

Handlingar i matematikklassrummet

En studie av undervisningsverksamheter på lågstadiet
då räknemetoder för addition och subtraktion är i
fokus

Margareta Engvall



Linköpings universitet

Linköping Studies in Behavioural Science No. 178
Linköpings Universitet, Institutionen för beteendevetenskap och
lärande
Linköping 2013

Distribueras av:
Institutionen för beteendevetenskap och lärande
Linköpings universitet
581 83 Linköping

Margareta Engvall
Handlingar i matematikklassrummet
En studie av undervisningsverksamheter på lågstadiet då
räknemetoder för addition och subtraktion är i fokus

Upplaga 1:1
ISBN 978-91-7519-493-6
ISSN 1654-2029

©Margareta Engvall
Institutionen för beteendevetenskap och lärande 2013

Tryckeri: LiU-tryck

Till Billie, Magdalena, Edith och Henrik

Innehåll

Förord	7
1. Inledning	9
<i>Att beskriva matematikundervisning</i>	<i>9</i>
<i>Begreppet kultur.....</i>	<i>10</i>
<i>Matematikklassrummet</i>	<i>12</i>
<i>Matematikundervisningens resultat – följderna av vad som ges möjlighet att lära 13</i>	
<i>Vägen till ett avhandlingsarbete</i>	<i>15</i>
<i>Fyra bilder av matematikundervisning</i>	<i>16</i>
<i>Klassrumsforskning.....</i>	<i>21</i>
<i>Aritmetik – ett omdiskuterat område i skolmatematiken</i>	<i>24</i>
<i>Syfte.....</i>	<i>26</i>
<i>Om matematik</i>	<i>27</i>
<i>Om didaktik</i>	<i>28</i>
<i>Forskningsområdet matematikdidaktik</i>	<i>28</i>
<i>Sammanfattning.....</i>	<i>35</i>
<i>Arbetets disposition.....</i>	<i>37</i>
2. Skolmatematikens innehåll och metoder	38
<i>Motiv till att lära matematik.....</i>	<i>38</i>
<i>Vad ska eleverna lära sig?.....</i>	<i>39</i>
<i>Vilka metoder används i undervisningen?.....</i>	<i>52</i>
<i>Möjlighet till lärande</i>	<i>81</i>
<i>Sammanfattning.....</i>	<i>82</i>
3. Teoretiska utgångspunkter	86
<i>Verksamhetsteori i relation till pedagogisk forskning</i>	<i>86</i>
<i>Verksamhetsteorins utveckling och koppling till matematikundervisning</i>	<i>90</i>
<i>Mitt analysverktyg.....</i>	<i>100</i>
<i>Sammanfattning.....</i>	<i>102</i>

4. Metod	104
<i>Metodologiska utgångspunkter</i>	<i>104</i>
<i>Tidsplan för undersökningen</i>	<i>106</i>
<i>Urval</i>	<i>106</i>
<i>Undersökningens genomförande</i>	<i>110</i>
<i>Kvalitetsaspekter i forskningsprocessen</i>	<i>128</i>
<i>Introduktion till resultatredovisningen</i>	<i>133</i>
5. Almen	135
<i>I matematikklassrummet</i>	<i>135</i>
<i>En procedurinriktad verksamhet</i>	<i>153</i>
6. Björken	160
<i>I matematikklassrummet</i>	<i>160</i>
<i>En procedur- och begreppsinriktad verksamhet.....</i>	<i>176</i>
7. Eken	182
<i>I matematikklassrummet</i>	<i>182</i>
<i>En begrepps- och argumentationsinriktad verksamhet.....</i>	<i>198</i>
8. Lönnen	204
<i>I matematikklassrummet</i>	<i>204</i>
<i>En procedur- och kommunikationsinriktad verksamhet</i>	<i>219</i>
9. Diskussion	224
<i>Frågeställningarna på nytt</i>	<i>224</i>
<i>En mångfald av metoder</i>	<i>226</i>
<i>Handlingar i matematikklassrummet ger olika möjligheter.....</i>	<i>238</i>
<i>Vidare forskning</i>	<i>241</i>
Summary.....	243
Referenser.....	254
Bilagor	

Förord

Att vara doktorand och adjunkt på en och samma gång kan periodvis innebära en stor utmaning. Kursexaminationer, respons på examensarbeten och seminarieförberedelser, för att bara nämna en del, allt ska vara klart vid bestämda tidpunkter. Och samma sak gäller avhandlingsarbetet! De senaste åren har därför varit fyllda av mycket arbete. Samtidigt har det varit oerhört lärorika år som jag inte vill vara utan!

Så här i slutspurten av doktorandstudierna kan jag se tillbaka på en utbildning som är unik i flera avseenden, inte minst för att den erbjuder rika möjligheter till utveckling, såväl kunskapsmässigt som på det personliga planet, och detta oavsett var doktoranden befinner sig på resa genom livet. Därför har det här varit en period som på många sätt har berikat mitt liv, vilket jag idag också känner mig mycket glad över.

Jag vill därför uttrycka min stora tacksamhet till Området för Utbildningsvetenskap vid Linköpings universitet som tillsammans med Institutionen för beteendevetenskap och lärande (IBL), har stått för det finansiella stödet och därmed gjort det möjligt för mig att genomföra det här projektet hela vägen till en doktorsavhandling.

Nu är det inte bara ekonomiska resurser som är viktiga förutsättningar i arbetet med en avhandling. Utan mina ovärderliga handledare hade jag nog lagt det här projektet på hyllan för länge sedan. Docent Joakim Samuelsson tillsammans med bihandledare Karin Forslund Frykedal, det är omöjligt att i ord uttrycka hur jag har uppskattat er som mina handledare och det arbete ni har gjort! Joakim med din klarsynta analytiska förmåga att se strukturer som inte alltid har framstått lika tydliga för mig och Karin, du som så generöst delat med dig av ditt gedigna kunnande om analys och forskningsmetod när jag känt mig vilsen i analysprocessen. Detta och mycket annat tillsammans med den fantastiska förmåga ni har, att både kunna uppmuntra och vara lyhörda, visar på kompetenser och egenskaper som gör er till de bästa handledare någon kan ha. Ett stort och innerligt tack till er båda!

Under den här tiden har jag verkligen fått lära mig att vetenskapligt skrivande inte bara är *en* persons arbete. Att låta andra ta del av texter för att ge synpunkter är en viktig del av processen. Här har förstås handledarna haft en central roll, men det finns även andra personer som har varit viktiga längs vägen. Ann-Marie Markström, som noggrant läste mitt manus inför slutseminariet. Ett stort tack för att du ville ta dig an den uppgiften! Du kom med konstruktiva synpunkter som jag har haft god nytta av, inte minst när det gäller resultatredovisningen. Värdefulla kommentarer har jag också fått från

mina kolleger i matematikdidaktikgruppen vid IBL, Lisa Björklund Boistrup och Cecilia Sveider. Tack för att ni har tagit er tid att engagera er i mina texter! Jag vill också rikta ett särskilt tack till hela ”madid-gruppen”. Förutom Cissi och Lisa har även Pether Sundström, Jessica Elofsson och Rickard Östergren på olika sätt stöttat och uppmuntrat mig under den här perioden, något som jag har uppskattat mycket!

I slutskedet av arbetet är det några personer, vars insatser har varit särskilt betydelsefulla. Jag är mycket tacksam över de synpunkter som framfördes i mötet med läsgruppen eftersom detta gav nytt ljus över delar av diskussionen. Där ingick professorerna Gunnel Colnerud och Per Andersson tillsammans med handledarna. Ett varmt tack också till Elisabeth Olofsson som har gjort en gedigen språkgranskning av så gott som hela avhandlingen (befintliga språkmissar beror uteslutande på mina egna tillägg i efterhand) och Ulla-Britt Persson som har hjälpt mig med den engelska översättningen.

Det finns förstås många kolleger på avdelningen för Pedagogik och Didaktik (PeDi) som borde nämnas här, men jag hoppas att ni känner er inkluderade i mitt tack till alla som på något sätt gjort tillvaron lättare för mig under de här åren.

En grupp som måste uppmärksammas mer än något annat i det här sammanhanget är de lärare och elever som så generöst öppnade sina klassrum under en period och lät mig få ta del av allt som då skedde under deras matematiklektioner. Utan er medverkan hade den här avhandlingen inte blivit verklighet! Jag känner stor tacksamhet över detta och vill därför uttrycka min stora uppskattning till er alla, både lärare och elever!

