av en yttre verklighet och inte bara som en övningsuppgift på matematiklektionen. Den matematiska lösningen blir i dessa fall helt enkelt orimlig om man inte tar hänsyn till vad som står i texten. I vårt fall gör eleverna hela tiden överväganden som innebär att man frågar sig vad som är ett rimligt och realistiskt sätt att resonera. De olika principerna I–IV är var för sig rimliga och kan försvaras utifrån olika förutsättningar. Det är rimligt att man delar lika om man är två kamrater (och oavsett vad man presterat), tiden kan också användas som kriterium (om man arbetat två eller fyra timmar) liksom mängden arbete (om man krattat 500 eller 700 kvadratmeter) eller prestationen (som ett uttryck för hur snabbt eller hårt man arbetat). Trots att eleverna gör alla dessa överväganden är deras arbete tämligen osystematiskt och de flesta grupper har också i slutet känslan av att de inte lyckats hantera problemet på avsett sätt.

Det förefaller inte troligt att eleverna saknar kognitiv förmåga eller kunskaper för att lösa ett problem av detta slag. Istället menar vi att de svårigheter de har är av två slag, den ena har att göra med den situation de befinner sig i, den andra med att de är ovana vid att göra den typ av analys som detta problem förutsätter.

Den första typen av svårighet innebär att man försöker hantera problemet som en matematikuppgift eller med andra ord elevernas tänkande är situerat i den kommunikativa miljö som matematikundervisningen utgör. Detta innebär bland annat att man under större delen av sitt arbete förutsätter att det skall finnas en lösning som samtidigt tar hänsyn till alla faktorer. Det innebär också att all information som nämns i talet skall vara med.

Utdrag 9: Grupp 17 (H)

> Martin: Kalle krattar ju i fyra timmar men om vi säger så här och om Martin krattat i två timmar, då skulle det vara löst för länge sedan. Men nu stod det kvadratmetrarna och då måste man räkna ut hur mycket de arbetar per timme. Det är därför kvadratmetrarna står med.

Vad Martin uttrycker kan ses som utslaget av en specifik socialisation som skapar vissa typer av förväntningar (men inte andra). Det kan inte vara så

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

enkelt som att man bara skall använda de sex timmarna, då blir problemet alltför lätt för att stämma in på förväntningarna. Man måste ta in kvadratmeterna också för att de finns angivna och för att få en beräkningsmässigt tillräckligt komplicerad modell.

Det underförstådda antagandet att det skall finnas en lösning som bygger på den information som ges illustrerar också det som enligt vår mening är den mest grundläggande svårigheten för deltagarna. Denna har att göra med deltagarnas oförmåga att göra *ett antagande* om vilken modell man skall följa och *sedan* temporärt fullfölja resonemanget inom ramen för *denna* modell. Istället för att beteckna detta som ett problem om bristande förkunskaper eller förmågor i språkligt eller matematiskt hänseende (vilket lätt leder till cirkelresonemang), skulle vi vilja karaktärisera detta som ett diskursivt (Harré & Gillett, 1994; Resnick, Pontecorvo & Säljö, 1997) problem som har att göra med ovanan vid att inse på vilken nivå och i vilken kontext ett argument är giltigt. Vad som händer i diskussionen är således att man blandar modellerna och kommer med argument och motargument utan att ta hänsyn till vilka förutsättningar dessa bygger på. Låt oss illustrera detta med ett utdrag ur Grupp 7(H), som skiftar mellan principerna utan att man märker detta.

Tabell 9.3

	Princip	
Mängd	Tid	Ackord/Prestation
Daniel: Han gjorde mer. Han [Kalle] gjorde sjuhundra och han [Martin] gjorde femhundra …		
	Daniel: Den ena jobbar dubbelt så mycket som den andra (…)	
		Daniel: Den som jobbar två timmar mer ska ha mer än nittio. Han som jobbar i två timmar, han ska ju ha lite mer för han gör ju femhundra meter. Det är ju inte så mycket mindre än sjuhundra meter.

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

Tabell 9.3

	Princip	
Mängd	Tid	Ackord/Prestation
	Sofia: Det beror väl på hur länge han jobbar. Man måste tänka på timmarna också (…)	
Daniel: Någon gjorde sjuhundra någon femhundra och då skiljer det tvåhundra.		
		Ida: Martin måste ju få lite mer eftersom han gjorde det så snabbt (…)
Daniel: Jamen, han hade ju mindre.		
		Ida: Jamen han gjorde det ju mycket snabbare.
Daniel: Ja för att han hade mindre.		
	Daniel: Kalle jobbade i fyra timmar och han i två timmar. Sofia: Ja, det är ju dubbelt så mycket.	
Daniel: Om man tar sjuhundra delat på två, då blir det trehundrafemtio. Och då blir 150 mer än hälften [dvs. 600]. Då bör det bli lite mer för det, eftersom man jobbar hälften så mycket i tid. Hur mycket? Ida: Hur mycket? Daniel: Tiden behöver man väl inte bry sig om.		
		Sofia: Både och.

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

Tabell 9.3

	Princip	
Mängd	Tid	Ackord/Prestation
	Ida: Han gjorde fyra timmar och han gjorde mera. Han gjorde ju två timmar mindre.	
Sofia: Varför ska han ha hundra och han åttio? Daniel: Hur stor del av arbetet de gjorde. Ida: Tomten är 1 200. Daniel: Ja, man ska räkna ut hur stor del av arbetet de gjorde. Ida: tillsammans.		

Vi behöver inte diskutera utdraget i detalj, utan huvudpoängen är att illustrera att man i diskussionen identifierar de olika principer som är tänkbara. Men det som gör resonemanget oklart – också för deltagarna – är att man inte avgränsar principerna från varandra och identifierar när man talar inom var och en av dem respektive när man tar steget över till någon annan. Man kör således inte den ena principen i botten för att se vad den leder till, för att därefter övergå till nästa för att se vad den leder till. Istället kommer motargumenten mot ett förslag ofta ifrån en annan modell, utan att man klargör att nu har förutsättningarna för beräkningen förändrats. I de inledande tre yttrandena ser vi hur Daniel själv vandrar mellan de tre modellerna utan att uppmärksamma att de är olika i sina förutsättningar och implikationer. Sofia kommer därefter in och påpekar att man måste ta hänsyn till tiden och Daniel svarar återigen att man måste tänka på arealen de krattat. Ida kommer i sitt första inlägg med ett prestationsargument. Och så förs diskussionen vidare.

Att vi betecknar detta problem som diskursivt till sin natur innebär att det handlar om hur man för resonemang och hur man avgör vilka argument som hör hemma inom en modell och vilka som innebär att man går över till en annan, delvis konflikterande, modell.

Vilken roll spelar då elevernas matematiska förmåga i sammanhanget? Vi skall inte fördjupa oss i denna fråga i detalj. Det finns vissa skillnader

 Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

som är noterbara, men vad gäller den principiella svårigheten med denna typ av uppgift är grupperna inte så olika. Grupperna som betecknats som högpresterande för en mer intensiv diskussion och penetrerar de olika modellerna längre och mer i detalj. Däremot förefaller de inte mer förberedda på att hantera denna typ av problem. Också dessa grupper förutsätter att det finns en lösning som tillvaratar all information och att denna lösning går att finna. Därför hamnar de också i samma svårigheter som övriga grupper. Eleverna som bedömts som lågpresterande fastnar oftare för den modell som innebär att man går efter tiden man använt och bortser från den övriga informationen. Detta är en modell som är räknemässigt hanterlig och relativt lätt att fullfölja.

Slutsatser

De i matematikundervisningen så ofta förekommande benämnda uppgifterna återspeglar uppfattningen att ”matematik finns runt omkring oss”. Matematik inryms exempelvis i många naturliga och vardagsnära sammanhang.

Eleverna föreläggs därför ofta sådana kortfattat beskrivna situationer och elevernas uppgift är att upptäcka och frilägga matematiken och med dess hjälp lösa något uppkommet problem. Eleven har att avgöra hur objekt eller händelser skall betecknas med hjälp av symboler och bestämma sig för vilka ”matematiska” operationer som är tillämpliga. Den information som ges är oftast avpassad så att ”frigörandet” (extraktionen) av en matematisk modell underlättas. Efter diverse symbolmanipulationer skall ett framräknat resultat ”återtolkas” till omvärlden eftersom eleven även förväntas göra vissa realistiska överväganden.

De undersökningar som gjorts kring hur elever handskas med benämnda uppgifter visar att eleverna befinner sig i en komplex situation. Analytiskt brukar man beskriva denna som att en text på naturligt språk skall översättas till en annan text på ”matematiska” eller att en kognitiv pendling mellan två världar (matematisk modell och omvärld) skall ske. De svårigheter eleverna ställs inför kan dock inte enbart reduceras till att sägas omfatta hantering av information som ges externt i uppgiftstexten i kombination med deras tidigare inlärda fakta. Informationen må sedan vara tillräcklig, ofullständig eller missvisande. Eleverna ser informationen som figur och försöker att finna en lämplig bakgrund att tolka den mot.

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

Det är därför förståeligt att eleven under en matematiklektion ibland stannar kvar i den matematiska världen och låter den matematiska syntaxen helt bestämma ett svar på ett praktiskt problem. Bakgrunden utgörs av den matematiska modellen – en bakgrund som förstärks av själva den matematiska skolkulturen (jämför även Bruner, 1996). Till denna kultur hör just bland annat de benämnda uppgifterna som i stor mängd föreläggs eleverna. Problemen är omgärdade av tysta antaganden som exempelvis att varje uppgift är lösbar, att uppgiften innehåller all nödvändig information för dess lösande, att uppgiften kan lösas med den kunskap eleven redan besitter, att det finns en enda korrekt tolkning av problemet och att det finns ett enda korrekt svar. Skolas man in i en sådan ordning kan det sedan vara både svårt och omotiverat att ingående reflektera över ett problems faktiska karaktär.

Vi har här velat belysa och beskriva elevernas situation ur ett alternativt perspektiv som betonar kunskapers och färdigheters diskursiva natur. Perspektivet öppnar dessutom möjliga undervisningsmetodiska vägar även långt utanför matematikämnet. Med en diskurs menar vi ett systematiskt sätt att tänka, tala och argumentera om en företeelse. Östman (1995) uttrycker detta som att diskurser är sätt att utesluta och innesluta mening om företeelser i enlighet med vissa ”regler”. När vi talar om vardagliga saker rör vi oss inom en viss diskurs. Talar vi om matematiska förhållanden rör vi oss inom en annan.

En enskild individ befinner sig ständigt i snittet av överlappande diskurser. Därför måste man som individ vid vissa tillfällen orientera sig för att utröna vilka regler som gäller i en specifik diskursiv praktik. Att en sådan orientering inte är oproblematisk visar exempelvis den refererade studien om vecka. De flesta av de högpresterande eleverna passerar diskursiva gränser och låter en vecka omfatta sju eller fem dagar beroende på sammanhanget. Lågpresterande elever stannar kvar inom en diskurs med ”regeln” en vecka är sju dagar. Här syns att det alltså inte är fråga om en enkel och direkt översättning från ett språk till ett annat.

Exemplet med vägskyltarna visar att elever mycket väl kan diskutera ett öppet problem och själva tillfoga förutsättningar under formen ”Om …, så …”. Eleverna gör dessa realistiska överväganden spontant därför att problemet är lyft ur den matematiska skoldiskursen med sina ”regler”. I det vardagliga (”neutrala”) samtalet om vägskyltar kommer elevernas egna erfarenheter in som extra informationskälla och ger uppslag till undersökning av olika alternativ.

Eleverna i föreliggande studie mötte en annan typ av problem i och med att oförenliga förutsättningar ges i uppgiftstexten. För att klara detta måste

 Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

man hålla sig till en viss typ av diskurs. Man måste göra en analys som följer ett mönster av följande karaktär: Om vi antar att man fördelar inkomsten efter hur lång tid man arbetat, vad får vi då? Om vi antar att man fördelar efter vilken prestation man utfört, vad får vi då? och så vidare, för att därefter göra en jämförelse av utfallet. Resonemanget blir alltså av argumenterande och deduktivt slag. En tes eller en omständighet leder fram till ett visst resultat som man skall ta ställning till. Är utgångspunkterna för resonemanget preciserade gäller det att hålla fast vid dessa.

Eleverna lyckas i vår studie inte med att hålla isär de olika resonemangskedjorna. Eleverna reder inte ut hur logiken ser ut och vilka argument som är giltiga i ett givet ögonblick. Istället anförs skäl, belägg eller information hörande till olika matematiska modeller utan att man frågar sig om just den aktuella modellen kan ta hänsyn till detta.

I alla grupper gör man emellertid realistiska överväganden och ägnar mycket tid åt att diskutera hur man skall lösa problemet på ett rimligt sätt. I nästan alla grupper är man också missnöjd med att man inte lyckas hitta en lösning som hanterar all information som ges.

