Proportionalitetsbegreppet i den svenska gymnasiematematiken

– en studie om läromedel och nationella prov

Anna L.V. Lundberg

Linköping University
INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Matematiska institutionen
Linköpings universitet, 581 83 Linköping, Sweden

Linköping 2011

Proportionalitetsbegreppet i den svenska gymnasiematematiken - en studie om läromedel och nationella prov

Matematiska institutionen
Linköpings universitet
581 83 Linköping

Anna.v.Lundberg@liu.se

LIU-TEK-LIC-2011:37

ISBN 978-91-7393-132-8

ISSN 0280-7971

Denna licentiatavhandling ingår även i serien: Studies in Science and Technology Education 2011:44 ISSN 1652-5051 ISBN 978-91-7393-132-8

Nationella forskarskolan i Naturvetenskapernas och Teknikens didaktik, FontD, http://www.isv.liu.se/fontd, tillhör Institutionen för samhälls- och välfärdsstudier och Områdesstyrelsen för utbildningsvetenskap (OSU) vid Linköpings universitet. FontD är ett nätverk av 8 medverkande lärosäten: universiteten i Umeå, Stockholm, Karlstad, Mälardalen, Linköping (värd), Linnéuniversitetet samt högskolorna i Malmö och Kristianstad. Därutöver tillkommer 3 associerade lärosäten: högskolorna i Halmstad och Gävle samt Mittuniversitetet. FontD publicerar skriftserien Studies in Science and Technology Education.

Tryckt av LiU-Tryck, Linköping 2011

Förord

Denna licentiatavhandling är utförd under finansiellt stöd av Nationella forskarskolan i Naturvetenskapernas och Teknikens didaktik, FontD och Anders Ljungstedts Gymnasium (ALG), Linköpings Kommun. Jag vill tacka för att de har gett mig möjligheten att fördjupa mig i de fenomen som jag har mött i min verksamhet som ämneslärare i matematik & kemi på gymnasiet. Jag vill särskilt tacka gymnasiechef Karin Nyman, rektor Mikael Ankelius, rektor Sten Lundberg för att ha varit mycket tillmötesgående under min utbildning som varit förlagd med 80% vid universitetet och 20% undervisning vid ALG.

Min forskarutbildning i ämnesdidaktik vid Matematiska Institutionen vid Linköpings universitet påbörjades hösten 2008 och jag vill tacka min huvudhandledare Prof. Christer Bergsten för att med stor generositet funnits till hands för diskussioner om avhandlingen under dessa år med omdömesgilla kommentarer vid val av forskningsfält och metodologi. Min tacksamhet riktas även till min biträdande handledare Kirsti Hemmi som med sin entusiasm fått mig att se vägar förbi olika hinder jag mött.

NOGSME Summer School i Roskilde och YESS-5 Summer School, Palermo vill jag tacka för att ha hjälpt mig med värdefulla kommentarer på mitt avhandlingsarbete. Prof. Carl Winsløw och Prof. Jeppe Skott har bidragit med frikostiga kommentarer angående ramverk och analysinstrument som jag vill tacka för. Utbildningen har även medfört en fördjupning i matematik vid MAI och jag vill tacka Thomas Karlsson, Jan Snellman, Prof. Milagros Izquierdo Barrios, Mats Neymark, Bengt-Ove Turesson och Björn Textorius för nya fascinerande insikter i matematik. På FontD har den vetenskapliga kommitténs synpunkter varit till stor hjälp, tack till Prof. Ole Björkqvist och Prof. Mogens Niss. Jag vill också tacka Prof. Em. Helge Strömdahl, Prof. Lena Tibell, Fo.Ass. Konrad Schönborn, Prof. Shu-Nu Chang Rundgren och Carl-Johan Rundgren för givande kommentarer i FontD-kurserna. Under skrivandets gång har många bidragit med synpunkter på delar av manuset: Olle Axling, Marie Bergholm, Carin Skoog, tack för att ni hjälpt mig. Jag vill också passa på och tacka Linköpingsgruppen, Font D, Peter Frejd och Patrik Erixon och doktorander vid MAI för intresseväckande diskussioner i didaktiska frågor.

Tack till Karin Bülow-Winzell, Pia Stålhandske och Susanna Kellgren för ert stöd och uppmuntran.

Avslutningsvis vill jag tacka min familj, för all hjälp och stöttning ni har gett mig under flera år av utbildningar och kurser.

Anna L. V. Lundberg

Linköping maj, 2011

Innehållsförteckning

Sammanfattning

Proportionalitet är ett centralt begrepp i skolmatematiken. Begreppet introduceras i de lägre stadierna och återkommer i så gott som samtliga kurser från årskurs 9 till sista kursen på gymnasiet. Det övergripande syftet med denna studie är att undersöka hur det matematiska begreppet proportionalitet hanteras i den svenska gymnasieskolan. En generell problematik kopplad till detta syfte är hur skolans styrdokument realiseras i läromedel och nationella prov. Fokus för denna avhandling har varit hur proportionalitet hanteras i det svenska gymnasiet i kursen Matematik A i några läromedel och nationella prov. För att undersöka detta utvecklades ett analysverktyg utifrån det teoretiska ramverket i ATD (Anthropological Theory of the Didactic). Av intresse är här relationer mellan de olika nivåerna i den didaktiska transpositionen, som berör just hur skolans styrdokument realiseras i läromedel och nationella prov. För det empiriska studiet av materialet användes från ATD begreppet matematisk organisation, genom att använda ett analysverktyg för att granska typer av uppgifter om proportionalitet, lösningstekniker och teoretiska modeller för proportionalitetsbegreppet.

De data som presenterats i denna studie ger en ganska ostrukturerad bild av de matematiska organisationer av begreppsområdet proportionalitet som presenteras i läromedel och i nationella prov och de ser även olika ut när det gäller hur proportionalitet hanteras i läromedlen respektive det nationella provet för Matematik A. Resultatet visar att ungefär var fjärde uppgift i de studerade kapitlen och de nationella proven berör proportionalitet men att begreppet hanteras ensidigt vad avser uppgiftstyp. Skillnader observerades mellan läromedel och nationella prov när det gäller hur lösningstekniker rekommenderas för olika typer av proportionalitetsuppgifter. De två teoretiska modeller för proportionalitet som har undersökts, dvs. statisk och dynamisk proportionalitet, finns representerade i ungefär lika omfattning i både läromedel och nationella prov. Vid uppgifter inom geometri handlar det dock ofta om statisk proportionalitet medan det inom området funktioner är vanligare att använda dynamisk proportionalitet.

Lärare bör få kunskap om skillnader mellan läromedel och läroplaner, och hur dessa tolkas i nationella prov, så att de i sin verksamhet kan välja det undervisningsinnehåll, inklusive övningsuppgifter, som ger en god variation för eleven kopplat till kursplanernas mål.

Nyckelord: Proportionalitet, Matematik A, läromedel, nationella prov

Abstract

Proportionality is a key concept in school mathematics. It is introduced in the primary grades, and reappears in almost all mathematics courses from Grade 9 to the last course in upper secondary school. The overall aim of this study is to investigate how the mathematical concept of proportionality is handled in the Swedish upper secondary school. A general problem connected to this end is how the national curriculum is realised in textbooks and national examinations. The focus of this thesis is on how proportionality is handled in the first Swedish upper secondary course in mathematics in some textbooks and national examinations. To examine this an analysis tool based on the theoretical framework of the ATD (Anthropological Theory of the Didactic) was developed. Of interest here are relations between the different levels in the didactic transposition, concerned with exactly how the national curriculum is realised in textbooks and national examinations. For the empirical study of the empirical material the ATD concept of mathematical organisation was used, employing an analytical tool to examine the types of tasks dealing with proportionality, techniques for solving these tasks, and theoretical models for the concept of proportionality.

The data presented in this study gives a fairly unstructured picture of the mathematical organisations of the conceptual field of proportionality, as presented in textbooks and in the national tests. They also look different when it comes to how proportionality is handled in the textbooks and the national test for "Matematik A". The result shows that about every fourth task of the chapters and the national tests studied involved proportionality, but that there was a low variation in terms of types of tasks. Differences were observed between textbooks and national tests in terms of how solution techniques are recommended for different types of proportionality tasks. The two theoretical models of proportionality that were studied, ie. static and dynamic proportionality, are represented to approximately the same extent in both textbooks and national examinations. In geometry, it is often static proportionality, while in the field of functions it is common to use dynamic proportionality.

Teachers should have access to knowledge of the differences between textbooks and curricula, and how they are interpreted in the national tests, so that they can make deliberate choices in their teaching activities, including exercises, to support a good variety for students linked to curriculum objectives.

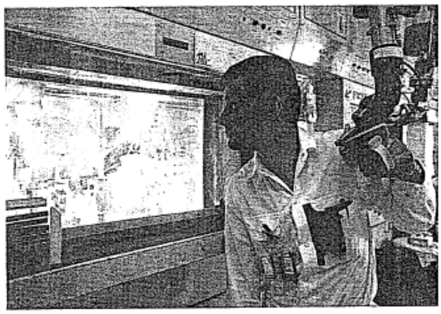
1. Inledning

1.1 Bakgrund till studien

Proportionalitet är ett centralt begrepp i skolmatematiken. Begreppet introduceras i de lägre årskurserna och återkommer i så gott som samtliga kurser från årskurs 9 till sista kursen på gymnasiet. I Figur 1 visas ett exempel från en lärobok i kurs D där begreppet proportionalitet används vid introduktionen av differentialekvationer. Begreppet behövs även vid många andra matematiska tillämpningar inom t.ex. fysik och kemi. Beräkning av densitet är ett exempel som ofta förekommer på gymnasiet. Därför är det intressant att undersöka hur begreppet proportionalitet hanteras på gymnasiet.

Differentialekvationer

Inom kärnfysiken studerar man hur snabbt en radioaktiv isotop av ett ämne sönderfaller, den så kallade sönderfallshastigheten som mäts i antalet kärnor som sönderfaller per sekund. Det har visat sig att sönderfallshastigheten är proportionell mot antalet radioaktiva kärnor man har i det ämne man undersöker. Vi kan skriva det här som



$N'(t) = k \cdot N(t)$ Kom ihåg att en proportionalitet skrivs som $y = kx$

där N är antalet kärnor vid tiden t, $N'(t)$ är sönderfallshastigheten vid samma tidpunkt och k är proportionalitetskonstanten.

Lösningen till en differentialekvation

Det här är ett exempel på en *differentialekvation.* Lösningen till en differentialekvation är inte ett tal, utan en funktion. Lösningen till differentialekvationen $N'(t) = k \cdot N(t)$ är $N(t) = C \cdot e^{kt}$, där C är ett tal.

Figur 1. Introduktion till differentialekvationer i kursen Matematik D (Szabo, Larson, Viklund, & Marklund, 2009, s. 35)

Den senaste mer omfattande studien av proportionalitet inom den svenska gymnasieskolan gjordes av Leif Lybeck (1981). Denna doktorsavhandling med inriktning mot naturvetenskap diskuterade inte bara begreppets användning utan beskriver även hur elever *resonerar* kring uppgifter med proportionalitet. Föreliggande studie är emellertid fokuserad på hur proportionalitetsbegreppet skildras *för* eleverna.

I Sverige har proportionalitetsuppgifter uppmärksammats i TIMMS 2007 (Skolverket, 2008b). Rapporten drar slutsatsen att ungefär hälften av eleverna i undersökningen, dvs. i årskurs 8, har svårigheter med proportionalitet. Flertalet elever blandar ihop andel och motsvarighet men även proportionell ökning med additiv ökning, vilket stämmer överens med internationell forskning (Hart, 1988). Anledningen till att eleverna blandar ihop begreppen beror enligt rapporten på att beräkningsprocedurerna tillämpas i fel kontext. En typ av problem i samband med proportionalitet som uppmärksammats är en övergeneraliserad användning av en linjär lösningsmetod, dvs. eleverna använder proportionellt resonemang på uppgifter som inte är proportionalitetsuppgifter (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2005). En linjär modell favoriseras av eleverna. Även NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 1989, p. 114-115) omnämner detta fenomen ” *…most students in grades 5-8 incorrectly believe that if sides of a figure are doubled to produce a similar figure, the area and volume will also be doubled*”.

En uppfattning är också att matematikinlärningen för elever är alltför procedur-inriktad vilket *leder* till att eleverna ibland tillämpar flera olika beräknings-procedurer på en och samma beräkning, både korrekta och inkorrekta. Eleverna kan ibland tillämpa beräkningsproceduren på korrekt sätt men använder den i fel kontext.

I undervisningen möter eleverna de matematiska begreppen genom lärarens presentationer (på gymnasiet ofta i s.k. genomgångar), problemlösning och arbete i läromedlen/läroböckerna. I den av Skolinspektionen genomförda kvalitetsgransk-ningen *Undervisningen i matematik i gymnasieskolan*[1] anges det att i intervjuer med 136 lärare i landet har 36% "obefintliga" kunskaper om kompetensmålen i matematik A. De flesta lärarna litar på att läroboken tolkar kursplanen på ett rimligt sätt. Men läroböckerna är ofta skevt fokuserade på att eleverna ska räkna utifrån lösta exempel och inbjuder sällan till träning av andra kompetenser som uttrycks i strävansmålen, hävdar Skolinspektionen. Lärarna anger också att de i första hand arbetar med uppnåendemålen och i mån av tid tar upp strävansmålen. Elevernas stora spridning på förkunskaper har medfört att på Samhällsprogrammet har lärarna dragit ner på genomgångarna (Skolinspektionen, 2010). Anledningen till detta är att eleverna blir ”störda” eftersom de har hunnit olika långt i läroboken. Då genomgångar genomförs har de olika omfattning på olika program. Lågpresterande elever får genomgångar som i första hand fokuserar på procedurer och mekanisk räkning och undviker aktiviteter som tränar andra kompetenser. Detta medför enligt Skolinspektionen att undervisningen blir kontraproduktiv.

Läromedel i matematik är ett erkänt viktigt verktyg för matematikundervisningen i den svenska skolan och lärare väljer ofta uppgifter och lösningsexempel från

[1] Rapport 2010:13 Skolinspektionen

läromedlet (Johansson, 2006). Forskning visar även att läromedel inte är särskilt förändringsbenägna och ter sig ganska lika inom ämnet matematik kurs A (ibid.).

1.2 Syfte

Det övergripande syftet med denna studie är att undersöka hur det matematiska begreppet proportionalitet hanteras i den svenska gymnasieskolan. En generell problematik kopplad till detta syfte är hur skolans styrdokument realiseras i läromedel och nationella prov. Detta övergripande syfte behandlas genom det specifika och mer avgränsade syftet att undersöka hur läromedel för kursen Matematik A beskriver proportionalitet och hur nationella prov på samma kurs utvärderar proportionalitet genom val av uppgifter samt hur elever löser proportionalitetsuppgifter på nationella prov för Matematik A. Ett speciellt fokus kommer att inriktas på hur de olika uppgifterna om proportionalitet i läromedel matchar uppgifterna om proportionalitet på de nationella proven.

För att kunna genomföra studien var en avgränsning nödvändig genom att undersöka ett mindre urval av läromedel, nationella prov och elevlösningar. Utifrån denna avgränsning är huvudfrågeställningen för denna avhandling följande:

Hur hanteras proportionalitet i den svenska gymnasieskolan i kursen Matematik A i några läromedel och nationella prov?

Denna generella formulering kommer att preciseras i kapitel 4 i form av ett antal delfrågor med hjälp av terminologin i de analysverktyg som kommer att användas. När det gäller begreppet läromedel görs här en avgränsning till läroböcker (se vidare kapitel 4).

2. Proportionalitet i skolan - ett historiskt perspektiv

2.1 En preliminär definition

Ofta skiljer man mellan direkt och omvänd proportionalitet, där två storheter (eller variabler) är direkt proportionella om deras kvot är konstant och omvänt proportionella om deras produkt är konstant. Kiselman och Mouwitz (2008, s. 98) skriver t.ex. att proportionalitet är ”*ett samband mellan två storheter sådant att kvoten mellan storheterna är konstant*”. Som ett exempel är i en elektrisk krets spänning direkt proportionell mot strömstyrka (där resistans är proportionalitets-konstant) medan strömstyrka är omvänt proportionell mot resistans (där spänning är proportionalitetskonstant). I föreliggande arbete kommer huvudsakligen direkt proportionalitet att behandlas.

Proportionalitet kan enligt Miyakawa och Winsløw (2009) delas in i statisk proportionalitet och dynamisk proportionalitet. Statisk proportionalitet kan kort beskrivas genom att ett ändligt antal parvis sammanhängande värden för två storheter sätts upp i en värdetabell där varje par uppvisar en konstant kvot. Dynamisk proportionalitet mellan två variabler x och y definieras genom ett generellt samband på formen $y = k \cdot x$, där k är en fix konstant. Dessa två typer skiljer sig åt på så vis att statisk proportionalitet kan ses vara mera generell eftersom den definierar vad det innebär för två n-tipplar av reella tal istället för att bara vara proportionalitet av talpar som det innebär med dynamisk proportionalitet. Dynamisk proportionalitet kan ses som mer avancerad än statisk ty den dyker upp ganska sent i skolans grundskola som en potentiell oändlig mängd (x, y) av tal som alla är inbördes proportionella, t.ex. sträcka y som svarar mot restiden x under antagandet av likformig hastighet.

2.2 Terminologi

Ordet proportionalitet har en lång historia där många olika innebörder aktualiserats. En etymologisk förklaring ges av (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 98), som skriver att ”Proportionalitet kommer från ett latinskt prepositionsuttryck ”*pro portione*” efter andel”. En mer omfattande analys finner man i boken ”Terminologi och nomenklatur - studier över begrepp och deras uttryck inom matematik, naturvetenskap och teknik” (Nilsson, 1974). Den dominerande termen var redan på 1400-talet *proportion* och under 1500-talet *proportz* men under 1600-talet sista hälft skedde en förändring och den har Nilsson studerat. Han härleder begreppet till grekiskan som hade olika ord för proportionalitet och förhållande. Förhållande uttrycktes enligt Nilsson som *logos* och avsåg innebära hur två mängder stod till varandra; t.ex. som 3 till 7. Om sedan två förhållanden jämfördes och befanns lika, som t.ex. 3:7=6:14, så benämndes detta *analogia*. Nilsson använder som belägg en avhandling av ungraren Árpád Szabó[2] som enligt Nilsson konstaterar att lexikograferna försummat att undersöka sambandet mellan *logos* och *analogia*. Euklides använde en striktare avgränsning av logos och avsåg endast de matematiskt brukade förhållandekategorierna såsom exempelvis dubbel och tredubbel, eftersom det var så geometrin betraktades på Euklides tid (Nilsson, 1974). När sedan de medeltida översättningarna tolkade Euklides Elementa så blev det förhållanden mellan kvantiteter. Enligt Nilsson har Szabó funnit belägg för att proportionsläran hos grekerna haft sitt ursprung i musiken där det först använts för att beteckna uttrycket förbindelse av två tal för att sedan vidareutvecklas till förhållande mellan två tal. *Analogia* bör ha som ursprung *ana logon* = ’vad avser förhållande’ (Nilsson, 1974). Det hopskrivna *analogon* får sedermera också bära betydelsen ’lik’ och Nilsson anger som exempel Euklides femte bok: Storheter som har samma »logon», dvs. förhållande, bör kallas »analogon», dvs. förhållandelika. Nilsson fortsätter med att nämna att Platon har *analogia* som en förutsättning för den harmoniska ordning som ett kosmos innebär. Parallellt med *analogia* existerar benämningen *proportio*. Upphovsmannen till detta är Cicero som bland annat 150 år efter Arkimedes död finner hans grav på Sicilien (ibid.). Cicero är en romare med uppgift att klä den grekiska filosofin i latinska ord. I sina översättningar är han djärv nog att hitta på ett eget ord och byter därmed ut grekernas *analogia* mot *proportio* (1974). Skillnaden mellan *logos* och *analogia* upprätthölls dock inte, fortsätter Nilsson och hävdar att det troligen beror på att *logos* var mera polysemt[3]. Det kan bero på att Boëthius som översatte grekisk litteratur till latin, främst inom aritmetik, använde *analogia*, *proportio* även där latinets motsvarighet *logos*, *ratio* hade varit mera motiverad. Nilsson (1974) diskuterar även hur differentieringen mellan *ratio* och *proportio* har skett. Han anser att Simon Stevin (1548-1620) har haft ett visst inflytande över de svenska begreppen eftersom Stevin ansåg det viktigt att skilja på *ratio* och *proportio* och översätter dessa till holländska med *reden* respektive *evenredighet,* vilket används även idag i Nederländerna.

---

[2] Árpád Szabó, Anfänge der griechischen Mathematik. Budapest 1969, s. 138 ff, 191 ff och 221 ff.

[3] **polysemi´**, flertydighet, förhållandet att ett ord eller ett morfem har två eller flera betydelser, t.ex. *lätt* 'som väger litet' och 'som inte är svår'. polysemi. http://www.ne.se/lang/polysemi, Nationalencyklopedin, hämtad 2011-03-23.

Nilsson fortsätter sin analys om proportionalitetsbegreppets utveckling i Sverige med att diskutera Stiernhielm (1598-1672). Han var skald och ämbetsman och hade bland annat ansvar för rikets vikt och måttsystem där han införde det kubiska måttet. Ett annat bidrag var den så kallade Carlstaven som var försedd med skalor och jämförelser av olika metallers specifika vikter. Staven presenterades 1658 för Karl X Gustaf men antogs endast delvis eftersom den ansågs för radikal. På pythagoreisk–platonsk–nyplatonsk grund blir *proportio* en förutsättning för en matematisk reglerad världsharmoni och renässansfilosofins mest centrala begrepp, så Stiernhielm vill skapa uttryck för *proportio* på sitt eget språk. Stiernhielms intresse för proportioner var alltså odiskutabelt enligt Nilsson (1974) och i linje med Cicero skapade han svenska motsvarigheter till de latinska orden *ratio* och *analogia*: *reda* och *genlikning*. Att Stiernhielm just väljer reda kan bero på att han fått inspiration från Stevins uttryck för ratio, *reden* (Nilsson, 1974). Nilsson hävdar vidare att genlikning består av betydelsebärarna *gen-* och *–lik*, där *gen–* är identiskt med tyskans *gegen*, *mot*. Detta innebär att ge(ge)nlikning kan vara en hybridform av *förlikning* och *gegensatz*. Förlikning menas här det som jämlikas, det vill säga en ekvation. Detta har Nilsson (1974) funnit belägg för i SAOB 1635 där förlikning beskrivs som att bringa till överensstämmelse och sammanjämkning. Han ger därefter ett exempel på hur en proportionalitet kan tolkas: *1:3=2:6* där han menar att leden var för sig kan representera icke-identitet eller motsats men deras inbördes förhållande är lika vilket kommer till uttryck i *genlikning*. Spridningen av Stiernhielms begrepp fortsatte ett par hundra år framöver, däribland av nationalspråksmedvetna författare, där Johan Risingh, Urban Hiärne och Emanuel Swedenborg omnämns av Nilsson (1974).

Idag använder vi proportionalitet som ett naturligt ord, ofta kanske utan att inse att det är ett låneord från latinet. I den här studien använder jag ordet proportionalitet som namn för det begrepp som står i fokus.

2.3 Symbolspråk

Som beteckning för en proportionalitet finns det många olika skrivsätt beroende på vilken världsdel och tidsålder man befinner sig i. I en sammanställning gjord av Florian Cajori[4] (1993) väljer jag att börja med Hindu Bakhshālī[5] som betecknar de lika förhållandena $10:\frac{163}{60}=4:\frac{163}{150}$ som

[4] Nyutgåva av det ursprungliga verket från 1928 och 1929.

10	163	4	Pha 163
1	60	1	150

Linjer avgränsar där vilka tal som hör samman i olika förhållanden. Cajori tar även upp Al-Qalasâdî (1400-talet) som använde beteckningen $144 \therefore 84 \therefore 12 \therefore 7$ för $7:12 = 84:144$.

I Europa var det vanligt att det var korta ord som beskrev proportionalitet. Cajori tar upp bland annat Lansberg (1601) som betecknade $5:10 = 10:20$ med ”ut 5 ad 10;ita 10ad 20” (Cajori, 1993, s. 284) På den europeiska kontinenten förekom det att proportionaliteter beskrevs ca. 1620 som $a|b||c|d$ av Descartes (1596-1650). Han var troligen inspirerad av Tartaglia (ca. 1500-1557) men skrivsättet fick enligt Cajori inte någon större spridning.

I början på 1600-talet var det bland annat William Oughtred (1575-1660) som blivit inspirerad av François Viète (1540-1603) och ville fortsätta hans arbete med att införa flera symboler i matematiken (Katz, 2009). I Oughtreds arbete *Clavis Mathematicae* som kom ut 1631 introducerades Viètes arbete på latin och engelska som enligt Katz (2009) skulle visa att algebra kunde ses som en konstform där man tar saker vi vet för att få reda på saker vi söker. Oughtreds beteckning av proportioner hade formen $5.10::6.12$ vilket med dagens skrift skulle betyda $5:10 = 6:12$. Cajori (1993) menar att inspirationen till att använda dessa tecken kom från John Dee (1570) som skrivit introduktionen till Billingley’s Elementa. Oughtred valde alltså att beskriva förhållande som en punkt (.) och två lika förhållanden som (::). Det senare valet var mycket olyckligt och tecknet för likhet hade varit mycket fördelaktigare för honom. Detta medförde enlig Cajori (1993) att han inte kunde följa andra matematiker som t.ex. Napier som använde punkten som avskiljning för decimaler. Oughtred kunde inte byta till (:) för det hade han redan använt till att symbolisera (A+B). Få tecken har blivit så populära som Oughtreds tecken för proportionalitet (::) även om det tog 19 år innan någon började använda det, som i läroböckerna *Arithmetique made easie* av Wingate (1650). Därefter använde bland flera t.ex. John Wallis, Sir Jonas Moore och Isaac Barrow tecknet i sina skrifter. Det som inte spreds lika mycket var sättet att skriva förhållande som en punkt (.). 1651 introducerade Vincent Wing kolon (:) som en symbol för förhållande i sitt verk *Harmonicon Coeleste* enligt Cajori. Nu blev det

---

[5] Osäker datering men det mesta pekar på att dokumentet skrevs på 400- eller 500-talet enligt Cajori.

en kamp mellan Wing och Oughtred där punkten (.) hade ett övertag vid betecknandet av förhållande eftersom de ledande matematikerna vid denna tid, Wallis, Barrow, Gregory, Craig, Brancker och Mercator använde tecknet. 1700 till 1750 började punkten (.) tappa mark till fördel för kolonet (:), enligt Cajori (1993). På kontinenten rådde det en viss eftersläpning vid användandet av tecknen och Oughtreds (.) och (::) användes av välkända matematiker som De l'Hospital, Jakob och Johan Bernoulli, Rolle, Maupertuis med flera.

I Tyskland var det emellertid inte vanligt att använda Oughtreds beteckningar. Cajori nämner ett intressant skrivsätt av en holländare vid namnet Stampioen som 1631 införde en förändring av Oughtreds notation när han inför kommatecken och likhetstecken, $A,,B=C,,D$. Likhetstecknet har Stampioen anammat från Robert Recorde men tyvärr får han inga anhängare och det faller i glömska även om Gregory 1668 använder likhetstecknet i proportionsuttryck (Cajori, 1993). Han menar vidare att de som övergick från Oughtreds till Wings beteckningssätt på kontinenten var 50 år efter och att ”invasionen” knappt var påbörjad på 1700-talet. De som använde sig av *A:B::C:D* var Leibniz, De la Hire, Swedenborg, D'Alembert med flera. Denna notation var så populär att den ännu idag finns kvar i USA, Portugal, Spanien och Latinamerika (Cajori, 1993). En som inte var nöjd var Leibniz (1646-1716). Han nämner 1693 det onödiga att beskriva ett förhållande och proportionalitet med särskilda tecken. Det vore tillräckligt enligt honom att skriva förhållande som *a* till *b*, *a:b* eller $\frac{a}{b}$, eftersom det är samma räkneoperation som avses. Leibniz hävdar vidare (enligt Cajori) att om *a* förhåller sig till *b* på samma sätt som c förhåller sig till d är det tillräckligt att skriva $a:b=c:d$ eller $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Leibniz beteckningar för proportioner började användas i Europa under 1800-talet men i USA var det fortfarande (: :: :) som var den ledande notationen och det var först på 1900-talet som (: = :) tillämpades i större omfattning i USA (ibid.).

Ibland förekommer det en speciell symbol för proportionalitet $A \propto \frac{BC}{D}$, som betyder att A är i ett konstant förhållande till $\frac{BC}{D}$ och introducerades av Emerson 1768. Det är också det tecken som används i dagens uppslagsverk.

Proportionalitet har haft många symboler och det uttryck som haft störst genomslag är Wings (A:B::C:D) som än idag lever kvar. Leibniz blev den som förenklade uttrycket till *A:B=C:D* eller $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. I Sverige lever förhållandetecknet kvar när vi betecknar skala, som t.ex. 1:100, medan (::) inte längre används. I denna studie använder jag Leibniz beteckningar för proportionalitet.

2.4 Euklides Elementa

Proportionalitetsbegreppet har två tillhörigheter i matematiken, aritmetik och geometri. Under lång tid var det också representerat i läromedel om båda dessa områden där den mest framträdande platsen var i Euklides Elementa. Följande avsnitt är en sammanställning av begreppets framställning med början med Euklides och avslutas med en tillbaka blick på läroplanerna och proportionalitetsbegreppets presentation i läromedlen. Avsnittet börjar med Euklides Elementa som under lång tid var lärobok i västvärldens matematik.

Proportionalitet i antiken

I antikens Grekland innan Euklides ansåg brödraskapet pythagoréerna (ca 500 f.Kr.) att tal kunde förklara hela universums uppbyggnad och att allting kunde räknas i hela tal och översättas i längder (Katz, 2009). Pythagoras (572-497 f.Kr.) som var ledaren för det religiösa och filosofiska brödraskapet, studerade stjärnkonstellationer och planetrörelser och fann att de kunde beskrivas med hjälp av förhållanden mellan tal. Även inom musiken fann Pythagoras att harmonierna kunde beskrivas som förhållanden mellan tal. Om en sträng delades i förhållandet 1:2 kallades resultatet en oktav, 2:3 en kvint, 3:4 kvart. Dessa tre intervall kunde tillsammans bilda en hel skala. Proportionalitet kunde nu delas in i tre olika sorter enligt Katz (2009):

1. Geometrisk proportion, om den första termen är till den andra som den tredje termen till den fjärde. Ex) $1:2=2:4$. Denna typ beskriver förhållandet i en oktav eller dubbeloktav.
2. Aritmetisk proportion, där den andra termen ska överskrida den första termen med samma antal som den tredje termen överstiger den fjärde. Ex) $2:3:4$. Den aritmetiska proportionen avgör alltså hur en oktav kan delas in i kvintar och kvartar.
3. Harmonisk proportion; tre termer är i harmonisk proportion om förhållandet mellan den största termen och den minsta termen är som kvoten av skillnaden av termen i mitten från den största och skillnaden av termen i mitten från den minsta termen är samma. Ex) $3:4:6$ är i harmonisk proportion eftersom $6:3=(6-4):(4-3)$. Detta är inversen av den aritmetisk proportionen eftersom den delar en oktav i kvartar och kvintar. För att få tonerna c, e och g på tre lika strängar måste strängarna förhålla sig som $\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$. En annan egenskap hos harmonisk proportion är att om de yttersta värdena summeras och multipliceras med det mittersta talet (med exemplet ovan $(3+6)\cdot 4=36$) blir det alltid en fördubbling av produkten av de yttersta värdenas produkt (18).

Dessa proportioner har varit kända sedan babyloniernas tid (Katz, 2009). Katz skriver att dessa tre olika proportioner idag inte används som proportioner utan som medelvärden. Ex) 7 är det aritmetiska medelvärdet av 3 och 11, 9 det geometriska medelvärdet av 3 och 27 och 4 det harmoniska medelvärdet av 3 och 6.

Inom akademin studerades aritmetik som var till nytta i krigskonsten och en mindre del plangeometri. Platon (429-347 f. Kr.) insåg att plangeometri inte räckte till vid studier i astronomi. För att en utveckling inom astronomi skulle ske måste ett nytt fält påbörjas, fasta kroppars cirkulära rörelse. Platon hade inte tanken att varje rörelse på himlen skulle följas utan var mera inriktad på ideella kroppars rörelser och banor. Pythagoréerna upptäckte harmonierna men Platon ville gå från det konkreta till den abstrakta nivån, från verkliga instrument med verkliga strängar, till att kunna förutsäga vilket tal som är det konstanta. Det behövdes en abstrakt beskrivning av proportionalitet. För att akademin som utbildade matematikerna skulle kunna genomföra denna utveckling anställde Platon de bästa matematikerna på sin tid, Theaetus (417-369 f. Kr.) och Eudoxus (408-355 f. Kr). Dessa matematiker fortsatte arbetet med att definiera proportionalitet så att det gällde för kommensurabla tal såväl som för ickekommensurabla tal[6]. Resultatet återfinns i Elementa.

Elementa (gr. *Stoicheia*) är en sammanställning av då kända matematiska resultat som med Euklides (ca 300 f.Kr.) hjälp sammanfattades i 13 böcker (I-XIII). Det framgår inte alltid genom hänvisningar i Elementa vem som ligger bakom de olika resultaten och bevisen. Om Euklides liv är inte mycket känt. Det som har fastställts är att han efter studier vid Platons akademi i Aten var verksam vid universitetet i Alexandria från ca 300 f.Kr. (Euclid & Heath, 1956).

Grunden för geometrin i Elementa utgörs av definition, postulat, axiom som följs av satser. Det speciella är att postulaten särskildes förr från axiom därför att de endast gällde inom geometrin emedan axiomen gällde samtliga områden inom matematiken. Den skillnaden görs inte idag utan dessa två begrepp sammanförs. Den klassiska tolkningen av postulat och axiom är att de är ”uppenbara sanningar”. I nutid används istället egenskaperna fullständighet, konsistens och oberoende för att definiera axiomen.

Proportionalitet återfinns på två ställen i Elementa och härrör från arbeten utförda av Eudoxus (ca 408-355 f. Kr). Den första definitionen finns i bok II definition 5 och är geometriskt inriktad:

---

[6] Icke-kommensurabla tal: storheter som saknar rationella förhållanden till varandra (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 46)

> *Magnitudes are said to **be in the same ratio**, the first to the second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever be taken of the first and third, and any equimultiples whatever of the second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equimultiples respectively taken in corresponding order.* (Euclid & Heath, 1956, s. 114)

Eudoxus definition gjordes efter upptäckten av irrationella tal, som ett fungerande sätt att definiera likhet mellan förhållanden i sig som tal. Långt senare definierade Dedekind (1831-1916) vad som idag kallas reella tal. Med ”equimultiples” menas här lika heltalsmultiplar (som generellt kan konstrueras som geometriska storheter). Definitionen beror på en jämförelse av alla möjliga par av sådana multiplar, dvs. att A och B är i samma förhållande som C och D (där A och B är av samma storhet som C och D). Översättningen kommer från Heath som kompromissat mellan att använda en bokstavlig översättning från grekiskan och den mer utförliga version som gjordes av Simson. Det som gör att vi idag inte använder denna definition är formuleringen ”in the same ratio”. Euklides har formulerat ”ratio” i definition 3:

> *A ratio is a sort of relation in respect of size between two magnitudes of the same kind*. (Euclid & Heath, 1956 s. 114)

Sedan definieras "magnitude" i definition 1:

> *A magnitude is a part of a greater magnitude, the less of the greater, when it measures the greater*. (Euclid & Heath, 1956 s. 113)
>
> “Multiple*”* definieras sedan i definition 2:
>
> *The greater is a multiple of the less when it is measured by the less.* (Euclid & Heath, 1956, s. 113)

Men definition 3 får inte någon riktig innebörd utan definition 4:

> *Magnitudes are said to have a ratio to one another which are capable, when multiplied, of exceeding one another.* (Euclid & Heath, 1956, s. 114)

Så länge talen är multiplar av varandra och kommensurabla så fungerar definitionen av proportionalitet men de icke-kommensurabla talen som upptäcktes av Pythagoras 400 f.Kr. ställde till problem för Eudoxus eftersom grekerna inte multiplicerade tal i den bemärkelse vi gör idag. Grekerna hade inte heller en definition av kvot. Pythagoras undersökte en kvadrat med sidan 1 och upptäckte att diagonalen blev $\sqrt{2}$, sidan på kvadraten och diagonalen var inte multiplar av varandra. Hur kunde basen i en rektangel vara proportionell mot höjden men inte diagonalen mot basen? Emellertid så löste Eudoxus detta med sin formulering ”in the same ratio”, enligt Heath.

Om vi använder moderna symboler och algebra kan vi beskriva definitionen på följande sätt enligt Kline (1990):

Definitionen säger att $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ om vi multiplicerar *a* och *c* med godtyckligt heltal *m* och *b* och *d* med ett godtyckligt tal *n* för alla val av *m* och *n* och får

$ma < nb \Rightarrow mc < nd$

$ma = nb \Rightarrow mc = nd$

och

$ma > nb \Rightarrow mc > nd$

Men Kline låter inte sig nöjas med detta och prövar även reella tal som han kallar ”moderna” tal. Jag väljer här ett eget exempel för att testa men följer Klines tankegång som exempel:

$$\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$$

(1) $m\sqrt{2} < n \cdot 1 \Rightarrow m\sqrt{10} < n\sqrt{5}$

(2) $m\sqrt{2} = n \cdot 1 \Rightarrow m\sqrt{10} = n\sqrt{5}$

och

(3) $m\sqrt{2} > n \cdot 1 \Rightarrow m\sqrt{10} > n\sqrt{5}$

Nu ser vi direkt att (2) $m\sqrt{2} = n \cdot 1$ inte kommer att inträffa eftersom *m,n* är hela tal och $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal. Innebörden av detta blir att $m\sqrt{10} = n \cdot \sqrt{5}$ inte behöver inträffa för definitionen anger endast att om någon av möjligheterna på den vänstra sidan inträffar så måste den högra sidan vara sann. Här har det använts reella tal och symboler som inte fanns på Eudoxus tid.

Den andra definitionen av proportionalitet i Elementa står i bok VII definition 20 och har en inriktning mot tal i form av linjesegment.

> *Numbers are proportional when the first is the same multiple, or the same part, or the same parts, of the second that the third is of the fourth.* (Euclid & Heath, 1956, s. 278)

Bok VII omfattar talteori med positiva heltal till skillnad från de tidigare böckerna som innefattar geometriska storheter. Det är endast i bok VII, VIII och IX som tal förekommer. Det finns en del spekulationer om varför Euklides har delat upp Elementa på detta sätt och bevisa allting ännu en gång fast med tal istället. Historikerna är inte eniga enligt Kline (1990). Aristoteles använde inte tal som en sorts storheter men han pekade på skillnaden mellan det diskreta och det kontinuerliga. En annan förklaring kan vara att under Euklides tid representerade tal och storheter två olika utvecklingar inom matematiken. Så det blev naturligt att dela upp talteorin i en del för sig. Kline medger dock att det finns några satser som visar på sambandet mellan storheter och tal, t.ex. sats 5 i bok X.

Definitionen av proportionalitet i Elementa var svår att förstå och många missuppfattningar existerade. Heath (i Euclid & Heath, 1956) har bland annat studerat Campanus översättning som missuppfattat definitionen, enligt Heath, som sedan i sin tur påverkat Ramus (1515-1572) som var mycket kritisk till Euklides. En annan matematiker som var kritisk till definitionerna i Elementa var Galileo. Det som troligen tillförde Elementa kvantiteter var att Boëthius (480-524) inför kvantiteter istället för linjesegment i Elementa. Enligt Nilsson (1974) så utgick Boëthius ifrån Nikomarkos aritmetik där det inte framgår av definitionen att logos endast kan avse förhållanden mellan likartade storheter som t.ex. två talsorter. Den person som redde ut en hel del av dessa missuppfattningar om definition V var Isaac Barrow när han påpekade att definitionen i bok VII inte gällde för icke-kommensurabla tal. Det finns enligt Heath två utförliga bevis för att definition V är giltig för både kommensurabla tal och icke-kommensurabla tal. Dessa bevis är utförda av de Morgan och Dedekind[7].

2.5 Proportionalitet i svensk skola

I detta avsnitt redogör jag för hur den svenska skolmatematiken har hanterat proportionalitet. Innan jag tar upp om läromedlen ger jag först en kort bakgrund till hur den svenska skolan gestaltat sig.