Under tiden som jag har arbetat med det här projektet har livet pågått för fullt, även utanför universitetet. Arbete på kolonilotten, körsång och S:t Hanskyrkan har varit och är betydelsefulla andningshål för mig i kombination med goda vänner som har sett till att jag emellanåt har lämnat datorn för att ägna mig åt annat som är väsentligt i livet. Tack för att ni har tänkt på mig! Utan er hade jag förmodligen bara känt mig som en halv människa.

Och till sist, till er som är absolut viktigast i mitt liv, min underbara, härliga familj som under de här åren har utökats med både svärson och svärdöttrar och dessutom fyra fantastiska barnbarn. Tack för allt ert stöd och för att ni är just dom ni är!

Linköping i oktober 2013

Margareta Engvall

1. Inledning

Detta är en avhandling om matematikundervisning på lågstadiet. Den handlar närmare bestämt om vad som kan känneteckna undervisningen då innehållet är skriftliga räknemetoder för addition och subtraktion. I fokus står lärares och elevers handlingar och vad eleverna, som en följd av dessa, ges möjlighet att lära.

För att ge en bakgrund till det som är avhandlingens intresseområde innehåller kapitlet några reflektioner över olika sätt att beskriva matematikundervisning. Exempelen som tas upp inledningsvis ger korta glimtar från kvalitetsgranskningar, forskning och massmedia. Efter beskrivningarna följer ett avsnitt om klassrumsforskning, där särskilt några svenska studier tas upp, vilket följs av ett kort avsnitt om aritmetik. Sedan presenteras avhandlingens syfte med tillhörande frågeställningar och därefter ges en inblick i forskningsområdet undervisning och lärande i matematik med utgångspunkt från avhandlingens intresseområden. Till sist behandlas frågorna om vad som är det aktuella forskningsområdets uppgift och vad dess forskning kan bidra med. Kapitlet avslutas med en redogörelse för arbetets disposition.

Att beskriva matematikundervisning

För snart tjugo år sedan skrev Laborde (1996) ett introduktionsavsnitt i *International Handbook of Mathematics Education*, där hon pekar på vikten av att utmana den allmänt rådande uppfattningen att matematikundervisning ser ungefär likadan ut oavsett var den bedrivs. Den som är intresserad av grundskolans matematikundervisning, och har tagit del av det senaste decenniets kvalitetsgranskningar och nationella utvärderingsrapporter (t. ex. Skolinspektionen, 2009; Skolverket, 2003, 2004, 2008a), kan emellertid konstatera att matematikundervisningen framställs på ett sätt som gör att den verkar se likadan ut på de flesta håll i Sverige. De utmärkande dragen, dels lärobokens starka inflytande, dels att undervisningen domineras av elevernas arbete på egen hand, redovisas inte bara i nämnda rapporter utan bekräftas också av forskare (Bergqvist et al., 2010). Ibland inleds lektioner med att läraren går igenom ett moment innan eleverna arbetar med tillhörande uppgifter i läroboken (Skolverket, 2003). Matematiska diskussioner mellan läraren och klassen eller eleverna sinsemellan är däremot inte särskilt vanligt förekommande (Skolverket, 2004).

1. Inledning

Den här sortens rapporter är naturligtvis nödvändiga. Bland annat för att de kan fungera som väckarklockor för att brister ska bli uppmärksammade och åtgärdade. Samtidigt kan de också ge upphov till schablonartade beskrivningar som inte ger rättvisa åt den matematikundervisning som genomförs i många klassrum. Att till exempel Skolinspektionen (2009) även lyfter fram förekomsten av goda exempel får därför inte något större utrymme i debatten. Det är snarare med formuleringar i likhet med följande ”fem minuters genomgång, och sedan säga ”räkna i boken” och röra sig i en skog av uppsträckta händer” (Wallström, 2009), som dagspressen sammanfattar resultatet av Skolinspektionens granskning.

Beskrivningar av den typen är knappast till någon hjälp för lärare som lägger ner mycket arbete för att göra sitt bästa i att stödja elevernas matematiklärande utifrån förutsättningar som andra beslutat om. Istället för att göra lärarna till syndabockar och fokusera på fel och brister, bör vi efterlysa mer respekt för deras komplicerade uppdrag samt försöka analysera och förstå situationen när det gäller skolans matematikundervisning (Pettersson, 2010).

Rapporternas komprimerade beskrivningar skildrar matematikundervisningen i klassrummet framför allt utifrån hur den är organiserad i olika arbetsformer, till exempel helklassgenomgångar, individuellt arbete och grupparbete. Detta är *ett* sätt att beskriva undervisning. Ett annat sätt är att låta analyser och beskrivningar utgå från lärares och elevers interaktion i förhållande till innehållet som undervisas och därigenom också lägga större vikt vid exempelvis kulturella faktorer i undervisningen. Den sortens beskrivningar ligger också i linje med Labordes (1996) strävan efter att ge ökad uppmärksamhet åt ”the multiple aspects of teaching and learning mathematics interrelated with social, cultural and cognitive dimensions” (s. 509). Det är funderingar kring den här typen av skildringar och hur dessa skulle kunna bidra till ökad kunskap om lågstadiets matematikundervisning, som har gett upphov till det här avhandlingsarbetet.

Begreppet kultur

De senaste decennierna har inneburit en ökad uppmärksamhet kring kultur som en betydande faktor i förhållande till matematikundervisning (Bishop, 1988; Presmeg, 2007; Seeger, Voigt & Waschescio, 1998). Kultur är ett mångfacetterat begrepp. Här ska kultur förstås i enlighet med Säljös (2000) definition, det vill säga ”den uppsättning av idéer, värderingar, kunskaper och andra resurser som vi förvärvar genom interaktion med omvärlden” (s. 29). I kultur inbegrips därmed de fysiska och intellektuella redskap, artefakter, som människan successivt utvecklat, exempelvis språk (Säljö, 2000) och olika

1. Inledning

sorters undervisningsmaterial (Staub, 2007). Av Säljös definition framgår också att kultur utvecklas och förs vidare genom att individen interagerar med sin omgivning. Det betyder att kulturella faktorer visar sig i sociala sammanhang, till exempel i interaktionen mellan lärare och elever i klassrummet.

Resultaten från tidigare internationella komparativa studier, exempelvis TIMSS 1995¹ och PISA² (se t. ex. *The PISA 2003 assessment framework, 2003*) samt uppföljande studier, pekar i en bestämd riktning. Klassrummets kultur inverkar på elevers matematiklärande (De Corte & Verschaffel, 2007). Detta förklarar det alltmer ökade intresse för kultur i relation till matematikundervisning, vilket också framträder hos exempelvis Ernest (2001) samt Seeger et al. (1998). De senare framhåller särskilt vikten av att indirekta processer av undervisning och lärande beaktas, eftersom den direkta undervisningen inte säger hela sanningen om matematikundervisningen. Skillnaden mellan direkta och indirekta undervisningsprocesser kommer också till uttryck hos Lampert (1990), som även lutar sig mot tidigare forskare (bl. a. Mehan, 1979) när hon konstaterar: ”When classroom culture is taken into consideration, it becomes clear that teaching is not only about teaching what is conventionally called *content*. It is also teaching students what a lesson is and how to participate in it” (Lampert, 1990, s. 34).

Förutom resultaten från undersökningar som TIMSS och PISA finns också andra förklaringar till det ökade intresset för matematikklassrummets kultur. Staub (2007) pekar ut dels videoteknikens framsteg, dels att utvecklingen av nya teorier om undervisning och lärande har gått i en riktning som innebär att kulturellt relaterade frågor också integreras i teorierna.

¹ TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) är en internationell studie som undersöker kunskaper i matematik och NO hos elever i årskurs 4 och 8. Sedan den första undersökningen 1995 har TIMSS genomförts vart fjärde år. Svenska elever i år 8 har deltagit i alla tidigare omgångar medan elever i år 4 deltog första gången 2007 (Skolverket, 2008c). I skrivande stund har även resultatet från TIMSS 2011 publicerats (se Skolverket, 2012b), där det visar sig att svenska elever i år 4 presterar sämre på *Taluppfattning och aritmetik* jämfört med andra delområden som prövats.