Eleverna behöver lära sig bedöma vad man kan hantera inom ett visst resonemang och dess logik, och vad som faller utanför. Samtidigt som våra deltagare har svårigheter med att göra dessa bedömningar när de resonerar, illustrerar vår undersökning att en lärare förmodligen mycket lätt skulle kunna få dem att inse att det är just detta som är problemet. Eleverna bör alltså uppmärksammas på hur man på ett medvetet sätt kan passera diskursiva gränser, växla mellan för olika situationer avpassade diskurser och välja och använda begrepp och termer för just ett särskilt resonemang. Ur det här antydda perspektivet kan därför lärande sägas innebära att bli bekant och förtrogen med en viss diskurs.

Referenser

Bruner, J. S. (1996). *The culture of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press

D'Ambrosio, U. (1985). "Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics." *For the Learning of Mathematics*, 5, 44–48.

De Corte, E., Verschaffel, L. Lasure, S., & Borghart, I. (i tryck). Real-world knowledge and mathematical problem-solving in upper primary school children. I J. Bliss, P. Light & R. Säljö (Utg.), *Learning sites: Social and technological aspects*. Pergamon/Elsevier, Oxford.

Greer, B. (1997). "Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems." *Learning and Instruction*, 7(4), 293–307.

Harré, R., & Gillett, G. (1994). *The discursive mind*. London: Sage.

Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Resnick, L., Pontecorvo, C., & Säljö, R. (1997). Discourse, tools, and reasoning. I L. Resnick, R. Säljö, C. Pontecorvo & B. Burge (Utg.), *Discourse, tools, and reasoning. Essays on situated cognition* (s. 1–20). Berlin and New York: Springer.

Reusser, K. (1995, Augusti). The suspension of reality and sense-making in the culture of school mathematics. The case of word problems. Paper presented at the Sixth Conference of the European Association for Research on Learning and Instruction, Nijmegen.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). ”Every word problem has a solution – The social rationality of mathematical modeling in schools.” *Learning and Instruction*, 7(4), 309–327.

Scribner, S. (1984). Studying working intelligence. I B. Rogoff & J. Lave (Utg.), *Everyday cognition: Its development in social context* (s. 1–40). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Säljö, R., & Wyndhamn, J. (1988). ”A week has seven days. Or does it? On bridging linguistic opennenss and mathematical precision.” *For the Learning of Mathematics*, 8(3), 16–19.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). ”Realistic considerations in mathematical modeling in the elementary school.” *Learning and Instruction*, 4, 273–294.

Wistedt, I. (1994). ”Reflection, communication, and learning mathematics: A case study.” *Learning and Instruction*, 4(2) 123–138.

Wistedt. I., & Martinsson, M. (1996). ”Orchestrating a mathematical theme: Eleven-year olds discuss the problem of infinity.” *Learning and Instruction*, 6(2), 173–186.

Wyndhamn, J. (1997). Från räkning till matematik. Om matematik och matematikämnet i de senaste läroplanerna. Linköping: Arbetsrapport. Linköpings universitet (ITL).

Wyndhamn, J., & Säljö, R. (1997). ”Word problems and mathematical reasoning – a study of children’s mastery of reference and meaning in textual realities.” *Learning and Instruction*, 7 (4), 361–382.

Wyndhamn, J., & Säljö, R. (i tryck). Quantifying time as a discursive practice. Arithmetics, calendars, fingers and group discussions as structuring resources. I J. Bliss, P. Light & R. Säljö (Utg.), *Learning sites: Social and technological aspects*. Oxford: Pergamon/Elsevier.

Yoshida, H., Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). ”Realistic considerations in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have the same difficulties?” *Learning and Instruction*, 7(4), 329–338.

Östman, L. (1995). *Socialisation och mening. No-utbildning som politiskt och miljömoraliskt problem*. Uppsala: Acta Universitatis Uppsaliensis.

 Kopiering av kurslitteratur förbjuden. © Studentlitteratur

Artikel IV

Det hänger på decimalen! Om hur vi formar och bygger meningsmönster i vår omvärld

Eva Riesbeck

Denna studie är ett exempel på hur vi bygger meningsmönster i vår omvärld. Vårt lärande och vår kunskap om omvärlden börjar i den värld som vi kan kalla vår livsvärld. Dissonansen mellan miljön i och utanför skolan visar sig tydligt inom skolmatematiken. Elevers tolkningar av vardagsuppgifter i matematik kan vara ett hinder för deras lärande. Fokus för studien är hur språket i den kommunikativa situationen eller aktiviteten kan förstås som en hjälp för elevers meningsbyggande. Kontextens och kommunikationens betydelse för matematikundervisningen visas med hjälp av en textuppgift, som behandlar decimaler. Genom delaktighet och interaktion i dialogen finns det möjlighet för elever att utveckla nya meningshorisonter i matematiken.

Några teoretiska överväganden

Utgångspunkten för följande studie är ett intresse av att förstå frågor kring hur vi som människor formar och bygger – konstituerar – meningsmönster i vår omvärld. Detta kan tänkas ske på olika sätt. Att skapa och ge mening och innebörd i det människan ser, hör och gör är en grundläggande förmåga som gör henne särskilt läraktig. Vårt lärande och vår kunskap om omvärlden börjar i den värld vi dagligen lever i, erfar, upplever, talar om och tar för given. Varje människa tolkar och förstår något nytt och obekant, främmande eller annorlunda mot bakgrund av det hon redan kan, känner till eller är bekant med (Ödman, 2004). Människor handlar inte utifrån någon slags objektiv verklighet utan från sin förståelse av en situations eller en företeelses innebörd. Det betyder att en problemställning, ett fenomen eller vad det nu kan vara kan ges mening på flera olika sätt. Det finns – uttryckt på ett annat sätt – ett tolkningsspelrum

Eva Riesbeck
Linköpings Universitet

Riesbeck, E. (2006). Det hänger på decimalen! Om hur vi formar och bygger meningsmönster i vår omvärld. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 11 (1), 33-50.

med olika meningshorisonter. Vi har en vardagskunskap, ett bakgrundsvetande eller en förförståelse som hjälper oss att förstå. Husserl (1989) kallar denna levda vardagsvärld träffande för livsvärlden. Den kan förstås som någons förgivettagna upplevelsevärld. Livsvärlden och vardags-verkligheten tillåter att en viss begränsad typ av vetande och kunnande skapas. Denna kunskap kan dock fördjupas och vidareutvecklas eller i grunden förändras, genom att individen *blir delaktig i skilda situationer* (Schutz, 1967; Merleau-Ponty, 1962; Heidegger, 1993; Bengtsson, 1999). Ny kunskap kan utvecklas genom att i dialogen måla upp nya utmanande bakgrunder, skapa överraskande perspektiv och variera tolkningsförutsättningarna, (Dysthe, 2003). Vårt tänkande kan i skolan ges möjlighet att öppna sig mot nya horisonter, då vi avlägsnar oss från den invanda livsvärlden. Distanseringen innebär ett teoretiserande och abstraherande i olika grader eller på olika nivåer. Sättet att tala om olika saker kommer därmed att skilja sig från det vardagliga. Blir avståndet mellan en elevs livsvärld och skolans egen kulturella värld stort, kan svårigheter av olika slag förväntas uppkomma. Avståndet skulle kunna mätas i termer av delaktighet. Hamnar inte det som eleven möter i skolan innanför elevens förståelsehorisont, så kommer det att te sig meningslöst. Eleven känner inte delaktighet i en värld som presenterar begrepp skilda från ursprung och sammanhang.

> According to Bakhtin any participant always values the utterances of the discourse against a broader background of implicit, tacit, ideological knowledge, (Van Oers, 2002, p.70).

Olika sammanhang tycks utlösa olika slag av kognitiva aktiviteter och aktualisera skilda föreställningar hos vuxna och hos våra elever. Barn är från början involverade i en gemenskap, där de får ta del av en viss form av kulturell verksamhet och då de befinner sig i skolan och dess matematiska kultur måste de bli delaktiga i nya regler, språk och redskap (Bishop, 2002; Van Oers, 2002; Saxe, 1988). Elever tar sig an en matematikuppgift på olika sätt beroende på hur de tolkar problemlösningssituationen (Marton & Tsui, 2003). Genom antropologiska studier visas att den matematik som man kan iaktta i kulturer utanför skolan och i andra länder än den västerländska skiljer sig åt. Gatubarn klarar avancerade matematiska beräkningar vid försäljning av frukt, men är ”nollställda” då de ska göra motsvarande beräkningar formellt (Nunes, Schliemann & Carraher, 1993). Med ovanstående forskning som bakgrund ter det sig intressant att få syn på elevers olika tolkningar, då en matematikuppgift presenteras på skilda sätt.

Decimalstudien

Jag vill utifrån begreppet tolkningshorisont belysa hur elever på grundskolan nalkas en matematisk uppgift, där decimaler ingår. Genom att systematiskt variera förutsättningarna för uppgiften kan jag tydliggöra hur elever tillskriver uppgiften mening genom olika tolkningar. Jag är intresserad av tolkningen både som process och som produkt eller resultat. Meningen kan avläsas i elevernas sätt att dels ange villkor för att uppgiften är korrekt löst, dels använda tillämpliga ord och uttryck. Fokus för studien är just hur språket i den kommunikativa situationen eller aktiviteten kan förstås som *medel för ett meningsbyggande*. Jag har låtit elever använda sig av följande uppgift:

> Eleverna i klass 5 har sprungit 60 m. Några elever har skrivit sina tider. Skriv resultaten i ordning. Börja med den som vann. Robert 10,2 s; Johanna 9,7 s; Andreas 9,85 s; Veronica 10,12 s.

Uppgiften är hämtad från Nationellt prov för år 5 år 2000 och behandlar tal i decimalform. Uppgiften är intressant eftersom den handlar om heltal och decimaler, vilket är ett av de ”brott” i matematikundervisningen, där elevers svårigheter att förstå rationella tal uppenbarar sig. Det visar sig också i lösningsfrekvensen, då riksgenomsnittet var 40% rätt lösning. Läraren som rättar provet har enbart möjlighet att bedöma elevens svar som rätt eller fel. Uppgiften tillhör de problemlösningsuppgifter som vi kallar ”benämnda uppgifter”. Kontextens betydelse i uppgifter spelar stor roll när elever ska lösa dessa enligt flera forskare (Wyndhamn, 1993; Verschaffel, 1994; Freudenthal, 1991). Eleverna skall känna igen sig i den uppmålade situationen, dvs. kontexten (en idrottstävling) förutsätts välbekant. *Wor(l)d problems* tolkas ofta som förklädda typiska skoluppgifter och det finns ett stort glapp mellan den artificiella världen vad gäller aritmetiska skolproblem och den verkliga världen utanför skolan (Verschaffel, et.al. 1994; Verschaffel, Greer & De Corte, 2002).

I en ursprunglig, ”äkta” kontext där elever tävlar mot varandra kan man utan tidmätning genom direkt observation avgöra vem som vinner och göra upp en resultatlista. Man kan exempelvis tala i termer om att J kom först och knappt före A, medan V var aningen före R som kom sist. När situationen görs om till en benämnd uppgift införs tidsangivelser (mätvärden). Mätetalen med åtföljande enhet(s) ”konserverar” situationen och ”medierar” den till personer i andra sammanhang. Genom en tolkningsprocedur som bygger på kunskap om tal i decimalform kan en resultatlista göras upp. Problemet flyttas in i en matematisk kontext.

Den matematiska kontexten är nu emellertid inte helt bekymmersfri ur tolkningssynpunkt. Skall de angivna talen uppfattas som uppmätta värden eller som dimensionslösa och abstrakta tal? Två olika meningshorisonter öppnar sig.

1. *Mätvärden*

Ett mätvärde är alltid behäftat med ett fel. En mätning är mer eller mindre noggrann. Anges inget annat sägs i rådande diskurs (dvs. i matematisk jargong) att ”felet är högst en halv enhet i sist angivna siffra”. Man kan genast konstatera att mätvärdena i uppgiften uppvisar olika noggrannhet och att de i príncip inte är jämförbara. Det är egentligen inte meningsfullt att göra några jämförelser. Roberts tid ligger i intervallet 10,15 – 10,25, Johannas i 9,65 – 9,75, Andreas i 9,845 – 9,855 och Veronicas 10,115 – 10,125. Eftersom intervallen i detta fall inte överlappar varandra kan dock en entydig resultatlista göras upp. Om däremot exempelvis 9,7 skulle jämföras med 9,66 blir utfallet mera problematiskt. Intervallet 9,65 – 9,75 täcker intervallet 9,655 – 9,665. För att undvika onödiga tvetydigheter strävar man efter att ange mätvärden i en viss situation med samma noggrannhet. Skulle situationen i fallet ovan vara helt glasklar borde värdena 10,20; 9,70; 9,85 respektive 10,12 uppges och därmed peka på en likartad noggrannhet.