Utbildningssituationen i Sverige från 1200 till 1648

Den första organiserade utbildningen i Sverige startade egentligen inte förrän på 1200-talet med ett undantag för den första danska skolan i Lunds domkyrka 1086 som var en gratisundervisning för präster (Landquist, 1963). Dessa tidiga domkyrko- eller katedralskolor instiftades under 1200-talet i de sju stiften Uppsala, Skara, Linköping, Växjö, Västerås, Strängnäs och Åbo som på den tiden tillhörde Sverige. Undervisningen i katedralskolorna behandlade teologiska frågor främst för att kyrkan var stark i Sverige. Läroböcker var en dyrbarhet mest beroende på materialet som var pergament. Parallellt med dessa skolor utvecklades klosterskolor av dominikanerna och svartbröderna. Särskilt klostret i Skänninge lär ha haft en god kvalitet på utbildningen kanske till och med bättre än

[7]Läs mer i (Euclid & Heath, 1956 s. 125).

katedralskolorna, eftersom de hade regelbundet utbyte av lärjungar från andra kloster i provinsen Norden (Landquist, 1963). Även Franciskanerna öppnade skolor i sina kloster för lärjungar som följde deras ordensstatut. Det första svenska universitetet grundades 1477 i Uppsala och dessförinnan fick de studerande åka till universiteten i Köln och Paris för att förkovra sig. När reformationen kom övertog Gustav Vasa driften av katedralskolorna vilket innebar en allmän nedgång för skolväsendet enligt Landquist (1963). Under medeltiden fanns det inte något egentligt behov av en formell utbildning eftersom de flesta svenskar tillhörde bondeståndet och kunskaperna gick från generation till generation. När utrikeshandeln senare tog fart behövde köpmännen djupare kunskaper och en stadsskola startade i Visby. 1571 kom den första skolordningen som innebar att skolan delades in i två till tre klasser där varje klass troligen var tvåårig. Undervisningen bestod i att läsa latin, bland annat Cicero samt kristendom och sång. Matematik fanns inte med då dessa latinskolor var avsedda att utbilda präster. Året 1593 övertog staten genom Gustav Vasa den svenska skolan som vädjade till föräldrarna att sända sina barn till skolorna. Syftet var att utbilda ämbetsmän för den nationella staten. Men i allmänhet var intresset svagt för utbildning och matematik, vilket innebar att läromedlen mest var ämnade för adeln (Landquist, 1963). Luthers katekes hade som syfte att utbilda allmänheten. År 1611 togs beslut om att skriva en ny skolordning. Den utgjordes av två slags latinskolor: provincialskolor och katedralskolor. Om inte en sextonårig man kunde läsa fick han se sin arvsrätt bli beskuren med en tredjedel. De som inte bodde i städerna fick sin undervisning av byns klockare, enligt ett beslut 1618.

År 1628 tillkom trivialskolan (sju år) och gymnasiet (tre år) som utbildningsnivåer men fortfarande hade kyrkan en stark roll när det gällde att bestämma vilka ämnen som skulle studeras. Det innebar att undervisning i teologi fortfarande dominerande även om matematikundervisning infördes som en daglig lektion. År 1637 var utbildningskravet för att bli präst att utöver teologi även läsa Elementa I-X följt av Ramus fysikbok.

200 år av samma skolordning 1648-1849

År 1649 kom ett skolsystem i mer humanistisk anda som bestod av trivialskola, gymnasium och akademi. Det utarbetades av drottning Kristina och Comenius. Utbildningen bestod av 4 år trivialskola och 4 år gymnasium och de ämnen som undervisades på gymnasiet var teologi, logik, fysik, retorik, latin, historia & poesi, grekiska och matematik. I trivialskolan försvann dock matematiken helt och Landquist (1963) anger som skäl att man ville förhindra bland annat Västeråsgymnasiet försök att växa till halv akademisk anstalt. Endast de studenter som hade examen från gymnasiet fick tillträde till universitetet, akademin. Därför anses denna skolform vara den första grundstenen till latinläroverket. Realskolan hade också sin begynnelse här i och med de borgarbarn som inte avsåg att söka högre studier fick gå i en speciell apologistklass. År 1723 kom den första lagen på att föräldrarna var ansvariga för att deras barn lärde sig läsa och skriva. Om inte föräldrarna var skriv- och läskunniga fick barnen gå till skolmästaren eller klockaren för att lära sig. En skärpning kom till stånd 1724 då det kom en ny skolordning som innebar att eleverna måste kunna läsa innan de påbörjade trivialskolan (Landquist, 1963). Skollagen innebar även att eleverna fick ris som straff för olika förseelser. Denna skolordning blev kvar ända till 1824. Övningsuppgifter fick en allt större roll i läromedlen kring 1700-talets slut och teori tillsammans med tillämpningar skulle ingå i lärjungens arbete (Lundin, 2008). I början på 1800-talet minskade latinet som utbildningsspråk till fördel för franska och tyska. 1820 omvandlades trivialskolan till lärdomsskola och från och med 1815 fick flickor ökad möjlighet till utbildning i särskilda flickskolor. År 1842 togs beslutet om en enhetsskola en så kallad folkskola. Men enligt Lundin (2008) blev inte geometri och Elementa mer allmänt förekommande i folkskolan förrän i slutet på 1800-talet. Innan dess hade euklidisk geometri varit högst upp i en värdehierarki där den som befinner sig på toppen behärskar den euklidiska geometrin till fulländning. Folkets barn, som Lundin (2008) uttrycker det, skulle ägna sig åt räknekonst även kallad Aritmetik. Enligt en studie gjord av Prytz (2007) så fokuserade även realskolan på den axiomatiska geometrin och bevis under 1905-1962. Han beskriver att kritik framfördes mot Elementa och det utvecklades läroböcker parallellt med Elementa men som hade Elementa som utgångspunkt i form av den axiomatiska metoden.

Proportionalitet i några äldre läroböcker på svenska

Den första svenska översättningen av Elementa gjordes av Mårten Strömer (1748). Han ville med detta verk göra Elementa tillgänglig för flera studerande i Sverige på svenska. I sin översättning använde sig Strömer av en utgåva från Oxford skriven av Gregory (1703) utom i vissa enstaka delar då han föredragit Commandinus version (1572). Troligen använde han sig av Gregorys version för att den var mera fullständig än den som getts ut av t.ex. Gestrinius (1637) i och med att samtliga tretton böcker var med. Strömers översättning av Elementa visade sig bli mycket populär och den utkom i flertalet utgåvor. Bokens påverkan syns bland annat i Bråkenhielms lärobok *Lärobok uti algebra* (Bråkenhielm, 1841) som var samtida med folkskolans införande. Denna lärobok har stora likheter med Elementas layout genom att den börjar med en definition som följs av proposition. Till och med numreringen av definitioner överensstämmer med Elementa. Bråkenhielm reder även ut de olika begreppen förhållande, analogi och proportionalitet. Han beskriver förhållande som multiplar och tar även upp begreppet icke-kommensurabla förhållanden. Bråkenhielm likställer analogin med proportion.

Reguladetri och proportionalitet

Parallellt med Elementa undervisades det i aritmetik i matematikutbildningen. Ett vanligt sätt att hantera proportionalitetsuppgifter utan ekvationer var reguladetri[8]. Reguladetri innebär ”uträkning genom tillbakagång till enheten” (Wigforss, 2005, s. 139)[9]. Enligt Hatami (2007) är begreppet mycket gammalt. De första spåren av reguladetri skall enligt hävd finnas på den berömda Rhindpapyrusen (1650 f.Kr.). Den första tryckta läroboken i aritmetik, den s.k. Treviso-Aritmetiken (*Larte de labbacho* från 1478) skall också ha tagit upp räknesättet under namnet ”la regulade le tre cose”. Vidare har Hatami funnit att Aryabhata (476), Brahmagupta (598) och Bhaskara (1100-talet) har använt begreppet för att sedan via araberna föra det vidare till västlandet. Hatamis studie om hur reguladetri presenterats i svenska läromedel omfattar läromedel från 1600-talet till 1900-talets början. Studien har två delar varav den första undersöker läromedel som använts mest i undervisningen (A. Aurelius (?-1681), N. P. Agrelius (1625-1681), P. A. von Zweigbergk (1811-1862) och C. A. Nyström (1831-1891)) och den andra delen undersöker läromedel som haft pedagogiskt/vetenskapligt intresse men bara använts under en kortare tid (t.ex. M. A. Biörk (1604-1651), A. Celsius (1701-1744), N. P. Beckmark (1753-1815), E. G. Björling (1808-1872) och F. Wigforss (1886-1953)).

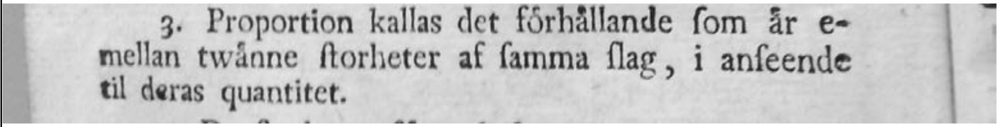
Begreppet proportionalitet i äldre läromedel

Enligt Hatami (2007) har Elementa haft ett så stort inflytande över svenska läromedel att han benämner det som det mest klassiska av alla läromedel där proportionsläran är den teoretiska grund som reguladetri vilar på. Han valde att studera den första översättningen till svenska, som gjordes av Mårten Strömer. Jag har studerat denna version för att se vilka skillnader som kan finnas mellan den latinska skriven av Gestrinius och den svenska upplagan skriven av Strömer, baserad på Gregory (jmf. ovan).

---

[8] **reguladetri´** (av lat. *re´gula de tri´bus* 'regeln om tre', av *regula* här 'regel', *de* 'om' och *tribus*, ablativ av *tres* 'tre'), räkneregel som anger hur man från att känna tre av fyra tal *a*, *b*, *c* och *d*, som uppfyller $a/b=c/d$, bestämmer det fjärde. Metoden, som förr användes i matematikundervisningen, innebär att man stegvis resonerar sig fram till lösningen i stället för att ställa upp en ekvation. (reguladetri. http://www.ne.se/lang/reguladetri, Nationalencyklopedin, hämtad 2011-03-20.)

[9] Nyutgåva med original från 1957.



3. Proportion kallas det förhållande ſom är e-
mellan twånne ſtorheter af ſamma ſlag, i anſeende
til deras quantitet.

Figur 2. Strömers definition av proportion (Strömer, 1748, s. 158)

Vid en översiktlig jämförelse av Gestrinius Elementa på latin och Strömers Elementa på svenska finner jag att det mesta stämmer överens men att Strömer har lagt till en del satser så att inte numreringen stämmer. Definition 5 om proportionalitet i Gestrinius är i Strömers bok definition 4. Strömer har även infört extra materiel om *analogier* som inte återfinns i Gestrinius version. Elementa var en förebild för övriga läroböcker som Hatami studerat och den utförligaste beskrivningen av proportionslära finner han hos Celsius i *Arithmetica* (1727) som utgår ifrån bok VII Elementa. Celsius skriver, enligt Hatami (2007), att han önskar att Elementa bör bli den ”nödigaste” skolboken i geometri för hela rikets välfärd och detta innan det finns en översättning av Elementa på svenska (vilket Hatami påpekar). Elementas definition av proportionalitet går igen i flera böcker. Ett exempel som Hatami tar upp är ur Beckmarck:

> *§.98. Om flere tal äro proportionella, är summan af alla de föregående termerna, til summan af alla de efterföljande, som den föregående termen är till den efterföljande. Ex. om 2:4::3:6::1:2::4:8, så är 2+3+1+4:4+6+2+8::2:4, det är,.* (Beckmarck, 1795 ur Hatami, 2007, s. 78)

Detta är ett typiskt exempel på att definitionen av proportionalitet är statisk eftersom det är en likställning mellan flera förhållanden. Det är även intressant att Wings beteckningar används. Hatami (2007) tar också upp exempel från Zweigbergk.

> *Om qvoterna, som mäta tvenne förhållanden, äro lika stora, så äro dessa begge förhållanden lika, och talen sägas då vara proportionella, t.ex. 9:3=12:4….En sådan likhet emellan två eller flera förhållanden kallas Analogi…* (Zweigbergk, 1856 ur Hatami, 2007, s. 79)

I detta exempel märks det att Leibniz beteckning slagit igenom även i Sverige och likhetstecknet har gjort intåg i läroböckerna. Däremot syns inte ett spår av Stiernhielms svenska ord genlikning utan analogi verkar vara det som dominerar. Definitionen har fortfarande stora likheter med Elementa och betecknas som statisk. Hatami (2007) har som läromedel under 1900-talets början valt Wigforss och Nilssons *Aritmetik* från 1951. Även där förekommer analogi som beteckning på förhållande. Men Hatami poängterar att det parallellt med det vedertagna uttrycket *a: b = c: d* numera också skrivs *a/b = c/d*. Men i läroboken från 1955 sker det en förändring i Nilsson och Wigforss *Algebra*. Inom funktionsläran återfinns nu direkt och omvänd proportionalitet med funktionerna $y = kx$ och $y = k/x$.

> *Om vi betecknar ett par samhörande värden med x_1 och y_1 och ett annat par för x_2 och y_2, innebär den omvända proportionaliteten att* $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.
>
> *Härav följer att* $x_1 y_1 = x_2 y_2 =$ *en konstant.* (Nilsson & Wigforss, 1953 ur Hatami, 2007, s. 86)

Hatami (2007) har i sin analys studerat ett flertal svenska läroböcker och funnit att hos Biörk, Beckmarck, Zweigbergk. Björling, Forsell och Wigforss utgör proportionsläran grunden för reguladetri. Aurelius nämner inget om proportionalitet men Agrelius nämner proportionalitetsegenskapen i en trefaldighet där de övriga två är reguladetri och gyllene regeln. Hatami menar att det är svårt att beskriva de sista två på grund av identifieringsproblem. Ett av de nyare läromedlen av Nyström nämner inte proportionsläran alls utan har en allmän rubrik om räknesättens användning i dagliga livets förekommande frågor.

Sammanfattningsvis framställs proportionalitet främst med definitioner som är baserade på Euklides definition eftersom Elementa haft en stark påverkan på läromedlen. Proportionalitet betecknat med en proportionalitetskonstant hittas först i ett exempel från 1955 under ämnet funktionslära.

Uppgifter som behandlar proportionalitet

Hatami (2007) tar upp en del kritik mot reguladetri och väljer däribland ut den kritik som Wigforss framfört. Kritiken gäller att beräkningen inte får bli en mekanisk och reflektionslös uträkning. Det första steget måste alltid vara om huruvida och inom vilka gränser proportionalitet anses råda, vilket Hatami (2007) håller med om. Ett välkänt exempel är följande:

> *Om en man bygger en mur på 10 dagar med 10 timmars arbetstimmars arbetstid om dagen, så bygger 10 man den på en dag, 100 man på en timme. Och 6000 man?* (Wigforss, 1957 ur Hatami, 2007, s. 136)

Det rätta svaret är en minut, men Wigforss anser att det "levande livet ... slagit matematiken på fingrarna" med att 6000 man troligen bara skulle stå i vägen för varandra vid byggandet av muren.

Inom proportionsläran är det en vanligt förekommande uppgiftstyp att söka en term i en analogi när tre är givna. Hatami har flera exempel och jag väljer här som illustration på denna uppgiftstyp ett ur Beckmarcks *Aritmetik*:

Ex. När 40 Man kunna på en bestämd tid gräfva 400 cubik famnar; frågas huru många cubik famnar kunna 50 Man gräfva på samma tid? (Beckmarck, 1795 ur Hatami, 2007, s. 111)

Textuppgifter är ett viktigt instrument i undervisningen och det förekommer en uppsjö av olika varianter av uppgifter. Det är emellertid en aning oklart hur eleverna uppfattar dessa uppgifter och om eleverna verkligen testas på den kunskap som avses när uppgifterna konstrueras. Detta är en problematik som studerats länge inom forskningen (Greer, Verschaffel, Van Dooren, & Mukhopadhyay, 2009). Forskning av bland annat Vershaffel och De Corte visar att eleverna gjorde beräkningar i uppgifterna som inte hade något uppenbart samband med uppgifterna som de skulle lösa. Författarna använde sig bland annat av en klassisk uppgift konstruerad av Lewis Caroll som var ämnad som en satir på en reguladetriuppgift.

Om 6 katter fångar 6 råttor på 6 minuter, hur många går det åt att fånga 100 råttor på 50 minuter? (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000, s. 132-134). Författarens översättning

Redan Edward Thorndike pekade på detta fenomen i sin bok *The Psychology of Arithmetic* (1922). Han ger följande exempel på hur mångtydig en uppgift kan vara:

If a horse trots 10 miles in one hour how far will he travel in 9 hours? (Thorndike, 1922, s. 100)

Till denna uppgift ger Greer et al. (2009, s. 2) kommentaren att om läraren vidhåller att svaret är 90 finns en risk att eleven blir berövad på sin tilltro till aritmetiken för en lång tid framöver.

Lösningsmetoder till äldre proportionalitetsuppgifter

Hatami (2007) har som syfte och se hur reguladetri presenteras i äldre läromedel. Det mest pedagogiska exemplet finner han i läroboken *Arithmetica* (1643) av Biörk. Enligt Hatami kommer termen reguladetri sist efter ett logiskt resonemang och boken bryter därmed mot den mekaniska algoritmräkningen som tidigare varit framträdande.

Sådana Exempel kunna och i Styckewis resolveras således: 8 Hestar äta 9 Spån Haffra uthi 12 dagar: Huru länge kunna 18 Hestar förtära 24 Spånn/ efter samma proportion? Först fråghar *man således: 8 Hestar äta 9 Spånn/ huru myckit äter en? Facit* $1\frac{1}{8}$ *Spann/thet är 18 finska Kappar/när man räknar 16 på Spann*[10]

När man nu weet/ at en hest äter uthi the 12 Daghar 18 Kappar/så fråghar man andra gången/ huru myckit han får äta på en dagh/ således: På 12 Daghar äter han 18 huru mång får han på en Dagh 12 — 18 — 1 — facit $1\frac{1}{2}$ *kappa*

Efter man ock weet/ at hwar hest får $1\frac{1}{2}$ *om Daghen/ så fråghar man tridie gången/ huru mycket 18 Hestar äta på en Dagh/ efter samma proportion? Therföre sätter man således: 1 Hest äter* $1\frac{1}{2}$ *Kappa om Daghen/ huru många Kappar löper på 18 Hestar Exemplet står så:*

1—$1\frac{1}{2}$ *—18—facit 27 Kappar*

Ytterst fråghar man/ 27 kappar ätas uthi en Dagh/ huru länge kunna the äta aff 384 Kappar/ hwilka gälla så myckit som 24 Spån eller 12 tunnor? Exemplet ståår så:

27—1—384 facit $14\frac{2}{9}$ *thet är 14 Daghar 5 Timmar och 20 Minuter Facit* (Biörk, 1643 ur Hatami, 2007, s. 98-99)

För att belysa de olika räknestegen har Hatami (2007, s. 99) överfört beräkningarna till de symboler vi använder idag:

Hästar	*äter havre i kappar*	*under dagar*
8	*144*	*12*
1	$x_1 = \frac{144}{8} = 18$	*12*
1	$x_2 = \frac{18}{12} = \frac{144}{8 \cdot 12} = 1\frac{1}{2}$	*1*
18	$x_3 = 1\frac{1}{2} \cdot 18 = 27$	*1*
18 384	$x = \frac{384}{27} = \frac{384 \cdot 8 \cdot 12}{144 \cdot 18} = 14\frac{2}{9}$	
dvs.	$x = 14\frac{2}{9}$ *dagar=14 dagar, 5t, 20'*	

[10] Hatami (2007) skriver 1 (spån=)spänn=16 finska kappar

Lösningen är en typisk reguladetriuppgift där man kan resonera sig fram till svaret. Biörk använder sig av proportionalitet och går tillbaka till enheten och reducerar därmed bort svårigheten med omvänd reguladetri. Detta återkommer enligt Hatami senare i Nilsson och Wigforss *Aritmetik* (1951).

> *Man ställer ofta problemet översiktligt:*
>
> | | | | | |
> |---|---|---|---|---|
> | *x* | *kg* | *- -* | *8* | *liter* |
> | *2* | *=* | *- -* | *3* | *=* |
>
> *Som utläses: Hur många kg skall användas till 8 liter, då man använder 2 kg till 3 liter? Man skriver så upp talet som står under x - tecknet, här alltså 2 kg, och resonerar: 'så mycket behövs till 3 liter, hur mycket då till 1 liter?' Svar: tredjedelen så mycket, och svaret betecknas* $\frac{2kg}{3}$*. Resonemanget fortsätter: 'Så mycket till 1 liter, hur mycket då till 8 liter?' Svar: 8 gånger så mycket alltså* $\frac{8 \cdot 2kg}{3} = 5\,{}^{1}\!/_{3}\,kg$ *. Metoden brukar kallas reg. de tri-metoden. Den är lättfattlig, men resonemanget bereder vissa svårigheter, om de givna storheterna är bråktal. Ofta är det enklare att lösa dessa problem med vad som kallas "förhållandeproblem"...* (Nilsson & Wigforss, 1951 ur Hatami, 2007, s. 138)

Denna metod skulle idag kallas "vägen över ett" eftersom eleven räknar ut hur mycket som åtgår för en liter.

Förhållandemetoden har Hatami (2007) också ett exempel på från Nilsson och Wigforss aritmetikbok:

> *Ex. a) En person går med jämn hastighet. Efter 12 minuter har han gått 100 m. Hur lång tid bör han beräkna för 5000 m?*
>
> *De tider som åtgår är direkt proportionella mot de vägsträckor som tillryggaläggs. Reg. de tri-uppställningen skulle bli*
>
> | | | | | |
> |---|---|---|---|---|
> | *x* | *min* | *- -* | *5000* | *meter* |
> | *12* | *=* | *- -* | *1000* | *=* |
>
> *Om uppgiften löses med förhållandemetod får vi analogien:*
>
> $\frac{x\ \text{min}}{12\ \text{min}} = \frac{5000\ m}{1000\ m}$ *eller, om vi endast utsätter mätetalen,* $\frac{x}{12} = \frac{5000}{1000}$ *alltså x = 60.* (Nilsson & Wigforss, 1951, ur Hatami, 2007, s. 139)

Lägg märke till att förhållandet i varje uppställning innefattar samma mätområde (min och m).

Utifrån sin studie menar Hatami (2007) att proportionsläran bör återinföras i grundskolan. Den skulle integrera de tre viktiga områdena aritmetik, geometri och algebra och medföra en fördjupad förståelse av proportionalitet för eleverna. När de lärt sig lösa problemen med reguladetri skulle funktionsbegreppet kunna föras in så att eleverna skulle vara väl förberedda inför gymnasieskolan. Han fortsätter med att rekommendera skrivsättet $a:b=c:d$ för att kunna se sambandet mellan de yttersta termerna, något som förloras i skrivsättet $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Sammanfattningsvis är proportionalitet ett begrepp som har en mycket lång tradition i den svenska matematikutbildningen. Det finns beskrivet i både geometriböcker och aritmetikböcker och Eudoxos definition är den som förekommer oftast. Den vanligaste lösningsmetoden för att lösa proportionalitetsuppgifter är reguladetri. Metoden går ut på att lösa ekvationer med en tillbakagång till enheten. I uppgifter om proportionalitet är det en vanligt förekommande uppgiftstyp att söka en term i en analogi när tre termer är givna. Det är nödvändigt att i dessa uppgifter undersöka inom vilka gränser som proportionaliteten är sann eftersom det annars lätt kan bli besynnerliga svar.

Läromedelsgranskning

I Sverige har förvaltning och läromedel en lång historia tillsammans. I en rapport från 1931 (SOU 1931:2, 1931) diskuterades läromedlens beskaffenhet och användning. Diskussionen hade sin grund i utbildningskommitténs betänkande från 1812 angående läromedel. Rapporten hävdade att läromedel inte skulle vara för detaljerade då det kunde ta bort fokus från lärarens ansvar och studenternas intresse. Om läromedlen skulle granska eller inte var en fråga som förvaltningen övervägde under många år. Till slut genomfördes en övergripande inspektion av läroplansmateriel. Resultatet av inspektionen blev att en del läromedel förkastades och att inspektionen av läromedlen upprepades regelbundet. Den senaste kommittén som ansvarade för granskningen var *Statens Institut för Läromedelsinformation* (SIL) som var aktiv under åren 1974-1992 (Marklund, 1987). De hade som ansvarsområde att granska och godkänna basläromedel och informera skolorna om dessa. Enligt rapporten *Matematikgranskning* höll dock böckerna låg standard och ansågs monotona, karaktärslösa samt ointressanta och behövde reformeras för att matematikutbildningen skulle kunna utvecklas (Areskoug & Grevholm, 1987). Även en annan rapport genomfördes under 1980-talet (Läromedelsöversynen, 1988), där resultatet visade vikten för eleven att ha en egen lärobok. För nuvarande finns det inte någon granskning av läromedel i matematik i Sverige utan vem som helst kan i princip publicera ett läromedel. Det finns inget utrymme inom föreliggande avhandling att undersöka vilka konsekvenser detta kan ha för framställningen av skolmatematiken i läromedlen.

2.6 Proportionalitet i grundskolan

När eleven möter proportionalitet på gymnasiet är det inte första gången eftersom begreppet introduceras redan i grundskolan årskurs 9. Eftersom det är en rekapitulering av begreppet är det nödvändigt att göra en översikt över hur begreppet presenteras i grundskolans läromedel. I läroplanen för grundskolan anges följande om proportionalitet som omnämns i strävansmålen för årskurs 9:

> *Strävan skall också vara att eleven utvecklar sin tal- och rumsuppfattning samt sin förmåga att förstå och använda*
>
> *– grundläggande talbegrepp och räkning med reella tal, närmevärden, proportionalitet och procent*

Därefter omnämns proportionalitet under uppnåendemålen:

> *– ha goda färdigheter i och kunna använda överslagsräkning och räkning med naturliga tal och tal i decimalform samt procent och proportionalitet i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med tekniska hjälpmedel*
>
> (Från mål att uppnå i skolår 9) (Skolverket, 2008a, s. 29)

Taluppfattning är ett område som PRIM-gruppen anser har fått lägre resultat de sista åren. Miniräknare används i stor utsträckning i klassrummen så PRIM-gruppen tror att huvudräkningsstrategier inte övas i någon större utsträckning. Ett exempel tillhandahållet av PRIM-gruppen ska illustrera ovanstående det vill säga en uppgift på en vanligt förekommande huvudräkningsuppgift:

> En avgift på 60 kr ökar med 15 %.
> Bestäm den nya avgiften. Svar:__________ kr

I en litteraturstudie på magisternivå i utbildningsvetenskap, om svenska matematikläromedel (Helmertz, 2010) konstaterar hon att proportionalitet inte introduceras förrän i den sista årskursen på grundskolan. Innan detta möter eleverna proportionellt tankesätt ifrån och med år 3 och då speciellt i form av pris per antal. Hon ger ett exempel ur Matematikboken 4

> *Vad får du betala för 2 kg bananer om 5 kg kostar 45 kr?*
>
> (Undvall, Forsberg, & Melin, 2005, s. 83)

Under årskurs 5 får eleverna möta jämförpris och skala begreppen i läromedlet och i årskurs 7 behandlas förhållandet mellan hastighet, tid och medelfart samt uppgifter med skala där förminskning och förstoring sker enligt Helmertz (2010). I årskurs 8 behandlas procent och läromedlet visar i ett exempel beräkning av andel:

> *När vi vill uttrycka hur stor delen är i procent börjar vi med att teckna förhållandet mellan delen och det hela. Förhållandet är ett bråk som omvandlas till procentform på vanligt sätt. Förhållandet = delen/det hela.*
>
> (Undvall, Olofson, & Forsberg, 2002, s. 112)

Diagram och koordinatsystem visas först i slutet av årskurs 5 och då i forms av en tematisk uppgift. Detta återupprepas även i årskurs 6 hävdar Helmertz (2010). Eleverna övar avläsning av tid, sträcka och hastighet men det efterfrågas inte om det är jämn ökning i läromedlen poängterar Helmertz (2010). I årskurs 8 får eleverna avgöra om linjediagrammen stämmer överens med olika påståenden och termen ”konstant hastighet” introduceras i ett diagram som en rät linje. I skolår 9 tas begreppet proportionalitet upp i samband med linjära funktioner och likformighet. Helmertz menar att det tar upp en liten del av läromedlet eftersom det avhandlas på bara 4 sidor. Resultatet av undersökningen visar att den svenska läroboken endast tar upp ett fåtal dimensioner av variation inom proportionalitetsbegreppet och dessa framställs som skilda matematiska objekt. Helmertz delar upp dessa objekt i två grupper: förhållanden mellan tal och proportionalitet mellan två variabler.

Innan eleverna börjar på gymnasiet har begreppet proportionalitet presenteras för eleverna i form av skala och linjära funktioner. Helmertz konstaterar att begreppet endast framställs begränsat och med låg variation. Som nämndes ovan visade resultatet från TIMMS 2007 att många svenska elever i åk 8 har svårigheter med uppgifter om proportionalitet (Skolverket, 2008b).

2.7 Proportionalitet i gymnasiet

Tiden före enhetsgymnasiet

År 1825 tillsattes det en kommitté om undervisning som skulle undersöka om inte alla offentliga utbildningsanstalter och krigsakademien skulle kunna förbättras och förbindas. Kommittén bestod av bland andra Erik Gustaf Geijer, Esaias Tegnér och Jöns Jakob Berzelius. Förslaget var att inrätta två bildningslinjer vara den ena skulle vara för de klassiska språkens litteratur och den andra vara skild från dessa. Undervisningen fick nya ämnen och däribland tillkom kemi som troligen var Berzelius förtjänst.

1928 års läroverksreform innebar att tre olika slags läroverk infördes, fristående realskolor (5 år), högre allmänna läroverk och gymnasium (4 år) samt lyceer (6 år). Den sistnämnda skulle bygga på folkskolans sjätte klass men fick obetydligt med sökande lades därför ner.

Gymnasiet delades in i latingymnasiet och realgymnasiet och de skiljde sig bland annat åt beträffande vilka fasta ämnen som förekom. På latingymnasiet var det kristendomskunskap, modersmål, historia med samhällslära samt ett levande språk och på realgymnasiet kristendomskunskap, modersmål, historia med samhällslära och matematik samt ett levande språk. År 1933 ökades antalet timmar i de fasta språken som var franska på latinlinjen och engelska på reallinjen på bekostnad av matematikundervisningen, som minskade (Landquist, 1963).

Tiden från 1940 och framåt kan grovt delas upp i två etapper (Lundgren, 1977). Den första etappen från 1940 till 1975 hade som syfte att ena utbildningen i Sverige på alla nivåer och skapa samband mellan dessa, från förskola till högskola. Grundskolan blev en 9-årig obligatorisk grundskola och gymnasiet förändrades till en sammanhållen gymnasieskola. Högskoleutbildningen integrerades till ett sammanhållet och regionalt uppbyggt högskolesystem. Etapp ett kallar Lundgren för centraliseringsfasen. Etapp två, som börjar från 1975 och framåt, byggde på en rad utredningar som påpekade fördelen med en decentraliserad skola. Syftet med etapp två var att realisera en decentraliserad skola utifrån den centrala skolan. Decentraliseringen skulle öka det lokala inflytandet och på så vis kunna lösa problemen på lokal nivå och använda resurserna bättre. Förändringen kan uttryckas som en ändring från den fördelande staten till den kontrollerande staten vilket innebar att utvärderingarna fick en starkare roll (Lundgren, (1989). Det lokala inflytandet på kursinnehållet har ökat men har medfört en del svårigheter för lärarna eftersom kursplanen inte specificerar hur begrepp ska hanteras i matematik. Lärarna har många uppgifter och hinner eventuellt inte med att detaljstudera läroplaner och kursplaner vilket i sin tur medför att lärarna vänder sig till läroboken för att få stöd i sin undervisning. Att läromedlets huvudidé vid konstruktionen är att den ska vara ”lätt att arbeta med” för lärare och elever är en av slutsatserna som Jablonka och Johansson (2010) kommit fram till. De har i sin sammanställning av forskning om svenska läromedel i matematik funnit att läromedlens utformning beror på den öppna marknaden för läromedel som Sverige har. Författarna av läromedlen är ofta erfarna lärare som på sätt och vis motverkar reformer eftersom de skapar läromedel som skall fungera vid elevens individuella arbete med läromedlet.

Läroplan

Begreppet läroplan är enlig Lundgren (1999) svårt att definiera utanför kontexten för utbildning och kultur. Emellertid har läroplan används i Sverige som synonym för en plan över undervisning eller lärande sedan sextiotalet. När en läroplan skall beslutas så utreder Skolverket på regeringens uppdrag, som i fallet med Lpf 94 gav

Skola för bildning[11], den utredning som låg till grund för beslutet. Beslut om läroplanens godkännande fattas därefter av den svenska regeringen efter att riksdagen har godkänt planen (Lundgren, 1991).

Den första insatsen att styra utbildningen på nationell nivå var införandet av folkskolan 1842, där staten beslutade vilka kunskaper som var viktiga för de svenska medborgarna. Under 1960-talet finansierade staten lärarna med bidrag som byggde på timplaner och antalet undervisade timmar. De kunskaper som beskrevs i kursplanerna var också de som förekom i läromedlen men det förkom även beskrivningar på undervisningsformer. Lundgren (1999) uttrycker detta som "*ramfaktorer*" som styr skolan. Skolan fick ramar dvs. resurser till lärarna och dessa skulle sedan undervisa det som står i kursplanerna. För att se till att reglerna följdes inrättades Skolöverstyrelsen. Nu ansvarade denna myndighet även för skrivandet av kursplaner och fick därmed en dubbelfunktion. SIA-utredningen (SOU 1974:53, 1974) visade att organisationen innebar att skolan centraliserades och klasserna blev stora för att det skulle bli tillräckligt med tjänsteunderlag för lärarna. En annan bidragande orsak till reformerna var avflyttningen från landsbygden som innebar minskat skatteunderlag till kommunerna. Eftersom antalet elever som skulle utbildas ökade blev det allt svårare med att styra med regler och tanken föddes att styra på ett annat sätt, politiskt.

Det finns studier som fokuserar på läroplaner och läromedel. I studien *According to the book* (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt, & Houang, 2002) används TIMSS[12] ramverk som analysverktyg för att undersöka om det finns några skillnader mellan läromedel och läroplaner. Studien omfattar en undersökning av läromedel i år 9 och är utförd i 26 länder. Resultatet visade att det i flertalet länder fanns skillnader mellan läromedel och läroplaner. Begreppet proportionalitet var ett av de undersökta begreppen och i Frankrike, Grekland och Ryssland var begreppet med i läromedlen men inte i läroplanen. Motsatsen, det vill säga att begreppet omnämns i läroplanen men inte i läromedlet, fanns i Singapore och Spanien. Ramverket som används är ursprungligen uppdelat i tre läroplansnivåer[13]: avsedd (intended), genomförd (implemented) och uppnådd (attained). Den första nivån *avsedd* omfattar utbildningspolitik och officiella dokument om visioner inom utbildning. Läroplaner som ska ge direktiv till skolorna om vad som skall undervisas tillhör också denna nivå, det vill säga syfte och mål med undervisningen. Nästa nivå är *genomförd*. Denna nivå ska spegla klassrummet och undervisningens upplägg. Läraren tolkar läroplanen och omsätter den i klass-

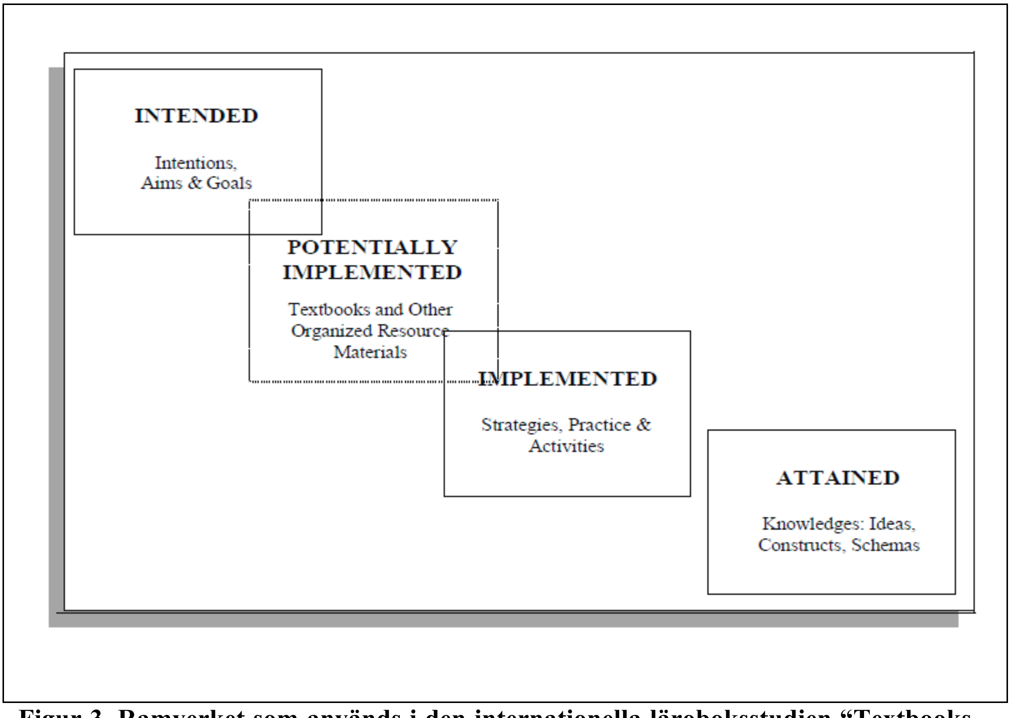
---

[11] (SOU 1992:94)

[12] TIMSS: Trends in International Mathematics and Science Study

[13] Läroplan används här i en vidare betydelse

rummet. Den sista nivån är *uppnådd*. Resultatet, det vill säga vad eleven har lärt sig och hur mycket arbete eleven har lagt ner, beaktas på denna nivå (Valverde et al., 2002). Läromedel infogas mellan den första nivån och den andra av Valverde et al. Att läromedel hamnar på en egen nivå beror på att de anser att läromedlet inte helt och hållet tillhör någon av de andra två nivåerna (se Figur 3).



Figur 3. Ramverket som används i den internationella läroboksstudien "Textbooks – The Potentially Implemented Curriculum". (Valverde et al., 2002, s. 13)

I Sverige har Johansson (2003) använt ramverket i TIMSS och studerat matematikläromedel på grundskolan för att undersöka om det är möjligt att se läromedlen som *potenially implemented curriculum*. Resultatet av denna undersökning visade att läroboken endast delvis speglade läroplanen. Det finns egentligen inte någon skyldighet från läromedelsförfattarnas sida att täcka hela läroplanen utan det är lärarens ansvar att tillse detta. Johansson är även kritisk till att begränsa läromedlets roll till en enkel figur (som i Figur 3) utan anser att läromedlet är mycket mera komplext. Det som går att fastställa är att läromedel används av lärare och elever över hela världen och att läromedlet kan ses som en resurs eller hinder i reformer av läroplaner. Det går däremot inte att påstå att om flera lärare använder samma läromedel så undervisar de på samma sätt eller att en reform av läromedel skulle ändra lärarens undervisning (M. Johansson, 2003). Johansson ger som förslag att läroplaner skall följas av material och kurser för att säkerställa att lärarna tillägnar sig reformer. Som exempel nämner hon "NCTM curriculum materials" som finns att tillgå i USA.

Lgy 65

År 1960 tillsattes en Gymnasieutredning (GU) för att få en enhetlig gymnasieutbildning. Denna utredning kartlade kraven på gymnasiet och kunskapsstandarden. Resultatet av undersökningen blev att det fanns stora krav i yrkeslivet och fortsatt utbildning. Håstad (1981) har i sin avhandling tagit upp fyra speciella resultat:

- Krav på att kunna statistik och sannolikhetslära
- Man var nöjd med de kunskaper som gymnasisterna hade i matematik
- Man ville öka färdigheterna i studieteknik
- Naturvetarna var mer angelägna om att eleverna skulle bli språkligt humanistiskt utbildade än vad humanisterna var måna om att eleverna skulle läsa naturvetenskap

Året 1966/1967 kom Läroplan för Gymnasiet (Lgy 65), den första läroplanen för enhetsgymnasiet. Skolformerna var fackskola, gymnasium och yrkesskola. Resultatet av GU inom matematik blev att statistik och sannolikhetslära fick förstärkta resurser på bekostnad av geometri och kägelsnitt (Håstad, (1981). Reformen innebar också att betygen blev relativa till landets rikes resultat och undervisningen skedde efter kursplaner. Lgy 65 innehöll ett stort antal moment som lärarna i början försökte täcka ganska fullständigt. Den s.k. nya matematiken med mängdläran gjorde sitt intåg i den svenska matematiken. Håstad hävdar också att de första läroböckerna från 1965 års reform som användes av lärarna var mycket mera formella och abstrakta än den andra generationens läromedel.