² PISA (Programme for International Students Assessment) är en OECD-undersökning där bland annat 15-åringarnas kunskaper och färdigheter i matematik, naturvetenskaper, läsning och problemlösning bedöms. Huvudtemat för undersökningen år 2003 var matematiskt kunnande. Se även OECD-programmens hemsida: <http://www.oecd.org/pisa/>

1. Inledning

Klassrumskultur och skolkultur är två näraliggande begrepp. Skolkultur handlar i ett avseende om den kultur som skolan i egenskap av institution är bärare av, bland annat i utformning av undervisningsinnehåll och hur detta hanteras (Hedegaard, 2002). I ett annat avseende gäller det skolans ”tradition of practice”, som överförs från lärare och äldre elever till de yngre eleverna (Mercer, 1993). Därför kan vi, fortfarande efter nästan sjuttio år, känna igen oss i skolsituationen som Astrid Lindgren (1945) skildrar i berättelsen om Pippi Långstrump. När Pippis lärare ställer frågor som hon själv vet svaret på är detta exempel på en ”tradition of practice” som ifrågasätts av Pippi men inte av eleverna i klassen. Björklund Boistrup (2010), som har använt Pippi Långstrumps besök i skolan som ett fiktivt exempel på hur kommunikationen lärare-elev kan gå till, resonerar i enlighet med (Mercer, 1993) om hur skolkulturen förs vidare till nästa generation.

Säljös (2000) definition av begreppet kultur innebär att kulturella faktorer kan utgöras av såväl synliga som mer eller mindre dolda företeelser. I matematikklassrummet kommer de till uttryck genom lärares och elevers handlingar (Seeger et al., 1998). Genom interaktionen i klassrummet medverkar både lärare och elever till att forma sin egen klassrumskultur (Bergqvist, 2001). Bauersfeld (1988) formulerar detta som att ”Teacher and student(s) constitute the reality of the classroom interactively” (s. 37). I likhet med vad som påpekats ovan betyder det inte att klassrumskulturens synliga och dolda principer skapas helt från grunden eller att lärare och elever är fullständigt oberoende och självständiga i sina val. Istället är de också bärare av skolans ”tradition of practice”, skolkulturen.

Matematikklassrummet

Begreppet matematikklassrum syftar här inte bara på ett fysiskt rum utan bör betraktas i en vidare betydelse som även inbegriper exempelvis kultur, regler, roller samt elevers och lärares handlingar som utspelas under matematiklektionerna. Goodchilds (2001) beskrivning av klassrummet som ”a social entity with its own culture, goals, activities, codes of behaviour, and roles that occurs in some well-defined physical space and time” (s. 71), stämmer väl överens med hur begreppet matematikklassrum ska uppfattas i det här sammanhanget. Senare har en liknande tolkning presenterats av Jablonka (2011a), som hävdar att ett matematikklassrum kan betraktas som en egen liten inrättning med en bestämd repertoar för vad som kan göras och sägas. Aktiviteterna i ett matematikklassrum, det vill säga hur lärare och elever agerar, är således styrda av regler (Jablonka, 2011a; Wood, 1998).

Den här typen av regler som uppmärksammas i avhandlingen är oftast uttalade och förblir dolda. Därmed kan regler rymmas inom begreppet

1. Inledning

kultur såsom det definierats ovan. Eleverna kan tillägna sig reglerna endast genom erfarenheterna de skaffar sig genom att vara en del av matematikklassrummet (Jablonka, 2011a).

Elevers och lärares roller i matematikklassrummet synliggörs genom undervisningens organisation. Beroende på vilka arbetsformer som används är det ibland eleven, ibland läraren som är i centrum (Granström, 2007).

I förordet till en etnografisk studie genomförd av Goodchild (2001), framhåller Ernest (2001) att matematikklassrummet är det centrala objektet i forskning om matematikundervisning. Han uttrycker även viss förståelse för att forskare väljer att förenkla objektet och därmed bortse från klassrummets komplexitet. Samtidigt överraskas han av Goodchilds resultat, som är följden av ett djupgående analysarbete av undervisningsverksamheten i ett matematikklassrum på högstadiet. Genom Goodchilds studie blottläggs brister i utbildningssystemet, som bland annat innebär att elevernas matematikkunskap sällan utmanas och att deras kunnande inte utvecklas i den takt som förväntas. Ernest (2001) ställer sig därför kritisk till att forskning som gäller matematikundervisning har fokuserat, som han uttrycker det, ”on anything but the pathology of the ’normal’ mathematics classroom” (s. 8).

Det är förmodligen den sortens matematikklassrum som de flesta elever och lärare har erfarenhet av. I grundskolan, som jag har valt att fokusera på, rör det sig uppskattningsvis om ungefär en miljon elever och tiotusentals lärare som under en skolvecka möts under flera matematiklektioner.³ Mot bakgrund av den vetenskapen framstår det som en angelägen uppgift för forskare att närmare studera matematikklassrummet och det som sker där i form av lärares och elevers handlingar.

Matematikundervisningens resultat – följden av vad som ges möjlighet att lära

Syftet med matematikundervisningen är, enkelt uttryckt, att eleverna ska lära sig matematik. I det senaste styrdokumentet, Lgr 11, är målen för detta kunnande uttryckt både som matematiskt innehåll och som förmågor att hantera matematiken, till exempel förmåga att formulera och lösa problem eller att föra och följa matematiska resonemang. I den tidigare läroplanen, Lpo94 med tillhörande kursplan (Skolverket, 2000, 2008c) är förmågorna

³ Beräkningen grundar sig på information från Statistiska centralbyrån, där det framgår att födelsetalen per år i Sverige sedan år 2000 ligger på drygt 100 000. Därmed finns det i runda tal ca 1miljon elever i år 1-9.

(http://www.scb.se/Pages/Article____333981.aspx)

1. Inledning

eller kompetenserna i stället formulerade som mål att sträva mot medan innehållet uppmärksammas i målen som eleverna ska uppnå.

I Skolinspektionens kvalitetsgranskning (2009), som nämnts tidigare, är ett antal bedömningsområden i fokus. Ett av de områden som uppmärksammas är undervisningens innehåll och form. Enligt den forskarrapport (Bergqvist et al., 2010) som genomförts i samarbete med Skolinspektionen, fokuserar undervisningen nästan uteslutande på de lärandemål som anges i kursplanen och som är formulerade i relation till det matematiska innehållet. Det framgår också att i de flesta klassrum (år 1-9) som observerats är procedurkunnande, att räkna efter givna regler, den kompetens som eleverna övar i betydligt större omfattning än de övriga kompetenser som finns angivna i kursplanen. Bergqvist et al. (2010) konstaterar att elevernas möjlighet att utveckla alla kompetenser som beskrivs i gällande styrdokument⁴ är begränsade till följd av undervisningen.

Problematiken kring relationen mellan undervisningsmetod och utfallet av undervisningen har uppmärksamats på senare tid (se t. ex. Hattie, 2009; Hiebert & Grouws, 2007). Forskare pekar på det faktum att undervisning inbegriper flera komponenter i samverkan och att undervisningsmetod därför inte enkelt kan beskrivas som en enskild handling (Cohen, Raudenbush & Ball, 2003; Marton, 2000; Stigler & Hiebert, 1997). Ett sådant synsätt får också stöd av Jablonka när hon resonerar kring forskning om undervisning och lärande i matematik och den till synes omöjliga utmaningen, att ge en samlad bild av forskningen för att därigenom komma fram till vad som är den bästa undervisningsmetoden.

It also has to be acknowledged that the way a teacher deals with a particular topic is not the only factor that makes a difference in students' participation and understanding. There are, and this is also an outcome of research, other attributes of the teacher and the students that are equally important. (Jablonka, 2011b, s. 57)

Det innebär alltså att det i princip är omöjligt att förutsäga matematiklärande utifrån användning av en specifik metod. Däremot kan vi resonera om elevers lärande utifrån vad olika metoder ger eleverna *möjlighet att lära* under matematiklektionerna (Hiebert & Grouws, 2007; Marton & Booth, 1997).