2. *Räknetekniskt*

Rent ”räknetekniskt” kan det se ut som om man ”bara” tillfogat en nolla i de första mätvärdena. Men att lägga till en nolla i en talsymbol låter sig enbart göras om talet är exakt. Är talet 10,2 ett exakt, ”rent” tal innehåller beteckningen 10,20 inte någon ny information. I grund och botten är detta ett annat sätt att utföra en förlängning av bråk något som döljs i vårt decimala positionssystem:

$$0{,}2 = \text{[bråket]}\ 2/10 = \text{[förlängning med 10]}\ (2 \cdot 10)/(10 \cdot 10) =$$

$$= 20/100 = 0{,}20$$

Nu kanske man frestas att förenkla diskussionen och säga att man alltid ska ha lika många decimaler när man uppger eller arbetar med tal. Men svårigheterna med att tolka tal med decimaler kvarstår eller har till och med ökat med användningen av miniräknare. En vanlig enkel miniräknare svarar på exempelvis några divisionsuppgifter så här:

$$1/5 = 0{,}2$$

$$45/8 = 5{,}625$$

$$12/7 = 1{,}71428547$$

Här dyker inte några ”påfyllnadsnollor” upp i sifferfönstret. Man säger inte gärna att den ena kvoten är mer exakt än en annan utan att ha utrett de ingående talens karaktär (mätvärde eller exakt tal).

Den bästa tillgängliga bakgrund mot vilken siffersymbolerna kan tolkas torde vara den strikt matematiska, nämligen den som bygger på god kännedom om positionssystemets ideer.

Metod

I studien låter jag elever i grundskolan möta kontextuella variationer på den ovan visade matematiska uppgiften och observerar hur elever behandlar dessa olika inramningar. Olika tolkningsförutsättningar skapas. Studie A visar enskilda elevers tolkning av en textuppgift, i studie B sker samtal i interaktion utifrån en bild, en formell uppgift med miniräknare och med hjälp av en tallinje. Under C beskrivs hur elever svarar på frågan *varför.* Samtalen i studie B och C spelas in på band och försöksledaren är närvarande i de olika grupperna och i de samtal som äger rum. Efter studiernas genomförande transkriberas alla samtal och analyseras ur ett sociokulturellt perspektiv.

A. Enskild uppgift

Två studier genomförs med elever enskilt. Den första genomförs med 30 elever i år 5 där de får lösa uppgiften och ge en skriftlig förklaring. Den andra genomförs i tre klasser med 30 elever i varje. Här ges uppgiften med lika antal decimaler.

B. Tre uppgifter genomförs med elever i interaktion

För att få syn på elevers delaktighet och förhållandet mellan matematisk förståelse och en personlig tolkning genomförs samtal i interaktion med elever, där redskapen är en vardaglig bild, miniräknare och tallinjen.

1. Redskapet bilden

I den första studien utnyttjas fem skolor inom olika områden i en stor kommun och 31 grupper med elever i år 5 intervjuas. Varje grupp består av tre elever. För att samla gruppen och ge fokus åt uppgiften används en bild på elever, som deltar i en löpartävling. Samtalet börjar kring denna bild och fortlöper med frågor och svar. Efter ett samtal på tio minuter i grupp löser varje elev enskilt den diagnostiska uppgiften med papper och penna. Därefter ställs frågan ”Kan ni nu diskutera varför ni anser att svaret är rätt” och ett nytt samtal följer.

2. Redskapet miniräknaren
En ny variant utarbetas utifrån uppgiften från nationella provet. Elever i år 5 och 6 får beräkna tre divisioner, 333/37, 138/15 och 228/25, med hjälp av miniräknare. Därefter får de i uppgift att rangordna de tal som de har räknat ut från det lägsta till det högsta värdet. När de har rangordnat talen får de frågan varför de anser att svaret är rätt. Här deltar 31 elevgrupper.

3. Redskapet tallinjen
Nästa studie i samtalsform genomförs med sex grupper av elever i år 5. Varje grupp består av tre elever. I samtalet mellan försöksledaren och gruppen används redskapet tallinjen för att få elever att förstå decimaltal. Tallinjen är utformad som en rak sträcka på ett papper och de enda tal som finns är 0 och 10 i vardera delen av sträckan. Elever får i uppgift att dela in sträckan i lika delar. Sen bryts delen 0 – 1 ut och förstoras upp och eleverna får fortsätta att konstruera en ny tallinje. På liknande sätt bryts nästa streck 0,0 och 0,1 ut. Hela tiden samtalar lärare och elever. Efter samtalet diskuterar eleverna den ursprungliga diagnosuppgiften, löser den och svarar på frågan varför de anser att svaret är rätt.

C. *Varför tror du att svaret är rätt?*
Efter varje gruppsamtal med hjälp av bilden, miniräknaren och tallinjen och efter det att varje elev enskilt har genomfört den ursprungliga diagnostiska uppgiften, uppmanas eleverna att diskutera varför de tror att svaret är rätt. Analysen av dessa audio-inspelade samtal sker ur ett sociokulturellt perspektiv, där språket och interaktionen är i centrum.

Resultat
Resultaten visar på elevers olika tolkningar av en benämnd uppgift och dialogens betydelse för att utveckla nya perspektiv.

A .Enskild uppgift
I analysen av elevernas resultat i studien, där de enskilt behandlat den matematiska uppgiften, kan jag utläsa, att de använder sig av orden ”den som vann hade bäst, minst, kortast, snabbast och lägst tid”. En elev sa ”Johanna har väl bäst kondition, är snabbast och har längst ben”. Texten i den ”benämnda” uppgiften leder således eleven till en vardaglig förklaring. 37% av eleverna löser den första uppgiften rätt. I uppgiften med lika antal decimaler blir alla elevers svar helt rätt. Det blir synligt för eleverna

att talen har lika många siffror och därmed blir det lätt att rangordna dem. Här framkommer att uppgiftens utformning påverkar elevers tolkningshorisont av densamma. För att kunna se om elevers tolkningar av en ”benämnd” uppgift går att förändra genom kommunikation och med hjälp av olika redskap genomförs andra studier.

B. Uppgift med olika redskap

Här visas elevers tolkningar av uppgiften i interaktion med olika redskap.

1. Bilden.

Målet med denna studie är att utifrån en vardaglig bild ge eleverna en tolkning till den ”benämnda” uppgift, som de sen ska lösa. När samtalet är avslutat får varje elev göra den diagnostiska uppgiften enskilt. Det visar sig att 28 % av eleverna svarar rätt på uppgiften. I många samtal visar elever att de har en god förförståelse av idrott och att springa sextio meter. De kan samtala om sina egna resultat och om vem som springer fortare än den andre. I samtalet visar en del elever god inblick i idrottens värld och även förståelse för tiondelar och hundradelar. Här följer ett exempel från studien.

Vardaglig säker diskurs.

I: Vad gör de på bilden?
R: Löper.
J: Springer.
I: Hur långt springer de?
H: 00m
R: 00m
J: 60 m
H: Det står inte?
I: Nej. Jag hade ändå en fundering på om ni vet hur långt man kan springa? När ni nu säger 100 m som ni gör killar, i vilka tävlingar tävlar man i 100m? Stora tävlingar.
R: Löpning.
I: Ja, löpning 100m.Vad heter de här stora friidrottstävlingarna?
R: SM, VM och OS.
I: Fint, nu har vi snart ett annat VM framför oss.
R+H: Fotbolls VM.
I: Där mäter man inte tid på samma sätt som när man springer. Hur fort är världsrekordet i OS på 100m?

R: 9,86 eller nåt sånt.
R: 9,80
H: 9,72
I: Tror du att det är det?
R: 9,86 har jag sett i en bok.
I: Bra

Utifrån sin egen tolkningshorisont samtalar eleverna om olika begrepp från idrottens värld. Eleverna använder sin förförståelse av idrott i samtalet. De är delaktiga i den värld som bilden vill visa på och de frågor som försöksledaren ställer. De blir delaktiga i ett vardagligt meningsbyggande genom språket och de utvecklar i samtalet en interaktion som leder framåt i en vardaglig diskurs.

I ett annat exempel från studien finns elever som har invandrarbakgrund och är på en skola som sällan har idrottstävlingar och där undervisningen i matematik bedrivs som enskilt tyst räknande. I samtalet svarar de på försöksledarens frågor men de förstärker inte varandra i samtalet.

Vardaglig osäker diskurs

I: Den här bilden vad ser ni?
M: Några som springer
I: Varför gör de det?
Alla: För att det är tävling.
I: Hur långt springer de?
Re: 60m
I: Ja, vad finns det mer för sådana lopp?
Tystnad
I: Vad heter den stora tävling som vi har haft nyligen?
R: OS
I: Olympiska spel, dessa har vi både sommar och vinter. Så finns det olympiska spel för friidrott. Det finns VM där man springer och EM. 60m som du sa, det springer man ofta i skolan. Har ni sprungit 60m?
Alla: Ja
I: Hur fort springer ni då?
Alla: Kommer inte ihåg.
I: Ingen aning. Kan ni gissa?
Tystnad

I detta samtal är inte elevernas förförståelse och livsvärld bekant med de frågor som försöksledaren ställer. Deras bild av idrott och att springa sextio meter är osäker. I det fortsatta samtalet med dessa elever framkommer att de aldrig sprungit sextio meter på tid i skolan. De kan

inte stödja varandra i en utvecklande interaktion till en ny meningshorisont i samtalet. Eleverna blir kvar i sitt eget tolkningsspelrum.

I analysen av samtliga grupper i studien med bilden, visar det sig att elever som inte är delaktiga i det vardagliga samtalet om idrott har svårt att tolka uppgiftens tider rätt. De elever som har erfarenhet från skolan eller fritiden av att springa sextio meter eller har en klar uppfattning om tid och en god allmänbildning kring idrott och olika rekord, utvecklar med kunskap från sin vardag och sina matematikkunskaper nya meningshorisonter i dialogen.

2. Miniräknare

Ytterliggare en studie med ändrade förhållanden genomförs. Det är en uppgift med enbart tre formella divisionsuppgifter att räkna ut, utan text.

333/37 = 9 138/15 = 9, 2 228/25 = 9,12

Med hjälp av miniräknare får eleverna i uppgift att avgöra vilket svar som är störst respektive minst. Eleverna ombeds lösa uppgiften *tillsammans* i gruppen, men samtliga elever utför beräkningen *enskilt*, rangordnar talen tyst för sig själva och för in sina svar på gruppens papper. Här blir lösningsfrekvensen 37% rätt svar på uppgiften.

I analysen av samtalen, som svarar på frågan *varför* svaret blir rätt, visar eleverna att de uppfattar uträkningen på miniräknaren som rätt. Problemet uppstår då miniräknaren visar 9,2 och inte 9,20. Elevernas tolkning av svaren blir rent räknetekniskt, alltså de räknar ut ett tal och skriver svaret. De ser till storleken på talen och tolkar dem som heltal. Redskapet miniräknaren bidrar inte till ett utvecklande samtal eller till en förståelse för decimaler. Samtalen efteråt visar på att elever tolkar miniräknarens svar som en färdig produkt och inte som process. Det vill säga, de kunde med en annan tolkning ha reflekterat och diskuterat rangordningen av talen.

3. Tallinjen

I den tredje studien med grupper av elever används en tallinje. I denna studie för eleverna och försöksledaren en dialog om hur man bygger en tallinje. I analysen av samtalen framkommer att eleverna blir delaktiga i målet för uppgiften och att de blir delaktiga i det matematiska språket. I interaktionen mellan försöksledaren, eleverna och redskapet tallinjen utvecklar eleverna nya meningshorisonter mot ett gemensamt mål. Här följer ett exempel från en grupp.

I: Här ser ni en tallinje. Det går från talet noll till talet tio. Om vi då börjar tala om heltal som 1, 2, 3, 4? Ni kan jättestora heltal som 1080. Vad vill ni skriva för tal här så att det blir en tallinje? Det här är en tallinje från 0 – 10 men nu vill jag ha fler tal på denna tallinje.
J: Typ 2, 4, 6, 8, 10.
I: Ja, hur kan man göra?
S: Man kan sätta femman i mitten.
I: Ja, då börjar vi med det. Hur gör man sen då?
E: Man kan skriva en tvåa här.
I: Ja
(Elever diskuterar hur de ska göra med talen och sätter ut 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.)
I: Den här tallinjen består av heltal
Alla: Ja

Eleverna fortsätter att tillsammans med läraren bygga nästa tallinje bestående av tiondelar. Man går vidare till hundradelar.