> *Formeln* $k = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad (x_1 \neq x_2)$
>
> *för riktningskoefficienten genomgås. Övning i att bestämma linjära funktioner ur givna villkor ges. Begreppet proportionalitet behandlas med praktiska tillämpningar. Elevernas kunskaper i procenträkning befästs och utvidgas; särskilt betonas därvid användning av decimaltal.* (Skolöverstyrelsen, 1965, s. 171)

I Lgy 65 framställs proportionalitet med riktningskoefficienten *k*. Det är annorlunda i jämförelse med Euklides *Elementa*. Proportionalitet hör här till området funktioner. I ett särskilt avsnitt beskrivs att proportionalitet ska behandlas med praktiska tillämpningar och rekommendationen var att proportionalitet skulle läsas i åk 1:

> *12NTSE. Den linjära funktionen: Riktningskoefficient. Grafisk framställning. Proportionalitet. Procent.* (Skolöverstyrelsen, 1965, s. 265)

Lgy 70

År 1971 infördes Läroplan för de frivilliga skolformerna (Lgy 70). Beskrivningen av proportionalitet är oförändrad från Lgy 65:

> *NTSE. Den linjära funktionen: Riktningskoefficient. Grafisk framställning. Proportionalitet. Procent.* (Skolöverstyrelsen, 1971, s. 258)

Lärarna insåg att det inte gick att täcka hela läroplanen i gymnasiet och år 1972 reviderades studieplanen ytterligare av gymnasieinspektör Sven Hilding vid Skolöverstyrelsen (SÖ). Det var enligt denna revision som undervisningen skedde på gymnasiet. Det som ändrades angående proportionalitet var att det förtydligades hur undervisningen skulle ske:

> *Grafiska bilden av proportionalitet, numerisk behandling av proportionalitet, bl. a på räknesticka utan slidförskjutning, bestämning av proportionalitetskonstant.* (Skolöverstyrelsen, 1972, s. 7)

Det var en detaljrikare text med exempel och instruktioner. Det beskrevs hur proportionalitet skulle demonstreras med grafer samt vilken typ av proportionaliteter som skulle tas upp i undervisningen.

> *Omvänd proportionalitet, proportionalitet mot kvadraten på en variabel. Grafen till en linjär funktion, grafisk bestämning av konstanterna k och m i ekvationen* $y = kx + m$*, algebraisk bestämning av en ekvation för en rät linje given med olika villkor. Lösningen av enkla linjära olikheter, ekvationer och ekvations-system, både med grafisk och algebraisk metod. Exempel på linjära samband inom naturvetenskap, teknik och ekonomi. Linjär interpolering.* (Skolöverstyrelsen, 1972, s. 8)

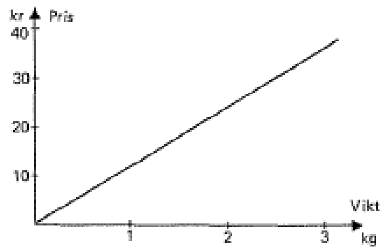
Efter 1969 är det stora skillnader, proportionalitet definieras i form av proportionalitetskonstant och proportionalitet förflyttas från geometrikapitlet till funktioner. År 1982/1983 kom Supplement 75 och angående proportionalitet presenteras det undervisningsexempel i form av en graf med en stråle från origo samt en värdetabell:

3.2 Proportionalitet
1 värdetabell, diagram

Proportionalitet införs lämpligen genom att värdetabeller och diagram studeras.

Tabellen och diagrammet visar hur priset på en vara varierar med vikten.
a) Fyll i de värden som är utelämnade i tabellen.
b) Ange med hjälp av diagrammet priset för 2,8 kg av varan.

pris (kr)	0	6	12	18	24	30	36
vikt (kg)	0	0,5		1,5	2		3



Supplement 75 ger även exempel på moment som t.ex. tabeller, kurvritning, proportionalitetsfaktor och proportionalitet mot x^2.

> *Årsräntan, r kronor, på ett lån är proportionell mot lånesumman, s kronor. Räntesatsen är 10%.*
> *a) Ange ett samband mellan r och s.*
> *b) Åskådliggör sambandet i ett diagram.*
> *c) bestäm årsräntan då lånesumman är 126 000 kr.*

(Skolöverstyrelsen, 1982, s. 21)

16.5 Problem som leder till uppställandet av differentialekvationer

Eleverna övas i att ställa upp diffentialekvationer och bedöma vilken lösningsmetod som skall användas (t ex exakt eller numerisk).

En kastrull med vatten får svalna efter uppvärmning till kokning. Omgivningens temperatur är 20 °C. Vattnets temparaturändring per tidsenhet är proportionell mot differensen av vattnets och omgivningens temperaturer med proportionalitetskonstanten lika med 0,02 min $^{-1}$. Beräkna vattnets temperatur efter 20 minuter om dess begynnelsetemperatur är 100 °C.

För en viss kropp med massan 12 kg som rör sig fritt i luften, är luftmotståndet proportionellt mot hastigheten med proportionalitetskonstanten k = 54 kg/s. Kroppen får falla fritt från vila vid tidpunkten t = 0 s. Hur långt har den fallit vid tiden t = 5,0 s?
Lös motsvarande uppgift om luftmotståndet är proportionellt mot hastigheten i kvadrat och där k nu är 3,0 kg/m.

I exemplet ovan (Skolöverstyrelsen, 1982, s. 42) visas att längre fram i beskrivningen av matematikkursen anges proportionalitet igen men i ett annat sammanhang (differentialekvationer).

Lpf 94

Läroplaner är utbildningspolitikens verktyg för att styra samhällsutvecklingen enligt Lundgren (1999). Läroplanens syfte förändrades i Lpf 94 såtillvida att istället för att ha som huvudsaklig uppgift att fördela resurser så innehöll den numera mål och kunskapsinnehåll.

Efter ett antal utredningar kom Lpf 94 till stånd, en läroplan som innebar ett programbaserat gymnasium som bygger på styrning via mål och resultat-uppföljning kopplat mot decentralisering och ökat inflytande på den lokala nivån i skolan. Betygssystemet ändrades från att vara relativt till att vara målrelaterat. Läromedelsgranskningen försvann men som Johansson (2006) skriver så vore det heller inte rätt av staten att i ett målstyrt utbildningssystem begränsa och styra över läromedelsurvalet.

Gymnasieskolan är inte obligatorisk för svenska elever i Sverige och kallas därför ”Den frivilliga skolformen” men 98% av de elever som går ut åk 9 i grundskolan går vidare till gymnasiet (Brandell, 2000) under förutsättning att de har åtminstone betyget godkänt i matematik, svenska och engelska. Samtliga program är treåriga oavsett om de är studieförberedande eller yrkesförberedande. Det finns totalt 16 nationella gymnasieprogram varav fyra är studieförberedande och tolv yrkes-förberedande. Gemensamt för samtliga program är att de innehåller samma grundkurser med samma kursplan och betygskriterier i matematik, svenska och engelska. Programmen skiljer sig sedan åt på så sätt att de studieförberedande programmen läser fler och mer avancerade kurser i år två och tre emedan de yrkesförberedande programmen läser karaktärsämnen för sin speciella inriktning. För att säkerställa likvärdigheten på betygen anordnar Skolverket nytillverkade nationella prov i matematik, svenska och engelska varje termin på specifika datum. För det nationella provet i matematikkurs A ansvarar Forskningsgruppen för bedömning av kunskap och kompetens (PRIM-gruppen) vid Stockholms universitet. Innan 2000 delades ansvaret för det nationella provet i kurs A mellan PRIM-gruppen och en grupp i Umeå men efter 2000 så har PRIM-gruppen konstruerat samtliga kursprov i kursen Matematik A. Läroplanen är uppbyggd efter de s.k. fyra F:en, dvs. *Fakta*, *Förståelse*, *Färdighet* och *Förtrogenhet* (SOU 1992:94). Eftersom kursplanen är målstyrande blir även beskrivningen av kursen målbeskrivande. Istället för att ange vilka begrepp som ska kunnas anges vad eleven ska kunna göra (Skolverket, 1994). Ordet proportionalitet finns inte med i kursplanerna i matematik i Lpf94.

Gy 2000

Den revidering av kursplanerna i matematik som kom år 2000 innehöll en del förändringar av kursen Matematik A men fortfarande nämns inte begreppet proportionalitet. Kursen fick dock kurspoängen sänkt ifrån 110 p till 100 p men även namnet på poängen ändrades till gymnasiepoäng för att tydliggöra att kurspoängen skulle spegla den arbetsinsats eleven gjorde i kursen. (Skolverket, 2000)

Gy 2011

Arbetet med Gy 2011 har sin grund i regeringens proposition *Högre krav och kvalitet i den nya gymnasieskolan*[14] och utredningen *Framtidsvägen – en reformerad gymnasieskola*[15] enligt Skolverket[16]. Reformen innebär att det finns två typer av inriktningar i gymnasieskolan: yrkesprogram och högskoleförberedande program. Detta innebär även att gymnasiet kommer att ha två olika examina: yrkesexamen och högskoleförberedande examen. Regeringen har infört en tydligare indelning för att öka kvaliteten på yrkesprogrammen så att eleverna ska nå en högre skicklighet i yrket och möjliggöra för att eleven att kunna påbörja sin yrkesbana direkt efter gymnasiet. Totalt ska det finnas 18 program som eleverna ska kunna välja ibland, vilket är en utökning med två program jämfört med Lpf94. Entreprenörskap ska löpa som en röd tråd genom hela utbildningssystemet enligt regeringen. Betygskriterierna har också ändrats till den nya betygsskalan A-F och elevernas prestationer i matematik ska bedömas efter sju förmågor:

> *Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:*
>
> 1. *använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.*
> 2. *hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.*
> 3. *formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.*

---

[14] (Prop. 2008/2009:199)

[15] (SOU 2008:27)

[16] Enligt Skolverkets hemsida www.skolverket.se/sb/d/3013

4. *tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.*
5. *följa, föra och bedöma matematiska resonemang.*
6. *kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.*
7. *relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang."*

(Skolverket, 2010a)

I Gy 2011 beskrivs ämnena i ämnesplaner. Matematikämnet är uppdelat på fem kurser (1-5) och en specialiseringskurs, varav de första två kurserna är uppdelade i tre varianter (a-c) beroende på vilket program eleverna läser. Yrkeslinjerna läser a-kurserna och högskoleförberedande program läser de övriga. Naturvetarna läser c-kurserna. Kurs 3 är uppdelad i b- och c-kurs. Kurs 1a är den första av tre kurser på basnivå. Proportionalitet är tillbaka i grundkursen 1a för yrkesprogram:

Samband och förändring

Fördjupning av procentbegreppet: promille, ppm och procentenheter

- *Begreppen förändringsfaktor och index samt metoder för beräkning av räntor och amorteringar för olika typer av lån.*
- *Begreppen förhållande och proportionalitet i resonemang, beräkningar, mätningar och konstruktioner.*
- *Skillnader mellan linjära och exponentiella förlopp.*

(Skolverket, 2010a, s. 89)

Proportionalitet omnämns under avsnittet samband och förändring och ska tas upp tillsammans med förhållande i resonemang, beräkningar, mätningar och konstruktioner. De andra kurserna 1b och 1c innehåller inte begreppet proportionalitet. Ämnesplanerna i Gy 2011 ska kompletteras med kommentarmaterial som produceras av Skolverket, där ämnesplanerna tolkas och exemplifieras.

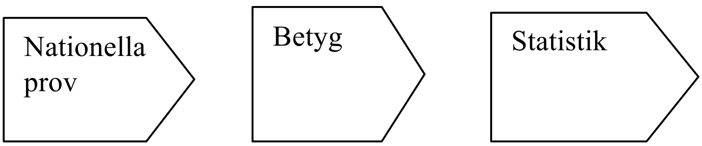
2.8 Nationella prov

I enlighet med den senaste internationella trenden av en ökad decentralisering har den svenska skolan reformerats till att ge mera ansvar till kommunen och lärarna.

För att kontrollera kvaliteten instiftades nationella prov som syftar till att (Skolverket, 2006, s. 4):

- Bidra till ökad måluppfyllelse för eleverna
- Förtydliga målen och visa elevers starka och svaga sidor (diagnostisk funktion)
- Konkretisera kursmål och betygskriterier
- Stödja en likvärdig och rättvis bedömning och betygssättning
- Ge underlag för en analys av i vilken utsträckning kunskapsmålen nås på skolnivå, på huvudmannanivå och på nationell nivå.

Sverige har en lång tradition av nationell utvärdering av kunskap i skolan och den senaste innan nuvarande nationella provsystem innebar för gymnasiet att samtliga elever skulle genomföra s.k. Centrala prov i vissa ämnen, bland annat matematik. De centrala provens syfte var som instrument för att normera årskullens betyg enligt en standardkurva. Därefter kunde betygen sättas med en viss andel betyg inom varje betygsnivå. De nationella proven har istället som syfte att se om elevens kunskaper motsvarar de krav som ställs i programmål och kursplaner (Lindström, 2005) samt vara ett stöd för en likvärdig betygssättning över hela landet.



Figur 4. Samband mellan de nationella proven, betyg och statistikredovisning.

När de nationella proven skulle skapas gav Skolverket uppdraget till fyra olika universitet för att utveckla referenskriterier för att skapa nationella prov:

> *Skolverket fick genom ett regeringsbeslut den 21 april 1994 i uppdrag att utveckla ett nationellt provsystem. Med anledning av detta uppdrag har Skolverket utarbetat diagnostiskt material för årskurs 2 och årskurs 7, frivilliga ämnesprov för årskurs 5, obligatoriska ämnesprov för årskurs 9 samt kursprov för vissa kurser i gymnasieskolan och gymnasial vuxenutbildning. I uppdraget ingår även att utveckla en provbank.* (Thomassen & Tobiassen, 2000, s. 3)

De nationella proven skulle enligt överenskommelsen tjäna som underlag för läraren i betygsättningen av eleven och följa kursplaner och betygskriterier mycket noga. En följdeffekt blev även att se det nationella provet som ett instrument för att utvärdera om gymnasieskolorna hade implementerat den nya läroplanens mål.

Läraren är ansvarig för betygsättningen och utvärderingen och skall enligt Skolverket betrakta det nationella provet som ett stickprov bland flera utvärderingar av eleven (Skolverket, 1994, s. 16)

Det nationella provet skall alltså inte vara allenarådande vid betygsättningen utan bara ge en uppfattning om hur eleven ligger till i förhållande till kursmålen.

I Skolverkets nuvarande uppdrag anges följande syften med olika provmaterial:

- Att ge lärarna stöd i att analysera och bedöma elevernas starka och svaga sidor som underlag för nödvändiga insatser.
- Att ge lärarna stöd vid bedömningen av om eleverna har nått uppställda mål i kursplanerna
- Att stödja principen om en likvärdig bedömning och en rättvis betygssättning.

Fram till kursplansrevideringen 2000 var det frivilligt att delta i de nationella proven men efter 2000 är skolan skyldig att deltaga i det nationella provet för den högsta matematikkursen för programmet. Det nationella provet i Matematik A är obligatoriskt för samtliga gymnasieelever.

Provet i Matematik A utformades i två delar varav den första delen skulle vara ett prov som utfördes inom en begränsad tidsperiod under traditionsenliga former för prov. Den andra delen av det nationella provet skulle ägnas åt en problemlösningsuppgift (breddningsdel). Denna del av provet har emellertid omarbetats efter mars 2000 då en revidering av läroplanen genomfördes. Idén om en enskild problemlösningsdel övergavs och istället infördes en första del där inte miniräknare fick användas som hjälpmedel. Från och med hösten 2000 var det även första gången som poängen presenterades som godkänt-poäng och väl godkänt-poäng.

Konstruktion av nationella prov

Vid konstruktionen av ett nationellt prov har det varit en policy från departementets sida att lärare från olika skolor ska delta i provkonstruktionen. Idag är det en grupp på tjugo till trettio lärare som är involverade i detta. Deras uppgifter varierar från uppgiftsskrivare till utprovare av uppgifter i klasser. Det tar två år från att det nationella provet skapas till resultatet rapporteras i en årlig rapport. Lärare bjuds in för att konstruera fem till tio uppgifter enligt ett visst schema. PRIM-gruppen har tolkat kursplanens mål på följande sätt (Pettersson & Kjellström, 1995):

> *All kunskapsförmedling oavsett om det gäller fakta, färdighet, förståelse eller förtrogenhet har någon form av facit att jämföra med. När det gäller kunskapandet däremot är det arbetet som är målet, förmågan att formulera och utveckla problem och komma*

till slutsatser. Den omfattar såväl färdigheter - att formulera sig, att använda kunskapskällor, att sammanställa, att föra beräkningar etc. - som förtrogenhet, vilken kommer till uttryck t ex genom förmåga till riktiga bedömningar i kunskapandets olika skeenden (Skolverket, 1994, s. 67)

Med bakgrund av de mål att sträva mot som anges i läroplanen (se Skolverket, 1994, s. 9) har PRIM-gruppen dragit slutsatsen att ett nationellt prov i matematik skall ta hänsyn till följande (Pettersson & Kjellström, 1995, s. 16):

Kontext

Beständiga kunskaper, som alla i samhället behöver

Yrkes och vardagsliv

Uppgiftsmaterialet ska vara sådant att eleverna får chans att visa att de:

Behärskar de begrepp, lagar och metoder som ingår i kursen

Kan upptäcka mönster och se samband

Kan förstå och föra matematiska resonemang

Kan skapa, använda och granska matematiska modeller

Kan formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för yrkes- och vardagsliv

Kan med förtrogenhet och omdöme använda sig av miniräknare (och datorer) som matematiska verktyg

Kan arbeta självständigt, ihärdigt och kreativt

Kan redovisa sina tankegångar (skriftligt)

Kan använda sina kunskaper som redskap för att
- formulera och pröva antaganden och lösa problem
- kritiskt granska och värdera påståenden och förhållanden
- lösa praktiska problem och arbetsuppgifter

Kan formulera hypoteser, undersöka dem och dra slutsatser

Kan generalisera lösningar och resultat

Dessutom anges att tonvikten skall ligga på förståelse, analys av hela lösningsprocedurer och kritiskt granskning av resultat samt förmåga att dra slutsatser som enligt kursplanen är viktigare än isolerad färdighetsträning. Ambitionen är alltså ganska hög när det gäller den matematiska kunskap som proven avser att utvärdera. Proportionalitet erbjuder här ett matematiskt innehållsområde där flera av de mål som listas ovan med fördel kan aktualiseras.

Konstruktion av uppgifter för nationellt prov Matematik A

Konstruktionen av ett nationellt prov är en lång process. Enligt PRIM-gruppens hemsida startas konstruktionsprocessen med att en referensgrupp samlas. Gruppen består av verksamma matematiklärare, lärarutbildare, forskare och ämnesexperter. Gruppen bestämmer tillsammans med PRIM-gruppen provets innehåll och inriktning. Tabell 1 visar hur fördelningen av innehållsområden på provet i kurs A görs vid provkonstruktionen. Den dominerande ämnestypen aritmetik följt av geometri och algebra. Uppgifter inom funktioner och statistik har den minsta andelen på ett nationellt prov.

Tabell 1. Fördelning av uppgifterna på de olika ämnesområdena. (Lindström, 2003, s. 12)

Ämne	**Kurs A 100 p**
Algebra	20 %
Differentialkalkyl	---
Integralkalkyl	--
Funktioner	10 %
Geometri	25 %
Aritmetik	35 %
Sannolikhetslära	--
Statistik	10 %
Trigonometri	Inkl i geometri

Uppgifterna konstrueras av PRIM-gruppen, referensgruppen och verksamma lärare. En referensgrupp granskar förslagen och väljer ut vilka uppgifter som skall ingå i provet. Sedan konstrueras tio utprövningsversioner. Sex klasser prövar varje version under en viss tidsperiod. Elevarbetena skickas sedan tillbaka med lärarkommentarer på innehåll och utformning. Elevernas arbeten granskas ännu en gång av referensgruppen och här är lärarnas och elevernas synpunkter mycket behjälpliga i sammanställningen. Med hjälp av sammanställningen väljer sedan PRIM-gruppen ut vilka uppgifter som skall ingå på provet. En stor grupp verksamma lärare diskuterar sedan bedömning och kravgränssättning. Från start av konstruktionen av ett nationellt prov till ett färdigt prov tar det cirka två år.

Resultatet av provet presenteras i en årlig rapport som Skolverket publicerar. En sjättedel av alla skolor som deltagit skickar in sina resultat samt ett urval av elevlösningar. Därefter sammanställs resultatet av PRIM-gruppen som först ger en första kort rapport och sedan publiceras resultaten för Svenska, Engelska och Matematik i en gemensam rapport ett halvår senare. Syftet med insamlingen är att Skolverket har en skyldighet till skolorna att ge skolorna återkoppling på provet samt ge information om utfallet av skolsystemet. Provkonstruktörerna behöver också information om resultatet för att kunna förbättra proven och till forskning inom utvärderingar av kunskap. I rapporten redovisar PRIM-gruppen lösningsproportion för de olika uppgifterna. Uträkning går till enligt följande: det totala antalet poäng som delats ut på uppgiften dividerat med det antal poäng som uppgiften kan ge dividerat med antalet elever som arbetat med uppgiften.

3. Didaktisk forskning om proportionalitet

I följande avsnitt presenteras en sammanställning av hur begreppet proportionalitet kan beskrivas som fenomen utifrån ett ämnesdidaktiskt perspektiv. Utifrån ett piagetanskt perspektiv pekar Gerard Vergnaud på komplexiteten i begreppet proportionalitet genom att se det som en del av ett större begreppsfält (conceptual field), medan Hans Freudenthal analyserar proportionalitetsbegreppet utifrån ett rent matematiskt perspektiv.

3.1 Analyser av proportionalitetsbegreppet

Proportionalitet refererar till sambandet mellan två förhållanden. I Formel 1 (The Concise Oxford Dictionary of Mathematics, 2009) visas det samband som klassiskt har visats i läromedel. Om förhållandet mellan kvantiteterna a och b respektive c och d är lika, enligt Formel 2, sägs dessa stå i samma proportion till varandra.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Formel 1. Matematisk definition av proportionalitet

(Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 98) formulerar detta på följande sätt: ”Sambandet är sådant att kvoten mellan storheterna är konstant”. Kvantiteterna *(a, b, c* & *d*) och deras samband kan vara numeriska serier eller mätetal beroende på kontexten.

Proportionalitet definieras ibland även som ett generellt samband mellan två variabler x och y med hjälp av formeln $y = kx$ (se Formel 4 nedan), där k är en konstant (den s.k. proportionalitetskonstanten). Detta medför att kvoten mellan y och x är konstant. Att dessa definitioner innehåller en stor komplexitet under den skenbart enkla ytan framgår av analyser som genomförts av bland andra Freudenthal och Vergnaud.

Freudenthals analys av proportionalitetsbegreppet

En analys av begreppet proportionalitet och dess komplexitet återfinns i Freudenthal (1983). Han frångår det klassiska sättet att uttrycka förhållanden som en kvot mellan två tal t.ex. $\frac{3}{4}$, $3:4$ till att i stället uttrycka förhållandet som en funktion av ordnade parvisa talpar eller storheter. På detta sätt undgår han att förhållandet blir begränsat till att bli betraktat som ett bråk ”3 delat med 4”. Fördelen med att använda en sådan definition är att det inte är värdet på bråket som blir fokuserat utan det blir istället fokus på förhållandet mellan två tal.

Syftet med att definiera förhållande som en funktion tydliggörs när Freudenthal ger ett exempel med likformig rörelse:

(1) För en likformig rörelse gäller att: på lika tid täcks lika avstånd in, vilket är ekvivalent med att:

(2) Sträckor är proportionella mot tider, så länge rörelsen är kontinuerlig

(3) Sträckan är proportionell mot tiden (som 2 men med annan formulering)

(4) Sträckan är en linjär funktion av tiden (liknande innebörd men ny formulering)

(5) Hastigheten är konstant (men det är annorlunda formulerat)

Från (1) följer:

Om vi dubblar tiden så fördubblas sträckan, om vi tredubblar tiden, tredubblas sträckan.

Detta kan enligt Freudenthal uttryckas mera generellt:

På *n* gånger tiden vinns *n* gånger sträckan. För att tydliggöra ovanstående använder sig Freudenthal av funktioner:

Anta $s = f(t)$

Låt sträckan *s* vara en funktion av tiden *t*.
Vi vet att $f(nt) = nf(t),\ n \in \mathrm{N}$

Ersätt *t* med $\frac{1}{n}t$. Då får vi (Freudenthal, 1983): $f(t) = nf\left(\frac{1}{n}t\right)$

$f\left(\frac{1}{n}t\right) = \frac{1}{n}f(t)$ vilket medför att på $\frac{1}{n}$ av tiden kommer vi att hinna $\frac{1}{n}$ av sträckan.

Därefter ersätts *t* med *mt*, $m \in N$

$$f\left(\frac{m}{n}t\right) = \frac{1}{n}f(mt) = \frac{m}{n}f(t)$$

Freudenthal (1983) skriver att vi nu vet att för varje (positivt) rationellt tal α är:

α gånger tiden motsvarar α gånger sträckan vi har hunnit.

Eftersom det rör sig om likformig hastighet menar Freudenthal att det även gäller för reella tal.

Sätt $\alpha = \dfrac{t}{t_0}$

Då blir $f(t):f(t_0) = f(\alpha t_0):f(t_0) = \alpha f(t_0):f(t_0) = t:t_0$

Detta stämmer överens med (2) och (3).

Det kan även skrivas som

$f(t) = (f(t_0)/t_0)t$

vilket stämmer överens med (4)

Eller så kan det skrivas

$f(t)/t = f(t_0)/t_0$

vilket är samma som formulering (5)

Enligt Freudenthal (1983) är det två storheter som berörs, i denna uppgift tid och sträcka med en funktion *f* som tilldelas en sträcka som beror av en tid, nämligen sträckan av en väg som vinns under ett tidsintervall. Förhållandena som behandlas här är inom ett och samma system (tid eller sträcka). I förhållandet i ett system är det ett nödvändigt villkor att det korresponderar inom samma system. Detta är enligt Freudenthal postulatet för likformig rörelse. Han kallar dessa förhållanden som är inom ett system *interna*.

Motsatsen till interna förhållanden är enligt (Freudenthal, 1983) externa förhållanden. Om t_1 och t_2, är de tider det tar för att färdas sträckorna s_1 och s_2 så säger postulatet för likformighet att

$s_1 : s_2 = t_1 : t_2$

Om vi byter mellantermerna blir det istället

$s_1 : t_1 = s_2 : t_2$

Detta kallar Freudenthal (1983) för en likhet mellan två förhållanden som är externa och systemet består av två förhållanden som vart och ett betecknar hastigheter. Med andra ord är i detta fall det interna förhållandet ett tal och det externa förhållandet en storhet (hastighet) som är en kvot mellan väg och tid.

Slutsatsen av Freudenthals resonemang blir att ett internt förhållande är inom en storhet och ett externt förhållande är mellan två storheter. Det är lika uppenbart att i avbildningar av storheter så behålls de interna förhållandena och de externa förhållandena är också oförändrade. Det är detta som är linjär avbildning och i Freudenthals (1983) exempel är den likformiga rörelsen en linjär avbildning av tiden på vägen. Den linjära avbildningen är definierad på två sätt:

1 Implicit

Summorna korresponderar mot varandra: $f(x+y)=f(x)+f(y)$

2 Explicit

Algoritmiskt: $f(x)=\alpha x$

Freudenthal avslutar sin diskussion med att när eleven lärt sig proportionalitet och linjära samband försöker de ofta använda detta även i situationer där de inte är applicerbara. Ett välkänt exempel han nämner är det ickelinjära sambandet mellan areor och volymer vid förstoring eller förminskning.

I den här studien används Freudenthals (1983) begrepp interna och externa förhållanden i samband med proportionalitet.

Vergnauds tolkning av begreppet proportionalitet

Vergnaud har under 1980- och 90-talen utvecklat och utprövat sin teori om *begreppsfält* (Conceptual Fields, CF) (Vergnaud, 1988; 1994; 1996; 1997). Enligt Vergnaud (1996) är målet med CF att tillhandahålla ett omfattande ramverk för att studera komplexa kognitiva kompetenser och aktiviteter och deras utveckling genom erfarenhet och lärande. CF utgår ifrån att förståelse för ett begrepp innebär att kunna använda det i olika situationer där en enda situation kan hänvisa till flera olika sammanhängande begrepp. Elevers uppfattning av begreppet och kompetenser kopplat till begreppet innebär att kunna förklara sambandet mellan olika matematiska begrepp, relationer och teorem. Detta ”nätverk” innebär inte enbart matematisk kunskap utan är även kopplat till kunnande inom de olika tillämpade områden som berörs. För att skapa detta nätverk har Vergnaud infört vissa termer:

Conceptual field (Begreppsfält)	En mängd av situationer som kräver ett flertal sammanhängande begrepp men varje begrepp är åtskilt och unikt för situationens variation (Vergnaud, 1996, s. 225)
Concept (Begrepp)	En grupp av tre mängder (S, I och R) där S betyder mängden situationer som gör begreppet meningsfullt. I är mängden av räkneoperationer från scheman som utvecklats för att lösa situationen av eleven. R är mängden av symboliska representationer. (Vergnaud, 1996, s. 238)
Scheme (Schema)	En invariant organisering av de olika beteendena i en speciell klass av situationer. (Vergnaud, 1996, s. 222)
Theorem in action (Aktivt teorem)	Påstående som är sant för eleven inom en viss ram av varierade situationer (Vergnaud, 1996, s. 225)
Concept in action (Aktivt begrepp)	En kategori som möjliggör för eleven att dela in verkligheten i distinkta element och aspekter och använda sig av den mest användbara och relevanta informationen i enlighet med situation och schema. (Vergnaud, 1996, s. 225)

Inom CF har Vergnaud skapat en teori som han kallar *Multiplicative conceptual field* (multiplikativa begreppsfält) som avser att beskriva hur elever förvärvar kunskap om grundläggande aritmetik (additiva strukturer, multiplikativa strukturer), grundläggande fysik, biologi eller ekonomi, grundläggande algebra och geometri och teknologiska områden (Vergnaud, 1994). Vergnaud menar att proportionellt resonemang inte kan begränsas till bara logik eller lingvistiska resonemang för de tillhandahåller inte tillräckligt med begrepp för att kunna föreställa sig världen.

De matematikbegrepp som ingår i multiplikativa begreppsfält, där proportionalitet räknas in, är från ett begreppsmässigt perspektiv följande:

- Multiplikation och division
- Linjära[17] och bilinjära[18] funktioner
- Förhållande, bråk, kvot och rationella tal
- Dimensionsanalys
- Linjära avbildningar och linjära kombinationer av storheter

Från ett situationsperspektiv omfattar multiplikativa begreppsfält ett stort antal situationer som bör analyseras och klassificeras noggrant så att det går att beskriva den hierarki av kompetenser som eleverna tillägnat sig. I studier av situationen av t.ex. multiplikation och division är det nödvändigt att se bortom det först uppenbara som kan liknas vid ett isberg där endast 2% är synligt och 98% handlar om dold begreppsförståelse. Vergnaud hävdar att skolan överskattar explicita kunskaper och underskattar de implicita. Ett exempel på detta är följande:

Exempel: Connie vill köpa 4 plastbilar som kostar 5 dollar styck. Hur mycket måste hon betala?

Detta enkla multiplikationsexempel väcker många viktiga frågor:

1. Multiplikationen $4 \cdot 5$ kan tolkas som att betala 5 dollar fyra gånger; men det skulle vara omöjligt att förklara för en 7-8 åring att multiplikationen

[17] En **linjär funktion** är en *funktion* $f(x)$ som uppfyller följande två krav: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ för alla x och y, och $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ för alla skalärer α. (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 138)

[18] En **bilineär funktion** linjär i vart och ett av tå argument när det andra hålles konstant. Ex: på ett reellt, linjärt rum V, är en funktion f som till varje par av vektorer u, v tillhörande V, ordnar ett reellt $f(u, v)$ så att: $f(au + bv, w) = af(u, w) + bf(v, w)$; $f(u, av + bw) = a \cdot f(u, v) + b \cdot f(u, w)$ för alla reella tal a, b. (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 87)

$5 \cdot 4$ är 4 iterationer av fem: för det är en omöjlighet att lägga till bilar och få dollar och det är inte någon anledning till att iterera 5 eftersom det är 4 bilar som är köpta.

2. Uttrycket ”5 gånger mer” är meningsfullt eftersom det är ett skalärt samband och inte har någon dimension. ”4 gånger mer” är här meningslöst. Givetvis är multiplikationen $5 \cdot 4$ meningsfull men det representerar ett funktionellt samband mellan olika möjliga mängder av bilar och dess kostnad.

3. Dessa två multiplikationer beror på olika teorem:
   a) *Skalär* $f(5) = 5f(1)$
   Detta är oftast introducerat med en upprepad addition och beror därför på en additiv isomorf[19] egenskap.
   $f(1+1+1+1+1) = f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1)$
   som berövats den multiplikativa isomorfa egenskapen $f(n \cdot 1) = nf(1)$
   b) *Funktion* $f(5) = 4 \cdot 5$
   Detta använder egenskapen konstant koefficient $f(x) = \alpha x$ istället för den tidigare isomorfa egenskapen.

4. Den konstanta koefficienten representerar varken bilar eller dollar utan dollar per bil. En dimensionsanalys finns alltså med.

För en fullständig analys och klassificering av detta problem se vidare (Vergnaud, 1983).

Vergnaud har undersökt multiplikativa strukturer som en *mängd* av problem. Han har funnit tre undergrupper: måttens isomorfism (isomorfism of measures), måttens produkt (product of measures) och multipla proportioner andra än produkt (multiple proportions). Måttens isomorfism täcker in samtliga situationer där det är direkt proportionalitet mellan två storheter (Measure spaces), M_1 och M_2. Vergnaud ser multiplikation och division som specialfall av reguladetriproblem. För att hjälpa eleverna att lösa uppgifterna har Vergnaud konstruerat ett schema där varje storhet har en egen kolumn (se Figur 5).

De två viktigaste huvudkategorierna för *multiplikativa strukturer* beskrivs nedan, dvs. måttens isomorfism och multipla proportioner:

[19] **Isomorf**ism: Låt G och H vara i två grupper. En bijektiv avbildning $\Phi : G \to H$ sägs vara en **isomorfism**, om den uppfyller $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ för alla $a, b \in G$. Om det finns en isomorfism från G till H, sägs G och H vara isomorfa, vilket betecknas $G \cong H$ (Svensson, 2001, s. 158).

Direkt proportionalitet

M_1	M_2
1	a
b	x

Figur 5. Beräkningsschema

M_1 och M_2 är storhet[20] 1 och 2; *a, b, c* och *d* är mätetal av storheter

Ett exempel som Vergnaud ger är ”*Richard köper 4 kakor till priset av 15 cent styck. Hur mycket ska han betala för kakorna?*” (Vergnaud, 1983, s. 129). I detta fall kommer variablerna att få följande värden:

a= 15, *b*= 4, M_1=antal kakor, M_2=kostnad

Vergnaud ser multiplikationsproblem som en relation mellan fyra termer ur vilka eleverna ska kunna använda en relation mellan tre termer för att lösa problemet. I ovanstående exempel kan eleverna dra slutsatsen att $a \cdot b = x$. Eleven känner igen situationen som en multiplikativ situation och löser problemet med beräkningen: $4 \cdot 15$ eller $15 \cdot 4$. Detta är enligt Vergnaud rätt om *a* och *b* visas som tal, om de visas som storheter är det inte särskilt lätt att förstå varför $4\ kakor \cdot 15\ cents$ ger svaret i cents och inte i kakor.

Vergnaud använder även schemat till att beräkna en division av typ 1. Typ 1 är när divisionen sker inom samma mätområde. *“Connie vill dela sina karameller med Jane och Susan. Hennes mamma ger henne 12 karameller. Hur många får var och en?”* (Vergnaud, 1983, s. 131)

M_1	M_2
1	$x = f(1)$
a	$b = f(a)$

Figur 6. Beräkningsschema för typ 1 (inom)

a= 3 *b*= 12 M_1=antal barn M_2= antal karameller

Detta problem kan lösas med division inom samma mätområde. Vergnaud hävdar att uppgiften kan lösas med en skalär operator (/b) som beräknas inom ett område och sedan kan föras över till den andra kolumnen. I det här exemplet delas 3 med 3 och 12 med 3. Denna division ger att varje barn får 4 karameller. Vergnaud

[20] **Storhet,** egenskap hos ett föremål eller en företeelse som kan mätas, jämföras eller beräknas (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 73).

medger att det kan vara svårt att använda denna metod med skaläroperator och har upptäckt att en del vuxna använder ”trial and error” istället.

Division av typ 2 liknar division av typ 1 men den skalära operatorn beräknas istället mellan de två storheterna. Vergnaud ger följande exempel: ”*Peter har 15 dollar att köpa för och han vill ha miniatyrbilar. De kostar 3 dollar styck. Hur många bilar kan han köpa*?” (Vergnaud, 1983, s. 132).

M_1	M_2
1	$a = f(1)$
x	$b = f(x)$

Figur 7. Schema över beräkningsprocedurer för divison av typ 2

a= 3 *b*=15 M_1=antal bilar M_2=kostnad

Vergnaud menar att här används en funktionsoperator vid lösningen. Då a inverteras (1/3) och multipliceras på b (15) svaret blir 5. Vergnaud anser att denna lösning blir svår att förstå eftersom enheten blir antal bilar per dollar (1/3), det blir särskilt svårt när inte talen är heltal. Vergnaud anser att eleverna gör om dessa problem till division 1 uppgifter eftersom de är lättare att förstå.

Multipla proportioner

Dessa uppgifter innehåller ofta storheten tid eftersom det ofta i dessa uppgifter handlar om att beräkna förbrukning, produktion eller utgifter men även uppgifter i fysik. Multipla proportioner kan uttryckas som en storhet är proportionell mot två andra storheter. Det är också vanligt att utrycka att *f(1,1)=1* men det är ju inte sant eftersom det ju inte finns någon anledning att en person t.ex. skall äta 1 kg mjöl om dagen eller i veckan. De finns alltså en koefficient *k* sådan att *f(1,1) =k.* Vergnaud ger som exempel:

”*Ett scoutläger har precis fått 500 kg mjöl. Ransonen av mjöl per person är 0,6 kg per vecka. Det är 236 deltagare på lägret. Hur länge räcker mjölet?”* (Vergnaud, 1983, s. 139)

	1	*Tid*	*x*
1	0,6		
Personer			
a = 236			b = 500 kg

Figur 8. Beräkningsschema multiproportionalitet

I multipla proportioner menar Vergnaud att varje storhet som ingår har sin egna speciella betydelse och kan inte skrivas som en produkt av de andra ingående storheterna.

En sammanfattning av Vergnauds teori för begreppsfält är att begrepp utvecklas i problemlösning och att eleverna måste möta dessa situationer för att få kunskap om proportionalitet. Proportionalitet är även ett komplext begrepp som har många abstraktionsnivåer. Vergnaud anser också att multiproportionaliteter är ett område som behöver belysas i högre grad med mera forskning. Området är särskilt viktigt för studier i fysik där det är tämligen allmänt med multiproportionella uppgifter. När uppgifterna löses har Vergnaud funnit att funktionsoperatorn (mellan storheterna) är svårare att förstå än skaläroperatorn (inom storheterna). Vergnaud anser att det är viktigt att kunna använda båda lösningarna för att kunna anpassa metoden efter uppgiften.

3.2 Empirisk forskning om proportionalitet i skolan

För mer än femtio år sedan stärktes intresset för proportionalitet när det gäller matematiklärande genom fokuseringen på proportionalitetsuppgifter hos Piaget och Inhelder (1958). Forskning om proportionalitet skedde inom flera områden inom naturvetenskap, psykologi och matematikutbildning men de sakande alla ett gemensamt ramverk. Flera år efter att Piaget och hans medarbetare postulerade vikten av proportionalitet och proportionellt resonemang genomfördes en stor internationell undersökning i 19 länder av (Comber & Keeves, 1973), som påvisade låg lösningsfrekvens på dessa uppgifter. Detta innebar att många forskare inriktade sig på att studera detta fenomen (E. F. Karplus, Karplus, & Wollman, 1974) (K. Karplus, Karplus, Formisano, & Paulsen, 1979; R. Karplus, Pulos, & Stage, 1983a; R. Karplus, Pulos, & Stage, 1983b)(G. Noelting, 1980a; G. Noelting, 1980b). Proportionalitet är alltså inget nytt problemområde inom den matematikdidaktiska forskningen. En betydande del av forskningen har gjorts inom begreppen bråk och förhållanden men även forskning angående uppgifter med ett speciellt innehåll (Hart, 1988; E. F. Karplus & Karplus, 1972; E. F. Karplus et al., 1974; R. Karplus & Peterson, 1972; Lesh, Post, & Behr, 1988; G. Noelting, 1980a; Noelting, 1980b).