Relationen mellan undervisning och lärande i matematik väcker följaktligen många frågor. Forskare som exempelvis Cohen et al. (2003) samt Stigler och Hiebert (1997) låter oss likväl förstå att det inte existerar några

⁴ Skolinspektionens kvalitetsgranskning med inriktning mot matematik genomfördes under den period då Lpo94 var i bruk.

enkla svar. I gengäld finns ett ständigt behov av forskning som kan bidra med ytterligare kunskap.

En typ av forskning, som särskilt uppmärksammar relationen mellan undervisning och vad som görs möjligt att lära har sin hemvist inom variationsteorin (se Marton & Booth, 1997). Ett utmärkande drag i dessa studier är att den direkta undervisningen är i fokus (t. ex. Kullberg, 2010; Runesson, 1999; och Wernberg, 2009).

Till skillnad från nämnda forskning uppmärksammar avhandlingen inte bara den direkta undervisningen utan även andra aspekter, bland annat klassrumskulturen, som tidigare nämnts. Förhoppningsvis kan den därigenom bidra till ny kunskap om undervisning och om vilka förutsättningar för lärande som undervisningen kan skapa.

Vägen till ett avhandlingsarbete

Att skriva ett avhandlingsarbete fanns inte i tankarna när jag mötte mina första elever i en göteborgsförort för 35 år sedan. Det är snarare en idé som långsamt har vuxit fram. Efter drygt tjugo år som klasslärare på lågstadiet kände jag ett starkt behov av att fördjupa mina kunskaper inom matematikdidaktikens område. Då jag avslutade lärarutbildningen i slutet av 1970-talet bar jag på uppfattningen att mitt eget matematikkunnande tillsammans med den matematikmetodik som utbildningen innehöll, var de redskap som behövdes för att undervisa matematik på lågstadiet. Trots det kände jag mig otillräcklig som lärare då jag märkte att eleverna inte alltid förstod. Möjligheten att få studera matematikdidaktik⁵ var det som då motiverade mig till att påbörja en magisterutbildning i pedagogik vid sidan av arbetet.

Kurserna i matematikdidaktik blev en ögonöppnare. Under åren som klasslärare hade jag visserligen hunnit utveckla en god handlingskompetens, men ju längre jag kom i mina egna studier, desto mer insåg jag att mitt teoretiska kunnande på området var otillräckligt. Grunden för lektionsplaneringarna och de val jag brukade göra i matematikundervisningen var färgade av MAKIS⁶. Däremot hade jag inga matematikspecifika didaktiska teorier att stödja mig på i funderingarna över vad som fungerat

⁵ Matematikdidaktik handlar om frågor i relation till undervisning och lärande i matematik. Forskningsområdet matematikdidaktik presenteras mer ingående i slutet av detta kapitel.

⁶ Akronymen MAKIS står för Motivation, Aktivitet, Konkretion, Individualisering och Samarbete. På 1970-talet var MAKIS ett ständigt förekommande begrepp i klasslärarutbildningens metodikundervisning.

1. Inledning

bättre eller sämre i min matematikundervisning. Det hade jag behövt eftersom styrkan i teoretisk kunskap ligger just i att den kan fungera som ett verktyg för individen att ifrågasätta och reflektera över sitt handlande. Teorier kan också hjälpa till att förklara innebörden av handlingarna (Jank & Meyer, 1997a; Kilpatrick, 1995) och därmed erbjuda olika handlingsalternativ (Wyndhamn, 1990). Dessa verktyg saknade jag alltså och min lärarerfarenhet kunde inte kompensera för bristerna vad gällde mitt teoretiska kunnande med avseende på matematikdidaktik.

Efter avslutat magisterprogram och uppsatsskrivande, med taluppfattning och de tidiga skolårens aritmetik i fokus, återvände jag till eleverna på lågstadiet. Parallellt med detta fick jag också möjlighet att medverka i lärarutbildningskurser och leda kommunala matematikprojekt. Mötet med lärare och studenter gav ny inspiration och mitt intresse för det som händer i matematikklassrummet fördjupades. Så småningom började också tanken på ett avhandlingsarbete ta form.

Fyra bilder av matematikundervisning

Med avsikt att göra läsaren mera bekant med avhandlingens kontext följer en presentation av några exempel från matematikundervisning på lågstadiet. De första bilderna illustrerar två olika matematikklassrum, betraktade ur mitt eget lärarperspektiv. De är konstruerade långt i efterhand, men många minnen från dessa klassrum lever kvar och har därför inte varit svåra att plocka fram. Den tredje och fjärde bilden har tillkommit senare och visar exempel på matematikundervisning som jag har upplevt ur mitt perspektiv som lärarutbildare. Undervisningsinnehållet framträder inte tydligt i de två första bilderna, vilket beror på att de är sammansatta av många olika lektionsbilder som ligger mer än tjugo år tillbaka i tiden. Den som har egen erfarenhet från matematikundervisning kanske känner igen en del i de olika beskrivningarna, medan någon annan kan tycka att bilderna inte stämmer överens med den egna uppfattningen om matematikklassrummet. Det är i så fall inte särskilt överraskande, eftersom bilderna som följer är personliga och inte gör anspråk på att vara något annat.

Bild 1: Ett matematikklassrum i början av 1980-talet

Matematiklektionerna i lågstadieklassen, där eleverna satt tillsammans två och två eller i u-form, inleddes vanligtvis med att jag gick igenom det aktuella innehållet med hela elevgruppen. Genomgångarna skedde ofta med hjälp av tavlan i klassrummet och ibland genom att jag visade med något material. Sedan arbetade eleverna själva med samma innehåll i matteboken,

1. Inledning

det vill säga de arbetade med uppgifter liknande dem som jag hade visat vid genomgången. Kommunikationen i klassrummet bestod mestadels i att elever som räckte upp handen fick svara på frågor i samband med genomgångarna eller att jag gick runt och hjälpte dem som hade kört fast på någon uppgift i matteboken. En del av eleverna hjälpte också varandra. Alla i klassen höll på med samma moment i matteboken och de som var särskilt snabba fick extraböcker att arbeta i. Under elevernas två första skolår genomfördes de flesta matematiklektionerna i halvklass, vilket gav mig som lärare en känsla av att hinna se alla elever och deras behov under lektionen.

I klassrummet fanns lite olika material, till exempel tiobasmaterial⁷, tvåradiga kulramar och låtsaspengar. För att lättare kunna lösa sina uppgifter brukade en del elever använda något av materialen. Ett vanligt hjälpmedel när eleverna skulle lösa additions- eller subtraktionsuppgifter var linjalen som användes som en tallinje, där eleverna förflyttade sig framåt eller bakåt, i början helst med ett steg i taget. Utöver skolans material hade jag tagit med mig kastanjer och en stor ask full med knappar. När eleverna gick i första klass valde de gärna att sortera knapparna eller bygga egna mönster med dem, när de var klara med sina uppgifter i boken. Kastanjerna var omtyckta för att de var släta och sköna att hålla i, men jobbiga för eleverna att hålla reda på när det blev för många på bänken då uppgifterna som skulle beräknas innehöll tal som var större än tio.

Bild 2: Ett matematikklassrum på 1990-talet

Eleverna i den åldersblandade gruppen klass 1-3 eller ibland F-2⁸, arbetade gärna på egen hand efter anvisningarna på sin "mattedrake". Den var en bild på en mycket slingrig drake, som hade delats in i mindre fält, som i sin tur innehöll korta instruktioner om de aktiviteter som eleven skulle utföra. Aktiviteterna kunde vara färdighetsträning med hjälp av uppgiftskort, sidor i matteboken, träna på datorn och tärningsaktiviteter eller spel, tangramuppgifter⁹ och problemlösningskort. En del rutor på draken var tomma för att eleven själv skulle välja en aktivitet, som sedan skrevs in i det

⁷ Tiobasmaterialets struktur utgår från basen tio, dvs. materialet är strukturerat i grupper om tio. De talsorter som förekommer i avhandlingen illustreras genom materialet på följande sätt, ental – små kuber, tital – tiostavar vars längd motsvarar tio kuber samt hundratal - hundraplattor motsvarande tio stavar i bredd.

⁸ Beteckningen F-2 omfattar elever i förskoleklass, år 1 och 2.

⁹ Tangram är ett pussel som har sina rötter i Kina. De sju bitarna är formade som geometriska figurer, närmare bestämt fem trianglar, en kvadrat och en parallelogram. Med hjälp av pusslet konstruerar elever egna figurer eller pusslar efter befintliga förebilder.