I: Då fortsätter vi. Här är en tallinje från 0 – 0,1.
J: Hundradelar
I: Hur blir det nu?
J: 0,05 blir det.
I: Bra. 0,05 i mitten.
(Eleverna gör tallinjen).
I: Om vi skulle uttrycka det här i bråkform.
Alla: Hundradelar.
I: Hur många hundradelar är 0,01?
S: En hundradel.
I: Och 0,02.
J: Två hundradelar

Samtalet mellan försöksledaren och eleverna leder gruppen framåt med hjälp av tallinjen och detta får till följd att elever använder sig av matematiska begrepp. Eleverna arbetar i en matematisk modell som de själva är delaktiga i att konstruera och därmed blir de delaktiga i det matematiska språket. De får en förståelse för hur talen är konstruerade.

C. *Kommunikation i grupp*

Efter uppgiften med bilden, miniräknaren och tallinjen grupperna besvara frågan, varför de anser att svaret är rätt. I uppgiften med bilden är det många elever som samtalar i en vardaglig kontext och använder sig av begrepp som längst tid, springer snabbast, kortast tid. Men här finns

även elever som förklarar med orden lägg till en nolla, två är mindre än tolv osv. I de grupper som använder en miniräknare ger man förklaringar till svaren genom att säga att man lägger till en nolla eller att man räknar ut det. När eleverna använder sig av redskapet tallinjen blir förklaringen ofta med matematiska ord som tiondelar och hundradelar. När grupper av elever ska tala om varför de anser att svaret på uppgiften är rätt redogör de utifrån olika förförståelse. Här följer några utdrag från elevernas diskussioner.

I: Vem var snabbast?
E: Jag skrev Veronica för att hon hade högst siffror.
I: Då menar du att hon sprang fortast och att hon vann.
L: Jag tog Johanna för hon har kortast tid.
I: Vad menar du med kortast tid? Menar du att hon springer snabbast?
P: Jag tog Johanna för att hon hade kortast tid och sprang snabbast.
I: Vilket är rätt?
E: Det är Pontus och Linda för jag hade inte tänkt. Johanna vann för hon hade kortast. Veronica hade ju högst tid. Man ska ha så låg tid som möjligt.
I: Vem kommer tvåa?
L: Andreas kom tvåa på 9,85s.
E: Robert fast det är Andreas. Jag skrev de som hade högst tid: Veronica har högre tid än Robert.
P: Tvåa kommer Andreas för han har 9,85 och det är lite mer än Johanna.

I ovanstående samtal visar sig elevers sätt att uttala sig vardagligt med begrepp som minst, störst, snabbast och att de inte kan urskilja vad talen betyder. Högsta värdet är snabbast. De förblir i den vardagliga världen och använder sig enbart av vardagsspråket. De följer varandra och förändrar inte sina tolkningar för att få syn på andra perspektiv och kunna förstå utifrån en annan meningshorisont. En annan grupp ger andra förklaringar.

I: Varför är ni helt säkra på att det här är rätt?
D: Det är en hel nia och sen två till och sen nio och tolv till. Det blir högre och högre automatiskt.
F: Jag tycker typ likadant. Först är det en nia med en nolla där sen 9,2 och sen 9,12. De är högre
I: Handlar det om att tolv är högre än två. Eller att det är tre siffror i talet.

F: Neej.
D: Det kan det också vara.
I: Vad säger du?
A: Jag tittar mest på att tolvan är högre än tvåan. Nian är ingenting.
I: Om jag nu påstår att det här inte är rätt, vad säger ni då?
F: Tvärtom: att det går neråt i stället.
I: Sätta nian därnere?
F: Jag vet inte riktigt.

I det här samtalet kan vi följa elevers diskussion om att räkna med heltal. De tolkar svaren utifrån en heltalsmodell, alltså att se talen enbart som heltal och ställer dem under varandra för att se vilket som är "högre".

S: Jag lägger på två nollor. För 9,12 det är två tal till liksom. Så nio det är bara nio, 9,12 då är det en etta och en tvåa, och på 9,2 lägger jag till en tjugo, en nolla så det blir 9,20. Och då ser jag att tjugo är mer än tolvan.
I: Och du tror att det är rätt. Vad säger Elin då?
E: Jag har tagit nian här för om man tar kommatecken här då blir det 9,0. Då är det minst. Och sen lägger jag till en nolla vid 9,12 så blir det 9,120 och då blir det 9,200 och då ser man att det är störst.

Eleverna visar i samtalet ovan att de vet att om man lägger till en nolla kan man se vad som kommer först och sist. Genom att tänka dels i en heltals- och dels i en storleksmodell ger de en strukturerad förklaring. Här följer ytterliggare en tolkning från en grupp elever.

I: Nu ska ni få förklara för mig varför ni tycker att det här är rätt.
H: För att nio är ett heltal, det är så ett mindre, enbart ett heltal. 9,12 är nio hela och en tiondel och två hundradelar tror jag och 9,2 då är det nio hela och två tiondelar.
E: Nio är en sån här hel. 9,12 där är en tiondel mindre än två tiondelar så då blir 9,2 större än 9,12.
N: Nian är ett heltal tvåan är 9,12 och hundradel och 9,2 där är det en tiondel.

Elever ger förklaringar med matematiska ord, där de visar sig behärska de matematiska begreppen tiondel, hundradel och positionssystemets uppbyggnad.

Tre olika perspektiv framkommer i analysen av samtalen med elever i grupp. Elevernas olika förklaringar visar på tre tolkningshorisonter nämligen *vardagligt*, *algoritmiskt* och *matematiskt perspektiv*.

En sammanfattning av resultaten i studien visar att en ”benämnd” vardagsuppgift inte hjälper eleven att förstå det matematiska i uppgiften och att läraren i det skrivna svaret endast får reda på rätt eller fel svar, att olika redskap som en vardaglig bild, miniräknare och tallinje utvecklar olika språkliga diskurser och olika tolkningar visar sig i samtalen.
I analysen av kommunikationen i grupperna, blir det i vissa grupper inte bättre att befinna sig i den vardagliga världen. Eleverna vet inte hur de ska svara då de blir kvar i en vardaglig tolkning. Man använder helt enkelt *vardagsspråket* och *uttrycker sig i ett vardagligt perspektiv.* I det algoritmiska perspektivet räknar och tänker elever i *heltalsmodellen*, i en *proportionalitetsförklaring* eller att *lägga till en nolla*. Här sker en transformering till ett procedurförfarande, som visar sig ge ett svar men inte nödvändigtvis någon förståelse. Det matematiska perspektivet infinner sig hos eleverna när de blir delaktiga i språket och tolkningen av symboler och att de kan uttrycka sig på ett *matematiskt språk* med tiondelar och hundradelar. Detta visar på en insiktsorienterad matematisk process, som leder till förståelse. Uppgiften med bilden för således tankarna till en vardaglig förståelse, medan studien med miniräknaren inte förutsätter förståelse utan ersätter förståelse. I studien med tallinjen inbjuds eleven till delaktighet genom interaktion och till tolkningsmöjligheter som kan gestalta matematisk förståelse.

Diskussion

Jag vill med denna studie visa hur språket i den kommunikativa situationen eller aktiviteten kan bli medel för elevers meningsbyggande. Den ”benämnda” uppgiften kan tolkas utifrån det vardagliga perspektivet, uppmätta värden, dimensionslösa och abstrakta tal eller genom positionssystemets ide. Jag vill genom att använda olika redskap visa på elevers olika tolkningar och därmed olika meningsbyggande i matematiken.

Elevens tolkningsspelrum

Det är genom individens personliga verklighet som den tillägnar sig begreppen och ger dem mening (Eriksen, 1993). Eleven har utanför institutionen blivit delaktig i olika tolkningar genom den kultur man kommer ifrån, vilket perspektiv man har i sin livsvärld och hur vardagen gestaltar sig. Detta visar sig i studien i samtal med elever som har en annan kulturell bakgrund. Den vardagsvärld som uppgiften visar på är inte bekant för dem. För att förstå den ”benämnda” uppgiften måste elever samtala utifrån sin tolkning och genom delaktighet i samtalet ta sig till förståelsen av matematiken. På så sätt får eleven en ny tolkningshorisont, som sen

används på nytt med olika redskap. Många gånger hjälper det alltså inte att göra en "benämnd" uppgift realistisk för att få elever att förstå.

> Även om vi gör en matematikuppgift realistisk och formulerar den som något som skulle hända i verkligheten, finns ändå avgörande skillnader mellan att "öva" i en värld av övningsuppgifter och att agera i den sociala praktik som uppgiften hämtats från (Säljö, 2000 p.149).

Utifrån elevers olika tolkningshorisonter kan man förstå att, i ett klassrum där varje elev räknar tyst för sig själv i sin egen takt förblir elevens tolkning vid det gamla. I studien där elever utför uppgiften enskilt har läraren enbart möjlighet att utläsa svaret som produkt och får inte syn på elevens tänkande och förförståelse.

Nya meningshorisonter genom interaktion

De samtal i studien som svarar mot frågan *varför* och som har analyserats bland olika elevgrupper visar att elever har olika tolkningar i sin syn på en matematikuppgift, då den ges olika bakgrund. Det är inte enbart en fråga om vad jag räknar och hur jag räknar utan också varför. Eleverna i studien visar sig ha fokus på begreppen vad och hur, men med hjälp och stöd från försöksledaren kan de se till frågan varför. Det är först när eleven svarar på frågan "Varför vet du att svaret är rätt?" som elevers olika sätt att tolka matematiken görs synlig. Det måste därför vara av stor vikt att elever och lärare görs uppmärksamma på elevers olika tolkningar av en matematikuppgift.

Interaktionen läraren, objektet och eleven blir en viktig agent i klassrumsaktiviteten, där nya lösningar, möjligheter och frågor kan utvecklas. (Van Oers, 2002; Sfard, 2000). Det står helt klart att verktyg är viktiga hjälpmedel i matematikundervisningen men att det är läraren som har möjligheten att mediera mellan dem. (Van Dijk et al. 1999, Cobb, 1999; Van Oers, 2002). Genom att lärare och elever samtalar kring matematiska begrepp kan de bli delaktiga i samma kontext. Redskapen formar i högsta grad den deltagandes handlingar mot de matematiska reglerna.

I en av undersökningarna i denna studie lät jag elever bli delaktiga i uppgiften genom att tillsammans konstruera ett redskap, tallinjen, och samtala om det.

> Constructing meaning and negotiating meaning by constructing and evaluating new predicates is a way of talking about the processes that take place in a mathematical discourse. The diagram is one possible tool of structuring the discourse and integrating the different (real or virtual) voices that take part in the discourse (Van Oers, 2002 p.77).

Det som är viktigt att poängtera är att de matematiska redskapen och reglerna inte är tillräckliga för att utveckla full delaktighet i en matematisk diskurs. Det måste utvecklas en språklig delaktighet. På så vis uppstår en förståelse hos eleverna och de kan senare använda sig av den kunskap som vi har skapat tillsammans. De blir delaktiga i ett matematiskt språk med dess begrepp. När man är delaktig i en matematisk diskurs och i en vardaglig så kan man med språkets hjälp pendla mellan dessa. Vi måste både utveckla den vardagliga referensen och den matematiska för att våra elever ska förstå den abstrakta matematiken.

> Models are introduced in such a way that students can always fall back to so-called earlier stages In their development and connect symbols with concrete situations. So modelling is not a one-way street. Mathematical symbolized reality is always rooted in and tied to informal reality not separated from it (Selter, 2002, p.225).

Dialogen

Det som slutligen kan sägas om den ”benämnda” uppgift, som används i studien är att elever visar sig ha olika tolkningar från sin livsvärld när de ska lösa uppgiften och att de visar olika meningshorisonter beroende på hur deras förståelse av positionssystemets ide är transformerad. Med hjälp av språklig kommunikation och rätt redskap för rätt tillfälle kan lärare få elever att skapa nya meningshorisonter och därmed ny förståelse. Målet måste vara att lärare blir medvetna om olika elevers behov utifrån deras tolkningshorisont. I den här uppgiften blir det lärarens uppgift att utifrån elevens förförståelse förklara positionssystemet idé och därmed kunskapen om decimaler.

Detta skulle vi kunna uppnå i en dialog där människors förståelsehorisonter möts och det goda samtalet leder fram till någon slags samförstånd eller samsyn som vi kan kalla för horisontsammansmältning. Likheter och skillnader utvecklas på så sätt mellan den kommunikativa kontexten och det perspektiv som eleven uttrycker. Den egna tolkningshorisonten förändras och det egna kunnandet utvecklas därmed. Genom att få elever att utveckla en drivkraft, att få dem att lyssna till och stötta varandra och genom att samarbeta i interaktion, kan ett berikande samtal öppna upp för andras tolkningar. Först då blir tolkning av en matematisk uppgift en process och inte en produkt.

Referenser

Bengtsson, J. (Red.) (1999). *Med livsvärlden som grund*. Lund: Studentlitteratur.