En del studier fokuserar på vilka strategier eleverna använder när de löser uppgifter med proportionalitet och bråk (Singh, 2000). Andra studier är inriktade mot att studera strukturen på uppgifter som kräver proportionellt resonemang. Projektet ”The Rational Number Project” av Behr, Lesh och Post (1979) hade som uppgift att undersöka bråk, förhållande och proportioner från matematik-utbildningsperspektiv. Under tiden mellan 1970 och 1985 producerades mycket forskning om vilka faktorer som påverkade svårigheten med proportionalitetsuppgifter. Dessa faktorer kan till exempel vara kontext (Tourniaire & Pulos, 1985) eller hur vana eleverna är att använda proportionalitet i en given kontext (Tourniaire, 1983) om uppgiften innehåller ett saknat element med de andra elementen kända.

Enligt Tourniaire och Pulos (1985), som har gjort en överblick av proportionalitetsuppgifter, är de mest använda experimentuppgifterna textuppgifter som med eller utan illustrationer presenteras skriftligt eller muntligt. I Figur 9 är textuppgifterna uppdelade i tre grupper: grupp ett är Fysikaliska uppgifter. Där krävs det ett visst mått av kunskap i fysik utöver lösandet av proportionalitetsuppgifterna. De mest kända uppgifterna här är de som Piaget och Inhelder (1958) använde. Uppgifterna var inom området optik med strålgångar och skuggor som förstorades. Det har kritiserats från flera håll att uppgifterna inte varit rena proportionalitetsuppgifter (R. Karplus et al., 1983b). Grupp två är ”rate”-uppgifter där en jämförelse skall göras mellan två eller flera förhållanden. En känd uppgift är *Mr Tall & Mr Short* vars längd mäts med gem som enhet. “*Mr Short’s height is 6 paper clips or 4 buttons. His friend Mr Tall’s height is 6 buttons. How many paper clips are needed for Mr Tall’s height?*” (Hart, 1988, s. 201). Denna uppgift skapades av Karplusgruppen (Karplus, Karplus, & Wollman, 1974) för att rena proportionalitetsuppgifterna från fysikaliska fakta. Resultatet av undersökningen visade att eleverna hade svårigheter att skilja på additiva och multiplikativa strategier.

Den tredje typen av uppgifter är Blandningsuppgifter där den mest kända uppgiften är Noeltings apelsinsaftproblem (Noelting, 1980a), där två olika blandningar av saft ska jämföras för att se vilken saft som smakar starkast apelsin. De flesta uppgifterna innehåller uppgifter där jämförelsen sker inom samma enhet medan blandningsuppgifterna bildar ett nytt objekt till apelsinsaft blandat med vatten. Dessa ”rate”-uppgifter kräver även att eleven förstår vad som händer när blandningen sker.

Figur 9 ger en översikt av den stora variation av textuppgifter som använts i forskning om proportionalitet. Det handlar dock om tre huvudtyper av uppgifter.

TABLE I

Proportional tasks

Name	Description	Reference
I. *Physical Tasks*		
Balance Beam	predict the position of a fulcrum individual interview or paper and pencil	Inhelder and Piaget, 1958; Siegler, 1976; Wilkening and Anderson, 1982; de Ribaupierre and Pascual-Leone, 1979.
Coupled Pulleys	comparison of rotational speed of pulleys	Lawson and Wollman, 1975.
Projection of Shadows	individual interview	Inhelder and Piaget, 1958.
II. *Rate Problems*		
Doctors and Patients	comparison problem	Quintero and Schwartz, 1982.
Fish and Food	missing value problem individual interview	Piaget, Grize, Szeminska, and Vinh Bang, 1968.
Fuel consumption	comparison problem	Vergnaud, 1983.
Gums in Boxes	training problem	Gold, 1978.
Headbands and Antennas	missing value problem	Pitt and Brouwer-Janse, 1981.
Machine Operator	missing value problem individual interview	Kieren and Southwell, 1979.
Mr. Tall & Mr. Short	missing value problem paper and pencil	Karplus, Karplus and Wollman, 1974.
Orange Juice from Oranges	missing value problem paper and pencil	Newton *et al.*, 1981.
Painters and Walls	missing value problem paper and pencil	Newton *et al.*, 1981; Cloutier and Goldschmid, 1978.
Pattern	missing value problem individual interview	Kieren and Southwell, 1979
"Standard" word problems	training problems	Ricco, 1982; Rupley, 1981; Lawson and Wollman, 1975.
III. *Mixture Problems*		
Lemonade	comparison and missing value problems individual interview	Karplus, Pulos and Stage, 1983; Gold, 1978.
Mixed Nuts	comparison problem training	Gold, 1978.
Orange Juice	comparison problem paper and pencil	Noelting, 1980; Biemiller, 1981.
Sands of Two Colors	comparison problem individual interview	Quintero and Schwartz, 1982.

Figur 9. Översikt av de olika textuppgifter som använts i forskning om proportionalitet 1958-1985. (Tourniaire & Pulos, 1985 s. 182)

Personer inom utbildning är vana att använda rationella tal, bråk och proportioner i samma fras eftersom de är så nära varandra som begrepp både matematiskt och psykologiskt. Piaget upptäckte i sin forskning att barn hade en känsla för proportionalitet redan innan de mötte begreppet i skolan och blev undervisade. Barnen märkte att vuxna åt mera mat än de själva och hade större kläder. Proportionellt resonemang bör utvecklas när eleven möter bråk som är en delmängd av rationella tal. På så vis kan man säga att proportionellt resonemang är en indikator på vilken känsla personen har för rationella tal. Proportionalitet är ett mycket mer komplicerat begrepp än rationella tal och proportionellt resonemang. Lamon (2007) menar att proportionalitet som en matematisk modell kommer som insikt först vid högre studier i matematik och naturvetenskap. Hon ger en lista över vad det innebär att förstå proportionalitet:

- Förmåga att använda proportionalitet som en matematisk modell för att organisera verklighetsnära kontexter
- Förmåga att skilja situationer där proportionalitet är korrekt modell och inte
- Använda funktioner för att uttrycka samvariationen mellan två storheter
- Förmåga att kunna skilja funktioner på formen $y = kx + m$ från $y = kx$; i det första fallet är $\Delta y \propto \Delta x$ men funktionen är inte proportionell.
- Kunskapen om att proportionalitet grafiskt kan representeras av en rät linje genom origo
- Särskilja olika typer av proportionalitet såsom direkt proportionalitet ($y = kx$) och omvänd proportionalitet ($y = \frac{k}{x}$) samt kvadratiska ($y = kx^2$) och kubiska proportionaliteter ($y = kx^3$)
- Kunskapen att k är det konstanta förhållandet mellan två storheter i en direkt proportionalitet
- Kunskapen att grafen till en omvänd proportionalitet är en hyperbel

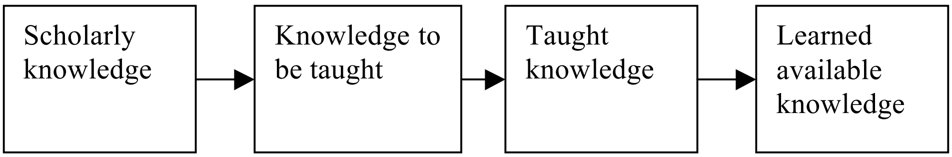
Lamon har hypotesen att proportionalitet är ett begrepp med nära anknytning till att undersöka och studera principer och regelbundenheter i problemsituationer för att sedan använda symboler för att beskriva dessa. I tolkningen av dessa olika situationer i olika specifika kontexter som används för att lära proportionellt resonemang utvecklas en känsla för rationella tal. Men för att förstå begreppet proportionalitet till fullo krävs det samarbete mellan matematiska och naturvetenskap där förhållandet bibehålls. (Lamon, 2007)

4. Metodologi

I detta kapitel beskrivs först det teoretiska ramverk på vilket det använda analysverktyg grundas, med en efterföljande diskussion om val av metod och etiska överväganden. Därefter beskrivs analysverktyget i detalj avseende typer av och lösningstekniker för proportionalitetsuppgifter samt teoretiska modeller för proportionalitet. Avslutningsvis behandlas studiens genomförande, val av empiriskt material samt överväganden om reliabilitet.

4.1 Teoretiskt ramverk

Från ett epistemologiskt perspektiv innebär enligt teorin om didaktisk transposition (Chevallard, 2006) varje didaktiskt fenomen inom skolmatematik produktion, undervisning, lärande och praktik av några matematiska aktiviteter. Kunskapsinnehållet och formen när det gäller dessa aktiviteter är en konsekvens av den didaktiska transpositionsprocessen, dvs. den förändring eller anpassning av den utvalda existerande kunskapen som måste göras för att den ska bli ”undervisningsbar” kunskap, dvs. kunskap som kan undervisas och läras i skolan. Den matematik som hanteras i skolan kan alltså analyseras som flera typer av kunskap, enligt Figur 10:



Figur 10. Den didaktiska transpositionen (Bosch & Gascón, 2006, s. 56)

Genom olika aktörer inom utbildningssamhället förvandlas eller transponeras existerande kunskap i olika etapper mellan olika institutioner.

- ”Scholary knowledge”: Institutionell kunskap, till exempel den kunskap som professionella matematiker utvecklar, förstår och använder
- ”Knowledge to be taught”: Kunskap som skall undervisas, den kunskap som läro- och kursplaner beskriver i kursmål mm
- ”Taught knowledge”: Kunskap som undervisas, den kunskap som läraren framställer i sin undervisning i klassrummet och uppgifter som läraren skapar. Kunskap som skall läras, vilket kan vara en delmängd av den kunskap som verkligen undervisas i klassrummet. Den visas i minsta kärnan som är synbar i bedömningsinstrumenten.

- ” Learned available knowledge”: Den kunskap som eleverna de facto lär sig i skolan. Den återfinns i svaren som eleverna ger, i kliniska intervjuer, observationer av elever både i vanliga klassrum och i designade problemlösningssituationer.

Detta ramverk som utgör en del av ATD (Anthropological Theory of the Didactic) förser oss alltså med en epistemologisk modell som beskriver matematisk kunskap som en mänsklig aktivitet bland andra aktiviteter så som den används inom olika institutioner. Det kan till exempel handla om forskningsmatematik, tillämpad matematik, ingenjörsvetenskap, skolmatematik på varierande nivåer, lärarutbildningar, etc.). ATD föreslår också en modell där vilken matematisk kunskap som helst kan beskrivas i termer av matematisk organisation eller praxeologisk organisation av matematiken, även kallad matematisk praxeologi. Den är ett specialfall av praxeologier av alla aktiviteter och definieras som ett system av fyra huvudkomponenter, en del rörande praktisk kunskap med de två huvudkomponenterna *typ av uppgift* samt *lösningstekniker* för dessa uppgifter, samt en del rörande teoretisk kunskap med de två huvudkomponenterna *teknologi* och *teori*, där teknologin motiverar och förklarar de uppgifter och lösningstekniker som ingår i praxeologin och teorin ger en övergripande teoretisk grund för teknologin.

Termen teknologi kan här tolkas som diskursen om tekniken som tillåter utövaren att tänka igenom och utarbeta teknikerna. Teorin förser oss med ett enhetligt system där begreppet är identifierat och regler och procedurer är bestämda. Det går alltså att dela in praxeologin i två huvudgrupper (se Tabell 2). (Chevallard, 2006)

Tabell 2. Praxeologi

”Know-How”	Uppgiftstyp (Type of Task) Teknik (Techniques)
“Know-Why”	Teknologi (Technology) Teori (Theory)

Dessa två block har ett nära samband där uppgifter och tekniker motsvarar ”know-how” och innefattar den praktiska delen av praxeologin. Det teoretiska blocket innefattar teorier och teknologier som motiverar, bevisar och avgränsar aktiviteten och gör det möjligt att kommunicera med andra eller delta i den.

Ur ett perspektiv med ATD så är det primära objektet för forskning, inom matematikutbildning, en aktivitet som är institutionaliserad (Bosch, Chevallard, & Gascón, 2005). Därför är det viktigt att definiera vad institutionen är i en studie av ett didaktiskt fenomen. Institutionen kan vara en matematisk samhörighet, utbildningssystem eller klassrum (Barbé, Bosch, Espinoza, & Gascón, 2005). Det är nödvändigt att beskriva hur institutionen ser ut eftersom det är en sådan vanlig term (Bosch et al., (2005). I den här studien har jag beskrivit läroplaner och dess utvecklingar för att det ska bli en så fyllig beskrivning av institutionen som möjligt.

För att möjliggöra en studie av den didaktiska transpositionen är det enligt Bosch och Gascón (2006) betydelsefullt att studera mera än transpositionen mellan ”knowledge to be taught” och ”taught knowledge” eftersom ”scholarly knowledge” är till mångt och mycket tagen för given i utbildningssammanhang. Det är enligt Bosch och Gascón angeläget att bryta ner och undersöka de spontana modeller av matematisk kunskap som finns i ”scholarly knowledge” för att se vilken kunskap förordas och i vilket syfte. På grund av detta kan inte ”scholarly knowledge” användas som referensmodell i forskningsprocessen utan forskaren måste frigöra sig från denna ”scholarly knowledge” och skapa en fristående definition av det som ska studeras en så kallad epistemologisk referensmodell (REM).

I de svenska läromedlen i kurs A är det mycket ovanligt med matematiska bevis (se Jablonka & Johansson, 2010). Därför har jag i denna studie fört samman de två komponenterna teknologi och teori som en teoretisk komponent. Jag kommer i detta sammanhang att använda uttrycket teoretiska modeller för proportionalitet.

Frågeställningar

Den övergripande frågeställningen är:

Hur hanteras proportionalitet i den svenska gymnasieskolan i kursen Matematik A i några läromedel och nationella prov?

För att besvara denna frågeställning har jag delat upp den i flera delfrågor:

1. a) I vilken omfattning är proportionalitet med i några vanligt förekommande svenska läromedel i kursen Matematik A på gymnasiet i Sverige?

   b) Vilka typer av proportionalitet finns representerad i läromedlen?

   c) Vilka lösningstekniker förespråkas i läromedlen?

   d) Inom vilka ämnesområden återfinns proportionalitet i läromedlen?

2. a) I vilken omfattning förekommer proportionalitets uppgifter i Nationella prov (NP) i Matematik A?

   b) Vilka typer av proportionalitet finns representerad på NP?

   c) Vilka lösningstekniker förespråkas på NP?

   d) Inom vilka ämnesområden återfinns proportionalitet på NP?

3. Hur stämmer läromedlen överens med de nationella proven i kursen Matematik A på gymnasiet i Sverige med avseende på uppgiftstyper, lösningstekniker och teoretiska modeller för proportionalitet?

4.2 Val av metod

Den vanligaste metoden vid läromedelsanalys är innehållsanalys (Bryman, 2002). Ett citat hämtat ur Bryman beskriver vad innehållsanalys innebär:

> *Innehållsanalys innebär att varje teknik används för att dra slutsatser utifrån en objektiv och systematisk beskrivning och specifikation av det karaktäristiska i olika slags budskap.* (Holsti, 1969, s. 14).

Med detta citat vill Bryman belysa objektiviteten och systematiken. Han menar att det är viktigt att i förväg specificera hur man ska hänföra olika delar av råmaterialet till kategorierna. I min studie har jag valt att konstruera kategorierna i enlighet med ATD. Eftersom jag vill se hur läromedlen och de nationella proven hanterar proportionalitet ger valet att studera en praxeologi (matematisk organisation) med teori, teknik och uppgift en stabil ram till analysen, väl förankrad i matematikdidaktisk forskning. Innehållsanalysen är enligt Bryman fast rotad i den kvantitativa forskningsstrategin eftersom målet är att komma fram till kvantitativa beskrivningar av råmaterialet. Det är alltså viktigt att reliabilitetstesta innehållsanalyser eftersom systematik innebär att kategoriseringen tillämpas på ett konsekvent sätt för att skevhet och felkällor ska bli så små som möjligt. Detta har genomförts i denna studie. Fördelen med denna metod är enligt Bryman att analysen är öppen, det vill säga att det är lätt att konkret beskriva hur man har gjort urval och kodningsscheman vilket i sin tur medför att replikeringar och uppföljningsstudier är lätta att genomföra. Metoden brukar därför betraktas som objektiv. Jag har i denna metodbeskrivning försökt att beskriva tillvägagångssättet så noga som möjligt för att möjliggöra en eventuell replikering av studien samt att vara utförlig i beskrivningen av kategorierna.

Bryman föreslår vid en innehållsanalys att dokumenten ska bedömas enligt tre kategorier: autenticitet, trovärdighet och representativitet. Det första innebär att dokumentet verkligen är vad det utger sig för att vara. I mitt fall vet jag att de läromedel som används är frekventa på gymnasiet eftersom jag har gjort en telefonenkät för att bekräfta detta. De nationella proven ges ut av Skolverket och genomförs av samtliga gymnasieelever som läser Matematik A vilket garanterar autenticiteten. Vad avser trovärdigheten studeras verkliga läromedel och nationella prov, så inga förvanskningar ska kunna ske av dessa. Slutligen vad gäller representativiteten, ska dokumenten vara representativa för de övriga läromedlen och nationella proven. Urvalet av läromedel är kritiskt men genom att ta reda på vilka läromedel som verkligen används på gymnasieskolorna i den valda regionen ökar relevansen. Givetvis kan detta ändras vid byte av region. Men forskning visar att läromedel påverkas mycket av varandra och att lärare inte är så förändringsbenägna angående byte av läromedel bland annat beroende på ekonomi (Johansson, 2006). Vad det gäller de nationella proven har jag valt att undersöka samtliga prov mellan år 2000 och 2010 för att vara så representativ som möjligt. Det är även en tidsperiod mellan två läroplaner vilket passar bra in i ATD-ramverket.

En annan svaghet med innehållsanalys är själva kodningsmanualen, där Bryman ser det som praktiskt omöjligt att utforma en kodningsmanual som inte inrymmer ett visst mått av tolkning från kodarens sida. För att motverka detta har reliabilitetstesten skett utan förhandsinformation om resultatet på studien. Slutligen tar Bryman upp att det är svårt att utifrån en innehållsanalys få svar på varför-frågor. Varför finns det skillnader? Det medför att efter en innehållsanalys är det nödvändigt att följa upp med en ny studie av de funna resultaten från innehållsanalysen. I min studie överväger fördelarna nackdelarna och för att motverka nackdelarna har jag vidtagit åtgärder i form av reliabilitetstest. Jag kommer nu att diskutera vilka delar som kan ses som fixa eller flexibla i designen.

Till denna studie valdes en kombinerad design med till viss del en kvalitativ ansats. Eftersom studien inte behandlar samtliga svenska studenter på gymnasiet i Sverige och studien avser att undersöka hur proportionalitet beskrivs, blir ansatsen övervägande kvalitativ. Den flexibla designen används vid undersökandet av uppgiftstyper inom proportionalitet i läromedel i matematik samt på nationella prov. Detta för att jag vill undersöka variationen av proportionalitetsuppgifter samt de olika lösningsteknikerna av uppgifterna. Den fixa designen används vid analysen av hur väl svenska gymnasieelever lyckas lösa uppgifter om proportionalitet på nationella prov för att se hur väl eleverna hanterar proportionalitet. Det kommer även att göras en deskriptiv analys för att beskriva lösningsstrategier som används när svenska elever löser proportionalitetsuppgifter. Fix design är teoridriven enligt Robson (2002) och i denna studie kommer den fixa designen in när det skall visas hur hela landets gymnasieelever har lyckats i lösningsfrekvens på proportionalitetsuppgifterna. Robson påstår vidare att en kombinerad design med en inledande flexibel del och med en avslutande fix del kommer att öka trovärdigheten eftersom många experimentella realister med fix design kritiserar flexibel design för att det saknas standardmetoder för att befästa reliabilitet och validitet. Genom att kombinera dessa två designer i denna studie ökas generaliserbarheten då proportionalitet kan studeras för hela Sveriges gymnasieskolor istället för några enstaka skolklasser.

Etiska överväganden

Denna studie följer Vetenskapsrådets etiska principer (Vetenskapsrådet, 2002). Studien utgår ifrån läromedel och nationella prov och angående dessa finns det inte några tydliga etiska överväganden att ta hänsyn till. Både läromedel och nationella prov (vt & ht 2000, vt 2002, vt 2005, vt 2010) är offentliga handlingar och får därmed namnges. De övriga undersökta proven (2001-2009) skyddas under 17 kap. 4 § offentlighets- och sekretesslagen (2009:400). Det innebär att proven och provmateriel är skyddade med provsekretess. Det är rektor på respektive skola som ansvarar för att all hantering och förvaring av prov och provmateriel förvaras på betryggande sätt och avgör hur provmaterialet används. Information om resultat på prov ska hanteras med försiktighet så att inte enskilda personer drabbas. För att bibehålla denna konfidentialitet har jag i denna studie informerat rektor på respektive skola om syftet och rektorerna har sedermera gett sitt tillstånd till mig att ta del av provmaterialet. För att inte bryta mot konfidentialitetskravet har jag begärt att skolan skulle avidentifiera elevproven innan jag fick ta del av dem.

Valet av läromedel grundades på en telefonenkät till samtliga skolor i tre angränsande kommuner för att undersökningen av vilka läromedel som används i Matematik A skulle bli så objektiv som möjligt. De tre vanligaste läromedlen valdes.

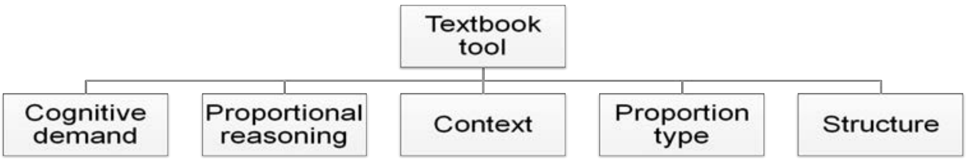
4.3 Utveckling av ett analysverktyg

Proportionalitet tar enligt forskning lång tid att tillägna sig. Det är först på gymnasiet som den fulla insikten om begreppet nås (Piaget & Inhelder, 1975) och detta är en orsak till varför det är intressant att undersöka begreppet på gymnasiet. Denna studie kommer därför att omfatta läromedel, nationella prov och elever på gymnasiet. En omfattande studien av hur svenska gymnasieelever uppfattar proportionalitet gjordes av Bengt Johansson och Leif Lybeck (1978). Deras studie omfattade emellertid inte begreppet proportionalitet i sig, utan beskriver hur elever resonerar kring uppgifter med proportionalitet, vilket skiljer sig från denna studie som skall undersöka hur proportionalitetsbegreppet skildras för eleverna. För att göra detta är det ett naturligt steg att gå till läromedlen, som är ett erkänt viktigt verktyg för matematikundervisningen i den svenska skolan, och de obligatoriska nationella proven. Forskning visar att läromedel inte är särskilt förändringsbenägna och ter sig ganska lika inom ämnet matematik kurs A (Johansson, 2006). Det är även rent praktiskt mycket svårt att få tag i alla kursböcker i gymnasiets första kurs. I Sverige finns det inte så mycket forskning om läromedel i matematik. De studier som är gjorda är främst inriktade på hur läromedel i matematik är kopplade till läroplanen. Denna studie är inriktad på begreppet proportionalitet och därför måste ett verktyg för analys av just detta begrepp i läromedel konstrueras då det inte finns något tillgängligt för svenska förhållanden (Lundberg, 2010). Ett första försök var att använda ramverket till PISA-studiens uppgiftskonstruktion (OECD, 2003).

Ett analysverktyg inspirerat av PISA-ramverket

En studie av da Ponte och Marques (2007) använde PISA-ramverket som analysverktyg av läromedel i matematik när det gäller uppgifter om proportionalitet. De delade in sitt analysverktyg i två delar. Struktur ett undersöker hur läromedlet ser ut i en global organisation, innehåll och grafik. Struktur två undersöker uppgifternas karaktär, kognitiva krav, struktur och kontext. Ett försök utfördes att applicera detta verktyg på svenska förhållanden (Lundberg & Hemmi, 2009), där verktyget kompletterades med kategorier om vilken typ av proportionalitets uppgifter som läromedlet innehöll (se Figur 11).

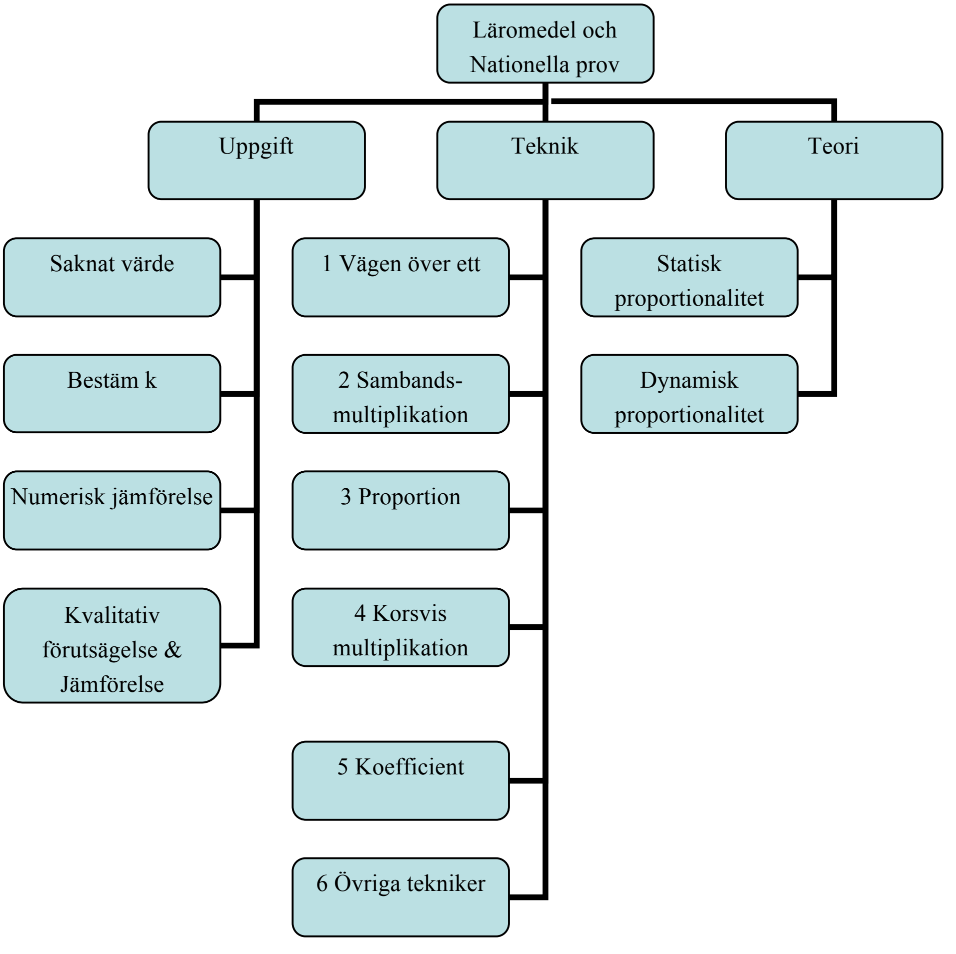
Det visade sig emellertid att det var svårt att få god reliabilitet på de kognitiva kraven så verktyget övergavs till viss del. Det är svårt att vara försäkrad om vad eleven kognitivt möter när eleven löser uppgifterna i läromedlet. Att det kan gå att klassificera uppgifter efter svårighetsgrad har bland annat Brändströms avhandling (2005) visat, men eftersom jag undersöker läroplanens påverkan så behöver jag ett verktyg som visar hur kunskapen utformas och påverkas från bland annat samhället. Detta är inte möjligt med de olika kognitiva kategorier som använts hos Brändström och da Ponte och Marques.



Figur 11. Översikt över det första analysverktyget inspirerat av PISA-ramverket.

Ett analysverktyg grundat på ATD

Eftersom syftet är att undersöka hur proportionalitet hanteras skapades ett analysverktyg med de tre huvuddelarna typ av uppgift, teknik och teori utifrån ATD (se Figur 12). Eftersom jag har valt ATD som mitt teoretiska ramverk skulle även teknologi varit med men eftersom det är mycket sällsynt med bevis i Matematik A läromedel har jag valt att låta teknologi och teori utgöra en gemensam kategori, teori. Verktyget har det gemensamt med det första PISA-verktyget att uppgiftstyperna är lika. Det som är nytt är de sex lösningsteknikerna och delen om teori. Dessa prövades först i en pilotstudie på några läromedel och befanns vara tillräckliga eftersom kategorierna befanns vara väl avgränsade och identifierbara. I Figur 12 visas en översikt av verktyget och i nästa avsnitt presenteras de olika komponenterna med beskrivningar och exempel.



Figur 12. En översikt av analysverktyget

Teoretiska modeller för proportionalitet

Proportionalitet refererar till sambandet mellan två förhållanden. I uttrycket

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Formel 2. Matematisk definition av proportionalitet

är bråket a/b i samma proportion som c/d. Kvantiteterna *(a, b, c & d*) och bråken kan vara numeriska serier eller mätetal beroende på omständigheterna.

För att genomföra denna studie krävs det en egen definition av proportionalitet för att uppfylla kraven på REM. Jag kommer i den här studien att använda två teoretiska modeller för proportionalitet som kallas *dynamisk* respektive *statisk* proportionalitet. Begreppen är hämtade från Miyakawa och Winsløw (2009) som definierar statisk proportionalitet enligt Formel 3 och dynamisk proportionalitet enligt Formel 4 (se vidare nedan). Anledningen till valet av dessa två modeller är dels att de kan ses i den historiska utveckling av proportionalitetsbegreppet (dynamisk proportionalitet verkar vanligare nu medan statisk proportionalitet var vanligare förr), dels att de använts i didaktisk litteratur (ibid.). Då jag studerat äldre läromedel fann jag att dessa modeller har samexisterat under en längre tid (se kap 2.5).

Statisk proportionalitet kan enligt Miyakawa och Winsløw kan beskrivas med hjälp av delmängder av R^n på formen $\widehat{a} = \{(sa_1, sa_2, ..., sa_n) : s \in R\}$, där $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ är fix. Om $a, b \in R^n \setminus \{0\}$ och $b \in \widehat{a}$ säger vi att a är proportionell mot *b*. Detta kan skrivas kort som $a \propto b$. Miyakawa och Winsløw kallar detta för statisk proportionalitet eftersom det definierar vad det innebär för två *fixa n*-tipplar av reella tal att vara proportionella. Denna definition kan skrivas i bråkform som i Formel 3 där $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$ och $b = (b_1, b_2, ..., b_n) \in R^n$.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n}$$

Formel 3. Statisk proportionalitet

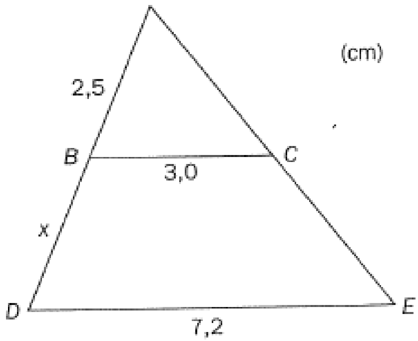
Dynamisk proportionalitet är ett begrepp som enligt Miyakawa och Winsløw kan beskrivas som ett ömsesidigt beroende som i t.ex. likformig hastighet där sträckan beror av tiden. Om a och b är reella variabler t.ex. storheter, med ett fixt förhållande så är dessa proportionella när det finns en fix konstant k (proportionalitetskonstanten) sådan att $y = kx$ (se Formel 4).

$$y = kx$$

Formel 4. Dynamisk proportionalitet

För att belysa skillnaderna mellan statisk och dynamisk proportionalitet ger jag följande exempel från läromedel.

5124 Sträckorna *BC* och *DE* är parallella.
Beräkna x.



Figur 13. Exempel på statisk proportionalitet (Gennow, Gustafsson, Johansson, & Silborn, 2003, s. 260)

Exemplet i Figur 13 har jag tolkat som ett exempel på statisk proportionalitet eftersom det rör sig om ett konstant förhållande mellan par av sträckor (mätetal) i likformiga trianglar som kan uttryckas genom Formel 4.

För att visa en uppgift på dynamisk proportionalitet har jag valt följande exempel.

6044 Priset på lösviktsgodis är proportionellt mot vikten. En kund betalade 18 kronor för 2,4 hg godis.

a Vad är kostnaden per kg för godiset?

b Hur mycket kostar 1,8 hg godis?

c Hur mycket godis kan en kund köpa för 20 kronor?

Figur 14. Exempel på dynamisk proportionalitet (Gennow et al., 2003, s. 303)

I Figur 14 är läroboksuppgiften ett typexempel på dynamisk proportionalitet eftersom det ska beräknas ett kilogrampris vilket motsvarar *k*-värdet. Proportionaliteten ska beskrivas på formen i Formel 5.

Nu innehåller inte alla uppgifter bara en typ av proportionalitet utan det kan växla från en deluppgift till en annan. I följande exempel finns båda teoretiska modellerna närvarande:

4133 y är proportionell mot x.

x	0	2	5	b
y	0	8	a	100

a) Bestäm k med hjälp av tabellen.

b) Bestäm värdet på a och b.

Figur 15. Ett exempel på hur den teoretiska modellen för proportionalitet kan skifta i en och samma uppgift. (Alfredsson, Brolin, Erixon, Heikne, & Ristamäki, 2007, s. 204)

I Figur 15 handlar a-uppgiften om dynamisk proportionalitet eftersom eleven ska bestämma konstanten *k* (jfr. Formel 5) med hjälp av två värden. b-uppgiften består däremot av statisk proportionalitet eftersom det behövs flera förhållanden för att kunna bestämma a och b. Hela värdetabellen är ett typexempel på statisk proportionalitet.

Analysverktyget består alltså av tre delar baserade på ATD, teori, teknik och uppgiftstyp. Dessa tre komponenter utgör tillsammans den grund jag använder för att studera hur proportionalitet hanteras på gymnasiet.

Typer av uppgifter

Jag har i den här avhandlingen valt att använda följande kategorier i bedömningen av uppgifterna från läromedlen och de nationella proven:

- Saknat värde (Missing Value, MV)
- Bestäm k (Decide Constant, DC)
- Numerisk jämförelse (Numerical Comparison, NC)
- Kvalitativ förutsägelse & jämförelse (Qualitative prediction and Comparison, QP/QC)

Kategorier MV, NC och QP/QC finns beskrivna i Cramer och Post (1993). Kategorin DC tog jag med för att jag märkte att det fanns många uppgifter av den typen i svenska läromedel och kategorin kunde inte enkelt inordnas under de tre andra kategorierna. En uppgift bedömdes som en proportionalitetsuppgfit om den kunde beskrivas med hjälp av någon av dessa fyra kategorier.

Saknat värde (MV)

I MV uppgifter (saknat värde) ska tre storheter av två lika förhållanden vara givna och eleven söker den fjärde storheten. Den okända storhetens placering i kvoten kan variera. I Formel 5 beskrivs uppgiftstypen algebraiskt som en ekvation, där *x* betecknar värdet för den saknade storheten.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Formel 5. Saknat värde

Uppgiften nedan har jag tolkat som en MV-uppgift eftersom det anges ett förhållande mellan en viss trådlängd och en känd resistans. Med hjälp av detta förhållande beräknas sedan den okända längden med en annan känd resistans.

4135 Resistansen hos en tråd är direkt proportionell mot trådens längd. En tråd på 1,25 m har resistansen 10,5 ohm. Hur lång tråd ger resistansen 25,0 ohm?

(Alfredsson et al., 2007, s. 204)

Bestäm *k* (DC)

Denna uppgiftstyp är en variant av MV-uppgift som är vanlig i kurs A (Lundberg & Hemmi, 2009). Det är liknande uppgiftsformulering som MV-uppgifter men skiljer sig på så sätt att här ska eleverna bestämma en proportionalitetskonstant, *k*.

6040 Sambandet mellan x och y ges av $y = kx$.

a Bestäm k om $x = 0,6$ ger $y = 27$.

b Bestäm y om $x = 1,15$.

c Bestäm x om $y = 76,5$.

d Vad betyder k om y anger hur många kronor x kg av en vara kostar?

(Gennow et al., 2003, s. 303)

Denna uppgift tolkar jag som en DC-uppgift eftersom det anges givna värden på *x* och *y* med vilka mans ska beräkna en koefficient *k* i den givna formeln. Den är alltså inte av kategorin MV eftersom det inte handlar två förhållanden med likhet emellan.

Numerisk jämförelse (NC)

I numerisk jämförelse (NC) bedömer eleven likheten eller olikheten mellan två givna förhållanden, två givna kvoter eller förhållanden som jämförs. Förhållandena är alltså redan kända. Svaret behöver inte innehålla tal utan kan t.ex. uttryckas i ord som i följande exempel.

1213 En TV kan ha olika förhållanden mellan bredd och höjd på bilden. 4:3 är ett standardformat medan 16:9 är widescreen. Ayla mäter bredden på sin TV till 56 cm och höjden till 42 cm. Är Aylas TV standard eller widescreen?

(Alfredsson et al., 2007, s. 20)

Exemplet är en typuppgift på en numerisk jämförelse eftersom den går ut på att jämföra två stycken givna förhållanden $\frac{56}{42} = \frac{4}{3}$ och inse att likhet gäller.

Kvalitativ förutsägelse & jämförelse (QP/QC)

I en kvalitativ förutsägelse & jämförelse (QP/QC) krävs det av eleven att utan specifika storheter jämföra två eller flera förhållanden.

4146 Sant eller falskt?

a) *"y fördubblas när x halveras om y är omvänt proportionell mot x."*

b) *"y fördubblas när x fördubblas om y är direkt proportionell mot x i kvadrat."*

c) *"Om y är omvänt proportionell mot x så är produkten $x \cdot y$ konstant, dvs $x \cdot y = k$."*

(Alfredsson et al., 2007, s. 206)

Denna uppgift tolkar jag som en QP/QC eftersom det är en jämförelse mellan två förhållanden utan givna numeriska värden på de ingående variablerna.

Lösningstekniker

För att undersöka vilka olika lösningstekniker som finns representerade i läromedel och nationella prov användes sex olika kategorier [21] som Hersant (2005) fann i sin undersökning av franska läromedel. Hon använde ATD som teoretiskt ramverk för sin studie. Jag väljer här att presentera de sex typerna av lösningstekniker med hjälp av samma exempel som i Hersants artikel. Den uppgift som hon där refererar till handlar om vad ett tyg kostar:

Om 18 meter tyg kostar 189 franc, vad kostar 13 meter tyg?

Teknik 1: Vägen över ett

Om 18 m tyg kostar 189 franc så kostar 1 m kostar 18 ggr mindre eller $\frac{189}{18}$, och 13 m kostar då 13 gånger mer än 1 m eller $\frac{189}{18} \cdot 13$ som beräknas som $\frac{189 \cdot 13}{18}$. Svaret kommer att bli 136,5 franc. Denna metod är en variant av ”regula di tri” men ett vanligt namn på denna typ av teknik är ”vägen över ett”. Följande läroboksexempel klassificerar jag som teknik 1 (Gennow et al., 2003, s. 72):

1430 **Antalet invånare i en kommun ökade ett år med 8% till 70 200. Hur många invånare hade kommunen före ökningen?**

Metod 1: ”Vägen över 1 %”

108 % motsvarar 70 200.

1 % motsvarar $\frac{70\,200}{108}$.

100 % motsvarar

$$\frac{100 \cdot 70\,200}{108} = 65\,000$$

Svar: Kommunen hade 65 000 invånare före ökningen.

---

[21] Hersants beteckningar av teknikerna på franska: 1.Technique de réduction à l'unité (reduction by unit), 2.Technique de multiplication par un rapport (multiplication by a relationship), 3.Technique des proportions (use of proportion), 4.Technique du produit en croix (cross multiplication), 5.Technique du coefficient (use of coefficient), 6.D'autres techniques possibles (other possible techniques)

I det här exemplet beräknas först hur mycket som motsvaras av en enhet. Detta är det mest karaktäristiska kännetecknet för denna lösningsteknik. Med hjälp av resultatet av denna beräkning bestäms sedan den sökta kvantiteten.

Teknik 2: Sambandsmultiplikation

Teknik 2 har den skillnaden från de andra teknikerna att inte nämna förhållande eller proportionalitet i lösningen.