1. Inledning

tomma fältet. Varje gång eleverna hade avslutat någon av uppgifterna som draken anvisat, målade de ett fält på sin egen drake.

Skolan var ny och i klassrummet, där eleverna satt fem eller sex tillsammans i grupper, fanns ett stort utbud av olika sorters laborativt material och spel som de använde både individuellt och tillsammans med andra. Det fanns också lådor med inplastade kort med olika typer av uppgifter, utklippta från läroböcker. Flera elever befann sig alltid någon annanstans än på sin egen plats för att genomföra en matematikaktivitet, kanske på golvet i ett hörn av klassrummet eller tillsammans med någon vid det stora bordet. På någon sittplats låg ett kort som visade att eleven var utomhus och hoppade en tioserie med hopprepet. Många olika aktiviteter pågick samtidigt och det var sällan helt tyst i klassrummet, men föräldrar som kom på besök imponerades av barnens förmåga att ta ansvar för sitt arbete.

Mattedraken var ett sätt att individualisera matematikundervisningen. Med hjälp av draken organiserades elevernas arbete utifrån det matematiska innehållet, så att var och en höll på med ett bestämt innehåll med hjälp av olika sorters aktiviteter i enlighet med en fastlagd progression. I klassrummet var vi ibland två pedagoger och medan de flesta elever var sysselsatta med att följa instruktionerna på mattedraken kunde jag passa på att ha genomgångar med elever som enligt min bedömning kunde behöva det. Det kunde röra sig om elever som skulle påbörja ett nytt moment eller repetera något och andra gånger var det elever som verkade osäkra och behövde extra stöttning. Tillsammans arbetade vi, oavsett barnens årskurs, med skolmatematiken på den stora runda mattan.

Bild 3: Ett matematikklassrum år 2005-2012

På tavlan i klassrummet finns uppskrivet vilken sida i matteboken som är ”stoppsida” för den aktuella veckan eller för dagens lektion. Lektionen börjar med att läraren presenterar en problemlösningsuppgift, som flera elever bett om hjälp med under gårdagens matematiklektion. Läraren frågar eleverna om de har några förslag på hur uppgiften kan lösas och några som redan har lösningen klar räcker upp handen. En elev får berätta och läraren skriver det föreslagna räkneuttrycket på tavlan. Läraren uppmanar eleverna att läsa textuppgifterna noga så att de inte missar någon viktig information i uppgiften. På lärarens uppmaning tar eleverna sedan fram sina matteböcker. Läraren påminner om stoppsidan och eleverna fortsätter att arbeta i boken där de slutade förra lektionen.

Vid de två datorerna som är placerade längst ner i klassrummet håller några elever på med tabellträning, vilket de verkar uppskatta. Det laborativa

1. Inledning

materialet, bland annat tärningar, pengar och en del spel finns i några hyllor. Det tycks inte vara något som eleverna använder på eget initiativ.

Medan eleverna arbetar på egen hand med uppgifterna i boken går läraren runt i klassrummet och hjälper dem som räcker upp handen. En del av eleverna får hjälp flera gånger samtidigt som andra arbetar hela lektionen utan någon kontakt med läraren. Istället för att vänta på läraren, hjälper några av eleverna varandra. Eftersom de sitter två och två eller i grupper om fyra, finns det alltid någon bredvid att fråga. I klassen finns flera elever som verkar tycka mycket om att arbeta med matematik och som snabbt är klara med uppgifterna i boken. Då lektionen nästan är slut ber läraren eleverna lägga ihop sina böcker och frågar sedan hur de tycker att arbetet har gått. De flesta elever svarar snabbt att det var lätt, men det går också att urskilja några röster som antyder att alla inte verkar lika övertygade om det.

Ibland samlar läraren in böckerna och när eleverna får tillbaka dem nästa lektion måste några av eleverna först korrigera felaktigt lösta uppgifter innan de får fortsätta med några nya. Ett återkommande inslag i undervisningen är diagnoserna som eleverna gör efter varje avslutat kapitel i boken.

Bild 4: Ett annat matematikklassrum år 2005-2012

Lektionen inleds med att läraren uppmanar eleverna att fundera över vad hälften innebär. Eleverna ger olika förslag och några får därefter visa i tur och ordning hur man kan göra för att dela ett snöre i två halvvar så att de blir lika stora. Läraren ber varje elev förklara varför deras sätt kan fungera bra. Lektionen fortsätter med att eleverna får var sitt rektangulärt papper att dela i två lika stora delar. Den ena halvan ska sedan sättas upp på tavlan. Det är liv och rörelse i klassrummet och eleverna kommenterar både sina egna och andras aktiviteter. De flesta viker sina papper en gång innan de klipper itu dem i vikningen, men det finns också elever som sätter saxen i papperet efter att ha gjort en grov uppskattning av hur stort hälften av papperet kan vara. Efter en stund är tavlan full av rektanglar som placerats både liggande och stående. De är inte lika stora eftersom eleverna har fått rektangelformade papper i tre olika storlekar. Frågor som eleverna nu ställs inför är hur det kommer sig att deras rektanglar ser olika ut både när det gäller storlek och form, trots att alla har delat sitt papper på hälften. Eleverna, sitter i bänkar som är placerade två och två. De diskuterar med sin bänkkamrat och förklarar för varandra hur de tänker. Efter några minuter uppmanas eleverna att berätta för klassen. Många räcker upp handen och två får komma fram till tavlan och förklara för resten av klassen. Tillsammans visar de två eleverna och läraren, med hjälp av de olika figurerna på tavlan, hur storleken på det ursprungliga papperet har betydelse för storleken på halva papperet.

1. Inledning

Innan lektionen avslutas håller läraren upp några figurer som är delade i två delar. Några av dem är inte delade symmetriskt och delarna är därför inte lika stora. På varje figur är den ena av de två delarna målade. Eleverna uppmanas att räcka upp handen när de anser att läraren håller upp en figur där hälften av figuren är målade. Alla eleverna klarar att urskilja vilka figurer som är delade mitt itu.

Reflektion över bilderna

Bilderna ovan har mycket gemensamt, men det står också klart att det finns tydliga skillnader. För att synliggöra både likheter och olikheter tas några av dem upp här.

Min första tanke är att eleverna som jag mötte under 80-talet ofta fick vara med om att jag först visade och förklarade hur de skulle tänka och göra, innan de sedan arbetade med uppgifterna i sina böcker. Trettio år senare kan jag notera likheterna mellan mitt 80-talsklassrum och de matematikklassrum där idag matematikboken har en central roll. I båda fallen utgör enskilt arbete i boken en stor del av lektionen. Skillnaden jag ser är att genomgångarna är kortare idag och därmed ges eleven ännu mer tid att arbeta på egen hand (jfr. Skolverket, 2003; Skolinspektionen, 2009). Andra olikheter visar sig i organisationen. Under 1980-talet genomfördes en stor del av lågstadiets lektioner i halvklass, framför allt i årskurs 1 och 2. Min erfarenhet av dagens skolorganisation är att undervisning i halvklass är en sällsynt förekomst. I gengäld tycks lågstadieleverna idag möta fler pedagoger under en skolvecka medan klassläraren ofta var den enda pedagogen i 1980-talets klassrum.

Eleverna som jag undervisade i de åldersblandade klasserna på 90-talet fick, till skillnad från sina föregångare på 80-talet, möjlighet att möta matematiken genom större variation både i material och genom olika aktiviteter under lektionerna. De kunde också själva välja mellan aktiviteter och hade därmed ett visst inflytande på sin egen lärandeprocess. Trots min strävan att tona ned tävlingstendenserna i matematiken blev ”mattedraken” ett mått för eleverna på hur långt de hade kommit, eftersom de kunde jämföra med varandra hur många rutor var och en hade målat. Några var också mycket medvetna om vilken drake i ordningen de höll på med. Detta hade jag inte riktigt räknat med, men i mötet med barn lär man sig både att de oftast är mer kompetenta än vad vi vuxna anar och att allt inte går att förutse.