Bishop, A. (2002). Mathematical acculturation, cultural conflicts and transition In G. De Abreu, A.Bishop & N. Presmeg. (Eds), *Transitions between contexts of mathematical practices* (p. 193-212). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cobb, P. & Bowers, J. (1999). Cognitive and situated learning: perspectives in theory and practice. *Educational Researcher,* 28 (2), 4-15.

Dysthe, O. (2003). Om sambandet mellan dialog, samspel och lärande. I O. Dysthe (Red.), *Dialog, samspel och lärande* (s. 7-27). Lund: Studentlittaratur.

Eriksen, D. B. (1993). *Personlige og sociale sider ved elevernes tilegnelse af faglgi vide nog kunnen i folkeskolens matematikundervisning.* København: Danmarks Lärerhögskole, Afdeling for matematik.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Heidegger, M. (1993). *Varat och tiden* (Del 1-2). Göteborg: Daidalos.

Husserl, E. (1989). *Fenomenologins idé*. Göteborg: Daidalos.

Marton, F. & Tsui, A., (2003). *Classroom discourse and the space of learning.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Merleau-Ponty, M. (1962). *Phenomenology of perception*. London: Routledge.

Nunez, T., Schliemann, A.D. & Carraher, D.W. (1993). *Street mathematics and school mathematics.* Cambridge University Press.

Saxe, G. (1988). Candy selling and math learning. *Educational Researcher,* 17, 14-21.

Schutz, A. (1967). *The phenomenology of the social world*. Evanston: Northwestern University Press.

Selter, C. (2002). Taking into account different views: three brief comments on papers by Gravemeijer & Stephan, Cobb and Thompson. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Van Oers & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modelling and tool use in mathematics education* (p. 221-227). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sfard, A. (2000). Symbolising mathematical reality into being – or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds), *Communicating and symbolizing in mathematics: Perspectives on discourse, tools and instructional design* (p. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv.* Stockholm: Prisma.

Van Dijk, I., Van Oers, B. & Terwel, J. (1999, August). *Providing or designing? Constructing models as a strategy for working with contextual problems in primary maths education*. Poster and paper presented at Earli-conference in Göteborg, Sweden.

Van Oers, B. (2002). The mathematization of young children's language. In K Gravemeijer, R. Lehrer, B. Van Oers & L. Verschaffel (Eds), *Symbolizing, modelling and tool use in mathematics education* (p.29-58). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Van Oers, B. (2002). Educational forms of initiation in mathematical culture. In C. Kieran, E. Forman & A. Sfard (Eds), *Learning discourse. Discursive approaches to research in mathematics education* (59-85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Verschaffel, L. De Corte, E. & Lasure; S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling in the elementary school. *Learning and Instruction*, 4, 273-294.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2002). Everybody knowledge and mathematical modeling of school word problems. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Van Oers & L. Verschaffel (Eds), *Symbolizing, modelling and tool use in mathematics education* (p.257-276). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wyndhamn, J. (1993). *Problem-solving revisited – On school mathematics as a situated practice*. Linköping Studies in Arts and Science, 98.

Ödman, P-J. (2004). *Tolkning, förståelse, vetande*. Stockholm: Norstedts förlag.

Eva Riesbeck

Eva Riesbeck works as a lecturer at the University of Linkoping. Her research interests include problemsolving, language and interaction in mathematics education.

Eva Riesbeck
Department of Educational Science
The Key-House
Linkoping University
581 83 Linkoping
Sweden
evari@iuv.liu.se

Summary

This study is about how we build patterns of meaning in the world around us. Our learning and knowledge about the surrounding world begins in what we may call the life world. The dissonance between the environment in and outside school is very distinct in mathematics as a school subject. Students' interpretations of real life problems may become an obstacle for their learning in mathematics. The focus of the study is how the language in the communicative situation or activity could be understood as a means of construction of meaning. The importance of context and communication in the teaching of mathematics is visualized through analyses of 5 and 6 grade students' work with a real life task, which involves decimals. Through participation and interaction, in the dialogue, the students develop new patterns of meaning that may facilitate their learning of mathematics.

Artikel V

Lärarstudenters problemlösande samtal om matematikundervisning

Eva Riesbeck*
Linköpings Universitet

Sammanfattning
Fokus i studien är ett intresse för samtalet i pedagogiska sammanhang i skolan. Den teoribildning som här beskrivs handlar om språket som det viktigaste redskapet för att kunna dela tankar och förstå varandra i social interaktion. En mera precis terminologi börjar växa fram om skolan såsom kontext, medierande verktyg och diskurs. I denna studie får diskurs ha innebörden "sätt att tala". I undersökningen deltar tio grupper bestående av lärarstudenter som studerar matematikinriktning vid ett universitet. Syftet är vad som utmärker det eller de sätt att tala om undervisningsproblem i matematik som upprättas. Vid analysen blir fokus på vad som kännetecknar samtalen till den yttre formen och vilken typ av diskursiva möten, som studenten planerar för sina elever. Till sist kan konstateras att för att lärare ska kunna genomföra bra matematiklektioner, behövs förutom att vara bevandrad i en matematisk diskurs, även en ämnesdidaktisk diskurs, som tillhandahåller tankeverktyg i matematikundervisningen.

Introduktion och teoretiska utgångspunkter

Utgångspunkten för följande studie är ett intresse för samtalet i pedagogiska sammanhang. Mycket förenklat innebär samtal att två eller flera personer turas om att säga något till varandra. Att samtal uppvisar olika drag eller nyanser återspeglas i synonymer som exempelvis samspråk, konversation, småprat, dialog, diskussion, dispyt, diskurs, överläggning, palaver, snack, chat. Samtal kan vara som verbala slagfält men också förhandlingar, där parterna når en gemensam förståelse (Linell, 1998). Förutsättningar för sådana samtal är att de sker mellan människor med olika perspektiv, som förmår att problematisera det specifika ämnet, men de måste förstå varandra. I denna studie får samtal stå för samtal som ger förutsättningar för lärande och utveckling genom

© Didaktisk Tidskrift, Jönköping University Press 2006 ISSN 1101-7686
* Författarkorrespondens: evari@iuv.liu.se

förändring av perspektiv. Sådana samtal kan föras i en skolklass, en undervisningsgrupp, en arbetsgrupp, en familj eller en kamratkrets. Att lära sig kommunicera är att bli sociokulturell. Vi lär oss att inom varje "diskurssamhälle" kommunicera och genom detta formar vi oss själva och andra. Jag lämnar åt Säljö att kortfattat utveckla detta:

> Samtalet tillåter människor att dela erfarenheter med varandra. När vi interagerar gör vi våra tankar och iakttagelser publika och tillgängliga för andra att reagera på och resonera vidare med (Säljö, 2003 i Dysthe s. 219-242).

På senare tid har inom samhällsvetenskaplig forskning sådana kommunikativa och situationella aspekter på lärande fått allt större uppmärksamhet (det som inträffat kallas "discoursive turn"), (se Mercer, 1995; Vygotsky, 1978; Wertsch, 1985a, 1998; Samuelsson, 2003; Wyndhamn, 2002; Bergqvist, 2004). Språket är det viktigaste redskapet för att kunna dela tankar och för att förstå varandra i social interaktion. Kunskapen formas i kommunikativa praktiker i vilka människor deltar och samarbetar (Mercer, 1995). Men kunskapen finns integrerad i situerade praktiker som skolan och är därför kontextbunden. Institutioner är kulturspecifika och då utvecklas handlandet, samtalet och tänkandet i olika diskurser.

> These culture-specific ways of being entail the use of socially appropriate discourse genres and socially appropriate ways of acting, valuing and thinking (Hicks, 1996, p.105).

Inom den teoribildning som går under beteckningen sociokulturell börjar en mer precis terminologi att växa fram (Säljö, 2000, 2005). Några centrala begrepp är kontext, medierande verktyg eller redskap och diskurs. Följande kan utan närmare mönstring sägas. Kontext står för sammanhang, inramning, situation (Daniels, 2001). Redskap av olika slag är materiella eller språkliga och är länk för kontakt och samspel mellan människan och hennes omvärld (Vygotsky, 1986; Kozulin, 1998). Avgränsar man och håller ihop vad som kan sägas om något uppstår en diskurs (Säljö, 2000).

I denna studie får diskurs ha innebörden "sätt att tala". Ett språkbruk handlar inte enbart om kommunikation mellan människor utan också om ett inbegripande av gemensamma synsätt och uppfattningar.

Sättet att tala skapar ett kollektivt meningsbärande fält. När man säger något så gör man det dels i förhållande till sig själv, dels i relation till någon diskurs. Ur denna synvinkel kan lärande uppfattas som att bli delaktig i en diskurs (Sfard, 2000, 2002; Van Oers, 2002).

> Att lära är att bli delaktig i sätt att skapa mening inom ramen för sådana diskurser och praktiker" (Säljö, 2005, s. 45).

Med en sådan ansats fångar man in lärande både som process (bli delaktig) och som produkt (ett diskursivt innehåll).

Med dessa idéer som utgångspunkt vill jag beskriva och försöka förstå vad gruppsamtal i en lärarutbildning bidrar med till lärarstuderandes kompetensutveckling visavi ämnet matematik. Aktuella rapporter (NU 03, 2004; Lusten att lära, 2003; Adding it up, 2001; Glenn Commission, 2000) och forskningsstudier (Runesson, 1999; Löwing, 2004; Nilsson, 2005; Maa, 1999) rörande skolan och dess matematikundervisning visar att en hel del kan upprustas. Detta gäller bland annat lärares såväl ämnesmässiga som ämnesdidaktiska kunskaper.

En punkt som ständigt återkommer är att man vill bryta dominansen av "tyst räkning" som metod. Nu skriver man inte bara in "tala matematik" i en kursplan (se LGR-80) och förväntar sig att undervisningen därmed tar en "diskursiv vändning". I studier gjorda av mig och andra (Riesbeck, 2000; Wyndhamn, 1993, 1995) visas hur svårt skolelever har att orientera sig, åstadkomma och upprätthålla en viss matematisk diskurs, så att ett konstruktivt samtal blommar upp. Undervisningens starka betoning på praktiska eller vardagsbetonade problem i form av så kallade benämnda uppgifter underlättar inte alltid för eleverna att bli delaktiga i en önskad strikt matematisk diskurs. Det som skrivs i vår nuvarande läroplan LPO -94 och kursplan i matematik år 2000 och även i andra länders kursplaner om att kommunicera och argumentera behöver fördjupas och förstärkas.

Syfte

I föreliggande studie analyseras hur och vad studenter under utbildning samtalar om när det gäller detta dilemma. Jag vill alltså studera hur lärarstudenter samtalar om hur man kan samtala med skolelever om några matematiska uppgifter. Syftet är att se vilken "lärardiskurs" som etableras. Så forskningsfrågan blir:

- Vad utmärker det eller de "sätt att tala" om undervisningsproblem i matematik som upprättas?

Tre följdfrågor må vara:

- Kan sådana problemlösande samtal stärka en lärarkompetens i vardagen?
- Vilken typ av diskursiva möten anordnar studenterna för sina elever?
- Hur utmynnar samtalen i skriven planering?

Metod

Data

De studenter som deltog i undersökningen studerar matematik och matematikdidaktik på lärarutbildningen på ett universitet i Sverige. För att öppna för flera olika möjliga perspektiv i samtalen fick studenter som har hunnit olika långt i sin utbildning medverka. Studenternas första år på utbildningen har starkt fokus på samtalskultur i grupp, så detta sätt att arbeta var välbekant för studenterna. Däremot var sättet att diskutera elevers lärande mot två matematikuppgifter nytt för de studerande. Sammanlagt studerades samtalet i tio olika grupper. Varje grupp bestod av tre studenter. Sammankomsterna spelades in på band för senare utskrift och analys. Jag agerade i vissa fall som intervjuare då jag tyckte att samtalet stannade av. En tid efter samtalet fick informanterna var och en för sig skriva ned en planering över hur de skulle undervisa om ett föreslaget kursavsnitt. Detta för att se vad som kom ut av gruppsamtalen.

För att initiera samtalen förelades grupperna denna fråga:

Hur skulle du vilja samtala med dina elever i skolår fem om följande situationer?

Uppgift 1

Eleverna ska lära sig formeln för arean av en triangel som är lika med basen gånger höjden genom två. Hur ska studenterna gå tillväga?

Uppgift 2

Eleverna i klass 5 har sprungit 60 m. Några elever har skrivit sina tider. Skriv resultaten i ordning. Börja med den som vann.
Robert 10, 2 s
Johanna 9, 7 s
Andreas 9, 85 s
Veronica 10, 12 s

Gruppdeltagarna hade enbart varandra som resurs. Kursplaner, läroböcker eller annat material fanns inte tillgängligt. Förförståelsen för var och en var den egna skolgången, praktikbaserade lektioner bland annat i matematik och egna studier i matematikdidaktikkurser. Uppgifterna är som framgår av olika karaktär och exemplifierar skilda områden. Uppgift 1 är mer "matematisk" än uppgift 2, som är mer praktisk och vardagsbetonad.