Om 18 m kostar 189 franc, så kostar 13 m $\frac{13}{18} \cdot 189$

Här används inomproportionalitet det vill säga att förhållandet är uppställt inom samma mätområde (meter), dvs. vad Freudenthal kallar interna förhållanden. Följande exempel har jag tolkat som lösningsteknik 2 eftersom förhållandet som används ges inom samma enheter.

Exempel: Volymskala

I de svenska idrottsförbundens regelböcker återfinns följande citat:

- Svenska bordtennisförbundet: "Bollen skall vara klotrund med 40 mm diameter."
- Svenska fotbollsförbundet: "Bollen har en omkrets av högst 70 cm och lägst 68 cm."

Hur stor är volymen av en medelstor fotboll jämfört med en bordtennisboll?

Lösning:

Fotbollens diameter: $\frac{69}{\pi}$ cm $\approx$ 21,96 cm

Bordtennisbollens diameter: 40 mm = 4,0 cm

Längdskala: $\frac{21{,}96 \text{ cm}}{4{,}0 \text{ cm}} = 5{,}49$ Volymskala: $5{,}49^3 \approx 170$

Svar:

Volymen av en fotboll är 170 gånger så stor som volymen av en bordtennisboll.

(Gennow et al., 2003, s. 252)

Teknik 3: Proportion

Om vi låter priset för 13 m tyg vara x franc så är priset i proportion till längden av tyget $\frac{189}{18} = \frac{x}{13}$ så $189 \;\; 13 = 18 \;\; x$ och $x = \frac{189 \cdot 13}{18}$. Denna teknik skiljer sig från de andra eftersom proportionen innehåller två olika storheter, längd och pris. Det kallas proportionalitet mellan mätområden, eller vad Freudenthal kallar externa förhållanden.

Exempel: Att använda en proportionalitetskonstant

Enligt de tekniska specifikationerna för Saab 9-3 Cabriolet 2.0t är bensinförbrukningen 0,63 liter/mil vid landsvägskörning.

a Hur mycket bensin förbrukas vid en 24 mil lång resa på landsväg?

b Hur långt kan bilen köras på full tank vid landsvägskörning då bensintanken rymmer 68 liter?

Lösning:

Bensinförbrukningen y liter är proportionell mot körsträckan x mil, dvs. $y = k \cdot x$.

Proportionalitetskonstanten k är 0,63.

a $y = 0{,}63 \cdot 24 = 15{,}12 \approx 15$

b Sambandet $y = k \cdot x$ kan också skrivas som $x = \frac{y}{k}$.

$x = \frac{68}{0{,}63} \approx 110$

Svar:

a Bilen förbrukar 15 liter bensin.

b Bilen kan köras 110 mil på landsväg vid full tank.

(Gennow et al., 2003, s. 300)

I detta exempel är den lösta deluppgiften b exempel på teknik 3. Eftersom det anger förhållandet mellan två olika storheter (volym och förbrukning). Om det rör sig om likformighet mellan två figurer tolkas det också som lösningsteknik proportion.

Teknik 4: Korsvis multiplikation

Tekniken går ut på att ge en effektiv metod för att lösa proportionalitetsproblem.

1) $\frac{189}{18} = \frac{x}{13}$ följt av,

2) $189 \cdot 13 = 18 \cdot x$ och $x = \dfrac{189 \cdot 13}{18}$.

Detta förfarande kan sammanfattas genom att först ställa upp de ingående värden i en tabell och sedan utifrån tabellen multiplicera korsvis.

Tabell 3. Korsvis multiplikation

189	x
18	13

Så $189 \cdot 13 = 18 \cdot x$ och $x = \dfrac{189 \cdot 13}{18}$. Denna teknik tar alltså inte hänsyn till proportionaliteten (1) utan är mer en metod att formellt utifrån en schematisk uppställning räkna ut storheter utan att blanda in proportionellt tänkande. Det är en vanlig metod inom reguladetri.

EXEMPEL 4

Lös ekvationen $\dfrac{20}{x} = \dfrac{5}{7}$

$\dfrac{7 \cdot x \cdot 20}{x} = \dfrac{7 \cdot x \cdot 5}{7}$ Vi har multiplicerat med mgn $= 7 \cdot x$

Efter förkortning får vi följande ekvation:

$7 \cdot 20 = x \cdot 5$

$5x = 140$

$x = \dfrac{140}{5}$

$x = 28$

Svar: $x = 28$

Alternativ metod

$\dfrac{20}{x} = \dfrac{5}{7}$

Vi ”multiplicerar korsvis” på följande sätt:

$7 \cdot 20 = x \cdot 5$

$140 = 5x$

$x = 28$

Den här metoden är snabbare, men observera att den endast kan användas när ekvationen består av två termer.

(Holmström & Smedhamre, 2000, s. 141)

Exemplet är hämtat från ett annat gymnasieläromedel i Matematik A. Uppgiften är ett exempel på ekvationslösning där teknik 4 ges som en alternativ metod i ett specialfall. För att tekniken ska vara användbar ska ekvationen endast bestå av två termer som är uppställda som bråk.

Teknik 5: Koefficient

Ett annat sätt att resonera är följande: Om tyget kostar $\frac{189}{18}$ franc/m, så kommer 13 m tyg att kosta $13 \cdot \frac{189}{18}$ franc. Här liknar teknik 5 teknik 1 men med skillnaden att det inte är nödvändigt att beräkna en enhet innan den ursprungliga frågan ska besvaras. Följande exempel har jag tolkat som lösningsteknik 5.

a) En bil rör sig med den konstanta hastigheten 72 km/h. Hur långt hinner bilen på 20 minuter?

EXEMPEL 1
Rörelseproblem

$v = 72$ km/h ▲ Hastighet betecknas *v* (engelskans velocity).

$t = 20 \text{ min} = \frac{20}{60}$ h

$s = v \cdot t$ ger $s = 72 \cdot \frac{20}{60} \text{ km} = \frac{72 \cdot 20}{60} \text{ km} = \frac{72 \cdot 1}{3} \text{ km} = 24 \text{ km}$ ▲ Förkorta med 20 och 3.

Svar: Bilen hinner 24 km.

(Wallin et al., 2000, s. 19)

Denna läroboksuppgift är ett exempel på lösningsteknik 5 eftersom ett förhållande bestäms som används som en koefficient för att lösa problemet.

Teknik 6: Övriga tekniker

Det kan även möjligt att lösa uppgiften med andra metoder, t.ex. grafiskt. Emellertid så kan det ses som en tidsödande teknik om det inte är så att eleven har ett grafritande hjälpmedel tillhanda, t.ex. en grafritande miniräknare, som gör det till en enkel sak att rita upp en graf.

Detta exempel (a) tolkar jag som teknik 6 eftersom det använder grafisk metod.

Exempel: Grafisk bestämning av en proportionalitetskonstant

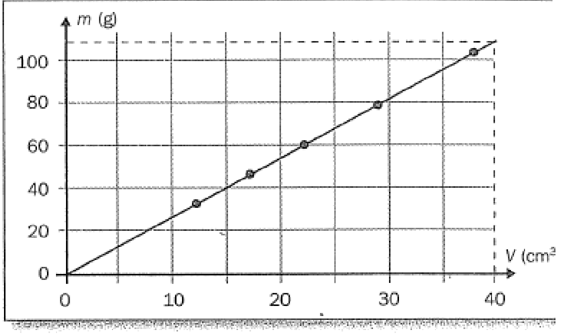
Vid en fysiklaboration mätte eleverna massa och volym för olika mängder av aluminiumnubbar genom att väga dem och därefter hälla dem i ett graderat mätglas med vatten. En av grupperna fick följande resultatserie

volym (cm^3)	12	17	22	29	38
massa (g)	32	46	59	78	103

a Undersök om massan är proportionell mot volymen.

b Bestäm densiteten (dvs. massa/volym) hos aluminium om det är en proportionalitet.

Lösning:



a Vi ritar ett koordinatsystem och avsätter volymen på den vågräta axeln och massan på den lodräta och väljer en gradering så att samtliga värdepar får plats.

Därefter undersöker vi om det går att rita en rät linje som följer punkterna (möjligtvis med små avvikelser) och som går genom origo.

Eftersom det är möjligt är massan proportionell mot volymen.

b För denna proportionalitet gäller att $k = \frac{m}{V}$.

Vi väljer ett värdepar långt från origo för att öka noggrannheten och ritar linjer till respektive koordinataxel. Avläsning ger

$V = 40 \text{ cm}^3$

$m = 108 \text{ g}$

$k = \frac{108 \text{ g}}{40 \text{ cm}^3} = 2{,}7 \text{ g/cm}^3$

Eftersom detta är en fysikalisk tillämpning väljer vi att bestämma k med enheten g/cm^3. I matematiken utelämnas ofta enheter vid ekvationslösning.

Svar:

a Massan är proportionell mot volymen.

b Densiteten är 2,7 g/cm^3

(Gennow et al., 2003, s. 301)

Genomförande

Eftersom det inte finns något etablerat verktyg för läromedelsanalys av matematikläromedel undersöktes några befintliga analysverktyg som kunde tänkas passa mitt syfte (Lundberg & Hemmi, 2009). Efter en utvärdering (Lundberg, 2010) bestämde jag att utifrån pilotstudien utveckla ett analysverktyg som byggde på ATD som teoretiskt ramverk (Lundberg, 2011). För att pröva verktyget gjordes pilottester på typ av proportionalitet och lösningstekniker (Lundberg, Accepted). När verktyget fått sin slutgiltiga form påbörjades analysen av läromedelsuppgifter i en undersökning om hur proportionalitet behandlas i några svenska läromedel på gymnasiets första matematikkurs (Matematik A). Urvalet av läromedel baserades på telefonintervjuer till samtliga gymnasieskolor i tre svenska kommuner. De tre mest använda läromedlen valdes för studien. När analysen av läromedel var klar testades kategoriseringen av en forskarkollega för att öka reliabiliteten så att kategoriseringen blev samstämmig. En del justeringar av beskrivningarna skedde, däribland ett förtydligande om hur DC-kategorin skiljer sig från MV-kategorin. I kategoritestet av lösningstekniker och teoretiska modeller förtydligades bland annat att teknik 3 även innehåller lösningar som behandlar proportionalitets-uppgifter mellan två figurer i t.ex. likformighet.

Sedan genomfördes kategoriseringen av nationella proven från ht 2000 till vt 2010. När kategoriseringen var klar reliabilitetstestades resultaten. Under sommaren 2010 samlades även elevlösningar in från några slumpvalda gymnasieskolor som därefter jämfördes med lösningsteknikerna. För en tidsplan over arbetet se Tabell 4.

Tabell 4. Tidsplan för studien

Tidsplan
■ Aug 2008-Feb 2009 Problemformulering och litteraturstudier
■ Mar 2009 Design av analysverktyg med inspiration av PISA ramverket
■ Apr - Maj 2009 Pilottest på kapitlet funktioner
■ Aug - Sep 2009 Utvärdering analysverktyget
■ Jan - Maj 2010 Konstruktion av ett nytt mätinstrument med hjälp av ATD ■ Maj 2010 Insamling av nationella prov Matematik A
■ Jun– Aug 2010 Pilottest av analysverktyget samt utvärdering av de sex lösningskategorierna ■ Okt - Nov 2010 Litteraturstudier om provkonstruktion Nationella prov
■ Aug – Dec 2010 Analys av läromedelskapitlen, aritmetik, procent, geometri, funktioner ■ Nov – Dec 2011 Analys av nationella prov Matematik A
■ Jan - Mar 2011 Reliabilitetstest av uppgifter, tekniker och teori. Sammanställning av resultat

4.4 Läromedel

Vad ett läromedel är beskrivs i Nationalencyklopedin på följande sätt: ”*En resurs för lärande och undervisning; traditionellt främst läroböcker, läseböcker, övningsböcker och ordböcker*”[22]. I sin avhandling beskriver Johansson (2006) att läromedel är en speciell typ av böcker som avser att användas inom undervisning. Innehållet styrs av många faktorer som är verksamma i en gråzon mellan samhället och skolan, vetenskap och propaganda (se vidare Johnsen i Johansson, 2006), vad som inom ATD brukar kallas *noosphere*.

De läromedel som valdes till denna studie är från gymnasiets kurs Matematik A. Kursen valdes för att det är den första kursen på gymnasiet och gemensam för både de teoretiska programmen och yrkesprogrammen. Det finns trettiotre[23] olika läromedel i Matematik A från olika förlag där de flesta förlag har varit i branschen länge med olika upplagor av matematikböcker på gymnasiet.

Urval

För att få en bild över vilka läromedel som används mest gjordes en telefonintervju till samtliga gymnasier i tre angränsande kommuner. Där framkom det att följande läromedel var de flitigast använda på byggprogrammet, teknikprogrammet samt samhällsprogrammet. Här är de representerade i bokstavordning:

Tabell 5. Översikt över de tre undersökta läromedlen

Titel	Författare	Förlag
Exponent A röd: Matematik för gymnasieskolan	Gennow, S., Gustafsson, I., Johansson, B., & Silborn, B.	Gleerups förlag (2003)
Matematik 4000 kurs A blå lärobok	Alfredsson, L., Brolin, H., Erixon, P., Heikne, H., & Ristamäki, A	Natur & Kultur (2007)
Pyramid NT a+b: Gymnasiematematik för naturvetenskaps- och teknikprogrammen: Kurs A och B	Wallin, H., Lithner, J., Wiklund, S., & Jacobsson, S.	Liber utbildning (2000)

[22] läromedel. http://www.ne.se/lang/läromedel, Nationalencyklopedin, hämtad 2011-05-19.

[23] 110130 enligt uppgifter på förlagens hemsidor.

Eftersom det inte finns några mallar över hur ett läromedel bör se ut ger jag nu en kort beskrivning över de tre undersökta läromedlen.

Exponent A röd

Exponent A röd (Gennow et al., 2003) är ett läromedel i en serie där den röda färgen visar att den är främst avsedd att läsas av elever som skall läsa vidare till matematik kurs E. De övriga två böckerna i serien är gula och gröna där grön är avsedd att användas om eleven endast skall läsa A-kursen och den gula skall användas av elever som skall läsa B- och C-kursen. Läromedlet består av en lärobok och en lärarhandledning. Lärarhandledningen innehåller extra uppgifter, tester, prov och annat kompletterande material. De olika versionerna av matematikböckerna i kurs A har samma struktur och upplägg men har olika svårighetsgrad. Detta gör det möjligt enligt författarna att använda olika versioner av böckerna i samma undervisningsgrupp. Den undersökta läroboken Matematik för gymnasieskolan Exponent röd är uppdelad i 6 kapitel: Tal, Procent, promille & ppm, Statistik, Uttryck, Formler & ekvationer, Geometri samt det avslutande kapitlet Funktioner. Lärobokskapitlen har följande innehåll:

- *Teorigenomgångar*
- *Exempel* med lösningar och svar
- *Övningar* i tre svårighetsgrader: omarkerade, markerade med ► och markerade med ►►. De markerade uppgifterna är av svårare karaktär än de omarkerade.

Varje kapitel avslutas med fem olika avsnitt:

- *Reflektera*; här är det enligt författarna meningen att eleven skall träna förmågan att ta ställning till om påståenden är sanna eller falska
- *Tester*, där eleven skall testa sina kunskaper på fem till tio uppgifter på olika avsnitt
- *Sammanfattning*; kapitlets innehåll i korthet
- *Blandade övningar*; eleven kan träna på flera övningar som visar innehållet i kapitlet
- *Utmaningar*; detta är en särskild avdelning som skall stärka elevens färdighet att lösa matematiska problem avsnittet skall även stimulera elevens kreativitet.

Matematikens historia återfinns som textrutor på spridda ställen i boken med information som har anknytning till avsnittets matematiska innehåll. Boken avslutas med Tankeplanket där eleven kan få ledtrådar samt Facit som ger svaret på uppgifterna. De kapitel som jag har analyserat är Procent, promille & ppm, Geometri samt Funktioner.

Hädanefter är denna bok benämnd det *röda* läromedlet efter färgen på boken.

Ma 4000 kurs A blå

Matematik 4000 (Alfredsson et al., 2007) är en läromedelsserie för gymnasiet och vuxenutbildningen. Den bygger på en tidigare serie som förlaget givit ut, Matematik 3000. I Matematik 4000 läroböckerna har tre svårighetsnivåer: Röd, Grön och Blå där den blå versionen riktar sig mot de elever som skall läsa kurs E i matematik. Det finns även en lärarhandledning med extramaterial i form av uppgifter och diagnoser.

Matematik 4000 blå är uppdelad i 5 kapitel: Aritmetik (aritmetik, s. 6-39, procent s. 40-53), Algebra och ekvationer, Geometri, Grafer och funktioner samt Statistik. Kapitlen har följande struktur:

- *Teori*, inleder ofta med ett konkret exempel
- *Lösta uppgifter*
- *Övningsuppgifter*; uppgifterna är uppdelade i tre svårighetsnivåer, A, B och C där C uppgifterna skall ha den högsta svårighetsgraden. De svåraste uppgifterna är märkta med * och finns utspridda i läroboken.
- *Aktiviteter*; delas in i tre kategorier: Upptäck, Laborera och Diskutera. Dessa uppgifter är tänkta att lösas parvis eller i grupp.
- *Utmaningen*; uppgifter utan facit
- *Historik*; uppgifter och textavsnitt med anknytning till olika kapitel
- *Hemuppgifter*
- *Sammanfattning* av kapitlet
- *Blandade övningar*; två parallella test med uppgifter även från tidigare kapitel. Uppgifterna likas vid de uppgifter som förekommer på Nationella prov enligt författarna med två delar där den sista delen löses med miniräknare (Utredande uppgifter) och den första med miniräknare
- *Problem för alla*; kapitlet avslutas med en sida med problemlösning

Sist i boken finns det repetitionsuppgifter där texterna till de lösta exemplen återfinns så att eleven kan repetera kursen. Till läromedlet finns det även en lärarhandledning med testskrivningar, extra uppgifter och elevaktiva övningar. De kapitel jag har analyserat är, Aritmetik (aritmetik, s. 6-39, procent, s. 40-53), Geometri och Grafer & Funktioner.

Hädanefter är denna bok benämnd den *blå* läromedlet efter färgen på boken.

Pyramid NT kurs A och B

Liber Pyramid är en läroboksserie för gymnasieskolan och komvux och Pyramid NT är inriktad mot naturvetenskaps och teknikprogrammen där eleverna har möjlighet att läsa upp till kurs E i matematik (Wallin, Lithner, Wiklund, & Jacobsson, 2000). Kurs A innefattar kapitlen 1 till 4: Tal och ekvationer (aritmetik,

s. 8-37, procent, s. 38-52), Geometri, Funktioner och Statistik. Kapitlen är i sin tur uppdelade i följande avsnitt:

- *Teori* med lösta typexempel
- *Övningsuppgifter*; grupperade i tre nivåer där författarna anser att de omärkta uppgifterna motsvarar G, (☆) motsvarar betyget VG och (☆ ☆) motsvarar MVG.
- *Konsten att lösa problem*, där eleverna ska lära sig att lösa kreativa matematiska problem.
- Kapitlet avslutas med en *Sammanfattning*
- *Blandade uppgifter*
- *Ledningar och lösningar*;till en del uppgifter och *Svar* till samtliga uppgifter även de med en "öppen" karaktär

En del avsnitt, markerade med *, anses vara överkurs med fördjupningskaraktär och rekommenderas av författarna att särskilt intresserade elever läser enskilt. Författarna rekommenderar även att elever som inte hinner med ska räkna de omärkta uppgifterna. Till läromedlet finns det en CD med testskrivningar, förslag på prov, planeringsförslag m.m. Jag har analyserat följande kapitel: Tal och ekvationer (aritmetik, s. 8-37, procent, s. 38-52), Geometri och Funktioner.

Hädanefter är detta läromedel benämnt det *gröna* läromedlet efter färgen på boken.

4.5 Nationella prov

Urval av Nationella prov

Eftersom studien berörs av Lpf 94 så var det naturligt att studera nationella prov som hade Lpf 94 som kursplan. År 2000 kom det emellertid en revidering av Lpf 94 som kallas Gy 2000 vilket medförde en del förändringar i kursen Matematik A. När insamling av nationella prov gjordes visade det sig vara svårt att få tag i samtliga prov bland annat beroende på att utrensningar görs med jämna mellanrum. De undersökta 19 nationella proven är enligt Tabell 6

Tabell 6. En sammanställning av de undersökta nationella proven med avseende på provuppgifter, bedömningsanvisning samt lösningsproportioner.

Årgång	**Termin**	**Bedömnings - anvisningar**	**Lösnings - proportioner**
2000	HT	Ja	Nej
2001	VT	Ja	Ja
2002	HT, VT	Ja men ej ht02	Ja

2003	HT, VT	Ja	Ja men ej ht03
2004	HT, VT	Ja	Ja
2005	HT, VT	Ja men ej ht05	Ja
2006	HT, VT	Ja	Ja men ej vt06
2007	HT, VT	Ja	Ja
2008	HT, VT	Ja men ej ht08	Ja
2009	HT, VT	Ja	Ja
2010	VT	Ja	Ja

Eftersom revideringen av läroplanen inte trädde ikraft förrän ht 2000 så föll det sig naturligt att börja med ht 2000 som första prov att undersöka. Provet vt 2000 hade sin utgångspunkt både i Lpf 94 som Gy2000 och valdes därmed bort. Enligt Tabell 6 så har jag funnit nästan samtliga prov fram till vt 2010 så när som på ett som saknas från ht 2001. Vad det gäller bedömningsanvisningar så saknas det anvisningar från ht 2002, ht 05 samt ht 2008. Lösningsproportionerna har jag funnit i Skolverkets rapporter om resultat på de nationella proven. I vissa rapporter har inte dessa angivits vilket förklarar en del luckor i Tabell 6 ht 2003 och vt 2006.

Urval av elevlösningar på Nationella prov Matematik A

Under sommaren 2010 gjordes urvalet av lösningar från nationella prov. För att kunna studera elevlösningarna valdes uppgifter från prov som hade fått sekretessen hävd vt 2005 och vt 2010. Eftersom samtliga nationella program skriver nationella prov gjordes först ett urval av program då tiden var begränsad att utföra analysen. De program som valdes var Naturvetarprogrammet (NV) då det är ett studieinriktat program samt för att NV det är det program som har den högsta antagningspoängen i den utvalda kommunen. Det andra valda programmet var Samhällsvetenskapliga programmet (SP) då det är det största programmet med nästan 3000 studenter som skriver nationella provet i kurs A varje år under perioden 2000 till 2010. Det sista programmet som valdes var ett av de yrkesprogram som finns nämligen Byggprogrammet (BP). Byggprogrammet är ett av de program där det är naturligt för eleverna att använda proportionalitet i sin yrkesverksamhet. När urvalet av lösningar skall göras är det bästa ett obundet slumpmässigt urval (Bryman, 2002). I denna studie grundades det på att de elevlösningar som valdes ut var elever som var födda den 5, 11 och 28 varje månad. Fyra elevlösningar från varje program på respektive uppgift valdes. Totalt analyserades 36 elevlösningar. Fördelen med detta urvalsförfarande är att skevheter som beror på den mänskliga faktorn är mycket små. Den andra fördelen är att eleverna inte väljs ut på subjektiva kriterier vilket är ett vanligt förekommande problem med andra urval.

4.6 Avgränsning

Läromedel

I min undersökning av läromedel har jag avgränsat mig till kapitlen aritmetik, geometri och funktioner beroende på att jag har begränsat med tid för att genomföra denna undersökning samt att jag i den historiska återblicken också sett att det huvudsakligen är inom dessa områden som proportionalitetsuppgifter har tagits upp i läromedel. Ett pilottest visade också att ekvationskapitlet innehöll ett fokus på att träna själva proceduren ”att lösa ekvationer” och där få uppgifter innehöll proportionalitet. Statistikkapitlet visade också innehålla endast en liten del proportionalitetsuppgifter och togs därför bort från undersökningen. Uppgifter med exponentiell tillväxt har inte tagits med i undersökningen eftersom det visserligen är proportionellt samband från ett år till nästföljande år men över tid är tillväxten inte proportionell utan exponentiell. Inom ämnesområdet procent har jag inte tagit med uppgifter som inte har innehållit sannolikhet, moms eller ränta. Anledningen till detta är att det inom procent finns många uppgifter som avser att behandla andel och enligt min bedömning är inte andel proportionalitet till skillnad mot procentuppgifter med förhållande.

Efter pilot estet insåg jag att proportionellt resonemang var ett vidare begrepp än proportionalitet. Jag har avgränsat min uppgiftsbedömning så att endast uppgifter med proportionalitet behandlas.

Vad avser lärarhandledningarna har jag inte undersökt dessa eftersom jag inte vet i vilken utsträckning de används i klassrummet. För att det skulle vara intressant att undersöka dessa skulle lärarhandledningarna innehålla undervisningsmetodik och lösningstekniker samt begreppsförklaringar. Idag är det största innehållet i handledningarna mer uppgifter, laborationer och tester. Laborationer av olika slag i läromedlen har också tagits bort vid bedömningen av läromedelsuppgifter eftersom innehållet skiljer sig markant från de övriga uppgifterna.

Nationella prov

De nationella proven är uppdelade i flera delar. Den första delen är utan miniräknare med kortsvar, den så kallade huvudräkningsdelen. Här har det varit väldigt få lösningstekniker angivna vilket medför att flertalet av de lösningstekniker som angivits på de nationella proven har tolkats från delen med mer omfattande uppgifter där eleverna ska lämna fullständiga lösningar och det är tillåtet att använda miniräknare. I denna studie har inte aspektuppgiften som finns med på varje nationellt prov undersökts. Eftersom dessa uppgifter prövar många andra kriterier än de ordinarie uppgifterna skulle det bli det svårt att kategorisera dessa tillsammans med övriga uppgifter på provet och jämföra dessa med läromedelsuppgifterna. Det skulle emellertid vara intressant att studera dessa i en separat studie och jämföra läromedlens problemlösningssektion med aspekt-uppgiften på NP.

4.7 Etiska överväganden

De nationella proven omgärdas av stark sekretess och därför fick jag söka tillstånd av rektor att under sekretess få ta del av de nationella prov som jag har undersökt. De flesta provuppgifter är skyddade upp till 10 år så för att inte bryta mot sekretessen vid reliabilitetstestet användes endast de nationella prov som sekretessen är hävd på enligt Skolverkets hemsida dvs. ht 2000, vt 2002, vt 2005 och vt 2010.

När det gäller elevlösningarna från de nationella proven har dessa avkodats från respektive skola innan jag har tagit del av dessa. Detta för att bibehålla anonymiteten på respektive elev och förhindra spårning.

4.8 Reliabilitet

För att kunna redovisa resultat måste man på något sätt mäta eller samla in information. Då är det viktigt att de mätningar som genomförs är pålitliga och stadiga, det vill säga att inslaget av slumpmässiga avvikelser är litet. Om detta stämmer säger man att reliabiliteten är hög, det vill säga att om mätningarna upprepas flera gånger och ger samma resultat så är mätningarna reliabla. För att uppnå detta krävs det att mätningarna inte har några mätfel, inte påverkas av några felkällor. Praktiskt sett så innehåller de flesta kunskapsmätningar inslag av mätfel i form av slumpmässig variation på ett eller annat sätt men det viktiga är att vara medveten om dessa och försöka minimera dem. Därför är det intressant att använda sig av interbedömarreliabilitet som beräknar den osäkerhet som kan hänföras till bedömningen och som syns som en variation mellan olika bedömares bedömning av en uppgift (Robson, 2002).

Reliabilitet och validitet är svårt att hantera för en studie med kvalitativ ansats och det är mera en fråga för kvantitativa ansatser eftersom inte mätning är huvudsyftet i en kvalitativ studie (Robson, 2002). En anpassning är emellertid möjlig om det sker en omfördelning av begreppens betydelse så att det läggs mindre vikt vid mätning (Bryman, 2002). Reliabilitet kan delas in i *intern* och *extern*. Den *externa* reliabiliteten i denna studie beaktas när en kollega gör kategoriseringen av uppgifter i läromedlen och nationella proven oberoende av mig. Den interna reliabiliteten betraktas då en kollega och jag testar analysverktyget på några uppgifter före kategoriseringen för att bli så samstämmiga som möjligt i vår bedömning av kategorierna. För att beräkna reliabiliteten kan en metod som kallas ”intercoder reliability” användas (Kaid & Johnston, 1989). Det är ett vanligt verktyg för innehållsanalys och jämför testresultat från två bedömare i Holstis formel. Formeln är uppbyggd av en kvot *R* mellan överensstämmande och totala antalet klassificeringar mellan analytikerna med ett visst tidsintervall emellan (se Kaid & Johnston, 1989):

Holstis formel: $R = \frac{C_{1,2}}{C_1 + C_2}$

$C_{1,2}$= Antal kategoriuppgifter som båda analytikerna är överens om i kategoriseringen.

C_1+C_2 = Totala antalet uppgifter som analytikerna har kategoriserat.

Den *interna* validiteten stärks i denna studie eftersom den använder uppgiftstyper är från tidigare forskning (t.ex. Saknat värde) i analysverktyget och generaliserbarheten eller den så kallade *externa* validiteten på analysverktyget ökar i och med att även uppgifter på de nationella proven bedöms med analysverktyget. Enligt Kaid och Johnston (1989) är det nöjaktigt med ett värde över 0,85 i Holstis formel och anledning till reaktion om det understiger 0,8.

I denna studie genomfördes reliabilitetstester på både läromedel och nationella prov med hjälp av fyra forskarkollegor.

Tabell 7. Översikt av reliabilitet

Typ av uppgift	**Reliabilitet**
Uppgifter	+0,86
Lösningstekniker	+0,94
Teori	+0.92

Det var 38 uppgifter som testades från nationella prov. Överensstämmelse rådde i 33 fall vilket motsvarar värdet 0,86 i Holstis formel som anses vara tillfredställande enligt Kaid och Johnston. De 38 NP-uppgifterna användes även vid reliabilitettest av teoretiska modeller. Det var samstämmighet mellan de båda bedömarna i 32 fall vilket motsvarar 0,92 vilket anses tillfredställande enligt Kaid och Johnston. Lösningsteknikerna var hämtade från läromedlen och var från samtliga kapitel. Av 32 lösta exempel var båda bedömarna eniga om 30 lösta exempel och motsvarande värde 0,94 anses vara tillfredställande enligt Kaid & Johnston. (Se Tabell 7)

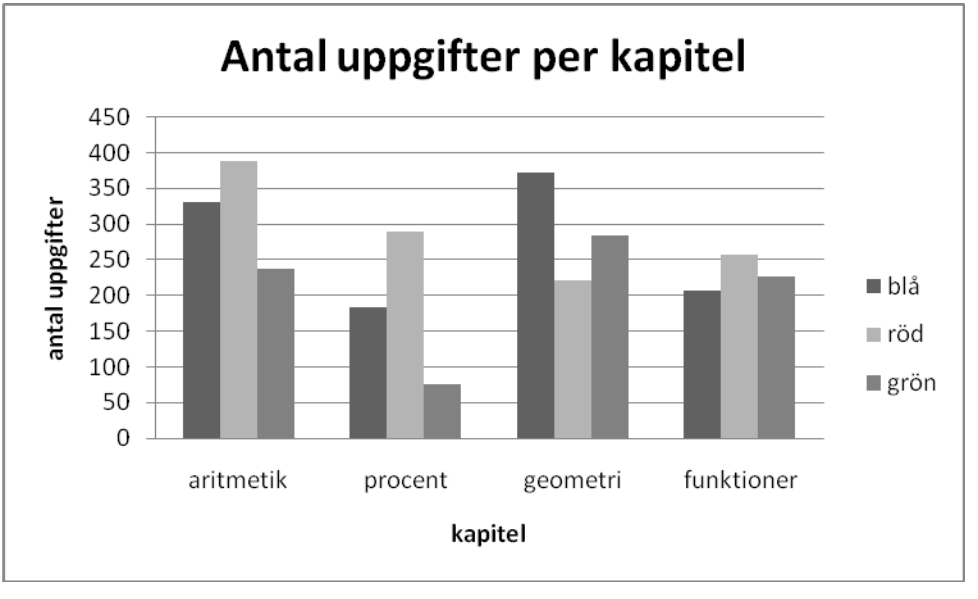
5. Resultat

I detta kapitel kommer resultaten att redovisas efter respektive forskningsfråga. Först redovisas resultatet för läromedlet och därefter resultatet för de nationella proven för att sedan följas av en slutsats. Detta förfarande upprepas för uppgifter, lösningstekniker samt teori.

5.1 Uppgifter i läromedel och nationella prov

Läromedel

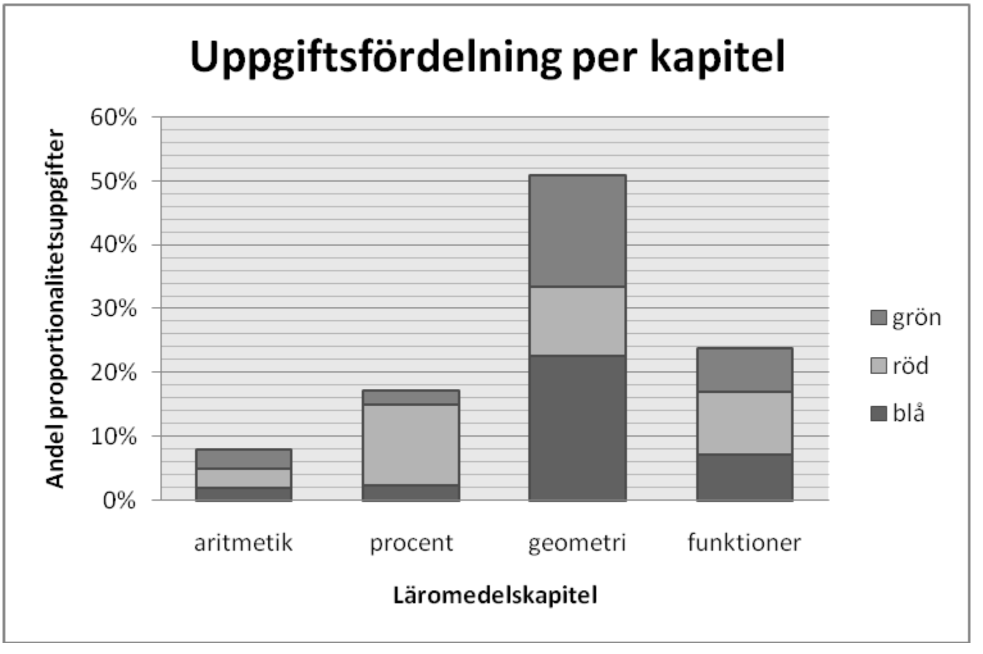
Totalt analyserades 3073 övningsuppgifter i de tre utvalda läromedlen för Matematik A, varav 1093 fanns i den blå boken, 1157 i den röda boken och 823 i den gröna boken. Det kapitel som har flest räkneuppgifter varierar i de olika läromedlen. Den blå boken och den gröna boken har flest räkneuppgifter i kapitlet Geometri medan den röda boken har flest räkneuppgifter under området Aritmetik (se Figur 16).



Figur 16. Fördelning av antal uppgifter per kapitel i de tre undersökta läromedlen.

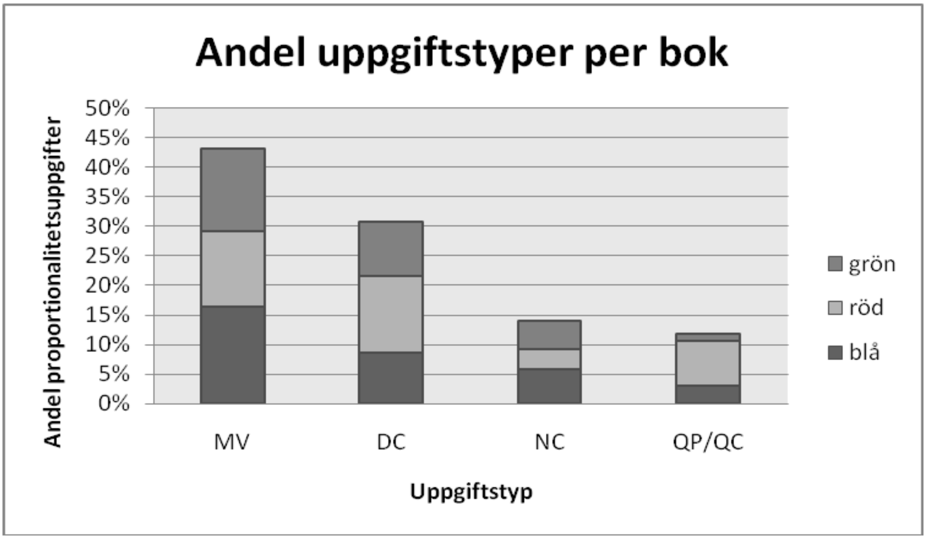
Av de 3073 analyserade uppgifterna var det 737 stycken (24%) som bedömdes som proportionalitetsuppgifter. Flest proportionalitetsuppgifter har den röda boken (268 stycken) för att sedan följas av den blå (252 stycken) och den gröna boken (217 stycken). Det var alltså ingen stor variation på andelen proportionalitetsuppgifter inom respektive bok, där ungefär var fjärde uppgift berörde proportionalitet.

Samtliga uppgifter är hoplagda i en summa med 3073 uppgifter varav 1093 stycken i den blå boken, 1157 i den röda och 823 i den gröna 823 totalt i de analyserade kapitlen.



Figur 17. Hur proportionalitetsuppgifterna fördelar sig i respektive läromedels ämnesområden. (n=737)

Det avsnitt som innehöll flest uppgifter om proportionalitet var den blå (167 st) och gröna (128 st) boken inom området geometri. Den röda boken har flest proportionalitetsuppgifter under kapitlet procent (90 st) men det skiljer endast lite mellan procentkapitlet och geometrikapitlet (84 st).



Figur 18. De olika proportionalitetsuppgifternas fördelning i respektive läromedel. (n=737)

När det gäller typ av proportionalitetsuppgift i de tre läromedlen är MV-uppgifter vanligaste med 43% (se Figur 18) med störst antal i det blå (121 st) och gröna (104 st) läromedlet. Här är ett exempel på en MV-uppgift från det blå läromedlet (Alfredsson et al., 2007, s. 204). Exemplet är typiskt med tre kända variabler och en fjärde som söks.

4135 Resistansen hos en tråd är direkt proportionell mot trådens längd. En tråd på 1,25 m har resistansen 10,5 ohm. Hur lång tråd ger resistansen 25,0 ohm?

Här ger jag ytterligare ett ex på en MV-uppgift (Wallin et al., 2000, s. 166). Det som är intressant med denna är att i den gröna boken har författarna tolkat en uppgift på nationella provet vt 1999 som en proportionalitetsuppgift och använt den i läromedlet.

3037 Priset på äpplen är proportionellt mot vikten. Vilka värden har a och b?

Vikt (kg)	3	5	*b*
Pris (kr)	27	*a*	72

(Np A vt 1999)

Den näst vanligaste uppgiftstypen är *bestäm k* (DC) med 31%. I den röda läroboken är DC (95 st) och MV (94 st) de vanligaste uppgiftstyperna. Nedan ges ett exempel på en DC-uppgift (Gennow et al., 2003, s. 304). I detta fall ska eleven avgöra om förhållandet är konstant mellan strömmen och spänningen genom att beräkna *k*.

6046 Vid ett laborativt moment i ellära mättes strömmen genom och spänningen över en komponent. Tabellen visar laborationens mätserie. Avgör algebraiskt om spänningen *U* är proportionell mot strömmen *I*.

I (mA)	2,0	3,5	4,0	5,5	7,5
U (V)	6,6	11,6	12,2	18,2	24,7

Nedan ges ytterligare ett exempel på en DC–uppgift (Gennow et al., 2003, s. 303). I denna uppgift beräknas kilopriset som motsvarar proportionalitetskonstanten.

6044 Priset på lösviktsgodis är proportionellt mot vikten. En kund betalade 18 kronor för 2,4 hg godis.

a Vad är kostnaden per kg för godiset?

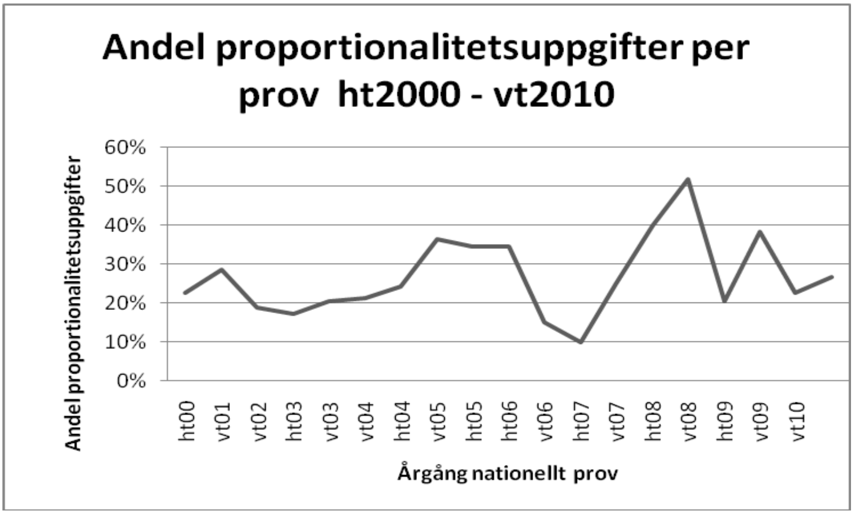
b Hur mycket kostar 1,8 hg godis?

c Hur mycket godis kan en kund köpa för 20 kronor?