Beträffande klassrummen som framträder i bilderna från 1980- och 90-talen, erbjöd de som jag såg det då goda betingelser för eleverna att lära sig matematik i enlighet med styrdokumentens föreskrifter. Det jag däremot inte tänkte så mycket på när jag befann mig i dessa klassrum tillsammans med eleverna, var vilken typ av matematikkunnande som eleverna gavs möjlighet

1. Inledning

att utveckla. Var det någon annan sorts kunnande än bara innehållsrelaterad kunskap? I den dåvarande kursplanen Lgr80 framkom inte att en sådan fråga var relevant mer än möjligen i relation till problemlösning, som då var ett nytt område. Däremot har frågan större relevans för undervisningen som beskrivs i bild 3 och 4 eftersom den är av betydligt senare datum. I dag, då läroplanen Lgr11 föreskriver att eleverna ska ges förutsättningar att utveckla olika förmågor att hantera matematik, är detta en central fråga. Den var visserligen angelägen redan i förra kursplanen (Skolverket, 2000, 2008c), men har nu fått ökad uppmärksamhet. Frågan om vilken sorts matematikkunnande, vilka kompetenser eleverna ges möjlighet att utveckla, är därför en kärnfråga i det här arbetet, där intresset riktas mot lärares och elevers handlingar under matematiklektionerna.

Klassrumsforskning

Avsikten med det här avsnittet är att placera klassrumsforskning i blickfånget och dessutom lyfta fram några svenska exempel på studier som tillhör avhandlingens intresseområde.

Klassrumsforskning är en etablerad tradition sedan snart femtio år och med ett omfattande forskningsfält (Sahlström, 2008). Laborde och Perrin-Glorian (2005) argumenterar för klassrumsstudier som tillvägagångssätt vid forskning om didaktiska fenomen där relationen mellan undervisning och lärande är i fokus. För forskare inom det matematikdidaktiska fältet är därför undervisningen i klassrummet ett väl valt studieobjekt, menar Laborde och Perrin-Glorian (2005).

The size of the classroom teaching situation as a unit of analysis seems to be appropriate for the study of didactic phenomena to grasp the multifaceted complexity of the interrelations between the teaching and learning processes in school. (s. 2)

Det som motiverar till klassrumsstudier är att klassrummet befinner sig på en nivå som ligger mellan det allmänna undervisningssystemet och individens mentala aktiviteter. Det är alltså denna position som gör klassrummet till en lämplig analysenhet i matematikdidaktisk forskning, menar Laborde och Perrin-Glorian (2005). Vidare framhåller de möjligheterna att uppmärksamma undervisningens sociala och kulturella aspekter, något som bland annat också Goodchild (2001) ger uttryck för.

Klassrummet är alltså ett centralt objekt i forskning om matematikundervisning (se t. ex. Ernest, 2001). Det betyder emellertid inte att autentiska klassrum alltid bidrar med empirin, vilket kan verka något

1. Inledning

motsägelsefullt. Efter en genomgång av drygt tusentalet internationella artiklar som publicerats inom det matematikdidaktiska fältet under perioden 1996-2006, konstaterar Häggström (2008) att det under den perioden snarare hörde till ovanligheterna inom området matematikundervisning. Av det undersökta materialet bedömer Häggström att endast 15% är forskning som använder empiri från autentiska klassrum. Bland dessa dominerar studier som gäller ett klassrum och ibland bara med data insamlade från en lektion. Studier som inkluderar två eller flera klassrum är däremot mer sällsynta, enligt Häggströms (2008) undersökning.

Bland svenska avhandlingar utgör klassrumsforskning som genomförts på lågstadiet med fokus på undervisning och lärande i matematik en försvinnande liten del. Under perioden 1919-2009 publicerades totalt 73¹⁰ svenska doktorsavhandlingar om lärande och utbildning i matematik, enligt efterforskningar gjorda av Björkqvist och Bergsten (Bergsten, 2010). Av dessa placeras 16 i gruppen ”primary”, det vill säga lågstadiet, varav endast en räknas till kategorin klassrumsforskning (Bergsten, 2010).

Tillsammans talar detta för att det finns stort utrymme för forskning som i likhet med den här avhandlingen är inriktad mot lågstadiets matematikundervisning och därtill använder empiri från flera klassrum. Inom avhandlingens intresseområde är relationen mellan undervisning och lärande är i fokus

Några forskningsexempel

Det är framför allt tre svenska klassrumsstudier från den senaste tioårsperioden som är relevanta att ta upp här, eftersom de är exempel på forskning som ligger inom avhandlingens intresseområde.

I den första studien uppmärksammar Emanuelsson & Sahlström (2006) kulturella faktors inverkan på matematikundervisningen. Forskarna har studerat interaktionen under matematiklektioner i två åttondeklasser. Genom analysen synliggörs stora skillnader i undervisningen, trots att både arbetsformerna¹¹ och innehållet som undervisas i klasserna är detsamma. Resultatet visar inte bara att det är skillnader mellan klasserna beträffande undervisningen så som den konstitueras genom lärares och elevers interaktion. Det visar också att matematiken får olika innebörd för de två

¹⁰ De flesta av dessa avhandlingar (61) har tillkommit under perioden 1990-2009. Inte minst det senaste decenniet har inneburit en stor ökning av antalet doktorsavhandlingar inom det aktuella området (Bergsten, 2010).

¹¹ Exempel på arbetsformer är som redan framkommit helklassundervisning, arbete i grupper och arbete på egen hand (se Granström, 2007).

1. Inledning

klasserna. I det ena klassrummet framstår matematiken främst som ett verktyg för att lösa uppgifter i boken, medan den i det andra klassrummet relateras till fenomen utanför själva matematiken (Emanuelsson & Sahlström, 2006).

I den andra studien har Löwing (2004) intresserat sig för interaktionen i matematikklassrummet. Hennes avhandling, som omfattar sju matematikklassrum i skolår 4-9, uppmärksammar bland annat hur lärare och elever kommunicerar det matematiska innehållet. Bland resultaten kan vi exempelvis notera att lektioner, som uppfattats som funktionella i samband med observationen, ger ett annat intryck efter att den muntliga kommunikationen har analyserats.

Den tredje studien (Björklund Boistrup, 2010) riktar ljuset mot bedömning i matematikundervisningen. Forskaren har följt undervisningen i fem klasser under en vecka i år 4, där bland annat språket (i vid bemärkelse) i lärares och elevers kommunikation har varit i fokus. Av resultatet framgår att olika sorters feedback ger elever olika möjlighet att delta aktivt i arbetet kring sitt eget lärande. I matematikklassrummet kan fyra typer av bedömningsdiskurser, det vill säga kommunikationsmönster för bedömning, urskiljas. Det innebär i sin tur att eleverna därigenom erbjuds olika resurser för sin kunskapsutveckling.

Laborde och Perrin-Glorian (2005) visar hur klassrumsstudier kan resultera i forskning om fenomen på olika nivåer i undervisningen. På mikro-nivån studeras exempelvis förloppet vid problemlösning i samband med lärares och elevers arbete med att lösa ett specifikt problem. Studier som fokuserar undervisning av ett särskilt innehåll på en bestämd nivå, där flera klassrum kan ingå i observationsstudien hör ihop med mesonivån. Även på makronivån kan undervisning av ett bestämt innehåll vara i fokus, men innehållet representeras då av läromedel, styrdokument och tiden som ägnas åt innehållet i undervisningen.

En av de forskare som har tagit vara på möjligheten att analysera på flera nivåer är Goodchild (2001), som får representera ett exempel utanför det svenska fältet. Han har följt matematikundervisningen i en klass med fjortonåringar under ett skolår. Det empiriska materialet har sedan analyserats utifrån tre olika nivåer. På den första nivån beskrivs klassrummet, vilket innefattar bland annat den fysiska miljön, hur undervisningen är organiserad samt lärares och elevers handlingar och attityder. Den andra nivån presenteras som relationen mellan den enskilda eleven och den första nivån. Det som utspelas på den andra nivån visar sig i elevernas handlingar då de genomför uppgifterna som de har fått av läraren. Interaktionen mellan lärare och elever samt eleverna sinsemellan är i fokus för analysen på den här

nivån. Den tredje nivån slutligen, kan beskrivas som en elevs privata mentala område.

I jämförelse med Goodchild (2001) fokuserar min forskning på fenomen som har sina motsvarigheter i de två första nivåerna. Med utgångspunkt från Laborde och Perrin-Glorian (2005) är det närmast mesonivån som är intressant eftersom det är undervisning av ett och samma innehåll i flera klassrum som uppmärksammas i det här arbetet.