Analys

Vid analysen koncentrerade jag mig först på att finna svar på frågan: *Vad kännetecknar samtalen till den yttre formen?* Alla samtal lästes med fokus på interaktionen och följsamheten i gruppen. Tre tydliga faser kunde identifieras. I nästa analys av det transkriberade materialet fokuserar jag på *vilken typ av diskursiva möten som studenterna anordnar för sina elever.* Här framträder flera olika diskurser som de menar ska hjälpa till att få elever att lära sig matematik. Det som framträder är tre olika medierande redskap. Utifrån de här samtalen analyseras sedan fram det som jag har valt att kalla "lärardiskurs".

Resultat

Effektiva och utvecklande diskurser

Samtalet börjar med att varje student i gruppen för fram en egen ide', som de anser att de kan använda sig av. De för fram sin egen förförståelse och försöker att finna varandra. Inledningen har karaktär av *brainstorming (exempel I).* Informanterna har här tilldelats olika bokstavsbeteckningar. I är intervjuaren.

Exempel I

C: Om jag tar upp den här formeln b gånger h genom två då börjar jag lära mig att säga, det är arean för triangeln. Begreppet kommer ju in på en gång då. Och då är arean b gånger h genom

två. Alltså kan vi utgå ifrån att eleverna vet vad en area är? Eftersom vi utgår från en rektangel så vet de vad area är, rektangelns yta.
F: Men om du utgår från rutigt papper och lägger bredden och längden enligt rutorna, då kan du räkna rutorna där inne. Då har de räknat ut arean på rektangeln. Om man viker rektangeln i två lika delar då har man visat på hälften av rektangeln. Då bildas ju två trianglar. Ena triangeln är ju hälften av hela rektangeln. Så skulle jag gå tillväga.
C: Det beror ju på. Det är bra att visa på olika sätt, som exempel med geobräde och prickigt papper.
H: Jag vill börja i andra änden och låta dem utforska på ett geobräde. Att lära sig se sambandet. Man visar inte formeln från början utan de kan själva upptäcka. Eleverna kan resonera sig fram.

Studenterna frambär spontant sina egna tankar om undervisningen. En student talar om geometriska begrepp, nästa om att räkna rutor och en tredje om att själv utforska på ett geobräde. Olika uppfattningar bringas i dagen men det fortsatta samtalet blir mer strukturerat. Ibland blir turordningen sådan att en säger något, de andra två lyssnar och faller in i samtalet och sedan följer en ny ide´, som bygger på den förra. Alla olika ståndpunkter eller synpunkter respekteras dock men kanske byts ut. Denna samtalsform har jag valt att kalla *dialog (exempel II).*

Exempel II a

H: Ja och kvadraten känner de till då. Om man har ett gäng trianglar färdig ritade eller om de får rita själva som man ska göra till kvadrater och till rektanglar.
M: Man kan ju utgå ifrån att de arbetar i två eller tregrupp och att de får ett papper och ritar en triangel och hur ska de komma fram till hur stor är rektangeln.
T: Och då upptäcker de att jag kan ju rita utan att ha en måttenhet.
M: De som behöver rita gör det och en del kanske enbart ser, en del kanske kan hjälpas åt och byta med varandra.
T: Räkna ut varandras eller fullfölja och rita ut.

Studenterna svarar varandra och nya uppslag följer på vad den andra har sagt och samtalet fortskrider framåt. De följer varandra och ger

utrymme för att alla ska komma till tals. Det sker ett dialogiskt samspel.

Exempel II b

A: De måste ju se skillnad i själva verket så är hundradelen mindre än tiondelen, i själva verket så är hundra mer än tio annars.

J: Då kan man visa den klassiska tårtan. Dela den i hundra delar och en i tio delar då ser man att en tiondel är större. Då är det delar.

An: Men det är ju jättebra. Det är ju där svårigheten ligger. Jag har alltid kastat om tiondelar och tusendelar. Jag kan det nu.

På många ställen under samtalets gång förs en *argumentation (exempel III)* för eller emot något förslag. Under en sådan fas anför en student omständigheter som stöd för en viss uppfattning, synliggör nya passande idéer och ger motiv för sina ställningstaganden. I exempel III argumenterar studenterna för olika sätt att undervisa om triangelns area. De framför strategier som att se, att mäta och att upptäcka eller konstruera.

Exempel III a

S: Halva arean av en rektangel. Och att man skriver upp och visar formeln basen gånger höjden genom två så att de verkligen ser det parallellt.

A: Man kan också rita en triangel och få den till en rektangel och en kvadrat och då ser man att den biten som man har ritat dit är lika stor som den som fanns innan. Ja och det kan man ju också klippa i sönder i papper och då ser man om man lägger det på varandra att det är lika.

S: Ja att man förklarar på flera sätt.

A: Jag tycker att man ska undersöka olika sorters trianglar och se vad det blir, att alla inte har räta vinklar och var höjden finns någonstans. Att de lär sig att trianglar kan se olika ut. Jag tycker inte heller att det är något bra att ha en formel utan att man i stället arbetar med rektangel, kvadrat och triangel parallellt. Jag tycker inte att vi startar i begreppet area utan att man ska utgå från att först lära oss kvadraten och rektangeln till triangeln. Att man börjar från varsitt håll och att man kollar det gemensamt.

Argumentationen visar drag av kritisk granskning och reflektion. Var

och en kan lyssna, tänka och modifiera sin egen tanke eller förändra sin egen tankegång.

Exempel III b

J: Det kanske kan vara bra om de får prata om det i grupper och sen skriva ner det eller om det samtalet gör att de skriver annorlunda.

A: Det kan nog vara både och för ibland behöver man få höra lite tankar för att få igång sitt eget tänk och samtidigt börjar man tänka som alla andra.

J: Man kanske kan bli hjälpt av det så att man kan uttrycka det som man egentligen inte kunde.

A: Men nån av de varianterna. Antingen enskilt först, tänka lite sen sitta i grupp eller tvärtom.

Diskursiva möten för elever

Nästa steg i analysen av de inspelade samtalen fick gälla frågan:
Vilken typ av diskursiva möten anordnar studenterna för sina elever?

Eller enklare formulerat:
Vad tänker studenterna att lärare och elever ska tala om?
I samtalen kunde två disparata strategier eller modeller renodlas. Jag benämner dem A referensmodell och B begreppsmodell.

A Referensmodell.

En referensmodell kallar jag det då studenterna genom att referera till elevens förståelsevärld försöker att transformera till matematikens värld. Här följer tre olika aktiviteter för studenters olika sätt att referera till elevers förmodade kända kunskap för att underlätta transformationer till nya matematiska begrepp.

A 1. Vardaglig aktivitet

Studenter talar om att de kan låta elever göra saker i vardagen, gå ut i naturen eller göra något på en gymnastiklektion. Här försöker studenterna att ge eleverna en kontext så att de får något att utgå från i ett fortsatt resonemang.

Exempel IV

J: Jag hade nog egentligen börjat med att förbereda gympaläraren på att de skulle få springa. Ta sin tid och prova. De

behöver kanske inte springa 60 m de kanske bara behöver 30 m. De springer lite grand och ser och tar tid.
M: Just att de får känna på att ta tiden själva och läsa av.
J: Och se att du sprang fort.
M: a men just när man springer då blir det lite annorlunda. Medan andra grenar som längdhopp eller höjdhopp där är ju det högsta talet. Längdhopp där den som hoppar längst hoppar tio meter och den som hoppar minst hoppar åtta meter. I löpningen blir det tvärtom.
Å: Här är ju mycket att göra med vilka referensramar man har själv. Sitter man och tittar på OS och VM och när de springer och hoppar då har man plötsligt en hel del gratis. Samma sak att man förstår att den som har lägst tid vinner.
J: Man måste gå ut och prova på det. Om man har sett mycket på friidrott eller har utövat det själv.
Å: Och att man plockar upp om det har varit ett stort evenemang. Man tar upp de delarna i matematiken för då blir det extra tydligt vem som vinner.
J: Ja så är det med skidor, slalom tydligt vem som vinner.
Å: Nu är det helt plötsligt det lägsta. Jag tror att det är ett bra sätt att koppla till verkligheten. Många tror inte att det är matematik.

Studenter vill få elever att "förstå" genom att ge tillämpningsområden från deras verklighet och samtala om något som eleverna själva upplevt. De vill också utnyttja olika medier som TV och radio, då man refererar idrottsevenemang.

A 2. Laborativ aktivitet

I en laborativ aktivitet används manipulerbart material. Det är vanligt att studenterna ger flera förslag på olika laborationer. Det är vanligt att de ger flera förslag på olika laborationer inom ämnet. I de båda uppgifterna ger de förslag på aktiviteter genom uttryck som dela rektangeln på hälften, klippa, rita, A-4 papper, platta med nålar, geobräde, tidtagarklocka, laborera, räkna, skapa en inre bild, konkret material. De menar att eleverna ska använda så många sinnen som möjligt och låta elever se och känna.

Exempel V

M: Jag skulle kunna tänka mig att använda geobrädan.

I: Ta och beskriv hur du skulle göra med det.
M: Då skulle man också kunna ha en rektangel eller en kvadrat, med gummisnoddar runt. Man lägger en kvadrat och lägger en gummisnodd i kvadraten och lägger en triangel. Då ser man ju ganska klart att det är hälften. Då är det ju handgripligt samtidigt.
J: Om man inte har tillgång till geobräda så kan man ju använda sig av en utklippt kvadrat och sen en triangel i en annan färg som man lägger ovanpå. Då ser man ju att det är hälften.
J: De får göra det själva. Man ska använda så många sinnen som möjligt. Och då har vi pratat matte, de har lyssnat, de har sett själva och de ska få göra själva och känna att de får rita, klippa och sen klippa ut och själva bygga ihop.

Studenterna beskriver olika laborativa delar för att förstå hälften av en rektangel. De samtalar om aktiviteter som höjer elevers abstraktionsnivå och kommer då in på tabeller och diagram.

A 3. Grafisk aktivitet
Studenterna talar ofta om vikten att eleven skapar sig en bild av något så lär de sig lättare. Det kan vara en bild av en rektangel, ett diagram och en tabell.

Exempel VI
M: Det är ju väldigt viktigt att de ser bilden av trianglar och rektanglar och att man verkligen skriver ut att det här är basen och det här är höjden, att man matar in det hela tiden.
Å: Man kan ju sätta upp i klassrummet figurer av olika slag av trianglar att de kan se olika ut. Jag tror ju att det är bra att se det. Det är bra att man har en bild av. Jag tror att det är bra att rita upp konkreta bilder av det.
M: Ja om det ska vara så står det basen gånger höjden med bokstäver. Så att det inte bara står b gånger h delat på två.

Andra exempel på aktiviteter uttrycks genom att fylla på med nollor, skriva en resultatlista, tabell, ett positionssystem, rutnät, tallinje, diagram och skriva upp på tavlan.
Studenterna ger exempel på olika transformationer som behövs för att underlätta elevers förståelse av matematiken. De gör det i form av var-

dagen, laborativa inslag och grafiska förklaringar. De befinner sig i olika diskurser.

B Begreppsmodeller

Det matematiska språket är i fokus i denna modell. Elevers förståelse av matematiska begrepp menar studenterna är mycket viktig. De vill få eleverna att upptäcka och använda sig av samband, samtala om dem och lyssna när andra berättar hur de tillämpar dem.

Jag skiljer här mellan begreppsuttryck och begreppsrelation och vill med det visa att matematiken innehåller olika uttryck som kan betyda en sak i vardagen och en annan sak i matematiken och att matematiska begrepp kan ha inbördes relationer.

B 1. Begreppsuttryck

De matematiska termerna måste uppmärksammas särskilt. Ett ord får olika betydelse beroende på vilken diskurs det tillhör.

Exempel VII

H: Barn vet ju ofta inte vad de ska fråga om. När man introducerar ett begrepp så vet de kanske inte vad de ska fråga om.
C: De kan fråga vad står b för, l för och h för. Då kan man förklara det.
H: Referens till en bas (b är basen på triangeln).
I: Ja instrumentet bas (spelinstrument).
H: Ja vardagsspråket och det matematiska språket.
C: Ja bas på piano eller röstläge.

Studenterna talar om hur de ska få elever att bli uppmärksamma på de språkliga orden och vad de står för. I exemplet ovan finns det alltid elever som tänker på en annan förklaring till ordet bas, som till exempel instrumentet bas, än den som finns i geometrin. De menar att det är viktigt att uppmärksamma att begreppen befinner sig i olika diskurser.

B 2. Begreppsrelation

Begreppsrelation handlar om matematiska begrepp och hur de förhåller sig inbördes till varandra.