Numerisk jämförelse (NC) och kvalitativ förutsägelse och jämförelse (QP/QC) är de minst vanliga uppgiftstyperna totalt räknat i de tre läromedlen (12%). Den minst vanliga uppgiftstypen är QP/QC i den blå (23 stycken) och gröna (9 stycken) boken. I den röda boken är NC den typ av uppgifter som det finns minst av (24 stycken). Detta är också den näst minst vanliga uppgiftstypen i de tre läromedlen (14 %). Utmärkande är också att den röda boken i varje kapitel har en avdelning som kallas ”Reflektera” där eleverna tränar på att ta ställning till ett antal påståenden ”Sant eller falskt”. Denna avdelning har ett högt antal proportionalitetsuppgifter av typen QP/QC hos den röda boken vilket medför att den röda boken har flest uppgifter av typen QP/QC (55 stycken). Dessa påståenden är i de undersökta kapitelområdena aritmetik, procent, geometri och funktioner av karaktären uppgifter utan siffror. Hos de övriga två böckerna återfinns sådana uppgifter med sant eller falskt endast under rubriken ”aktivitet” i den blå boken i kapitelområdet geometri men inte i de andra kapitlen. Hos den gröna boken saknas denna avsnittsindelning helt.

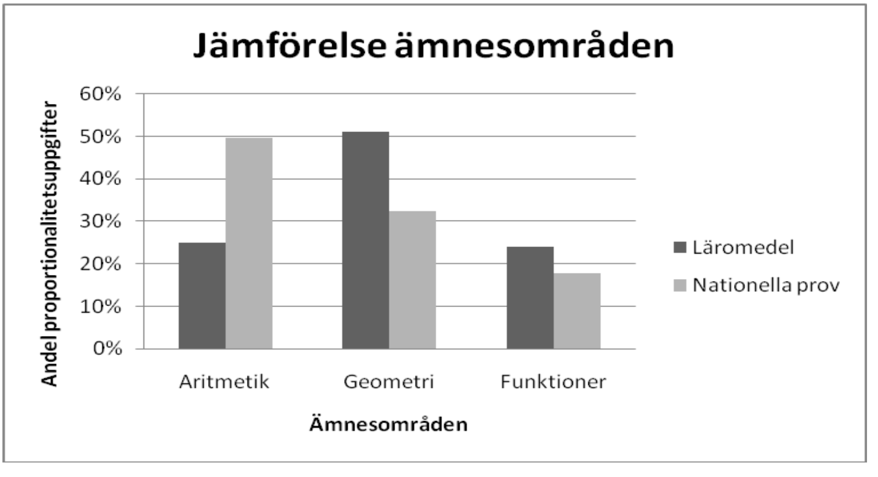
Nationella Prov

Av det totala antalet uppgifter på de undersökta nationella proven (n=581) bedömdes 26% innehålla proportionalitet.



Figur 19. diagram som visar andel bedömda proportionalitetsuppgifter per prov. (n=581)

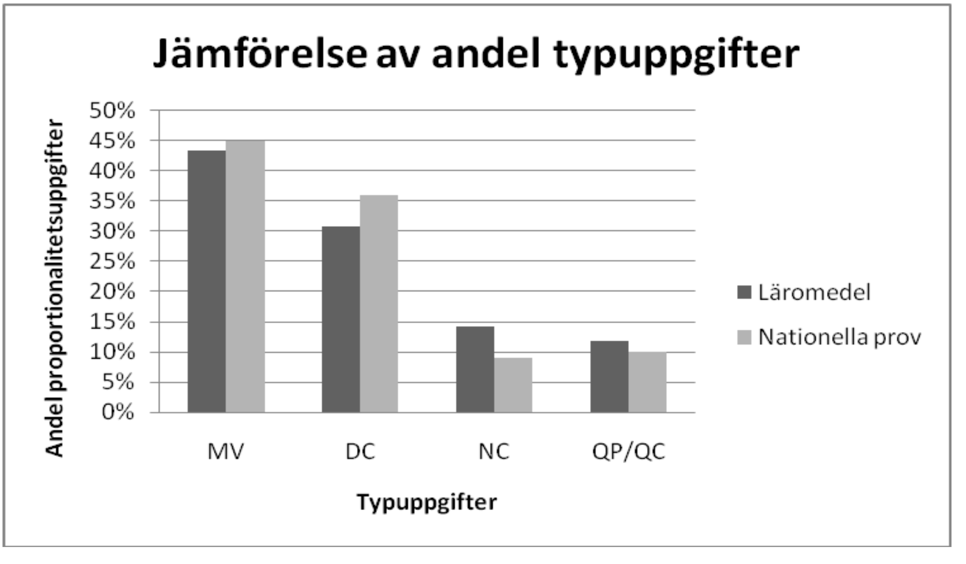
Andel uppgifter som bedömts som proportionalitetsuppgifter skiftar mellan provet från ht 2007 som har den minsta andelen proportionalitetsuppgifter (10%) och ht 2008 som har den högsta andelen proportionalitetsuppgifter (52%).



Figur 20. Hur de bedömda proportionalitetsuppgifterna på nationella proven och läromedlen fördelar sig på de olika ämnesområdena. (n=175 för nationella prov, n= 737 för läromedlen)

I en jämförelse mellan de nationella proven och läromedlen med avseende på områdena där proportionalitetsuppgifter påträffas skiljer sig de nationella proven på så vis att proportionalitetsuppgifter påträffas i högre grad inom aritmetik (50%) och i minst omfattning inom geometri (18%). Med avseende på ämnesområde så överstiger det totala antalet bedömda proportionalitetsuppgifter (155 st) eftersom en nationell provuppgift enligt konstruktörerna kan klassas inom flera ämnesområden. Aritmetik har den största andelen uppgifter (35%) enligt provkonstruktörens grundförutsättningar för provets helhet (se Tabell 1). Den näst största andelen utgörs av geometri (32%) och området funktioner har den minsta andelen på 18%. Den största skillnaden mellan läromedlen och de nationella proven berör Aritmetik där det skiljer 25 procentenheter mellan antalet proportionalitetsuppgifter på nationella prov och läromedel.

Det vanligaste ämnesområdet inom läromedlen för proportionalitetsuppgifter är geometri med 51% (n=737). Aritmetik och procent är räknat som ett område av PRIM-gruppen men även om aritmetik och procent summeras här (25%) överstiger inte summan geometriandelen i läromedelsuppgifterna.



Figur 21. Jämförelse mellan nationella prov och läromedel vad avser olika uppgiftstyper. (n=152 för nationella prov, n=737 för läromedel)

De vanligaste typerna av proportionalitetsuppgifter är på nationella prov MV (45 %) och DC (36 %) och den minst vanliga uppgiftstypen är NC (9%); se vidare Figur 21. Vid en jämförelse mellan nationella prov och läromedel är det ganska god överensstämmelse eftersom MV är den vanligaste uppgiftstypen i läromedlen och på de nationella proven. Även i övrigt är inte skillnaderna så stora utan ligger inom marginalen 5%. Den största skillnaden (5%) finns mellan uppgiftstyperna

DC och NC. DC är vanligare på de nationella proven än i läromedlen och NC är vanligare i läromedlen än på de nationella proven.

1.

Chokladtårta

6 personer

Ingredienser:

100 g mörk choklad
100 g smör
2 ägg
2 dl socker
2 dl vetemjöl
1 tsk bakpulver
50 g finhackade nötter

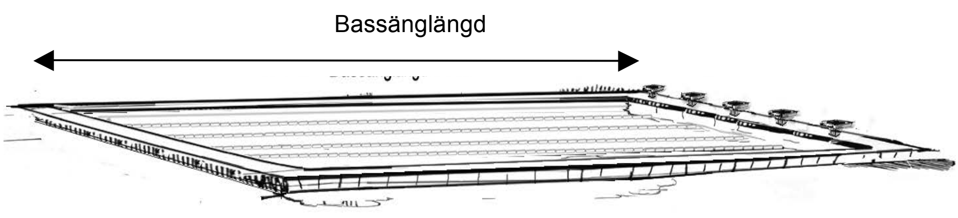
Hur mycket mörk choklad behövs enligt receptet om man ska baka en chokladtårta till 15 personer? **(2/0)**

Figur 22. Uppgift 1 del II från NP vt 2010 (Skolverket, 2010b s. 3), **en MV-uppgift inom Aritmetik med lösningsproportion 0,9**

Lösningsproportionerna för de olika uppgiftstyperna på de nationella proven varierar. De uppgiftstyper som har de högsta lösningsproportionerna är MV och DC, vilket stämmer överens med att de är de vanligaste uppgiftstyperna i läromedlen. Ett exempel på en MV-uppgift är den i Figur 22 eftersom den anger ett förhållande mellan chokladåtgång och antal personer som ska användas när eleven ska beräkna chokladåtgång för flera personer. Uppställningen bedöms här som en klassisk MV-uppgift. I Figur 23 kategoriseras b-uppgiften som en DC-uppgift eftersom den beräknar hastigheten på simningen och svaret anges som en konstant k. Förhållandet som ställs upp är ett samband mellan sträcka och tid där svaret på förhållandet bildar en ny dimension som inte funnits innan nämligen hastighet. Därför bedöms uppgiften som en proportionalitetsuppgift.

1. Carlos simmade 800 m på en simtävling. Bassängen var 25 m lång.

b) Carlos går i mål och får tiden 9 minuter 24 sekunder. Vilken medelfart hade Carlos?



Figur 23. Uppgift 1b från vt 2005 (Skolverket, 2005)**. Uppgiften klassificeras som en DC-uppgift inom aritmetik och geometri**

NC är den minst förekommande uppgiftstypen (9%) på de nationella proven. I Figur 24 visas ett exempel på en NC-uppgift från ett nationellt prov. Uppgiften frågar efter sambandet mellan *a* och *b*. För att lösa uppgiften måste eleven i första hand konstatera att det finns ett samband och därefter bestämma vilket det är. Eftersom det i första hand frågas efter vilket sambandet är bedömdes denna uppgift som en NC-uppgift eftersom eleven måste jämföra flera givna numeriska förhållanden. Den skulle också kunna tolkas som en DC men här gjordes valet att det i första hand fokuseras på sambandet mellan de givna förhållandena. Att lösningsproportionen för uppgiften är relativt låg (0,57) tyder på att en del elever har svårigheter med denna typ av uppgift.

9. Vilket är sambandet mellan *a* och *b*?

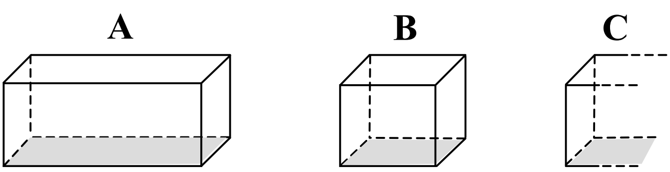
a	10	15	25	50
b	2	3	5	10

Svar:_____________

Figur 24. Uppgift 9 från Vt 2005 s. 3, version 1 (Skolverket, 2005)**. Uppgiften bedöms som en uppgift av NC-typ. Uppgiften har lösningsproportionen 0,57.**

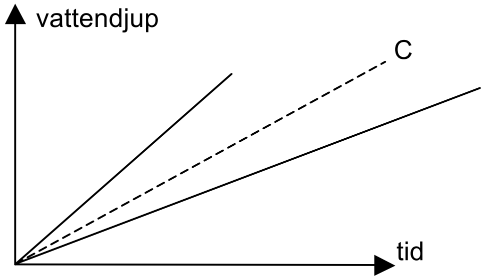
Den uppgiftstyp som har den näst minsta lösningsproportionen är QP/QC. I Figur 25 visas ett exempel från ett nationellt prov som handlar om badbassänger. Uppgift b avser att eleven ska beskriva med ord hur en bassäng ser ut med en viss graf C och med hjälp av två kända bassänger med grafer. Denna uppgift bedöms som en QP/QC eftersom det är ett proportionellt förhållande mellan vattendjup och tid utan numeriska värden angivna. Uppgiften skulle även kunna tolkas som en DC uppgift men eftersom det inte anges några numeriska värden har jag valt att tolka den som en QP/QC-uppgift.

8. I badhuset finns fyra bassänger A, B, C och D. Dessa fylls med vatten som rinner med samma hastighet.



Diagrammet nedan visar hur vattendjupet ändras med tiden för påfyllningen i bassängerna A, B och C.

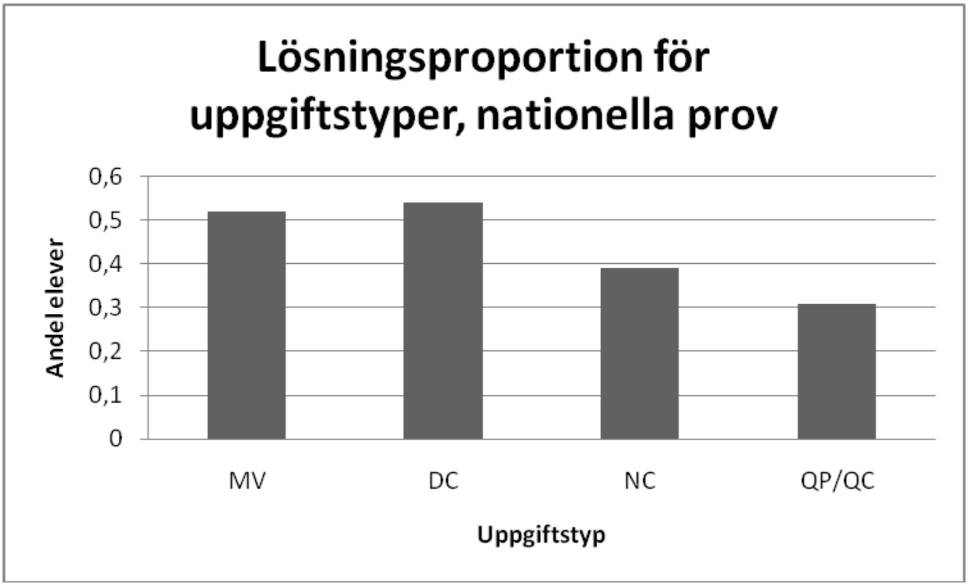
(forts. nästa sida)



b) Beskriv med ord hur den bassäng ser ut som motsvaras av graf C.

Figur 25. Uppgift 8 från Vt 2005 s. 5 (Skolverket, 2005)**. Uppgift b bedöms som en QP/QC-uppgift inom funktioner. Lösningsproportionen är 0,66 för hela uppgiften.**

I en sammanställning över lösningsproportioner för varje uppgiftstyp (se Figur 26) har MV- och DC-uppgifter de högsta lösningsproportionerna och QP/QC-uppgifterna den lägsta genomsnittliga lösningsproportionen, vilket stämmer överens med hur vanliga uppgiftstyperna är i de undersökta läromedlen.



Figur 26. Lösningsproportioner på nationella provet för de olika uppgiftstyperna om proportionalitet. (n=68)

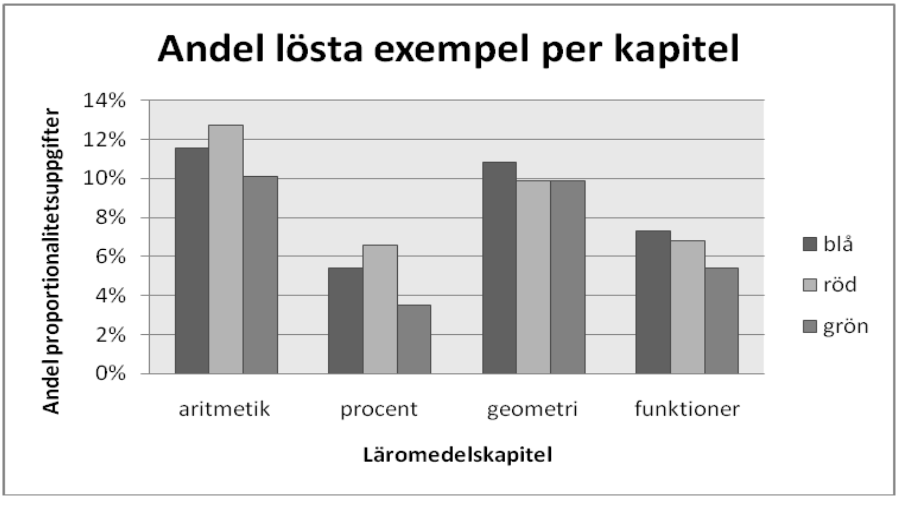
Sammanfattning

Vad avser uppgifter så skiljer sig läromedel och nationella prov genom att nationella prov har fler uppgifter om proportionalitet inom området aritmetik emedan läromedel har flest uppgifter inom geometri. I läromedlen bedömdes 24% vara proportionalitetsuppgifter i jämförelse med de nationella proven som bedömdes innehålla 27% proportionalitetsuppgifter. Den vanligaste uppgiftstypen är MV både på de nationella proven (45%) och i läromedel (43%). På de nationella proven har uppgifter av typen MV och DC de högsta lösningsproportionerna och QP/QC den lägsta lösningsproportionen.

5.2 Lösningstekniker i läromedel och nationella prov

Läromedel

Eftersom samtliga studerade läromedel för Matematik A inleder kapitlen med exempel på uppgifter för att belysa den kunskap som skall redovisas så har resultatkapitlet fått samma upplägg här. I läromedlen var det totalt i de tre läromedlen 425 lösta exempel, 149 stycken i det blå, 153 stycken i det röda och 123 stycken i det gröna läromedlet. Av dessa bedömdes 96 stycken (23%) avse att lösa proportionalitetsuppgifter. De tre undersökta läromedlen var relativt lika med avseende på antalet lösta proportionalitetsexempel per ämnesområde. Den gröna boken hade lite färre lösta exempel än de övriga läromedlen.



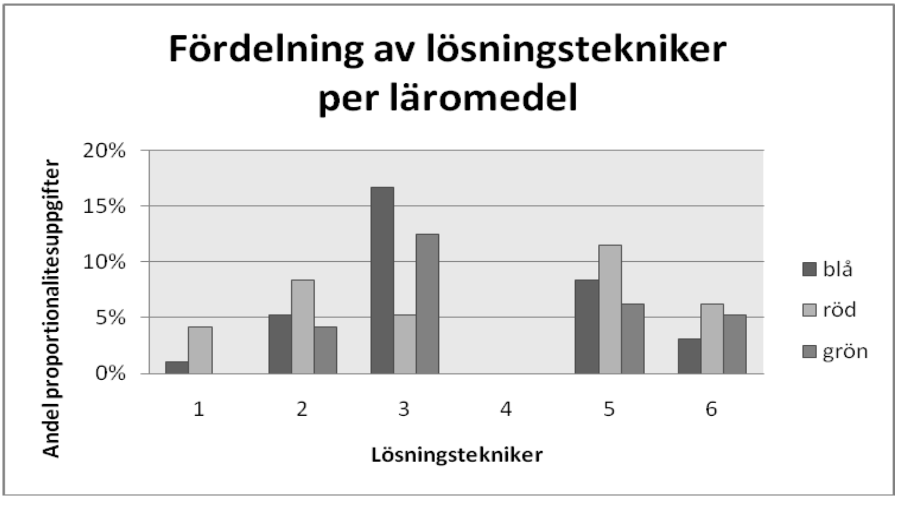
Figur 27. Hur antalet lösta exempel fördelar sig på de olika kapitlen per läromedel. (n=425)

Totalt fanns det i den blå boken 149 lösta exempel varav de flesta lösningarna fanns i kapitlet aritmetik (49 st) och geometri (46 st); se Figur 27. Av dessa bedömdes inom aritmetik två behandla proportionalitet, inom procent ansågs sju exempel behandla proportionalitet, i geometri 19 uppgifter samt inom funktioner fem uppgifter som bedömdes behandla proportionalitet. Sammanlagt behandlade 33 exempel av 149 proportionalitet.

Den röda boken hade 153 lösta exempel med de flesta inom avsnitten aritmetik (54 st) och geometri (42 st). Av dessa bedömdes inom avsnittet aritmetik två som proportionalitetsuppgifter, inom avsnittet procent bedömdes 10 som proportionalitetsuppgifter, inom geometri bedömdes 13 behandla proportionalitet och inom funktioner bedömdes 11 behandla proportionalitet. Detta innebär att 36 lösta exempel av 153 berörde proportionalitet.

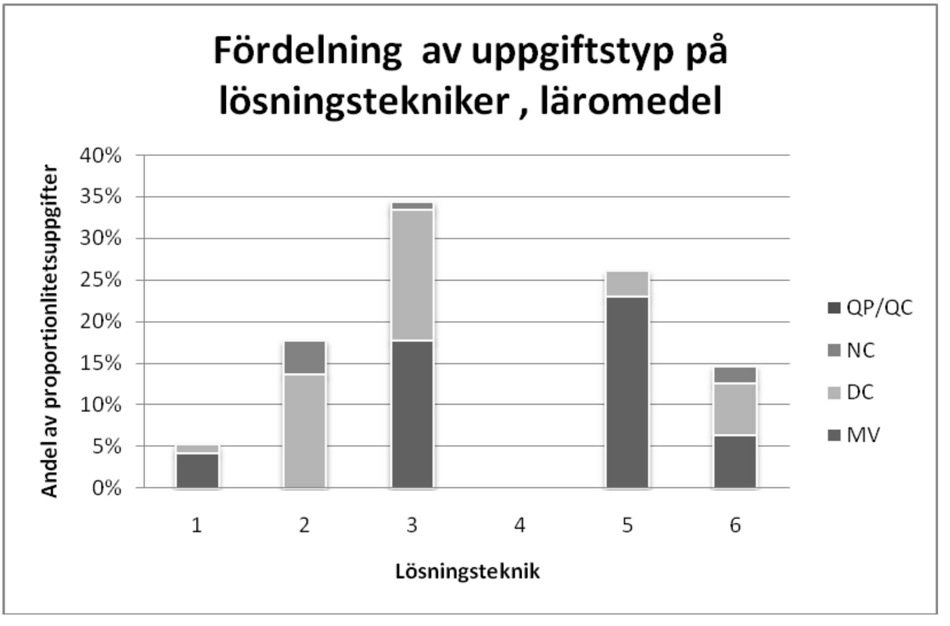
Den gröna boken hade totalt 123 lösta exempel varav de flesta var inom kapitlet aritmetik (43 st) och geometri (42 st). Här kategoriserades fyra uppgifter som proportionalitetsuppgifter inom aritmetik, inom procent hittades inga proportionalitetsuppgifter bland de lösta exemplen, i avsnittet om geometri bedömdes 16 uppgifter behandla proportionalitet och inom funktioner bedömdes sju uppgifter som proportionalitetsuppgifter. Av de 123 lösta exemplen handlade alltså 27 om proportionalitet.

Sammanlagt fanns 96 lösta exempel bland totalt 425 som bedömdes vara proportionalitetsuppgifter, vilket innebär att ca 23% av alla lösta exempel i de studerade kapitlen berörde proportionalitet. Denna andel var i stort samma för de tre läromedlen. Det som skiljde läromedlen åt var fördelningen på de olika lösningsteknikerna samt under vilka avsnitt som de lösta exemplen om proportionalitet återfanns.



Figur 28. Fördelning över de olika lösningsteknikerna i respektive läromedel. (n=96)

Figur 28 visar hur de sex olika lösningstekniker som presenterades i kapitel 4 förekom i läromedlen. Vanligast var teknikerna 3 och 5. Det visade sig också att alla tekniker inte var representerade i de undersökta böckerna. Teknik 4 saknades i alla tre böckerna. De olika lösningsteknikerna kategoriserades även efter vilken typ av uppgifter som de olika lösta exemplen vara av (se Figur 29).



Figur 29. Översikt över hur de olika uppgiftstyperna är representerade hos de olika lösningsteknikerna i läromedlen. (n=96)

Lösningsteknik 1 återfanns hos fyra MV-uppgifter och en DC-uppgift men inte hos några NC- eller QP/QC-uppgifter. Lösningsteknik 2 hittades bland 13 DC-uppgifter och fyra NC-uppgifter men saknades helt bland MV-uppgifter och QP/QC-uppgifter. Lösningsteknik 3 hade den högsta frekvensen med 33 uppgifter varav 17 var MV-uppgifter och 15 var DC-uppgifter och en var av NC-typ. Lösningsteknik 4 återfanns inte alls. Lösningsteknik 5 förekom i 22 MV-uppgifter och i tre DC-uppgifter och detta var den mest vanliga lösningstekniken bland MV-uppgifterna. Lösningsteknik 6 påträffades hos sex MV- och sex DC- samt hos två NC–uppgifter; se Figur 29.

1 Vägen över ett

I de undersökta läromedlen är denna lösningsteknik representerad i något högre grad under kapitlet geometri och procent för att inte vara representerad alls i funktioner eller aritmetik. Följande exempel är från det röda läromedlet:

Exempel: Beräkna det hela

Vid en kamerarealisation sänktes priserna med 20 %. Priset på en kamera sänktes med 1 100 kr. Vad hade kameran kostat?

Lösning:

Alternativ 1:

20 % av priset är 1 100 kr

1 % av priset är $\frac{1100}{20}$ kr = 55 kr

100 % av priset är $100 \cdot 55$ kr = 5 500 kr

Alternativ 2:

$$\text{Det hela} = \frac{\text{delen}}{\text{andelen}}$$

Kameran hade kostat: $\frac{1100}{0{,}20}$ kr = 5 500 kr

Svar:

Kameran hade kostat 5 500 kr.

(Gennow et al., 2003, s. 72)

Denna lösningsteknik återfanns hos det blå och röda läromedlet men inte i den gröna läroboken. Tekniken har högst frekvens i den röda boken i kapitlet geometri. Denna lösningsteknik förekom oftast i MV-uppgifter.

2 Sambandsmultiplikation

Den här lösningstekniken är vanligast i kapitlet om procent men även vanlig i kapitlet geometri. Här är ett exempel från Liber Pyramid (Wallin et al., 2000, p. 43):

Procent och förändringsfaktor

EXEMPEL 1
Löneförhöjning

Anna har en månadslön på 17 250 kr. Hon får en löneförhöjning på 4 %. Vilken blir Annas nya månadslön?
Vi visar två olika lösningsalternativ

Alternativ 1

Löneförhöjning: 4 % av 17 250 kr som är $0{,}04 \cdot 17\,250$ kr = 690 kr

Ny lön: 17 250 kr + 690 kr = 17 940 kr

Alternativ 2

Den nya lönen är 100 % av den gamla lönen plus löneförhöjningen på 4 % av samma lön. Det blir sammanlagt 104 % av den gamla lönen.

Ny lön: 104 % av 17 250 kr som är $1{,}04 \cdot 17\,250$ kr = 17 940 kr

Svar: Den nya månadslönen blir 17 940 kr.

Tekniken hade högst frekvens i den röda boken och den vanligaste uppgiftstypen var DC. Jag tolkar att denna lösningsteknik används på samma sätt som i Hersant (2005) men i detta fall används andra värden.

3 Proportion

Denna lösningsteknik är den mest representerade av alla sex. Den påträffas vanligen i geometriavsnittet. Följande exempel är från den gröna läroboken. (Wallin et al., 2000, p. 122):

EXEMPEL 2
Likformiga figurer

Femhörningen *ABCDE* är likformig med femhörningen *FGHJK*.
Beräkna längden av sidorna *a*, *b*, *c* och *d*.

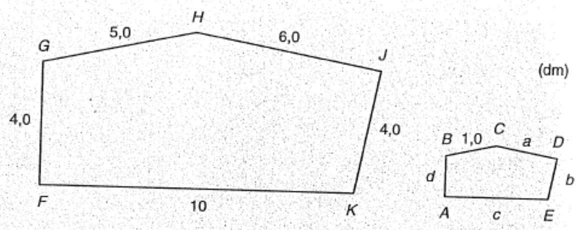
Likformigheten ger:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{4} = \frac{c}{10} = \frac{d}{4} = \frac{1}{5}$$

Ur första och sista ledet erhålles:

$$\frac{a}{6} = \frac{1}{5}$$

$$a = \frac{6}{5} = 1{,}2$$



På motsvarande sätt fås: $b = 0{,}80$, $c = 2{,}0$ och $d = 0{,}80$.

Svar: Sidorna är 1,2 dm, 0,80 dm, 2,0 dm och 0,80 dm.

Denna kategori är representerad i samtliga undersökta läromedel och är vanligast i den blå läroboken. Den vanligaste uppgiftstypen är MV. Exempeluppgiften är kategoriserad som en MV-uppgift med direkt proportionalitet.

4 Korsvis multiplikation

Vid analysen påträffades denna lösningsteknik inte i några av de undersökta läromedlen eller i de nationella proven.

5 Koefficient

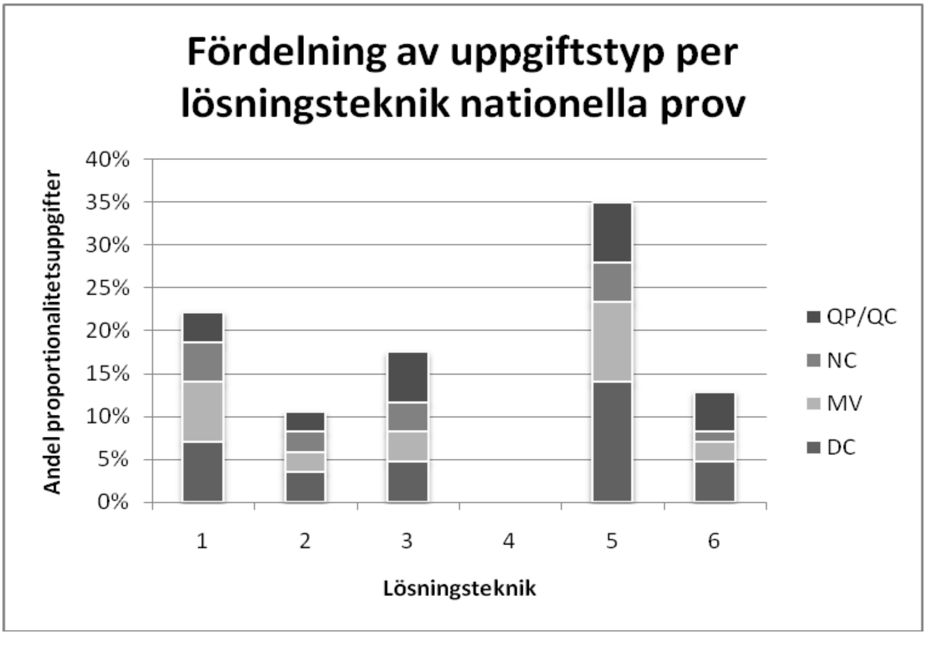
Denna kategori hittades inom samtliga kapitel och samtliga undersökta läromedel. Det är den näst vanligaste lösningstekniken i de tre undersökta böckerna och förekommer flest gånger i den röda boken. Den vanligaste typen av uppgift var MV. Exemplet på s. 70 är löst med teknik 5.

6 Övriga tekniker

I den här kategorin var det vanligast med uppgifter från funktionsavsnittet. De vanligaste uppgiftstyperna var MV och DC. Uppgiftstypen var vanligast i den röda boken. Se uppgift a) i exemplet på s. 81 som visar teknik 6 eftersom lösningen går ut på att grafiskt bestämma om massan är proportionell mot volymen.

Nationella prov

De nationella proven visar lösningsteknikerna till största delen på den utförliga delen med miniräknare (del II). Delen utan miniräknare (del I) innehåller mest svar av kortsvarstyp i rättningsanvisningarna förutom i några enstaka fall.



Figur 30. Översikt nationellt prov lösningstekniker på proportionalitetsuppgifter (n=86)

På de nationella proven hittades fem lösningsteknikerna totalt sett. Den vanligast förekommande tekniken var *5 Koefficient* (35%) och teknik 4, korsvis multiplikation, saknades helt (se Figur 30).

b)	**1,4 m/s ; 85 m/min ; 5,1 km/h**	**(Max 2/0)**
	Ansats till lösning t ex genomfört tidsomvandling eller tecknat ett uttryck för fart	1 g
	Redovisad godtagbar tankegång för beräkning av farten med godtagbart svar	+ 1 g

Figur 31. Bedömningsanvisning till uppgift 1b vt 2005 s. 5 (Skolverket, 2005)**. Här har lösningsteknik 5 används med koefficient. Eleven ska lösa en DC uppgift inom området aritmetik och geometri (se Figur 22).**

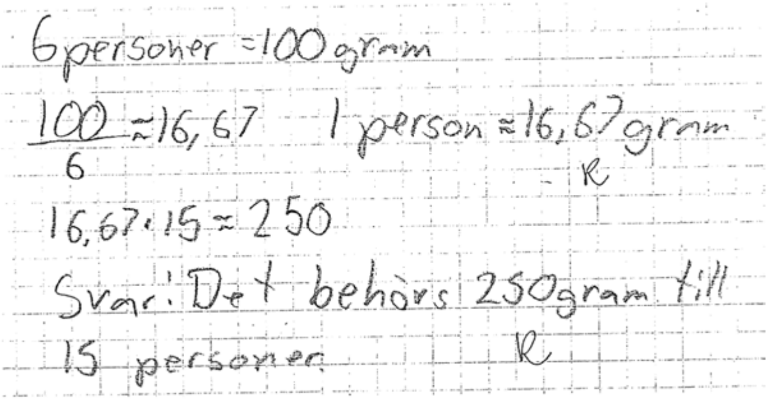
Lösningsteknik *4 Korsvis multiplikation* förekom inte alls på de undersökta nationella proven. Den vanligast förekommande lösningstekniken på MV-uppgifter är *5 Koefficient* (9%) och den minst vanliga (förutom teknik 4 som saknas) är teknik 2 Sambandsmultiplikation (10%). Den vanligaste tekniken även för att lösa DC uppgifter är *5 Koefficient*. I Figur 31 ges ett exempel på en DC-uppgift löst med teknik 5. I detta fall är beräkningen endast framställd i texten som jag har tolkat som att en koefficient ska beräknas det vill säga hastigheten. Därför kategoriseras uppgiften som teknik 5.

För uppgifter som klassificerats som NC är både *5 Koefficient* (5%) och *1 Vägen över ett* (5%) de vanligaste lösningsteknikerna. I Figur 32 visas ett exempel på lösningsteknik 1 eftersom det enligt exemplet är föreslaget att beräkna vad en 1 SEK är värd i ISK. Inte heller här har några direkta beräkningar visats utan jag har tolkat texten som att det är önskvärt att beräkna vad en SEK är värd i ISK.

4. a)	**T ex ”Mycket dyrare på Island” (≈ 18 SEK dyrare eller ≈ 172 ISK dyrare)**	**(Max 1/1)**
	Ansats till lösning t ex beräknat vad 1 SEK är värd i ISK eller något resonemang utifrån tabellvärdena	1 g
	Beräknat priserna i någon valuta eller tydligt resonemang med godtagbart svar	+ 1 vg

Figur 32. Bedömningsanvisning till uppgift 4a från vt 2002 (Skolverket, 2002)**. Lösningen har bedömts använda teknik 1 eftersom lösningen använder sig av vad 1 SEK är värd i ISK.**

För att belysa att jag även funnit lösningsteknik 1 hos elevernas lösningar ger jag här en elevlösning på uppgift från del II från NP vt 2010, s. 3.



6 personer = 100 gram

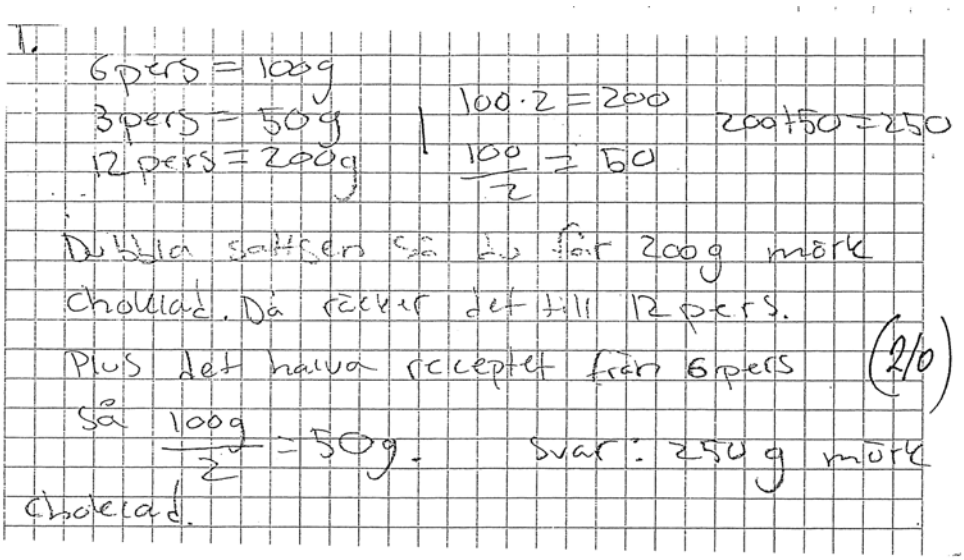
$\frac{100}{6} \approx 16,67$ 1 person ≈ 16,67 gram

R

$16,67 \cdot 15 \approx 250$

Svar: Det behörs 250 gram till 15 personer   R

Eleven har som ett första steg beräknat vad åtgången av choklad blir för en person (16,67) och därefter multiplicerat med det nya antalet personer. Denna lösning tolkar jag som en ”vägen över ett” teknik. I bedömningsanvisningen är det också teknik 1 som förordas. I min undersökning av elevlösningar har jag hittat en variant ytterligare:



1.

6 pers = 100 g

3 pers = 50 g

12 pers = 200 g

$100 \cdot 2 = 200$

$\frac{100}{2} = 50$

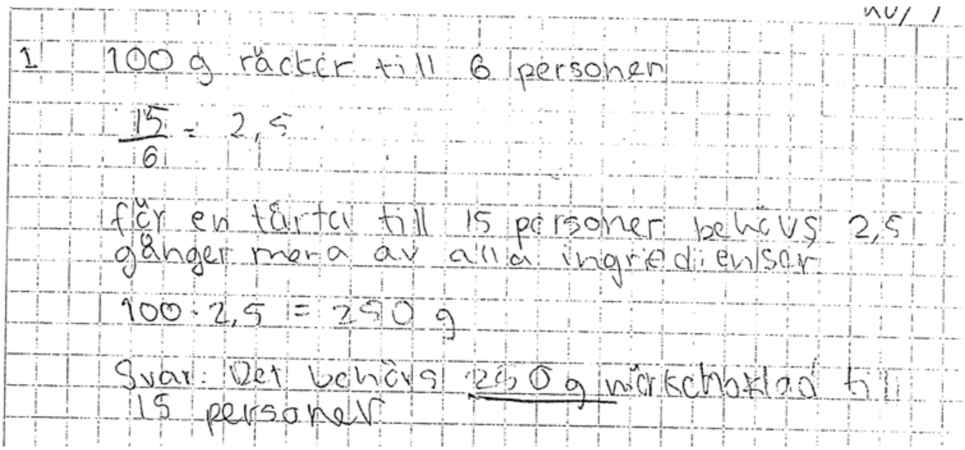
$200 + 50 = 250$

Dubbla satsen så du får 200 g mörk choklad. Då räcker det till 12 pers. Plus det halva receptet från 6 pers så $\frac{100g}{2} = 50g$. Svar: 250 g mörk chokład.

(2/0)

Eleven räknar stegvis ut åtgången av choklad för 3 personer och 12 personer. Jag bedömer att denna elevlösning använder sig av teknik 2 eftersom eleven använder sig av ett samband inom mätenheterna.

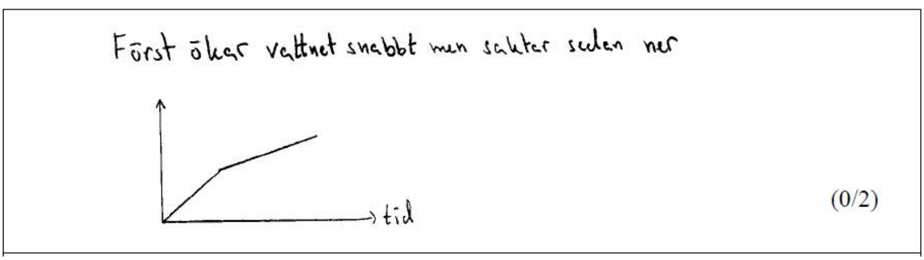
Ytterligare en variant på samma uppgift är



Denna elevlösning använder en tredje variant där det första steget blir att beräkna hur sambandet är mellan antalet personer för den lilla eller den stora tårtan (2,5). Eftersom jämförelsen görs inom samma mätenhet så tolkar jag denna lösning som genomförd med teknik 2.