Tillsammans bidrar de fyra studierna som tagits upp ovan med kunskap om samspelet i klassrummet. Det framkommer exempelvis att lärares och elevers interaktion påverkar undervisningen så att den kan framstå helt olika i klasser även om både innehåll och arbetsformer är desamma. Det visar sig också att när lärare och elever kommunicerar med varandra är det nästan uteslutande ett vardagsspråk som används och matematiska begrepp är mindre vanliga. Forskningen som tagits upp ovan ger också tydliga tecken på att elever möter vissa typer av återkoppling från läraren och beroende på vilken sorts återkoppling som ges, erbjuds elever olika resurser som stöd i sin kunskapsutveckling.

Gemensamt för dessa studier är att de uppmärksammar matematikundervisning på mellan- och högstadiet. Frågor som tillhör avhandlingens intresseområde, om undervisningens resultat med avseende på vad som är möjligt lärande i relation till olika kompetenser, berörs i viss mån hos Björklund Boistrup (2010). Däremot behandlas inte dessa frågor i någon större omfattning i de andra svenska studierna som tagits upp ovan. I endast en av studierna är undervisningsinnehållet detsamma i klasserna som har studerats.

Genom att fokusera på lågstadiets matematikundervisning, så som den visar sig genom lärares och elevers utmärkande handlingar i några klasser där undervisningsinnehållet är gemensamt, och vad eleverna därigenom ges förutsättningar att lära, kan den här avhandlingen utgöra ett värdefullt kunskapstillskott.

Aritmetik – ett omdiskuterat område i skolmatematiken

Aritmetiken eller snarare dess olika räknemetoder, särskilt de skriftliga, har med jämna mellanrum skapat debatt, inte minst i den svenska lärarkåren. På 1990-talet blossade diskussionen åter upp och sedan dess har det gjorts återkommande inlägg av både lärare, matematikdidaktiker och läromedelsförfattare (se t. ex Emanuelsson, 1989; Hedrén, 2006; Johansson, 2006; Mellin-Olsen, 1989; Rockström, 2006, 2012; Unenge, 1989). Debatten från 1990-talet och framåt har dominerats av synpunkter på vilka

1. Inledning

räknetoder som ska användas medan betydligt mindre utrymme har ägnats åt frågor kring själva undervisningen (se vidare kap. 2).

Undervisningsinnehållet som aktualiseras genom min klassrumsstudie hör alltså till aritmetiken, eller räkning med de fyra räknesätten. I en uppföljande analys av resultatet i TIMSS 2007 gällande år 4, pekar Bentley ut olika tillvägagångssätt i undervisningen som orsak till bristerna i svenska elevers taluppfattning och aritmetikkunnande (Skolverket, 2008b). Särskilt subtraktion med tiotalsovergång framhålls som ett kritiskt innehåll då det skapar problem för både elever och lärare (Bentley & Bentley, 2011; Löwing, 2008). Denna slutsats bekräftas i viss utsträckning av resultatet från nationella provet i år 3. Både 2011 och 2012 års delprov som gäller skriftliga räknetoder är det prov som vållar de flesta svårigheterna för eleverna, vilket visar sig i att cirka 15 % av eleverna inte når upp till kravnivån för delprovet (Skolverket, 2011b, 2012a).

Det är inte bara svenska elever som stöter på problem när de ska utföra additions- eller subtraktionsberäkningar med tiotalsovergång, särskilt där termerna innehåller två eller flera siffror. Den internationella forskningslitteraturen innehåller en mängd exempel som visar att detta ställer till svårigheter även bland elever på andra håll (t. ex. Beishuizen, 1993; Fuson, 2003; Fuson et al., 1997; Norton, 2012).

Den ständigt pågående diskussionen tillsammans med det faktum att addition och subtraktion med tiotalsovergång tycks vara ett svårbemästrat område för många elever i västvärlden, tyder på att det finns anledning att ytterligare uppmärksamma undervisning i aritmetik, inte minst när det gäller addition och subtraktion i talområdet 20 - 100. Nyare studier om sådan undervisning i en svensk kontext är inte särskilt vanliga, vilket innebär att avhandlingen här kan utgöra ett värdefullt kunskaps tillskott.

Det finns emellertid undantag. Olteanu och Olteanu (2012) har genomfört en omfattande klassrumsstudie med avsikt att i samverkan med deltagande lärare utforska hur undervisningen kan utvecklas så att eleverna både bättre förstår vad subtraktion innebär och blir skickligare i att hantera subtraktionsberäkningar. En väsentlig skillnad jämfört med avhandlingen är att deras studie riktar intresset mot den direkta undervisningen, medan min forskning även inbegriper undervisningens kulturella aspekter och vad undervisningen därigenom ger eleverna förutsättningar att lära. På så sätt kan min studie komplettera denna tidigare forskning.

Avsikten med texten så här långt har varit att ge en bakgrund till avhandlingen. Nu följer presentationen av syftet. Efter syftestexten och tillhörande frågeställningar uppmärksammas sedan själva forskningsområdet.

Syfte

Syftet med studien är alltså att beskriva, analysera och förstå matematikundervisning på lågstadiet. Mer precist är syftet att undersöka vad denna undervisning ger elever i några klassrum möjlighet att lära då undervisningsinnehållet är skriftliga räknemetoder för addition och subtraktion.

I avsikt att uppnå syftet har följande frågeställningar formulerats för att söka svar på:

- Vad är kännetecknande för lärares handlingar i dessa klassrum?
- Vad är kännetecknande för elevers handlingar i dessa klassrum?
- Vilka förutsättningar för lärande med avseende på olika kompetenser i matematik skapas i dessa klassrum?

Om matematik

Avhandlingen handlar sålunda om lärares och elevers handlingar i relation till matematikämnet i skolan, det vill säga skolmatematik. Boaler (2009) uppmärksammar det faktum att skolmatematiken generellt har förknippats med att komma ihåg procedurer. En före detta elev, som hon har intervjuat, ger följande bild av sin skolmatematik: "It was something where you had to just remember in which order you did things, and that's it" (s. 65). Citatet ger uttryck för uppfattningen att matematik består av en mängd regler avsedda för att lösa olika typer av uppgifter, vilket har sin grund i att elevernas möte med matematiken innebär just detta (Jablonka, 2011a). Andra studier (t. ex. Bekdemir, 2010; Samuelsson, 2005; Samuelsson & Lawrot, 2009) visar på kopplingen mellan matematik och emotioner, såväl positiva som negativa. Ett exempel på detta är lärarstudenter, som fått i uppgift att skriva uppsats med rubriken "Matematiken och jag". De beskriver skolmatematik med ord som pirrande, roligt, okay, tråkigt, svårt, krångligt, fantasilöst, läskigt etc. (Samuelsson, 2005). Bland de orsaker till matematikängslan som lyfts fram är bland annat bristen på gynnsamt lärandeklimat (Samuelsson & Lawrot, 2009).

Förutom att ordet matematik kan ge olika associationer, finns det också flera sätt att definiera matematik. En kort och kärnfull definition ges i Nationalencyklopedin, där matematik presenteras som "en abstrakt och generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling". Matematik som vetenskap kan spåras till den grekiska antiken, men det finns också rötter som går tillbaka till Babylonien där bland annat Pythagoras sats var känd redan för flera tusen år sedan (Björklund Boistrup, Pettersson & Tambour, 2007). Andra definitioner tar fasta på att matematiken rymmer flera olika perspektiv. Exempel på detta kommer till uttryck hos Boaler (2009), som menar att "Mathematics is a human activity, a social phenomenon, a set of methods used to help illuminate the world, and it is part of our culture" (s. 17). Boaler's formulering visar inte bara på begreppets mångsidighet utan också på matematik som en social företeelse.

Människans betydelse för matematikens framväxt visar sig också i de två senaste styrdokumenterna. Följande exempel är hämtat från kursplanen till Lpo94. "Matematik är en levande mänsklig konstruktion som omfattar skapande, utforskande verksamhet och intuition. Matematik är också en av våra allra äldsta vetenskaper och har i stor utsträckning inspirerats av naturvetenskaperna" (Skolverket, 2000, s. 27).