Exempel VIII

J: De måste ju veta ordningstal och den första är den som har vunnit.

S: De måste ju kunna se heltalen 10 och 9.
C: Så heltal måste de kunna både ental och tiotal.
S: Sen fick jag lära mig att man kunde fylla ut med nollor. Så här har vi två decimaler och då fyller vi ut med nollor så att det är två på alla.
J: Annars är det en tvåa och en tolva. De ser kanske 10,2 som snabbare än 10,12.
S: Men säger de då 10,20 och 10,12 så ser de.
C: Du menar Jenny att 10,12 är snabbare eftersom det är fler siffror?
J: Nej jag tänkte att de såg tvåan före tolvan.
S: Kommer före tolvan.
C: Jag vet inte men jag är mycket för att de ska kunna tiotal och ental och sen även tiondel och hundradel är jag ute efter. Alltså de begreppen ska finnas med när de lär sig det här.

Studenter diskuterar hur man ska få elever att förstå begreppen genom att tala om dem och att fokusera på skillnader. De betonar elevernas kommunikativa förmåga.

B 3 Begreppsanvändning
Här framför studenterna att elever ska använda sina matematiska begrepp, de talar om att lyfta eleverna, höja abstraktionsnivån.

Exempel IX
J: När man har diskuterat lite vad de har kommit fram till och hur deras lösningar ser ut så känns det att det är läge att lyfta fram det här med bas och höjd. Lyfta abstraktionsnivån!
A: Är det workshop som gäller nästa lektion då? Det kan väl passa bra att testa de här på olika sätt. Man har fått olika tänkesätt då man har diskuterat i grupp man har fått en formel och man har fått det matematiska språket och nu är det dags att applicera det på olika sätt i en workshop och där arbetar man också i grupper.
S: Sa ni något om konkret material?
A: Jag tycker att det är viktigt att man har en diskussion vad man har kommit fram till och vad man har gjort på de olika stationerna så att det här inte enbart är något som görs för görandets skull utan det måste lyftas också. Vad är det vi har gjort och

vad har vi kommit fram till Är det något vi kan lära varandra och varför.
J: Precis. Det är ju diskussionen och genomgången efteråt som förvandlar det hela till en process än ett görande.

Med ordet process menar J att om elever får möjlighet att samtala om vad de har utfört så utvecklar de en form av reflekterat lärande. Inom begreppsmodellen visar jag på hur viktigt det matematiska språket är för utveckling av elevers matematiska förmåga. Här betonas alltså en språklig artefakt.

Elevdiskurs

Vid genomläsningen av samtalen märkte jag vidare att studenterna "tog spjärn" emot en bakomliggande diskurs. Jag vill här kalla den för *elevdiskurs* eftersom elevens utveckling är i fokus. Den spårades tydligast vid samtalens argumentativa delar.

Studenterna refererar framför allt till att kännedom om elevens "förförståelse" är nödvändig för uppläggningen av undervisningen.

Exempel X

H: Då kommer vi till genomförandet.
T: Det hänger mycket på vad de har gjort innan och vad de har för förförståelse.
H: Förmodligen har de gjort något dylikt med kvadraten.
A: Eftersom det här verkar som om många elever har svårt för och det är väldigt viktigt. Skulle man inte kunna jobba över gränserna och dela upp eleverna i tre olika grupperingar, först kan man ta reda på var eleverna ligger och sen dela in dem efter det.
S: Man ger alla elever olika sätt att förstå säg att ett gäng redan har förstått positionssystemet, alla är med på olika sätt att förstå.

När man väl fastställt en utgångsnivå gäller det att i fortsättningen "förklara" så att eleverna "förstår". Efter avslutad undervisning bör man hitta sätt för eleverna att uttrycka sina kunskaper på – en slags resultatredovisning.

Exempel XI

J: Jag tycker att det är spännande att låta eleverna själva beskriva muntligt eller skriftligt vad de har lärt sig. Sätta ord på och hur

uttrycker dem vad de har lärt sig om det här.
A: Ska det vara enskilt eller i grupp?
J: Det kanske kan vara bra om de får prata om det i grupper och sen skriva ner det eller om det samtalet gör att de skriver annorlunda.
A: Det kan nog vara både och för ibland behöver man få höra lite tankar för att få igång sitt eget tänk och samtidigt börjar man tänka som alla andra.
J: Utvärdering. Ja helt grupp, individuellt, skriftligt, muntligt.
S: Sätta ord på vad du har lärt dig.

När studenterna talar om utvärdering blir de först lite undrande men sen menar de att utvärderingen också måste bygga på variation och då föreslår de att man arbetar i grupp, i par och enskilt och att man hela tiden använder sig av det matematiska språket.

När de i slutet får frågan varför de tror att det som de har beskrivit blir bra svarar de med förklaringar som att samtala i grupp ger elever möjlighet att lyssna till varandra, att läraren är viktig i samtalet genom att höja nivån i elevers samtal och genom att elever få göra tillämpningsövningar. De gör en sammanfattning och förklaring till hur de är överens.

Exempel XII

I: Varför tror ni att det här blir bra?
J: Vi försöker att utgå ifrån var de är någonstans, det kommer de fram till när de diskuterar och sen så försöker vi att förankra det vi gör i vardagen och i det praktiska att få göra det tror jag mycket på och sen också att man jobbar tillsammans och man uppmuntras hela tiden att diskutera och samtala om det man gör och sen lyfter man diskussionen också i storgrupp och då har läraren möjlighet att vara med på ett annat sätt än när man diskuterar i smågrupper och kan hela tiden lyfta det och kanske hjälpa dem att sätta ord på det som de håller på med.
A: Det handlar mycket om process i stället för produkt att man ska lära sig att använda sig av det här och känna att det finns ett användningsområde för det.

Från muntlig till skriven diskurs

Här följer exempel på lektionsplaneringar som inlämnades en tid efter

samtalen. Planeringarna kommenteras helt kort i de termer som tidigare presenterats.

Lektionsplanering - Triangelns area.

Mål: Eleverna ska få förståelse för formeln för triangelns area.
Genomförande: Eleverna får en triangel och uppgiften är att ta reda på dess area, gruppvis.
Material: Geobräde, rutat papper, papper, sax, snöre, pennor mm.
För de grupper som blir färdiga tidigt finns en extrauppgift där olika figurers förhållande till varandra tränas. (Del av begreppet). Grupperna får redovisa sitt resultat inför klassen. Läraren får om så behövs komplettera lösningarna och komma in på det matematiska språket med hjälp av elevernas vardagsspråk. Formeln b*h/2 måste ha bearbetats fram. Även ord som bas, höjd, diagonal, längd och bredd.
Utvärdering: Detta ska också provas på figurer med kända mått, så att de kan godta formeln.

I lektionsplaneringen för triangelns area framgår att de flesta börjar i en grafisk modell av en rektangel eller kvadrat. De går sedan vidare att studera relationen mellan olika areor. Därefter övergår studenterna till en laborativ fas och här beskriver de hur elever arbetar i grupp. Man avslutar med någon form av resultatanvändning.

Lektionsplanering - Positionssystemet

Tema Lilla OS, 4-5 olika grenar.
För in resultat i positionstabell med decimaltal
Parallellt med tallinje
Jobba med decimaltal. Dela ut lappar med olika tal på så får eleverna ställa sig på led.
Lång tallinje i klassrummet
Kort med tal på – vem har störst tal/minst.
Elever får berätta hur de tänkt när de löst problemet
Olika lösningar - olika svårigheter
Arbeta i grupper och klocka nya tider

Eleverna börjar i en vardaglig aktivitet, då man gör en uppgift med verklighetsanknytning. Därefter arbetar de parallellt med tabeller och tallinjen, vilket leder till en grafisk modell. De går över till en laborativ aktivitet med kort. Därefter ska eleverna beskriva sin nyfunna kunskap.

Man kan i den skrivna planeringen se två olika diskurser, nämligen det som har påpekats tidigare en vardaglig och en matematisk diskurs beroende av hur uppgiften är utformad. Vidare ser man att studenterna har blivit ganska överens hur en lektion ska utformas efter deras samtal och att de skrivna arbetena är skrivna i stolpform.

Sammanfattning

Sammanfattas och granskas resultatet av analysen ovan kan detta konstateras om vad som utmärker lärarstudenters "sätt att tala" om ett undervisningsproblem.

Lärarstudenternas samtal gav många uppslag, idéer och tankar om hur detta skulle lösas i klassrummet. Samtalsväven blev brokig. Först spårades en osäkerhet och ovisshet då gissningar och förmodanden blandades med tvivel. Allt eftersom samtalet fortskred utvecklades resonemang och slutledningar. Samtalen utvecklades till att göra var och en i gruppen delaktig i den matematiska diskursen. Man kommunicerade mot ett gemensamt mål.

Man kan också formulera förloppet så här. I början bestämdes vilka "spelkort" som skulle användas. Studenterna talade om vardagsanknytning, matematiskt språk, laborativt material osv. Med de tidigare presenterade teoretiska begreppen från den sociokulturella traditionen företräder "spelkorten" olika diskurser. Eleverna möter olika sätt att tala om matematiska företeelser på olika sätt genom olika typer av "spel". De manipulerbara materialen fungerar som medierande redskap eller länkar till ett matematiskt begreppssystem och bestämmer delvis vad som kan sägas. Eleverna inbjuds alltså att bli delaktiga i olika diskurser.

På grund av uppgifternas natur blev det ganska självklart att tala i vardagliga termer i ena uppgiften och mer strikt matematiskt i den andra. Man kan notera att studenterna inte blandade diskurserna vid behandlingen av uppgifterna – en uppgiftstyp och en diskurs. T.ex. gavs inte något praktiskt exempel utanför skolan på triangelns area. Inte heller diskuterades den briljanta matematiska idéen att med tio olika tecken (siffror) skriva hur stora och små tal som helst.

När de studerande sedan diskuterade olika strategier lutade de sig bildligt talat mot en "lärardiskurs". Den innefattar den ovan påvisade elevdiskursen kompletterad med begrepp från inlärningsteoretiska skolor. Honnörsord blev förklara, förstå, förförståelse, variation. Relationen mellan begreppen kan formelmässigt återges som: Genom att

utgå från elevens förförståelse och sedan genom att ge varierande förklaringar kan läraren få eleven att förstå det nya. Det är detta som sammanfattar lärardiskursen. De inlämnade planeringarna visar att lärarstudenterna i stort sett var eniga om en sådan uppläggning. Men de saknar en reflekterande del kring just de begrepp som ingår i lärardiskursen.

Avslutande diskussion

Hur ska nu studien ses i ett större sammanhang?

Genom att införa ett begrepp som "diskurs" i resonemang om undervisning och utbildning visar man på att det har med språk att göra. En diskurs definierar en helhet av gemensamma synsätt och uppfattningar där språkkommunikationen handlar inte enbart om kommunikation mellan två människor utan också inbegriper kultur och samhälle.

Språket har en enorm betydelse för hur människor utvecklas (Vygotsky, 1986; Säljö, 2000). Genom språket kan vi tänka, få idéer och uppslag hur vi ska handla. Genom språket kan vi hantera och inse vad som händer i olika situationer i vår omgivning, i våra relationer till varandra och inte minst vad som händer inom oss själva. Vad vi säger och hur vi säger det är viktigt såväl i mellanmänskliga relationer som i den vidare kommunikation som sker inom organisationer, i kulturella sammanhang och i samhället i stort.

Diskurser påverkar vad man säger, tycker och tänker samtidigt som när man säger något bidrar till att hålla den ena eller andra diskursen vid liv. Begreppet diskurs pekar på hela den kontext eller praktik som frambringar en viss typ av yttranden (Wyndhamn, 2002). När man blir delaktig i en diskurs blir man involverad i och lär sig att mer behärska ett "språkspel" (Wittgenstein, 1953/1978).

När lärarstudenterna söker en lösning på det undervisningsproblem de ställdes inför letar de först efter en ändamålsenlig diskurs som de två startuppgifterna kan ingå i. De fastnar för en tydligt vardagsanknuten respektive en mer matematiskt betonad diskurs.

Det går alldeles säkert att följa detta upplägg i ett vanligt klassrum. Som de studerande diskuterar föreligger dock stor risk att de två diskurserna kommer att löpa parallellt. Några tankar om hur kopplingen mellan vardagliga erfarenheter och matematiska begrepp ser ut förekommer inte. Man talar vagt om att "höja abstraktionsnivån". Men nu kan man ju inte heller förvänta sig att personer under utbildning ska reflektera över och ha lösning på en av undervisningens mest centrala frågor, nämligen den som berör generalisering av begrepp. Diskursbe-

greppet låter dock oss ana att man kan söka konstruktiva svar genom att diskutera hur ett överskridande av diskursiva gränser må göras.
Lärarstudenterna deltar också i en annan diskurs, en som eleverna inte möter. Jag har här kallat den för lärardiskurs. Ord som förklara, förstå, förförståelse och variation är tydliga markörer på detta. Det är den diskurs som genomsyrar studenternas hela utbildning, det är själva livsluften för en lärare. Begreppen som sådana och deras inbördes relationer har ingen klar identitet. De används som om deras innebörd eller mening var allmänt vedertagen och distinkt. Orden tillhör en lärarvardaglig, verksamhetsanknuten diskurs.