Den minst vanliga uppgiftstypen QP/QC har lösningsteknik 5 *Koefficient* som den mest förekommande. I Figur 33 visas ett exempel på lösningsteknik 6 *Övrigt* för en QP/QC-uppgift. Uppgiften visar att svaret ska innehålla en graf samt en berättande text. Ingen av de andra teknikerna 1-5 passar in här utan lösningen tolkas som en teknik 6 *övrigt*. På grund av sekretessen kan inte en uppgift med teknik 5 från de nationella proven visas här eftersom den inte finns med i de öppna prov som finns att tillgå.

Bedömda elevarbeten till uppgift 8 c



Figur 33. Bedömningsanvisning för uppgift 8c (se uppgiften på s. 89) vt 2005 s. 9 (Skolverket, 2005)**. Lösningen bedöms använda teknik 6.**

Sammanfattning

Den vanligaste lösningstekniken i de tre läromedlen totalt sett var teknik 3 *proportion* (34%). Det finns dock skillnader om man ser på de tre läromedlen individuellt då till exempel den röda boken har flest lösta exempel av teknik 5 och det blå och gröna läromedlet har flest exempel lösta med teknik 5. Teknik 4 saknas för övrigt i de undersökta läromedlen. De undersökta nationella proven innehöll samtliga tekniker utom teknik 4 och den vanligaste lösningstekniken var nr 5 *koefficient* (35%). Vad avser lösningsteknik beroende på uppgiftstyp är det i de undersökta läromedlen vanligast med lösningsteknik 5 *koefficient* på MV-uppgifter, lösningsteknik 3 på DC-uppgifter och lösningsteknik 2 på NC-uppgifter. QP/QC saknas som lösta uppgifter om proportionalitet. På de nationella proven anges lösningstekniker endast på del II med miniräknare och längre svar. MV-uppgifterna löses med teknik 5 vilket är samma som i läromedlen. DC uppgifterna löses i högre frekvens med lösningsteknik 5 vilket skiljer sig i jämförelse med läromedlen. Lösningsteknikerna 1 och 5 används mest på NC-uppgifter på nationella prov vilket avviker från läromedlen som använder teknik 2. Till QP/QC-uppgifter på nationella prov används teknik 5 mest vilket skiljer sig från läromedlen som inte angivit några lösta exempel med proportionalitet av typen QP/QC.

5.3 Teoretiska modeller för proportionalitet i läromedel och nationella prov

Proportionalitetsbegreppet i läroplaner

Eftersom inte proportionalitet nämns i kursplanen för Matematik A så återstår det att gå till tidigare kursplaner för att se hur proportionalitet beskrivs av kursplaneförfattare.

Efter gymnasieutredningen kommer den första läroplanen för gymnasiet ut 1965 skriven av Olof Magne. I anvisningar och kommentarer anges att grundstoffet kan inrymmas under rubrikerna: algebra, geometri, funktionslära, sannolikhetslära och statistik. Proportionalitet omnämns under linjära funktioner.

> *Begreppet proportionalitet behandlas med praktiska tillämpningar.*
> (Skolöverstyrelsen, 1965, s. 263)

Avsnittet innan detta citat behandlar uträkning av proportionalitetskonstanten och i meningen efter nämns procent. Detta är väl överensstämmande med de undersökta läromedlen i Matematik A så när som på sannolikhetsläran som numera finns i kursen Matematik B.

Med bakgrund av erfarenheterna av 1965 års läroplan kom det ett förtydligande 1972 skrivet av skolinspektör Sven Hilding. Proportionalitet finns under centrala moment nummer 2 åk 1. Där nämns följande funktioner som centrala: $y = ax^2$, $y = k/x$, $y = \sqrt{x}$

I beskrivningen om proportionalitet omnämns proportionalitet på följande sätt:

Grafiska bilden av proportionalitet, numerisk behandling av proportionalitet, bl.a. på räknesticka utan slidförskjutning, bestämning av proportionalitetskonstant. Omvänd proportionalitet, proportionalitet mot kvadraten på en variabel

(Skolöverstyrelsen, 1972, s. 7)

Därefter följer kommentarer om de olika momenten. Proportionalitet nämns under linjära funktioner:

Linjära funktioner intar en central plats i gymnasiets funktionslära och alla elever bör eftersträva grundlig kännedom om dem. Det kan vara lämpligt att börja med proportionalitet och i några exempel avgöra om proportionalitet föreligger eller inte. Illustrationen $y = kx$ *underlättar förståelsen för begreppet. Man bör främst undersöka om ett antal punkter, svarande mot mätvärden av något slag, ligger på en rät linje eller inte; avvikelser inom gränsen för mätnoggrannhet bör därvid tolereras.*

(Skolöverstyrelsen, 1972, s. 16)

Skolöverstyrelsen ger även förslag på att den räta linjen kan, men behöver inte, behandlas med vektorer. Som mål under linjära funktioner anges:

Alla elever skall kunna:

- Åskådliggöra funktioner av värdetabeller eller formler
- Avgöra om i en given värdetabell, formel eller graf den ena variabeln är proportionell mot den andra. Behandla enkla problem innehållande proportionalitet mot x^2, $\frac{1}{x}$ och $\frac{1}{x^2}$. Dessa funktioner omnämns igen under centrala moment algebra och derivata.

Beskrivningarna från 1972 års studieplan ingår sedermera i Supplement 75 (Skolöverstyrelsen, 1982, s. 20). Där beskrivs proportionalitet i 4 punkter:

1) Värdetabell och diagram
2) Tabeller och kurvritning
3) Proportionalitetsfaktor
4) Proportionalitet mot x^n ($y = kx^2$, $y = \frac{k}{x}$, $y = \frac{k}{x^2}$, $y = k\sqrt{x}$)

Beskrivningen ovan kan i stort sett återfinnas i beskrivningen av hur proportionalitet framställs i de tre undersökta läromedlen, där de 4 punkterna kan ses hos i inledningarna av avsnittet om proportionalitet (se bilagorna 1-3).

Nationella prov

Eftersom proportionalitet inte finns med i Lpf 94 (Skolverket, 1994) eller Gy2000 (Skolverket, 2000) finns det heller inte med hos provkonstruktörerna provkonstruktörerna som ett mål för det nationella provet i Matematik A. Däremot nämns proportionalitet i grundskolans läroplan Lpo94 i strävansmålen för år 9:

> *Strävan skall också vara att eleven utvecklar sin tal- och rumsuppfattning samt sin förmåga att förstå och använda*
>
> *– grundläggande talbegrepp och räkning med reella tal, närmevärden, proportionalitet och procent*

Därefter omnämns proportionalitet under uppnåendemålen:

> *– ha goda färdigheter i och kunna använda överslagsräkning och räkning med naturliga tal och tal i decimalform samt procent och proportionalitet i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med tekniska hjälpmedel*
>
> Från mål att uppnå i skolår 9 (Skolverket, 2008a)

Ett exempel tillhandahållet av PRIM-gruppens rapport *Likvärdig bedömning*[24] får illustrera ovanstående:

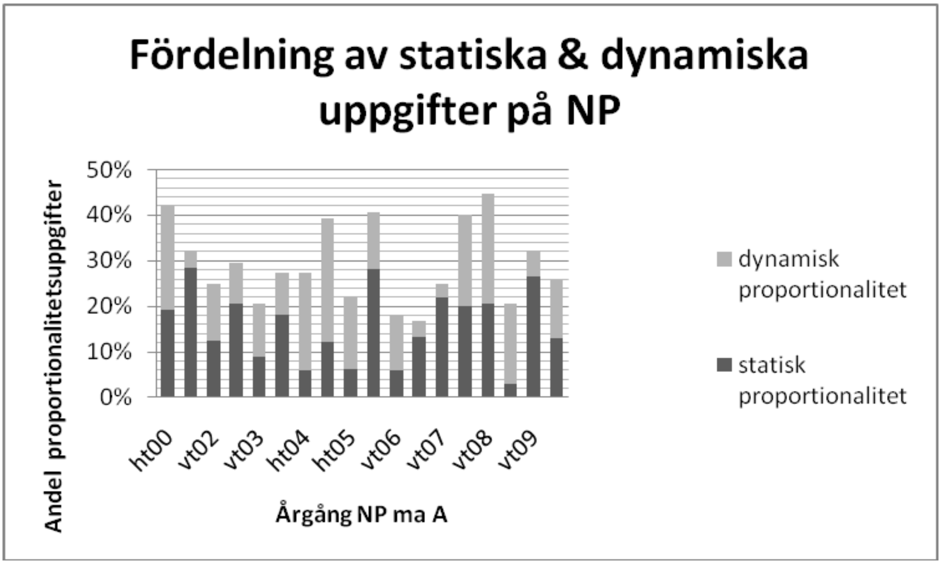
En avgift på 60 kr ökar med 15 %.
Bestäm den nya avgiften. Svar:____________ kr

Detta ges som ett exempel på målet men är fokuserat på huvudräkning. Proportionalitet som begrepp kommenteras inte.

I uppgifterna på de nationella proven har fördelningen mellan statisk och dynamisk proportionalitet undersökts.

---

[24] Dnr 2003:2800 www.skolverket.se acc 20110127



Figur 34. Fördelningen av statisk och dynamisk proportionalitet på nationella proven Ma A. (n=152)

Förhållandet mellan statiska och dynamiska proportionalitetsuppgifter varierar mellan proven och på proven ht 2000-vt 2010 är kvoten 2,0, det vill säga det är i genomsnitt dubbelt så många statiska proportionalitetsuppgifter som dynamiska uppgifter inom varje prov. Den högsta andelen statisk proportionalitet finns i provet vt 2001 (29%) medan den största andelen dynamisk proportionalitet återfinns vt 2005 (27%). Minst andel statisk proportionalitet innehåller uppgifter från ht 2009 (3%) och minst andel dynamisk proportionalitet innehåller uppgifter från ht 2007 och vt 2007 (3%). Totalt sett är det 16% av poängen som är statisk proportionalitet och 14% som är dynamisk proportionalitet.

- Statisk proportionalitet förekommer mest inom områdena aritmetik (53%) och geometri (26%).
- Dynamisk proportionalitet förekommer mest inom områdena aritmetik (49%) och funktioner (33%).

Att aritmetik ligger i topp har delvis sin grund i att andelen aritmetikuppgifter stämmer överens med de nationella provens förutsättningar.

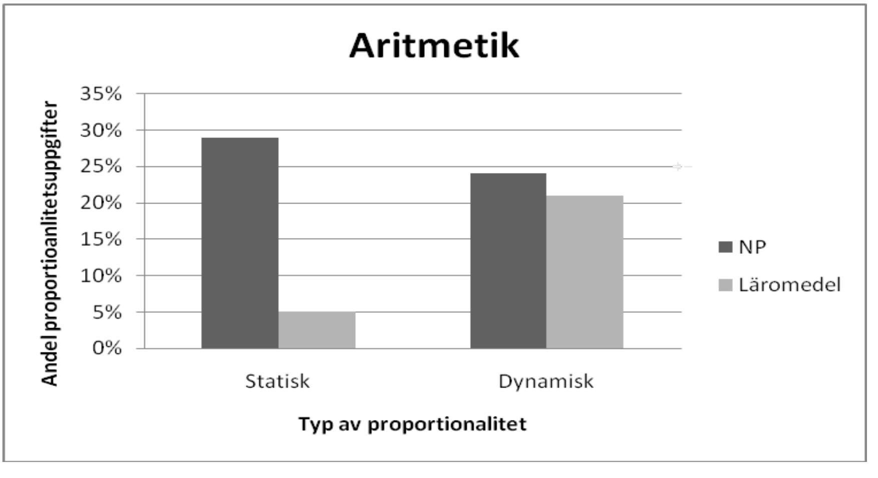
Läromedel

I samtliga tre läromedel finns proportionalitet som ett separat kapitel/avsnitt före funktionskapitlet.

Tabell 8. Översikt hur proportionalitet representeras i de tre läromedlen.

Läromedel	Antal sidor om propor-tionalitet	Antal uppgifter i kapitlet	Antal grafer	Typ av proportionalitet
Röd	10	61	8	3 typer: Direkt, omvänd (kx, kx^2, kx^{-1})
Grön	7	44	9	3 typer: Direkt, omvänd (kx, $kx^{-1,}$ kx^{-2})
Blå	6	51	8	4 typer: direkt omvänd (kx, kx^2, kx^{-1}, $kx^{-1/2}$)

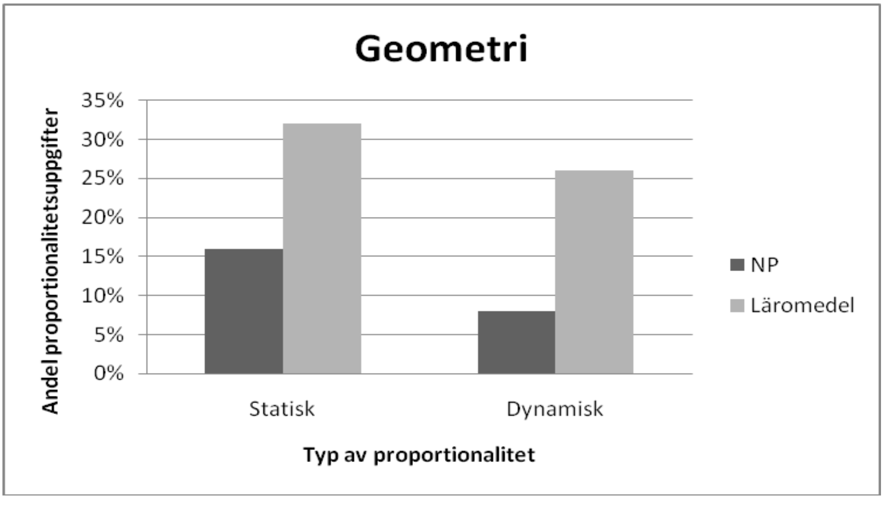
I en jämförelse med läromedlens beskrivningar av proportionalitet återfinns i stort de fyra punkterna från Supplement 75 (se Tabell 8; jfr. ovan s. 100). Samtliga läromedel har en graf och en värdetabell i beskrivningen av proportionalitet (se bilagorna 1, 2 och 3). Dessa grafer har även en värdetabell som grund till grafen. Därefter följer en beskrivning av hur proportionalitetskonstanten beräknas med hjälp av tabellen samt att grafen blir en rät linje genom origo. De tre läromedlen är helt eniga vad avser de tre första punkterna men skiljer sig åt i den fjärde punkten. Skillnaden består i vilka typer av proportionalitet som tas upp i lärostoffet. Flest typer tar det blå läromedlet upp. Antalet sidor i läromedlen varierar och det röda har flest sidor om proportionalitet (10) och även flest antal uppgifter i kapitlet. Antalet figurer med grafer är ungefär lika i alla tre läromedlen.



Figur 35. Jämförelse mellan nationella prov och läromedel angående typ av proportionalitet inom Aritmetik (n=175 för nationella prov, n=737 för läromedel)

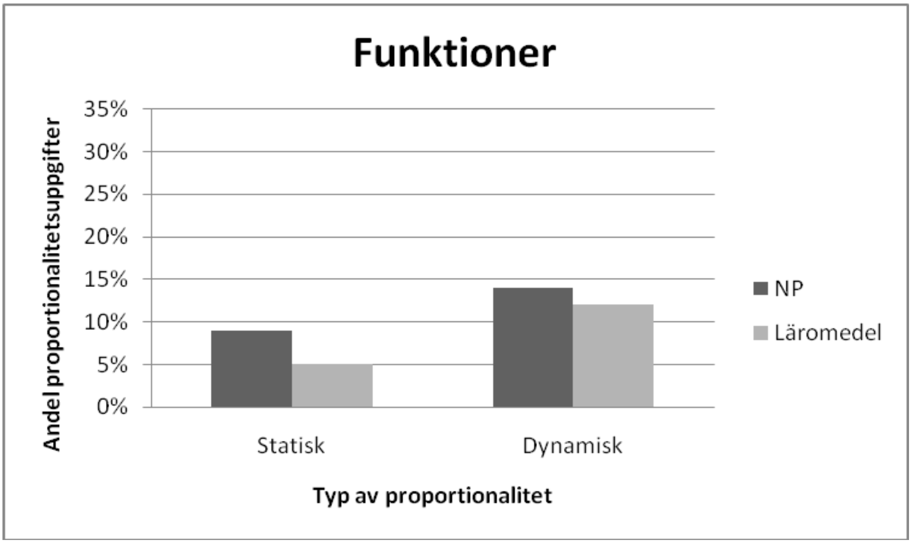
Från Figur 35 kan det konstateras att de nationella proven inom området aritmetik har en övervägande del statisk proportionalitet. Läromedlen har en betydligt mindre andel statisk proportionalitet.

När det gäller dynamisk proportionalitet är det enligt Figur 36 en liknande fördelning mellan de nationella proven och läromedlen inom aritmetik.



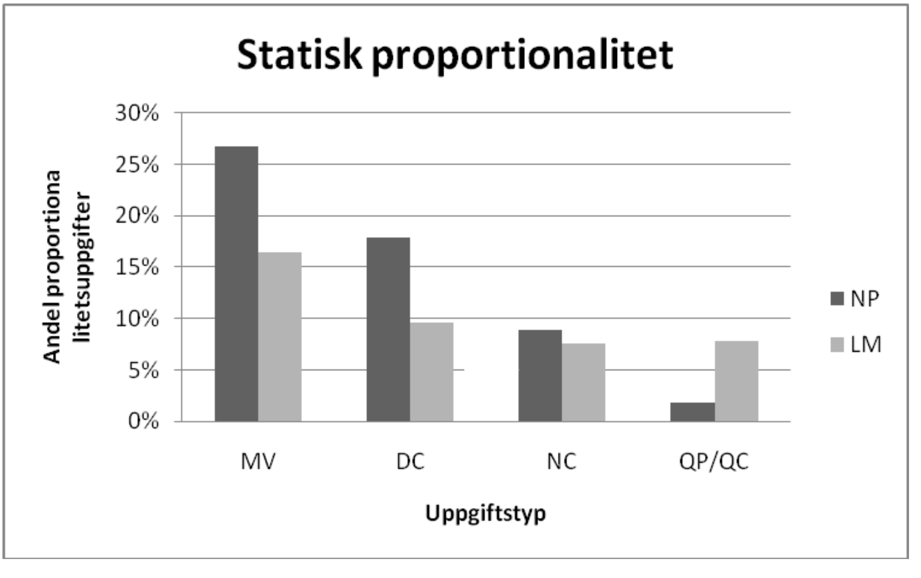
Figur 36. Jämförelse mellan nationella prov och läromedel inom kapitlet geometri med avseende på statisk och dynamisk geometri. (n=175 för nationella prov, n=737 för läromedel)

Inom geometriuppgifterna är skillnaden mellan läromedel och NP inom dynamisk proportionalitet 16 procentenheter och inom statisk proportionalitet 18 procentenheter (se Figur 36).



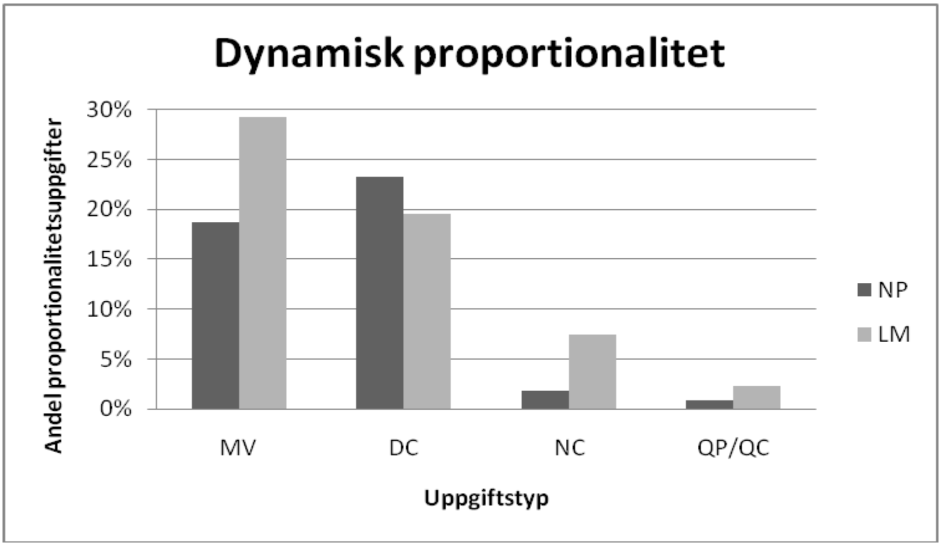
Figur 37. Jämförelse mellan statisk och dynamisk proportionalitet inom kapitlet funktioner. (n=175 för nationella prov, n=737 för läromedel)

Inom funktioner finns inga stora skillnader mellan läromedel och nationella prov (se Figur 37). Det finns ungefär lika stor andel uppgifter i läromedlen som i de nationella proven och fördelningen mellan statisk och dynamisk proportionalitet är ungefär samma.



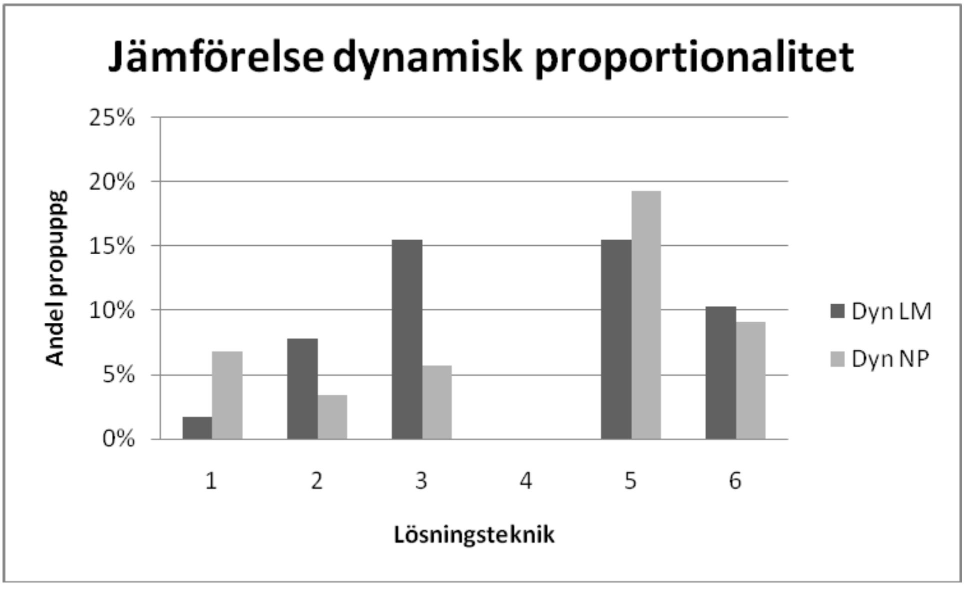
Figur 38. Fördelning av statisk proportionalitet på uppgiftstyp (n=152 för nationella prov, n=737 för läromedel)

I Figur 38 finns en sammanställning över hur statisk proportionalitet fördelar sig över de olika uppgiftstyperna MV, DC, NC och QP/QC. Den vanligaste uppgiftstypen med statisk proportionalitet är MV och det gäller både nationella prov och läromedel. I en jämförelse mellan nationella prov och läromedel så skiljer sig dessa åt som mest i MV-uppgifterna. Men om skillnaden mellan de nationella proven och läromedlen är 10% i MV-uppgifterna med statisk proportionalitet har de nationella proven och läromedlen ungefär lika stor andel NC-uppgifter med statisk proportionalitet. Den absolut minsta andelen statiska proportionalitetsuppgifter har de nationella proven av typen QP/QC (2%).



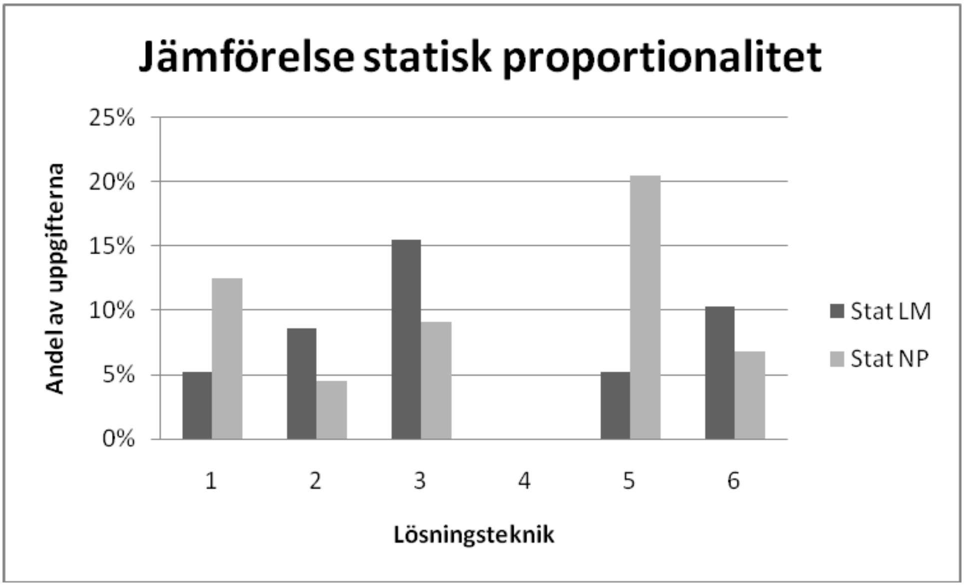
Figur 39. Översikt dynamisk proportionalitet och uppgiftstyper (n=152 för nationella prov, n=737 för läromedel)

För dynamisk proportionalitet finns det en del skillnader jämfört med statisk proportionalitet (se Figur 39). Den vanligaste uppgiftstypen med dynamisk proportionalitet är fortfarande MV hos läromedlen men de nationella proven har istället som den vanligaste uppgiftstypen DC. Vid en jämförelse mellan NP och läromedel så är den största skillnaden i MV-uppgifter med dynamisk proportionalitet (10%). Den minst förekommande uppgiftstypen är QP/QC i de nationella proven (1%).



Figur 40. Jämförelse av dynamisk proportionalitet mellan läromedel och nationella prov med avseende på lösningstekniker. (n= 96 för läromedel och n=86 för läromedel)

Om man jämför läromedel med nationella prov med avseende på lösningstekniker och dynamiska proportionalitetsuppgifter ser vi att att dynamisk proportionalitet är vanligt förekommande i läromedel i samband med lösningsteknik 3 och 5 (se Figur 40). I de nationella proven är dynamisk proportionalitet vanligast när lösningsteknik 5 används. Den största skillanden mellan läromedel och nationella prov erhålls för dynamisk proportionalitet vid lösningsteknik 3 och för statisk proportionalitet vid användningen av lösningsteknik 5 (se Figur 41).



Figur 41. Jämförelse av statisk proportionalitet mellan läromedel och nationella prov med avseende på lösningstekniker

Sammanfattning

När vi studerar de olika typerna av proportionalitet är det naturligt att se hur läroplanen beskriver detta begrepp. I fallen med Lpf 94 och Gy2000 så innehåller de inte begreppet proportionalitet. I läromedlen finns det däremot ett speciellt kapitel om proportionalitet som en särskild avdelning innan begreppet funktioner presenteras. Detta är i hög grad överensstämmande med Lgy70. Från och med Lgy65 nämns begreppet proportionalitet och från och med Supplement 75 rekommenderas att begreppet presenteras i samband med en graf. Detta stämmer väl överens med de tre läromedlen. Vad det gäller vilka typer av proportionaliteter som ska tas upp i undervisningen varierar det mellan de tre undersökta läromedlen. Statisk proportionalitet är vanligast inom ämnesområdet geometri i läromedel och nationella prov. Dynamisk proportionalitet är vanligast förekommande inom funktioner. Den vanligaste lösta proportionalitetsuppgiften i läromedlen är en DC-uppgift med dynamisk proportionalitet som löses med teknik 3.

5.4 Sammanfattning resultat

Resultatet av denna studie visar att proportionalitet är ganska ensidigt hanterat i de undersökta läromedlen såväl som på de nationella proven vad gäller uppgiftstyper. Det har även framkommit att det finns skillnader mellan läromedel och de nationella provens hantering av begreppet proportionalitet. I läromedlen påträffades flest proportionalitetsuppgifter under rubriken geometri medan det på de nationella proven fanns mest proportionalitetsuppgifter under aritmetik. Begreppet omnämns *inte* i Lpf 94 men har ett eget avsnitt i samtliga undersökta läromedel. Avsnittet är placerat före kapitlet om funktioner i samtliga läromedel och har en egen rubrik. Den vanligaste uppgiftstypen i både läromedel och de nationella är *saknat värde* (MV). I de undersökta elevlösningarna på de nationella proven har denna uppgiftstyp i genomsnitt lösningsproportionen 0.5. Den uppgiftstyp som var minst förekommande i både de nationella proven och läromedel var Kvalitativ förutsägelse & jämförelse (QP/QC). När det gäller lösta exempel om proportionalitet i läromedel är lösningstekniken *proportion* (3) den vanligaste medan det på de nationella proven är vanligast att använda lösningsteknik med *koefficient* (5). Det saknades emellertid en teknik hos både läromedlen och de nationella proven, nämligen tekniken *korsvis multiplikation* (4). Det var också högre grad av variation av lösningstekniker på de nationella proven jämfört med läromedlen. När det gäller teoretiska modeller för proportionalitet används inom geometri vanligen statisk proportionalitet medan det inom funktioner är vanligare att använda dynamisk proportionalitet. Det finns en viss övervikt av statiskt proportionalitet på de nationella proven jämfört med läromedlen, där dynamisk proportionalitet är mer vanlig utom för uppgiftstypen DC (*bestäm k*). Båda teoretiska modeller förekommer dock inom alla uppgiftstyper och alla studerade innehållsområden.

6. Diskussion

I detta avsnitt kommer syftet med avhandlingen att övervägas och en diskussion föras om hur väl resultatet svarar mot syftet och om målet med studien är uppfyllt. Eftersom det är en studie i matematikdidaktik så är det även av intresse att diskutera vad studien kan innebära för undervisning i matematik. För att påminna läsaren om vilket syftet var presenteras det igen här:

Hur hanteras proportionalitet i den svenska gymnasieskolan i kursen Matematik A i några läromedel och nationella prov?

Avsnittet kommer att inledas med en diskussion av resultaten för att sedan följas av en diskussion om metoden. Därefter följer slutsatser samt några möjliga implikationer av studien med förslag på fortsatt forskning.

6.1 Resultatdiskussion

Resultatet av föreliggande studie visar att så mycket som var fjärde övningsuppgift i de studerade läromedelskapitlen för Matematik A direkt berör proportionalitet, vilket kan ses som anmärkningsvärt då detta begrepp inte explicit omnämns i den sedan flera år tillbaka gällande kursplanen för Matematik A. En liknande fördelning kunde ses i de studerade nationella proven för kurs A. En möjlig förklaring till detta kan vara att begreppet finns nämnt som ett mål i kursplanen för grundskolans år 9 och att gymnasiets kärnämneskurs Matematik A ses som en repetition och fördjupning av grundskolans matematik. En annan förklaringsgrund kan sökas i att traditionen från tidigare kursplaner för gymnasiets matematik lever kvar i läroböckerna, en tradition där proportionalitet hade en given plats i kursen med rötter ändå från antiken och de tidiga matematikläroböckerna. Som nämndes i inledningen till detta arbete är proportionalitet ett innehållsmässigt centralt begrepp även i övriga matematikkurser i gymnasiet.

Proportionalitet hanteras emellertid på ett ganska ensidigt sätt både i läromedel och nationella prov vad avser uppgiftstyp, där uppgifter av typen saknat värde starkt dominerar tillsammans med typen bestäm koefficient. Av de lösningstekniker som förekommer är det en rikare variation på de nationella proven än i läromedlen, där dock en specifik teknik inom analysverktyget (korsmultiplikation) inte förekom alls. Den teoretiska modellen för proportionalitet skiljer sig mellan de matematiska områdena geometri och funktioner. Diskussionen av de erhållna resultaten är här strukturerad utifrån de tre aspekterna typ av uppgift, lösningsteknik och teoretisk modell.

Uppgifter om proportionalitet

I min diskussion utgår jag från följande antagande (se även Cramer & Post, 1993): För att eleven ska ges goda möjligheter till att utveckla en grundläggande kunskap om proportionalitet är det önskvärt att de i sin undervisning får möta och arbeta med en varierad uppgiftsflora av de olika uppgiftstyperna inom det analysverktyg som använts, dvs. *saknat värde* (MV), *bestäm k* (DC), *numerisk jämförelse* (NC) och *kvalitativ förutsägelse och jämförelse* (QP/QC). Den undersökning av läromedel som presenterats här visar att det var liten variation av de olika uppgiftstyperna. Läromedlen innehåller till övervägande del uppgifter av typen MV och till viss del DC. Det är en mycket låg andel av uppgifter inom kategorierna NC och QP/QC. Överensstämmelsen mellan de nationella proven och läromedlen var stor när det gäller fördelningen av typ av uppgift. Den historiska undersökningen visade att MV-uppgifter har en lång och stark tradition inom skolmatematiken. Denna tradition kan vara en av anledningarna till att denna typ av uppgifter är den dominerande uppgiftstypen inom både läromedel och nationella prov.

En nackdel med att inte alla uppgiftstyperna är lika mycket representerade i undervisningen om proportionalitet är att detta komplexa begrepp blir alltför ensidigt skildrat. Enligt Vergnaud (1996) är det viktigt att eleverna får möta begreppet i varierade situationer och om uppgiftstyperna begränsas så starkt får inte eleverna den möjligheten. I läromedlen fanns det mest proportionalitetsuppgifter inom området geometri medan det på de nationella proven var övervägande aritmetikuppgifter som berörde proportionalitet. Detta gör att det finns en risk att eleverna inte får tillräckliga möjligheter att utveckla sina kunskaper inom den kontext där de utvärderas. Liknande resultat har framkommit andra studier (se t.ex. Lesh, Post och Behr, 1988).

Denna studie har begränsats till att endast omfatta undersökning av läromedel och nationella prov. Möjligheten finns att läraren i klassrummet kompletterar med uppgiftstyper som saknas i läromedlet (jfr. Skolinspektionen, 2010). I de tre undersökta läromedlen varierade antalet uppgifter om proportionalitet men motsvarade i stort variationen i det totala antalet övningsuppgifter. Skillnaden mellan läromedlen kan bero på att ett av läromedlen innehåller både kurs A och kurs B. Det är då rimligt att det inte ryms lika många uppgifter jämfört med ett läromedel som endast innehåller en kurs. Den stora variationen av antalet proportionalitetsuppgifter på de nationella proven verkar vara mer slumpmässig. Jag inte har insikt i provkonstruktörernas direktiv eller uppfattning om vilken fördelning av olika typer av uppgifter som bör förekomma men en möjlighet är att det denna variation beror av slumpen i den meningen att den inte är en medvetet genomförd. En orsak skulle kunna vara att olikheter mellan proven skapas för att lärare och elever inte ska kunna förutse vilka uppgifter som kommer på de nationella proven. Lösningsproportionerna från de undersökta nationella proven visar att MV- och DC-uppgifter är de uppgifter som flest elever klarar. Detta stärker tesen att eleverna övar mest på dessa typer av uppgifter genom deras dominans i läromedlen.

Tekniker om proportionalitet

I denna studie har det framkommit att de tre undersökta läromedlen och de undersökta nationella proven innehåller samtliga lösningstekniker ur analysverktyget utom en, *korsvis multiplikation*. En faktor som kan ha bidragit till att denna teknik inte finns med i läromedlen är att forskning visat att korsvis multiplikation ofta leder till att eleverna endast lär sig själva proceduren (se t.ex. Hart, 1988). Tekniken är en effektiv metod att lösa proportionalitetsuppgifter när eleven har kunskap om begreppet men innebär också att det finns en risk att det endast blir en inlärning av en regel utan förståelse. Det finns dock en möjlighet att läraren under lektionstid tar upp lösningstekniken utanför läromedlet så att eleven får ta del av denna teknik. Det är då nödvändigt att eleven har mött proportionalitet i olika situationer för att det inte endast ska bli en procedurinlärning.

Figurerna 29 och 30 visar på ganska stora skillnader mellan läromedel och nationella prov när det gäller hur lösningstekniker rekommenderas för olika typer av proportionalitetsuppgifter. I läromedlens lösta exempel är teknikerna 3, 5 och 2 vanligast (i den ordningen) medan motsvarande för de nationella provens lösningsanvisningar är teknikerna 5, 1 och 3. I läromedlen finns också en starkare koppling mellan lösningsteknik och typ av uppgift än i de nationella proven. I de elevlösningar till nationella prov som studerades hittades en rik variation av tekniker. Tekniken *vägen över ett* och *bestäm koefficient* var två förväntade metoder men det förekom även en tredje variant där eleven stegvis räknar fram svaret genom fördubbling. Den påminner om *vägen över ett* förutom att den inte räknar ut en enhet och har drag av reguladetriteknik. *Vägen över ett* har jag också funnit som teknik i flera äldre läromedel som t.ex. Biörk (1643) och Nilsson och Wigforss (1951). Den teknik som eleven har mest användning av i de högre matematikkurserna är ändå tekniken *bestäm koefficient* eftersom det är vanligt att bestämma proportionalitetskonstanter inom många olika kontexter. Det är också den vanligaste tekniken på de nationella proven.

Både läromedel och nationella prov lyfte tydligt fram teknik 5, *bestäm koefficient*, men läromedlen hade som den vanligaste tekniken *proportion*, dvs. teknik 3, och betonade även teknik 2 (*sambandsmultiplikation*) medan det i de nationella proven oftare pekades på teknik 1, *vägen över ett*. Dessa skillnader skulle kunna innebära att eleverna inte får tillräcklig träning i den blandning av tekniker som de nationella proven kräver om inte läraren är uppmärksam och går igenom de tekniker som är svagt representerade i läromedlen. Skillnaden mellan dessa olika tekniker har Freudenthal (1983) belyst när han konstruerat begreppen intern och extern proportionalitet. Proportionalitet är ett komplicerat begrepp som behöver en rik flora av olika tillämpningar för eleven. Freudenthal föreslår att proportionalitet till att börja med skall skrivas med uttrycket $s_1 : s_2 = t_1 : t_2$, dvs. som innan Leibniz använde uttrycket $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ för proportionalitet. Det är med den beteckningen lättare att se hur de yttre storheterna förhåller sig i en proportionalitet. I Sverige användes detta skrivsätt i äldre läromedel men har ändrats i modernare material. Kvar finns bara en rest när proportionalitet används inom området skala. En större användning av detta skrivsätt för att tydliggöra att proportionalitet är mer än bara ett förhållande mellan två kvoter skulle kunna stärka undervisningen om detta begrepp. Freudenthal ser proportionalitet som en funktion av ordnade talpar. Vergnaud (1996) använder en liknande idé när han konstruerar sina scheman för proportionalitetsberäkningar. Dessa scheman är gjorda för att belysa de dolda strukturer som proportionalitetsuppgifter innehåller. Vergnaud hävdar att skolan överskattar de explicita kunskaperna och underskattar de implicita. Utifrån en sådan syn är det viktigt att eleverna får arbeta med centrala begrepp som proportionalitet i olika situationer.

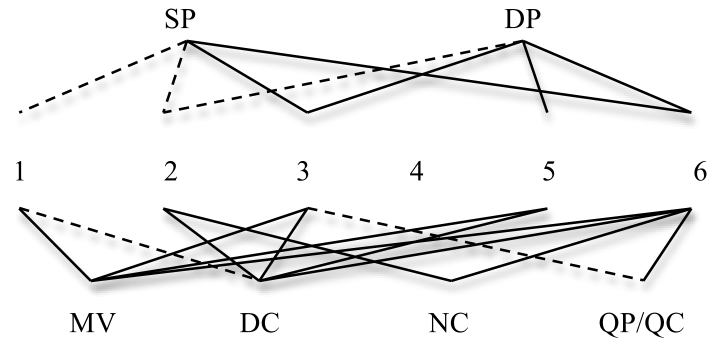
Teoretiska modeller för proportionalitet

Denna avhandling har funnit att uppgifter inom geometri används statisk Statisk och dynamisk proportionalitet är två olika sätt att se på begreppet proportionalitet som historiskt förekommit parallellt under en lång tid. För att begreppet ska skildras för eleven på ett så mångfacetterat sätt som möjligt behöver båda dessa teoretiska modeller hanteras i läromedlen inom samtliga innehållsområden. Denna avhandling har funnit att läromedlen vid uppgifter inom geometri ofta använder statisk proportionalitet medan det inom funktioner är vanligare att använda dynamisk proportionalitet. En observation i detta sammanhang är att de tre läromedel som studerats alla har ett särskilt introducerande avsnitt om proportionalitet, där ordet proportionalitet finns med i avsnittets rubrik (se bilagorna 1, 2 och 3). I samtliga dessa avsnitt används dynamisk proportionalitet som teoretisk modell. Även den exemplifiering som ges är densamma, dvs. likformig rörelse med sträckan proportionell mot tiden, inkluderande både en algebraisk och en grafisk representation. Denna typ av beskrivning kan bygga på traditionen från Lgy70 (se avsnitt 2.7). Dynamisk proportionalitet dominerar också inom kapitlet om funktioner men förbereder alltså inte arbetet med den teoretiska modell av begreppet proportionalitet som är starkt representerat inom aritmetiken och geometrin, dvs. statisk proportionalitet.

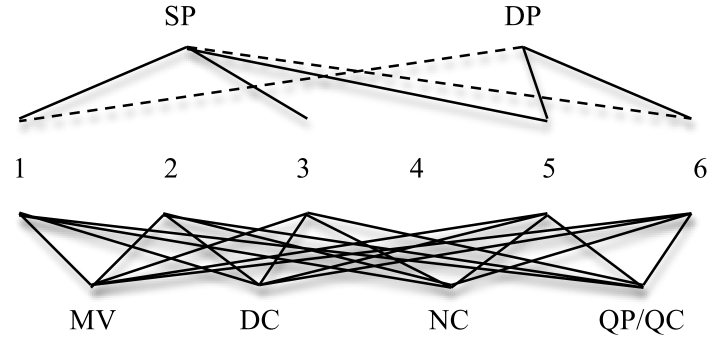
Det finns en viss övervikt av statiskt proportionalitet på de nationella proven jämfört med läromedlen, där dynamisk proportionalitet är mer vanlig utom för uppgiftstypen DC (bestäm *k*). Båda teoretiska modeller förekommer dock inom alla uppgiftstyper och alla studerade innehållsområden. Kopplingarna mellan uppgiftstyp, lösningsteknik och teoretisk modell är ett huvudfokus i studier inom ATD (den antropologiska didaktikteorin), där otydligheter och motsägelser i dessa relationer ses som orsaker till svårigheter både i elevers och lärares arbete (se t.ex.

Barbé et al., 2005). Här har det inte varit möjligt att systematiskt genomföra en sådan analys för respektive läromedel då syftet har varit att få en övergripande bild av hur proportionalitetsbegreppet hanteras i gymnasieskolan (specifik i kursen Matematik A). För att belysa likheter/skillnader mellan läromedlen och de nationella proven inom detta innehållsområde kan ändå en rent kvantitativ jämförelse göras, baserad på de data som presenterats i detta arbete.

Figurerna 42 och 43, grundade på Figur 29, 30, 40, och 41 visar de kopplingar mellan upggiftstyp, lösningsteknik och teoretisk modell som förekommer i de studerade läromedlen respektive nationella proven när det gäller proportionalitet. SP står där för statisk proportionalitet och DP för dynamisk proportionalitet. Siffrorna refererar till den tidigare numreringen av lösningstekniker och MV, DC, NC och QP/QC till de olika uppgiftstyperna i analysverktyget. En streckad linje svarar mot en svagare koppling.



Figur 42. Kopplingar mellan upggiftstyp, lösningsteknik och teoretisk modell för läromedel.



Figur 43. Kopplingar mellan upggiftstyp, lösningsteknik och teoretisk modell för nationella prov.

I läromedlen är teknik 2, 3 och 6 kopplade till både SP och DP men teknik 1 bara till SP och teknik 5 bara till DP. Uppgiftstyperna MV och DC löses med många olika tekniker medan NC och QP/QC bara använder två olika tekniker. För de nationella proven är lösningsteknikerna inte kopplade till vissa uppgiftstyper och båda teoretiska modeller är kopplade till teknikerna 1, 5 och 6. Teknik 3 hänger bara ihop med statistk proportionalitet.

Figurerna ovan ger en ganska ostrukturerad bild av den (samlade) matematiska organisation av begreppsområdet proportionalitet som presenteras i läromedlen. För de vanligaste uppgiftstyperna (MV och DC) finns stor variation på lösningstekniker vilka dock ofta är kopplade till båda teoretiska modellerna. Detta är en otydlighet som kan vara problematisk för de lärande. Teknikerna 1 och 5 är tydligare förankrade inom en teoretisk modell av proportionalitet. För de nationella proven är slutsatserna osäkrare då underlaget för lösningstekniker är den ofta ganska kortfattade framställning som finns i bedömningsanvisningar till bara en del av det nationella provet. Här är det dock delvis andra tekniker som är kopplade till båda teoretiska modeller och alla uppgiftstyper kan lösas med alla tekniker (utom teknik 4 som inte används alls). Teknik 2 saknar förankring i en teoretisk modell. För de nationella proven är alltså nivån "know-how" inom den matematiska organisationen helt öppen: alla typer av uppgifter kan lösas med alla typer av tekniker. Detta öppnar för flexibilitet men lämnar det också otydligt för uppgiftslösaren vad man bör kunna. Även vilken teoretisk modell för proportionalitet som teknikerna är kopplade till verkar godtyckligt eller saknas. Här finns också en stor variation över åren (se Figur 34).

De matematiska organisationer som kan anas bakom de data som presenterats här ser alltså olika ut när det gäller hur proportionalitet hanteras i läromedlen respektive det nationella provet för Matematik A.

6.2 Metoddiskussion

En innehållsanalys av dokument kan inte komma förbi de eventuella svagheter som finns hos de dokument som analyseras (Bryman, 2002). I den här avhandlingen har jag säkerställt att de läromedel som analyserats verkligen används i undervisningen på gymnasiet. Det finns idag inte någon offentlig statistik över vilka läromedel som är mest använda. Det gjorde att jag genomförde en telefonintervju i tre angränsande kommuner som underlag för att välja de tre mest förekommande läromedlen i dessa kommuner. En utökning av intervjuer till flera skolor skulle kunnat ge ett bredare underlag och kanske medföra att andra eller fler böcker behövde undersökas. I denna studie var också tiden en begränsande faktorn som medförde att urvalet bestämdes till tre läromedel. De valda läromedlen är också vanligt förekommande i andra delar av landet. Om tre läroböcker är tillräckligt många för att ge ett bra underlag för denna typ av studie är svårt att säga och kanske medförde kriteriet att de skulle vara de mest använda att de också liknar varandra till viss del, då de har en lång tradition bakom sig. Det är ändå rimligt att utgå ifrån att de är representativa för traditionella svenska läromedel.

Bryman (2002) har även tagit upp en annan svag länk vid innehållsanalys, nämligen kategoriseringen. Det handlar då dels om att kategorierna täcker in undersökningsobjektet väl och inte överlappar varandra, dels att de kan användas på ett tillräckligt entydigt sätt vid tolkningen av det empiriska materialet. I denna avhandling har de olika delarna av analysverktyget fungerat olika väl, där en beskrivning av teknikerna gentemot det empiriska materialet har varit den största utmaningen. När det gäller det senare har jag reliabilitetstestat samtliga delar av verktyget med hjälp av forskarkollegor och kommit fram till att det kan betecknas som stabilt. Någon problematisk överlappning av kategorierna verkar det alltså inte finnas. En utökning med fler kategorier skulle kunna ge en fylligare bild av proportionalitetsbegreppets hantering.

Det använda analysverktyget bygger på litteraturstudier men den kombination av kategorier för uppgiftstyp, lösningsteknik och teoretisk modell som använts här har inte använts tidigare. Det teoretiska ramverk (ATD) som ligger till grund för dessa tre aspekter är emellertid väl etablerat inom matematikdidaktisk forskning och de kategorier för lösningstekniker som använts är utvecklade inom denna forskningstradition. Tre av de använda uppgiftskategorierna är också väl förankrade i den omfattande didaktiska forskning som finns om proportionellt tänkande. Den fjärde kategorin (DC) blev nödvändig att lägga till då läromedlen visade sig innehålla många uppgifter av den typen som inte lät sig inordnas under de andra tre kategorierna. Valet av de i analysverktyget ingående två teoretiska modellerna för begreppet proportionalitet grundades dels i den historiska beskrivningen av begreppets utveckling, dels i didaktisk litteratur om proportionalitet.

En svaghet i de data som presenterats här är det empiriska material som använts för att klassificera lösningstekniker som anses korrekta vid nationella prov. Underlaget är här de bedömningsanvisningar, tillsammans med exempel på elevlösningar, som följer med de nationella proven som stöd för lärarna vid rättningen. Dels finns dessa anvisningar endast för den del av det nationella provet där fullständiga lösningar ska ges, vilket innebär att man inte kan veta var kortsvarsuppgifterna ska placeras in när det gäller lösningstekniker, dels är de ofta kortfattade.

Några kriterier som brukar lyftas fram som nödvändiga för att nå kvalitet hos matematikdidaktisk forskning beskrivs av Lester och Lambdin (1998). Dessa berör forskningsstudiens "röda tråd" (coherence), dvs. att forskningsfrågor och metodologi är tydligt kopplade; att studien genomförs på ett kompetent sätt och är relevant (competence); att utgångspunkter och datainsamling och analys redovisas öppet (openness); att slutsatser är empiriskt grundade och motiverade (credibility); etiska hänsynstaganden (ethics); samt "worthwhileness", dvs. att studien ska kunna generera goda forskningsfrågor, bidra till utvecklingen av teorier för undervisning och lärande i matematik, vara väl förankrad i existerande forskning om det aktuella temat, samt kunna informera eller förbättra undervisningspraxis. Utöver vad som redan beskrivits i denna avhandling i relation till dessa kriterier ska jag här bara kommentera delar av det sista och enligt Lester och Lambdin viktigaste, dvs. "worthwhileness". Den första och sista av de fyra delarna av detta kriterium, dvs. nya forskningsfrågor och relationen till praxis, kommer att behandlas i nästa avsnitt. När det gäller förankringen i existerande forskning har det delvis redan berörts ovan. Föreliggande arbete placerar in sig naturligt i ett växande svenskt forskningsintresse för lärobokens roll i matematikundervisning (se Jablonka & Johansson, 2010, för en aktuell översikt), där fokusering på ett specifikt begreppsområde inom gymnasieskolan tidigare genomförts av Bremler (2003). Beträffande eventuellt bidrag till utvecklingen av teorier för undervisning och lärande i matematik kan resultatet från denna avhandling peka på möjligheter att undersöka och fokusera tydligare på risker med olika former av fragmenteringar och diskontinuiteter i de olika framställningar av det matematiska innehåll som elever möter i undervisning och kunskapsbedömning.

7. Slutsatser och implikationer

Resultatet av föreliggande studie visar att ungefär var fjärde övningsuppgift och lösta exempel i de studerade läromedelskapitlen för Matematik A direkt berör proportionalitet. Ungefär samma omfattning av uppgifter med proportionalitet finns i de nationella prov som studerats, där det dock finns en stor variationen av antalet proportionalitetsuppgifter på olika prov. I läromedlen är det mest vanligt med proportionalitetsuppgifter inom området geometri medan det på de nationella proven är mest vanligt bland aritmetikuppgifter. Det finns därför grund att påstå att proportionalitet är ett centralt begrepp inom kursen Matematik A i gymnasiet trots det faktum att det inte är explicit angivet bland målen i kursplanen.

Proportionalitet hanteras emellertid på ett ganska ensidigt sätt i läromedel såväl som på nationella prov vad avser uppgiftstyp, där uppgifter av typen *saknat värde* starkt dominerar tillsammans med typen *bestäm koefficient*. Detta är uppgiftstyper som är huvudsakligen procedurinriktade samtidigt som de uppgiftstyper som kräver djupare resonemang om begreppsinnehåll, dvs. *numerisk jämförelse* och *kvalitativ förutsägelse och jämförelse* är mycket lite förekommande. Av de lösningstekniker som förekommer är det en rikare variation på de nationella proven än i läromedlen, där dock en specifik teknik inom analysverktyget (korsmultiplikation) inte förekom alls. Det finns ganska stora skillnader mellan läromedel och nationella prov när det gäller hur lösningstekniker rekommenderas för olika typer av proportionalitetsuppgifter. I läromedlen finns också en starkare koppling mellan lösningsteknik och typ av uppgift än i de nationella proven.

De två teoretiska modeller för proportionalitet som har undersökts med hjälp av analysverktyget, dvs. statisk och dynamisk proportionalitet, finns representerad i ungefär lika omfattning i både läromedel och nationella prov. I samtliga introducerande avsnitt om proportionalitet som finns i de studerade läromedlen används dynamisk proportionalitet som teoretisk modell. Ändå bygger läromedlen vid uppgifter inom geometri ofta på statisk proportionalitet medan det inom området funktioner är vanligare att använda dynamisk proportionalitet. Det finns en viss övervikt av statiskt proportionalitet på de nationella proven jämfört med läromedlen, där dynamisk proportionalitet är mer vanlig utom för uppgiftstypen DC (*bestäm k*). Båda teoretiska modeller förekommer dock inom alla uppgiftstyper och alla studerade innehållsområden.

Inom det teoretiska ramverk som analysverktyget grundats på, ATD (antropologisk didaktikteori), beskrivs den kunskap som hanteras inom en institutionen (som t.ex. skolan) med hjälp av den matematiska organisation (eller praxeologi) som beskriver kopplingarna mellan praktisk kunskap (typ av uppgifter och tekniker för att lösa dessa uppgifter) och teoretisk kunskap (som beskriver och förklarar den praktiska kunskapen, i denna studie kallat teoretisk modell). De data som presenterats i denna studie ger en ganska ostrukturerad bild av den matematiska organisationer av begreppsområdet proportionalitet som presenteras i läromedel och i nationella prov och de ser även olika ut när det gäller hur proportionalitet hanteras i läromedlen respektive det nationella provet för Matematik A.

I denna studie har det framkommit såväl likheter som skillnader mellan de undersökta läromedlen och de nationella proven när det gäller olika aspekter av uppgiftsyper, lösningstekniker och teoretiska modeller för proportionalitet i gymnasiets kurs Matematik A. Detta är inte förvånande då enligt Johanssons (2003) studie läromedel och läroplaner inte utvecklas i samma takt. Ett tydligt exempel på detta är att proportionalitet finns med explicit som ett eget avsnitt i läromedlen men inte omnämns i kursplanen för Matematik A i Lpf 94. Det finns indikationer på att läromedlen följt traditionen från den gamla läroplanen (med grund i Lgy 65) eftersom Lpf 94 är mindre specificerad när det gäller det matematiska innehållet. Det finns flera studier som visar att en sådan "eftersläpning" inte är ett nytt fenomen utan förekommer på flera håll i Europa (Valverde et al., 2002). I den fria marknad som karakteriserar svensk läromedelsproduktion, där myndighetsgranskning av läromedel numera saknas, har läromedelsförfattarna inte någon skyldighet att följa läroplanen (Johansson, 2003). Det är lärarna som till sist bestämmer vad som skall undervisas i klassrummet och det finns inte några data som visar att undervisningen utförs på liknande sätt bara för att lärarna använder samma läromedel. Därför bör lärare få kunskap om skillnader mellan läromedel och läroplaner, och hur dessa tolkas i nationella prov, så att de i sin verksamhet kan välja det undervisningsinnehåll, inklusive övningsuppgifter, som ger en god variation för eleven kopplat till kursplanernas mål. Trots att eleverna har mött proportionalitet som begrepp innan de kommer till gymnasieskolan, eftersom det är ett lärandemål i årskurs 9, finns ändå indikationer på att många elever har svårigheter med begreppet i kursen Matematik A (se Figur 28).

Det är viktigt att betona att resultaten i detta arbete bara grundar sig på de möjligheter som läromedlen erbjuder eleverna att arbeta med proportionalitet. Hur läromedlet faktiskt används i klassrummet och vilka andra aspekter av begreppet som läraren lyfter fram i sin undervisning kan medföra att ett och samma läromedel kan ge olika läranderesultat i olika klassrum. En mer omfattande kvalitativ klassrumsstudie av lärare och elever i olika undervisningssituationer kring proportionalitet skulle därför vara en angelägen uppföljning av föreliggande studie för att undersöka om det funna resultatet har några förankringar i vad som sker i klassrummet. Det är ändå läraren som till sist bestämmer om inte alltid vilken bok som ska användas men ändå hur den används och har även friheten att t.ex. arbeta även med uppgifter från andra läromedel. Analysverktyget bör kunna användas även vid en sådan typ av studie.

Det är lärarna som har stort inflytande på valet av läromedlen och behöver då olika analysverktyg som stöd för bedömningen av exemplen och uppgifterna. I den här studien har ett sådant verktyg konstruerats och provats ut och bör vara användbart för lärare vid sådana bedömningar. Reliabiliteten visar att det är stabilt och kan användas för undersökning av uppgiftstyper, lösta exempel samt teoretiska modeller för proportionalitet.

Proportionalitet har återigen tagits upp som begrepp i den nya ämnesplanen Matematik 1a, Gy 2011. Begreppet nämns under rubriken samband och förändringar och att det skall förekomma i beräkningar, mätningar och konstruktioner. Men det är fortfarande inte någon beskrivning av begreppet proportionalitet. Det som framkommit i den här studien är att det två olika teoretiska modeller av proportionalitet används och det vore önskvärt att dessa synliggörs för att uppmärksamma lärare, läromedelsförfattare och lärarutbildare om skillnader och likheter. Det finns inte någon läromedelsgranskning idag och därför är det viktigt att ge lärarna ett verktyg som kan användas vid bedömningen av vilken typ av proportionalitet som förordas i uppgifter och lösningstekniker så att läraren kan komplettera med lämpliga typer av tekniker.

Denna studie besvarar inte några varför-frågor om dessa förhållanden och ett sätt att gå vidare skulle kunna vara att undersöka de resterande stegen i den didaktiska transpositionen. Även andra innehållsområden i matematik skulle kunna undersökas på liknande sätt.

- Hur använder läraren i klassrummet de undersökta läromedlen? Vilka uppgifter och lösningstekniker använder läraren i genomgångar och förklaringar?
- Hur ser de utvärderingar av elevernas kunskap som läraren konstruerar ut? Vilka uppgiftstyper används och hur bedöms de?
- Vilka tekniker använder eleverna egentligen i proportionalitetsuppgifter (eller för andra matematiska begrepp)? Hur ser det ut i de högre matematikkurserna, använder de liknande lösningstekniker eller har de förändrats?

Det är också intressant att fråga sig varför det ser ut som det gör:

- Varför är det ungefär samma områden som innefattas i första kursen matematik på gymnasiet som det som gymnasieutredningen kom fram till 1960?
- Varför diskuteras inte olika lösningstekniker utförligare i ämnesplaner och lärarhandledningar?

Proportionalitet är ett begrepp som enligt Lamon (2007) utvecklas i interaktion med matematiska och vetenskapliga system som innehåller ett konstant samband. För att utveckla kunskap om proportionalitet behöver begreppet sättas in i olika kontexter och situationer, t.ex. genom en mer medveten användning av matematisk modellering i klassrummet.

Den nya läroplanen för gymnasiet Gy 2011 kommer att införas från och med hösten 2011 och i den nya ämnesplanen finns alltså åter proportionalitet med, åtminstone i någon av de nya matematikkurserna. Frågan är om detta kommer att innebära någon skillnad när det gäller hur begreppet proportionalitet kommer att hanteras då det redan inom den nuvarande läroplanen, där begreppet inte omnämns i kursplanerna, har ett stort utrymme enligt denna avhandling. Min förhoppning är att detta arbete kommer att uppmärksamma nödvändigheten av att öka medvetenheten om komplexiteten i detta begrepp och att det analysverktyg jag lyft fram för att analysera hur det behandlas i teori och praktik också kan bidra till att utveckla undervisningspraxis.

Referenser

Alfredsson, L., Brolin, H., Erixon, P., Heikne, H., & Ristamäki, A. (2007). *Matematik 4000 kurs A blå lärobok* (1. uppl ed.). Stockholm: Natur & Kultur.

Areskoug, M., & Grevholm, B. (1987). *Matematikgranskning*. Stockholm: Statens Institut för läromedel.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 235-268.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1979). *The role of manipulative materials in the learning of rational number concepts: The rational number project* No. NSF SED 79-20591). Washington: National Science Foundation.

Bosch, M., Chevallard, Y., & Gascón, J. (2005). "Science or magic?" the use of models and theories in didactics of mathematics. *4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* Sant Feliu de Guixols, Spain, February 17-21, 2005.

Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty five years of didactic transposition. *ICMI Bulletin, 58*, 51-65.

Bråkenhielm, P. R. (1841). *Lärobok uti algebra för begynnare*. Stockholm: P.A. Norstedt & Söner.

Brandell, G. (2000). *Reference levels in school mathematics education in Europe.* European Mathematical Society. Retrieved from http://siba-sinmemis.unile.it/projects/Ref/doc_ems_pdf/EMS_NATIONAL_PRESENTATIONS/EMS_SWEDEN.pdf

Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks: An analysis of the levels of difficulty*. Luleå: Luleå tekniska universitet.

Bryman, A. (2002). *Samhällsvetenskapliga metoder* [Social research methods.] (B. Nilsson Trans.). (1. uppl ed.). Malmö: Liber ekonomi.

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations* (Ny utg ed.). New York: Dover.

Celsius, A. (1727). *Arithmetica eller räkne-konst, grundeligen demonstrerad af Anders Celsius. Upsala, tryckt år 1727.* Uppsala: Akademiska tryckeriet.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona: Universitat Ramon Llull.

Comber, L. C., & Keeves, J. P. (1973). *Science education in 19 countries*. Stockholm: Almquist & Wiksell.

Cramer, K. A., & Post, T. R. (1993). Connecting research to teaching: Proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

da Ponte, J. P., & Marques, S. (2007). Proportion in school mathematics textbooks: A comparative study. *5th Congress of ERME, the European Society for Research in Mathematics Education,* Larnaka, Cyprus. 2443-2452.

Euclid, & Commandino, F. (1572). *Euclidis elementorum libri XV, una cum scholiis antiquis. A Fredrico Commandino urbinate nuper in latinum conversi,commentariisque quibusdam illustrati (pisauri, apud camillum francischinum* (F. Commandino Trans.). Londini,: Gulielmus Iones.

Euclid, & Gregory, D. (1703). *Euclidis quæ supersunt omnia. ex recensione Davidis Gregorii M. D. astronomiæ professoris saviliani, & R.S.S* [ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ] (D. Gregory Trans.). Oxoniæ, e Theatro Sheldoniano, an. Dom. MDCCIII:

Euclid, & Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*. New York: Dover.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.

Gennow, S., Gustafsson, I., Johansson, B., & Silborn, B. (2003). *Exponent A röd: Matematik för gymnasieskolan* (1 uppl ed.). Malmö: Gleerup.

Gestrinius, M. (1637). *Martini E. Gestrinii in geometriam Euclidis demonstrationum libri sex ..* Upsaliæ: Æschillus Matthiæ.

Greer, B., Verschaffel, L., Van Dooren, W., & Mukhopadhyay, S. (2009). Introduction, making sense of word problems: Past, present and future. In B. Greer, L. Verschaffel, W. Van Dooren & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and world : Modelling verbal descriptions of situations* (pp. xi-xxv). Rotterdam ; Boston: Sense.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert, & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 198-220). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Håstad, M. (1981). *Svensk matematikundervisning 1950-1980*. Malmö: Utbildnings-produktion.

Hatami, R. (2007). *Reguladetri: En retorisk räknemetod speglad i svenska läromedel från 1600-talet till början av 1900-talet*. Växjö: Växjö universitet.

Helmertz, T. (2010). Bråk och proportion - en jämförelse mellan svenska och japanska läroböcker. (Magisteruppsats, Lärarutbildningen Natur, Miljö och Samhälle, Malmö högskola).

Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repéres, IREM, 59*(Avril), 5-41.

Holmström, M., & Smedhamre, E. (2000). *Matematik från A till E: För komvux och gymnasieskolan* (2 uppl ed.). Stockholm: Liber utbildning.

Holsti, O. R. (1969). *Content analysis for the social sciences and humanities*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence: An essay on the construction of formal operational structures*. New York: Basic books.

Jablonka, E., & Johansson, M. (2010). Using texts and tasks. In B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Pálsdóttir, B. Dahl, & L. Haapasalo (Eds.), *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education* (pp. 363-372). Information Age Publishing.

Johansson, B., & Lybeck, L. (1978). *Proportions- och proportionalitetstänkande hos gymnasieelever, åk 1, N- och T-linjerna*. Mölndal: Pedagogiska institutionen, Göteborgs univ.

Johansson, M. (2003). *Textbooks in mathematics education: A study of textbooks as the potentially implemented curriculum*. Luleå: Luleå tekniska univ.

Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbook: A classroom and curricular perspective*. Luleå: Luleå University of Technology.

Kaid, L., & Johnston, A.W. (1989). Content analysis. In P. Emmert, & L. Barker (Eds.), *Measurement of communication behavior* (pp. 197-217). New York: Longman.

Karplus, E. F., & Karplus, R. (1972). Intellectual development beyond elementary school III: A longitudinal study. *School Science and Mathematics, 72*(8), 735-742.

Karplus, E. F., Karplus, R., & Wollman, W. (1974). Intellectual development beyond elementary school IV: Ratio, the influence of cognitive style. *School Science and Mathematics, 74*(6), 476-482.

Karplus, K., Karplus, E. F., Formisano, M., & Paulsen, A. C. (1979). Proportional reasoning and control of variables in seven countries. In J. Lochhead, & J. Clement (Eds.), *Cognitive process instruction: Research on teaching thinking skills* (pp. 47-103). Philadelphia: Franklin Institute Press.

Karplus, R., & Peterson, R. W. (1972). Intellectual development beyond elementary school II: Ratio a survey. *School Science and Mathematics, 70*(9), 813-820.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983a). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). Orlando,FL: Academic Press.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983b). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), pp. 219-233.

Katz, V. J. (2009). *A history of mathematics: An introduction* (3rd ed.). Boston: Addison-Wesley.

Kiselman, C. O., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan* (1 uppl ed.). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning NCM, Göteborgs universitet.

Kline, M. (1990). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford Univ. Press.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Landquist, J. (1963). *Pedagogikens historia* (7th ed.). Lund: Gleerup.

Läromedelsöversynen. (1988). *Skolböcker: Rapport från läromedelsöversynen*. Stockholm: Allmänna förl.

Lesh, R. A., Post, T. R., & Behr, M. J. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert, & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Hillsdale, N.J.; Reston, Va.: Lawrence Erlbaum Associates; National Council of Teachers of Mathematics.

Lester, F.K., & Lambdin, D. (1998). The ship of Theseus and other metaphors for thinking about what we value in mathematics education research. In J. Kilpatrick & A. Sierpinska (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 415-426). Dordrecht: Kluwer.

Lindström, J. O. (2005). The Swedish national course tests in mathematics. *Proceedings of the Third International SWEMAS Conference,* Umeå, Sweden. *, EM 48:2005* 67-106.

Lundberg, A. L. V. (2010). Developing a tool for analysing upper secondary school textbook tasks about proportion and proportionality. In C. Bergsten, E. Jablonka & T. Wedege (Eds.), *Mathematics and mathematics education: Cultural and social dimensions* (pp. 269-270). Linköping: Swedish Society for Research in Mathematics Education.

Lundberg, A. L. V. (2011). Proportion in mathematics textbooks in upper secondary school. In M. Foss Mortensen, & C. Winsløw (Eds.), *The anthropological theory of the didactical (ATD) peer reviewed papers from a PhD course at the University of Copenhagen, 2010* (pp. 15-30). Copenhagen, Denmark: Department of Science Education University of Copenhagen.

Lundberg, A. L. V. (accepted). Proportion in mathematics textbooks in upper secondary school. *7th Congress of ERME, the European Society for Research in Mathematics Education,* Rzeszów, Poland.

Lundberg, A. L. V., & Hemmi, K. (2009). Proportion in Swedish upper secondary school textbook tasks. In M. Lepik (Ed.), *Teaching mathematics: Retrospective and perspectives proceedings of the 10th international conference* (pp. 252-260). Tallinn, Estonia: Tallinn University.

Lundgren, U. P. (1977). *Model analysis of pedagogical processes*. Lund: LiberLäromedel/ Gleerup.

Lundgren, U. P. (1989). Att utvärdera utbildning och att styra den. In U. Dahllöf, & S. Franke-Wikberg (Eds.), *Skolan och utvärderingen: Fem professorer tar ordet* (pp. 81-104). Stockholm: HLS Högsk. för lärarutbildning.

Lundgren, U. P. (1991). *Between education and schooling: Outlines of a diachronic curriculum theory*. Geelong, Victoria, Australia: Deakin University Press.

Lundgren, U. P. (1999). Ramfaktorteori och praktisk utbildningsplanering. *Pedagogisk Forskning i Sverige, 1*(4), 31-41.

Lundin, S. (2008). *Skolans matematik: En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling*. Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis.

Lybeck, L. (1981). *Arkimedes i klassen: En ämnespedagogisk berättelse*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Marklund, S. (1987). *Skolsverige 1950-1975. del 5: Läroplaner* (1 uppl ed.). Stockholm: Liber/Utbildningsförl.

Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: An "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 199-218.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Principle and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: Author.

Nilsson, S. (1974). *Terminologi och nomenklatur: Studier över begrepp och deras uttryck inom matematik, naturvetenskap och teknik*. Lund: Studentlitteratur.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept part I — differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*(2/May), 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept part II: Problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*(3), 331-363.

OECD. (2003). *The PISA 2003 assessment framework mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. Paris, France: OECD.

Pettersson, A., & Kjellström, K. (1995). *Läroplanens kunskapssyn överförd till det första nationella kursprovet i matematik*. Stockholm.: Lärarhögskolan i Stockholm, PRIM-gruppen.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. London: Routledge and Kegan Paul.

Prop. 2008/2009:199. (2010). *Lärare i den nya gymnasieskolan: Högre krav och kvalitet*. Stockholm: Skolverket.

Prytz, J. (2007). *Speaking of geometry: A study of geometry textbooks and literature on geometry instruction for elementary and lower secondary levels in Sweden, 1905-1962, with a special focus on professional debates*. Uppsala: Department of Mathematics, Uppsala University.

Robson, C. (2002). *Real world research: A resource for social scientists and practitioner-researchers* (2nd ed.). Oxford: Blackwell.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio among grade nine students in Malaysia. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 31*(4), 579-599.

Skolinspektionen (2010). *Undervisningen i matematik i gymnasieskolan.* Kvalitetsgranskning. Rapport 2010:13. Stockholm: Skolinspektionen.

Skolverket. (1994). *1994 års läroplan för de frivilliga skolformerna, lpf 94.* Stockholm: Frtitzes.

Skolverket. (2000). *Naturvetenskapsprogrammet, Gy2000. programmål, kursplaner, betygskriterier och kommentarer.* (1st ed.). Stockholm: Fritzes.

Skolverket. (2002). *Nationellt prov i matematik, kurs A vt.02*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2005). *Nationellt prov i matematik, kurs A vt.05*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2006). *Gymnasieskolans kursprov vt 2006, en resultatredovisning*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2008a). *Grundskolans kursplaner och betygskriterier - förordning (SKOLFS 2000:135) om kursplaner för grundskolan och skolverkets föreskrifter (2000:141) om betygskriterier för grundskolans ämnen* (2:1 ed.). Stockholm: Skolverket och Fritzes.

Skolverket. (2008b). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007: En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2010a). *Examensmål och ämnesplaner för gymnasieskolan m.m*. Stockholm: Skolverket. Retrieved from http://www.skolverket.se/publikationer?id=2324

Skolverket. (2010b). *Nationellt prov i matematik, kurs A vt.10*. Stockholm: Skolverket.

Skolöverstyrelsen. (1965). *Läroplan för gymnasiet* (Skolöverstyrelsens skriftserie; 80 ed.). Stockholm: SÖ-förlaget.

Skolöverstyrelsen. (1971). *Läroplan för gymnasieskolan. 2, supplement. treårig ekonomisk linje; treårig humanistisk linje; treårig naturvetenskaplig linje; treårig samhällsvetenskaplig linje; fyrårig teknisk linje.* Stockholm: Liber Utbildningsförlag.

Skolöverstyrelsen. (1972). *Förslag till studieplan i matematik för gymnasieskolans NT-linjer.* Stockholm: Skolöverstyrelsen.

Skolöverstyrelsen. (1982). *Läroplan för gymnasieskolan supplement 75*. Stockholm: Liber Utbildningsförlag.

SOU 1931:2. (1931). *Utredning och förslag rörande läroböcker vid de allmänna läroverken och med dem jämförliga läroanstalter.* Stockholm: Ecklesiastikdepartementet.

SOU 1974:53. (1974). *Skolans arbetsmiljö. betänkande avgivet av utredningen om skolans inre arbete – SIA*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

SOU 1992:94. (1992). *Skola för bildning: Huvudbetänkande*. Stockholm: Allmänna förl.

SOU 2008:27. (2008). *Framtidsvägen - en reformerad gymnasieskola*. Stockholm: Fritze.

Strömer, M. (1748). *De sex första jemte elfte och tolfte böckerna af Euclidis Elementa eller grundeliga inledning till geometrien: Till svenska ungdomens tjenst / utgifne af mårten strömer* (2nd ed.). Uppsala: Grefing.

Svensson, P. (2001). *Abstrakt algebra*. Lund: Studentlitteratur.

Szabo, A., Larson, N., Viklund, G., & Marklund, M. (2009). *Origo: Matematik kurs D för naturvetenskapliga och tekniska program* (1 uppl ed.). Stockholm: Bonnier utbildning.

The Concise Oxford Dictionary of Mathematics. (2009). *"Proportion".* Retrieved 01/05, 2011, from http://www.oxfordreference.com/views/ENTRY.html ?subview=Main&entry=t82.e2298

Thomassen, E., & Tobiassen, J. (2000). *Det nationella provsystemet - sett med norske øyne* No. Dnr 97:2218). Stockholm: Skolverket. Retrieved from www.skolverket.se/sb/d/256/url/.../target/pdf156.pdf%3Fk%3D156

Thorndike, E. L. (1922). *The psychology of arithmetic*. New York: Macmillan.

Tourniaire, F. (1983). Some aspects of proportional reasoning in young children. In J. C. Bergeron, & N. Herscovics (Eds.), *Proceedings of the Fifth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 319-324). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 181-204.

Undvall, L., Forsberg, S., & Melin, C. (2005). *Matematikboken 4.* Stockholm: Liber, Almqvist &Wiksell.

Undvall, L., Olofson, K. G., & Forsberg, S. (2002). *Matematikboken Y röd.* Stockholm: Liber, Almqvist &Wiksell.

Valverde, G. A., Bianchi, L., Wolfe, R., Schmidt, W. H., & Houang, T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 128-175). London: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert, & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Hillsdale, N.J.; Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany,NY: State Univ. of New York Press.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In P. Nesher, & L. P. Steffe (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 219-239). Mahwah, N.J.: L. Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5-28). Hove, UK: Psychology Press.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse,The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhälls-vetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Wallin, H., Lithner, J., Wiklund, S., & Jacobsson, S. (2000). *NTa+b : Gymnasiematematik för naturvetenskaps- och teknikprogrammen: Kurs A och B* (1 uppl ed.). Stockholm: Liber.

Bilaga 1 Proportionalitet i Exponent, sid 299 (röd)

Proportionalitet

Agneta har blivit stavgångsentusiast och har noterat att hon kan gå 1 km på 10 minuter. Om hon kan fortsätta att gå med samma fart så hinner hon 2 km på 20 minuter, dvs. sträckan fördubblas om tiden fördubblas. Man säger att sträckan är *proportionell* mot tiden.

Sambandet mellan sträcka och tid kan beskrivas med funktionen $s = 0{,}1t$ där tiden t mäts i minuter och sträckan s i km. Talet 0,1 är en konstant, i detta fall Agnetas medelfart 0,1 km/min.

Inom naturvetenskapliga och tekniska ämnesområden liksom i många vardagliga företeelser är *proportionaliteter* vanliga, t.ex.

- vikten hos ett metallföremål är proportionell mot volymen
- priset på en bit ost är proportionellt mot vikten
- omkretsen hos en cirkel är proportionell mot diametern

Gemensamt för dessa proportionaliteter är att de kan skrivas $y = k \cdot x$, vilket också kan uttryckas som att *variabeln y är proportionell mot variabeln x*. Faktorn k är en *proportionalitetskonstant*, dvs. den har ett konstant värde.

$$y = k \cdot x$$

innebär att y är proportionell mot x.

När vi arbetar med proportionaliteter är det viktigt både att kunna använda och att kunna beräkna en proportionalitetskonstant. För att bestämma konstanten kan vi använda oss av en grafisk eller en algebraisk metod. Då en proportionalitet åskådliggörs grafiskt erhålls en rät linje genom origo. Proportionaliteten sägs vara *linjär*. Vid en algebraisk undersökning kontrollerar man om kvoten mellan y och x är konstant och bestämmer dess värde.

Vid en linjär proportionalitet gäller att dess graf är en rät linje genom origo och att kvoten $k = \frac{y}{x}$ är konstant.

299

6.3 LINJÄRA FUNKTIONER

Introduktionen fortsätter med exempel och grafisk framställning av proportionalitet.

Bilaga 2. Proportionalitet i Liber Pyramid, s. 163 (grön)

Proportionalitet och linjära funktioner

Proportionalitet

En cyklist rör sig vid ett tillfälle med konstant hastighet 7 m/s under 10 sekunder.

Cyklisten hinner på	2 s	$7 \cdot 2$ m = 14 m
	6 s	$7 \cdot 6$ m = 42 m
	x s	$7 \cdot x$ m = $7x$ m

Om vi betecknar sträckan med y får vi formeln $y = 7x$, $x \geq 0$, där y är sträckan i meter och x är antalet sekunder.

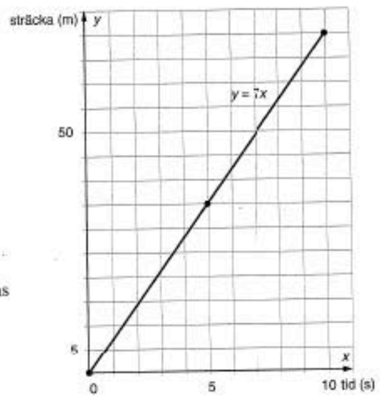
Sträckan y är en funktion av tiden x.

Cyklisten rör sig med konstant hastighet och hinner alltså lika långt på varje sekund. Man säger att sträckan är *proportionell* (eller *direkt proportionell*) mot tiden.

Formeln $y = 7x$, $x \geq 0$, ger värden på x och y som hör ihop. Vi beräknar några sådana värdepar och för in dem i en värdetabell.

$y = 7x$

x	y
0	0
5	35
10	70



I koordinatsystemet har vi ritat funktionens graf. Lägg märke till att grafen blir en stråle som utgår från origo.

Observera att avståndet mellan skalmarkeringarna på y-axeln är 5.

En funktion, vars graf är en stråle som utgår från origo, kallas en *proportionalitet*. En proportionalitet kan skrivas $y = kx$ där k är en konstant, *proportionalitetskonstanten*.

Bilaga 3. Proportionalitet i Matematik 4000, s. 201 (blå)

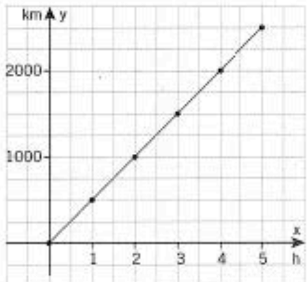
Direkt proportionalitet

Exempel Ett flygplan håller en konstant hastighet av 500 km/h. Efter x h har det hunnit y km. Vi visar sambandet mellan y och x i en *värdetabell* och i en graf.

Värdetabell

Tiden x h	*Sträckan y km*
0	0
1	500
2	1000
3	1500
4	2000
5	2500

Graf



Av tabellen framgår att när tiden dubblas, så dubblas också sträckan. När tiden trefaldigas, så trefaldigas sträckan osv. Vi säger att y varierar på samma sätt som x eller att y är (direkt) *proportionell* mot x.

Sambandet kan uttryckas med formeln

Formel $y = 500x$

där konstanten 500 är flygplanets hastighet i km/h.

Direkt proportionalitet

$y = kx$
y är proportionell mot x.
k är proportionalitetskonstanten.
Grafen är en rät linje genom origo (0, 0).