Detta språk ger inget uttryck för legitimitet i vetenskapliga sammanhang där valet av begrepp måste vara pregnant. För att en utbildning ska "vila på vetenskaplig grund" måste en annan typ av diskurs skapas och förankras. Den ämnesdidaktik som börjar växa fram har möjlighet att tillhandahålla en diskurs som tillfredställer både vetenskapliga krav och samhällets avnämarkrav.

På den i inledningen ställda fråga: Kan problemlösande samtal stärka en lärarkompetens i vardande? Vill jag avslutningsvis svara så här.

För att en lärare ska kunna genomföra ett bra lektionspass i matematik behövs förutom att vara bevandrad i en matematisk diskurs även förtrogenhet med ämnesdidaktisk diskurs som tillhandahåller tankeverktyg för genomförandet av en önskad undervisning.

Litteraturreferenser

Bergqvist, K. & Säljö, R. (2004). Learning to plan: A study of reflexivity and discipline in modern pedagogy. I Jos van der Linden och Peter Renshaw (Red.) ***Dialogic Learning. Shifting Perspectives to Learning, Instruction and Teaching.*** Dordrecht/ Boston/London: Kluwer Academic Publishers, pp. 109-124.

Daniels, H. (2001). ***Vygotsky and Pedagogy.*** New York and London: Routledge Falmer.

Glenn Commission, (2000). ***Before It's Too Late: A Report to the Nation from The National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century.*** USA: Education Publications Center.

Hicks, D. (1996). (ed.). ***Discourse, learning and schooling.*** NY: Cambridge University Press.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). (eds). ***Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.*** Mathematics Learning Study Committee. Washington, D.C: National Academy Press.

Kozulin, A. (1998). ***Psychological Tools. A sociocultural approach to education.*** Cambridge, Massachusetts, London, England: Harvard University Press.

Linell, P. (1998). ***Approaching Dialogue: Talk and Interaction in Dialogical Perspectives.*** Philadelphia, USA; Amsterdam; The Netherlands: John Benjamins Publishing.

Lindqvist, U., Emanuelsson, L., Lindström, J-O., & Rönnberg, I. (2003). ***Lusten att lära – med fokus på matematik.*** Stockholm: Skolverkets rapport.

Lpo-94, (1994). ***Läroplan för det obligatoriska skolväsendet.*** Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Löwing, M. (2004). ***Matematikundervisningens konkreta gestaltning. En studie av kommunikationen lärare – elev och matematiklektionens didaktiska ramar.*** Göteborg: Studies in Educational Sciences 208. Acta Univrsitatis Gothoburgensis.

Ma, L. (1999). ***Knowing and Teaching Elementary Mathematics.*** Mahwah, New Jersey, London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Mercer, N. (1995). ***The guided construction of knowledge. Talk amongst teachers and learners.*** Clevedon, England: Multilingual Matters.

Nilsson, G. (2005). ***Att äga pi. Praxisnära studier av lärarstudenters arbetee med geometrilaborationer.*** Göteborg Studies in Educational Sciences 228. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

NU 2003, (2004). ***Nationella utvärderingen av grundskolan 2003.*** Stockholm: Skolverket: Rapport 250.

Riesbeck, E. (2000). ***Interaktion och problemlösning. Att kommunicera om och med matematik.*** Linköping: Linköpings Universitet. Institutionen för pedagogik och psykologi. 42-00.

Runesson, U. (1999). ***Variationens pedagogik.*** Göteborg Studies in Educational Science, 129. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Samuelsson, J. (2003). ***Nytt, på nytt sätt? En studie över datorn som förändringsagent av matematikundervisningens villkor, metoder och resultat i skolår 7-9.*** Doktorsavhandling. Uppsala: Pedagogiska institutionen, Uppsala universitet.

Sfard, A. (2000). Symbolising mathematical reality into being – or how mathematical discourse and mathematical objects create each other, in P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds). ***Communicating and symbolizing in mathematics: Perspectives on discourse, tools and instructional design.*** Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, ***pp.37-98.***

Sfard, A. (2002). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning, in C. Kieran, E. Forman, & A. Sfard, ***Learning Discourse. Discursive approaches to research in mathematics education.*** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 13-57.

Skolverket. (2000). Grundskolan. Kursplaner och betygskriterier 2000. Stockholm: Fritzes.

Skolöverstyrelsen. (1980). ***Läroplan för grundskolan, Lgr 80.*** Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.

Säljö, R. (2000). Lärande I Praktiken. Stockholm: Prisma.

Säljö, R., Riesbeck, E., Wyndhamn, J. (2003). Samtal, samarbete och samsyn, i Olga Dysthe (Red.) ***Dialog, samspel och lärande.*** Lund: Studentlitteratur, pp.219 – 242.

Säljö, R. (2005). ***Lärande & Kulturella Redskap.*** Stockholm: Norstedts Akademiska förlag.

Van Oers, B. (2002). Educational forms of initiation in mathematical culture, in C. Kieran, E. Forman, & A. Sfard, ***Learning Discourse. Discursive approaches to research in mathematics education.*** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 59-85.

Vygotsky, L. S. (1978). ***Mind in Society***. Cambridge: Harvard University

Vygotsky, L. S. (1986). ***Thought and language.*** Cambridge, Mass.: MIT Press.

Wertsch, J.V. (1985a). ***Vygotsky and the social formation of mind.*** Cambridge, MA.: Harvard University Press.

Wertsch, J.V. (1998). ***Mind as action.*** Cambridge, MA.: Harvard University Press.

Wittegenstein, L. (1953/1978). ***Filosofiska undersökningar.*** Stockholm: Bonniers.

Wyndhamn, J. (1993). ***Problem-solving revisited. On school mathematics as situated practice.*** Linköping: Department of Communication Studies. Linkoping Studies in Arts and Science. 98.

Wyndhamn, J. (1995). ***Lärarens triangel och elevens trekant. En deskriptiv studie över matematiska samtal i klassrummet.*** Linköping: Arbetsrapport från Tema K 1995:1.

Wyndhamn, J. (2002). Att lära med och av ett datorprogram. En explorativ studie, i Roger Säljö, A & Jonas Linderoth. (Red.). ***Utmaningar och e-frestelser. It och skolans lärkultur.*** Stockholm: Prisma, pp. 97-118.

LINKÖPING STUDIES IN BEHAVIOURAL SCIENCE

97. JOHANSSON, OLOF. You don't have to agree with me, but you have to be jointly responsible: Collaborative remembering in old couples. 2004. ISBN 91-85295-37-X.
98. MATWEJEFF, SUSANNA. Svenskfödda adopterades sökprocess. 2004. ISBN 91-85295-49-3. (Ej framlagd)
99. LANDSTRÖM, INGER. Mellan samtid och tradition – folkhögskolans identitet i kursutbudets yrkesinriktning. 2004. ISBN 91-85297-01-1.
100. MOQVIST, LOUISE. Ledarskap i vardagsarbetet – en studie av högre chefer i statsförvaltningen. 2005. ISBN 91-85297-35-6.
101. HILL, TECI. Allians under tvång. Behandlingssamarbete mellan elever och personal på särskilda ungdomshem. 2005. ISBN 91-85299-38-3.
102. FOGELBERG ERIKSSON, ANNA. Ledarskap och kön. En studie av ledare och maskuliniteter i ett verkstadsindustriföretag. 2005. ISBN 91-85299-93-6.
103. ASSARSSON, LISELOTT & SIPOS ZACKRISSON, KATARINA. Iscensättande av identiteter i vuxenstudier. 2005. ISBN 91-85457-26-4.
104. GRAHN, MARGARETHA. Musernas viskningar förr och nu. En studie av det musiska och inriktningen musiskt lärande. En teoretisk analys samt ett empiriskt bidrag från lärarutbildningen. 2005. ISBN 91-85457-27-2.
105. THORNBERG, ROBERT. Värdepedagogik i skolans vardag: Interaktivt regelarbete mellan lärare och elever. 2006. ISBN 91-85497-40-1.
106. FEJES, ANDREAS. Constructing the adult learner – a governmentality analysis. 2006. ISBN 91-85497-47-9.
107. SWAHN, RAGNHILD. Gymnasieelevers inflytande i centrala undervisningsfrågor. 2006. ISBN 91-85523-72-0.
108. ALM, CHARLOTTE. The Role of Causal Attribution and Self-Focused Attention for Shyness. 2006. ISBN 91-85523-73-9.
109. SVENSSON, LOTTA. Vinna och försvinna? Drivkrafter bakom ungdomars utflyttning från mindre orter. 2006. ISBN 91-85523-50-X
110. HÄLL BJERNEBY, MARIA. Allt har förändrats och allt är sig likt. En longitudinell studie av argument för grundskolans matematikundervisning. 2006. ISBN 91-85523-55-0
111. BAUMGARTEN, MAUD. Anställdas deltagande i läraktiviteter. En studie av arbetsplatslärande i ett industriföretag. 2006. ISBN91-85523-36-4.
112. NORDZELL, ANITA . Samtalat skolledarskap. Kategoriserings- och identitetsarbete i interaktion. 2007. ISBN91-85643-15-7.
113. WEDIN, ANN-SOFI. Lärares arbete och kunskapsbildning. Utmaningar och inviter i den vardagliga praktiken. 2007. ISBN 978-91-8571563-3.

114. BRÜDE SUNDIN, JOSEFIN. En riktig rektor. Om ledarskap, genus och skolkulturer. 2007. ISBN: 978-91-85715-62-6.
115 JAKOBSSON, ERIK. Mot en ny vuxenutbildningspolitik? Regional utveckling som policy och praktik. 2007. ISBN: 978-91-85715-13-8.
116. JOHANSSON, KRISTINA. Broad Entrance - Vague Exit the trajectory of Political Science students through higher education into work life. 2007. ISBN 978-91-85831-86-9.
117. HELLBERG, KRISTINA. Elever på ett anpassat individuellt gymnasieprogram: skolvardag och vändpunkter. 2007. ISBN 978-91-85831-92-0.
118. SPARRLÖF, GÖRAN. Vi manliga lärare: Folkskolans lärare och lärarinnor i kamp om löner och arbetsvillkor 1920-1963. 2007. ISBN 978-91-85831-38-8.
119. LARSSON, ANN-CHRISTINE. Empowermentprocesser - ett sätt att öka långtidssjukskrivna kvinnors resurser? En studie om att återta balansen i arbetslivet och i vardagslivet. 2007. ISBN: 978-91-85831-02-9
120. NILSSON, STAFFAN. From Higher Education To Professional Practice A comparative study of physicians' and engineers' learning and competence use. 2007. ISBN: 978-91-85895-70-0.121.
121. WALLGREN, LILLEMOR. Mellan skilda världar. En studie av doktoranders lärsituation i relation till förutsättningarna i fyra företagsforskarskolor. 2007. ISBN:978-91-85895-69-4.
122. AHN, SONG-EE. Ur kurs - om utbytesstudenters rörelser i tid och rum. 2007. ISBN: 978-91-85895-41-0.
123. KARLSSON, YVONNE. Att inte vilja vara problem - social organisering och utvärdering av elever i en särskild undervisningsgrupp. 2008. ISBN:978-91-85895-28-1.
124. KÖPSÉN, SUSANNE. Från revolution till reträtt. Lärande i en fackförenings vardag. 2008. ISBN: 978-91-85895-03-8.
125. NORDVALL, HENRIK. I skärningspunkten mellan det globala och det lokala Tolkningsprocesser och koalitionsbyggande i organiseringen av lokala sociala forum. 2008.ISBN: 978-91-85523-00-9.
126. SAMUELSSON, MARCUS. Störande elever korrigerande lärare Om regler, förväntningar och lärares åtgärder mot störande flickor och pojkar i klassrummet. 2008. ISBN: 978-91-7393-994-2.
127. LARSSON, KJERSTIN. Mellanchefer som utvecklar- om förutsättningar för hållbart utvecklingsarbetet inom vård och omsorg. 2008. ISBN: 978- 91-7393-993-5.
128. FORSLUND FRYKEDAL, KARIN. Elevers tillvägagångssätt vid grupparbete. Om ambitionsnivå och interaktionsmönster i samarbetssituationer. 2008. ISBN: 978-91-7393-950-8.
129. RIESBECK, EVA. På tal om matematik. Matematiken, vardagen och den matematikdidaktiska diskursen. 2008. ISBN: 978-91-7393-948-5.