Texten ovan ger, i likhet med Boaler (2009), uttryck för matematikens olika ansikten. Niss (1994) visar på ett liknande synsätt då han beskriver

1. Inledning

matematik som en ”femfaldig natur”, där alla fem delarna är aktuella samtidigt. Dessa kan sammanfattas som (1) ren matematisk vetenskap, (2) tillämpad vetenskap, (3) ett system av hjälpmedel till stöd i olika handlingar och beslut, (4) ett estetiskt område med möjlighet till positiva upplevelser samt (5) ett undervisningsämne (Niss, 1994). Det är alltså den sistnämnda aspekten, matematik som undervisningsämne, som detta arbete uppmärksammar.

Om didaktik

Forskning om undervisning och lärande tillhör det didaktiska forskningsfältet. Ordet didaktik kommer från grekiskans ”didaskhein” som kan översättas både till ”att undervisa” och ”att lära sig” (Jank & Meyer, 1997a). En allmänt förekommande definition av didaktik säger oss att detta är ”undervisningens och inläringens teori och praktik” (Jank & Meyer, 1997a, s. 18; Selander & Kroksmark, u.å.). Undervisning och lärande inom ett bestämt ämne, i det här fallet matematik, kallar Marton (1986) fackdidaktik. Den definieras ”i termer av frågor om val och behandling av undervisningens innehåll inom olika kunskaps- och färdighetsområden” (Marton, 1986, s. 72).

Forskning om didaktik kan betraktas som antingen analytisk eller handlingsorienterad (Jank & Meyer, 1997b). Det betyder i sin tur att forskningen kan delas upp i två områden, representerade av två centrala uppgifter. Det handlar dels om att beskriva undervisningsverkligheten sådan den *är*, dels om att föreslå hur en bättre undervisning *bör* se ut (s. 47). Med ett sådant sätt att se på didaktisk forskning tillhör avhandlingen det förstnämnda området, då den avser att beskriva matematikundervisning så som den visar sig genom elevers och lärares handlingar i klassrummet. Kännetecknande för denna typ av forskning är att den kan beskrivas med begrepp som exempelvis observation, deskriptiv och/eller analytisk forskning, undersökning av existerande verklighet och empiri (Jank & Meyer, 1997b). Formuleringen ”undervisningsverkligheten sådan den *är*” ger anledning att stanna upp för en reflektion. En sådan beskrivning låter sig knappast göras då varje enskild beskrivning är en personlig tolkning av sinnesintryck och det finns därför inte bara en sanning. En strävan bör istället vara att ge en så trovärdig beskrivning som möjligt, vilket hör samman med behandlingen av kvalitetsfrågor i varje forskningsprojekt.

Forskningsområdet matematikdidaktik

Forskning om lärande och undervisning i matematik hör alltså hemma inom området matematikens didaktik. Som forskningsfält betraktat är

1. Inledning

matematikdidaktik förhållandevis nytt eftersom det är först på 1960-talet som systematiska, teoretiskt grundade undersökningar av undervisning och lärande i matematik börjar väcka uppmärksamhet (Björkqvist, 2003; Skott, Jess, Hansen, & Lundin, 2010). Till en början utgjorde psykologi och matematik den dominerande grunden för denna kunskapsutveckling. Med inflytande från Piagets forskning om barns kognitiva utveckling riktades mycket uppmärksamhet mot mentala aspekter med syfte att förstå den enskilda elevens matematiska tänkande (Kilpatrick, 1992; Lerman, 2000).

Den fortsatta utvecklingen kan vi följa genom att ta del av de handböcker som gavs ut under 1990-talet i syfte att bland annat ge en översiktlig bild av området (se t. ex. Grouws, 1992 samt Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick, & Laborde, 1996). Hos Bishop et al. presenteras en översikt där matematikdidaktisk forskning är strukturerad i fyra sektorer.

1. Curriculum, Goals, Content, Resources
2. Teaching and Learning Mathematics
3. Perspectives and Interdisciplinary Contexts
4. Social Conditions & Perspectives on Professional Development

Bakom dessa rubriker återfinns forskning inom områden som rör (1) styrdokument, undervisningens mål och innehåll samt undervisningsresurser (t. ex. material), (2) undervisning och lärande i matematik, (3) olika perspektiv samt matematik i andra kontexter än skolans och (4) relationen mellan forskning och lärarutbildning samt mellan forskning och undervisande lärares kompetensutveckling. Områdena överlappar ofta varandra och det finns inga tydliga avgränsningar, men rubrikerna visar vilken sorts frågeställningar som är centrala inom respektive område.

Av beskrivningarna ovan framgår att det handlar om ett omfattande forskningsfält. Inom detta ryms också forskning av flera inriktningar och med olika teoretiska perspektiv som utgångspunkt (Björkqvist, 2003; Sierpiska & Kilpatrick, 1998). Den bredd som finns representerad kan ha medverkat till att det inte råder fullständig enighet om vad som är matematikdidaktikens egentliga uppgift (Skott et al., 2010). Niss (1999) har formulerat en definition där tonvikten ligger på matematikens didaktik som en vetenskaplig disciplin. Genom att beskriva dess syften ger han en bild av vad som kan vara matematikdidaktikens identitet.

The didactics of mathematics, alias the science of mathematics education, is the scientific and scholarly field of research and development which aims at identifying, characterizing, and understanding phenomena and processes actually or potentially involved in the teaching and learning of mathematics at any educational level. (Niss, 1999, s. 5)

1. Inledning

Utmärkande för matematikdidaktisk forskning är enligt Niss således en strävan efter att identifiera, karaktärisera och förstå fenomen och processer som förekommer i alla former av matematikundervisning och matematiklärande.

Den fortsatta presentationen av forskningsfältet matematikdidaktik kommer att göras med utgångspunkt från avhandlingens intresseområden. Det betyder att en del av den forskning som uppmärksammas har anknytning till allmänna frågor om undervisning och lärande i matematik medan annan forskning kan kopplas samman med matematikundervisningens sociala och kulturella aspekter. Avsikten med presentationen är endast att ge en kortare översikt. Flera av de berörda områdena tas upp mer ingående i kapitel 2.

Undervisning och lärande

I forskningsöversikten som presenterats ovan har Bishop et al. (1996) benämnt en av de fyra sektorerna ”Teaching and learning Mathematics”. Det är inom detta område som det här arbetet hör hemma. Eftersom undervisning i grunden har med lärande¹² att göra, är dessa begrepp starkt relaterade till varandra (Krokmark, 1997, Wyndhamn, 1990). Undervisning och lärande kan ses som två aspekter av en helhet, det vill säga två sidor av samma sak (Jank & Meyer, 1997a).

Undervisning kan definieras som relationer mellan lärare, elever och undervisningsinnehåll. Med ett sådant synsätt utgör interaktionen mellan lärare och elever, i relation till ett bestämt innehåll, kärnan i undervisningen. I fallet matematikundervisning uttrycker Kilpatrick, Swafford och Findell (2001) detta förhållande på följande sätt: ”We view the teaching and learning of mathematics as the product of interactions among the teacher, the students, and the mathematics” (s. 313). Därmed poängterar de att själva undervisningsförloppet omfattar lärares och elevers handlingar i relation till matematiken, där såväl undervisning som lärande kommer till uttryck.

Bilden av undervisning som relationer mellan lärare, elever och innehåll ligger också till grund för hur andra forskare ser på undervisning. Cohen och Ball (1999) har exempelvis valt att rikta intresset mot innehållskomponenten, där de också inbegriper undervisningsmaterial. De menar att inte bara lärarens kunskaper eller innehållet som undervisas ska ses som de avgörande resurserna i undervisningen i klassen. Därför talar de om material istället för innehåll och syftar då på de materiella faktorer som både lärare och elever är involverade i under lektionerna, som uppgifter, texter och olika tekniska

¹² Både Krokmark (1997) och Wyndhamn (1990) använder ordet inläring. I avhandlingen har det ersatts med lärande.

1. Inledning

hjälpmedel. Ett liknande synsätt möter vi även hos Franke, Kazemi och Battey (2007), som tillsammans med innehållet också lyfter fram dess representationer som en betydelsefull faktor i undervisningen.

The teacher works to orchestrate the content, representations of the content, and the people in the classroom in relation to one another. Students' ways of being, their forms of participation and their learning emerge out of these mutually constitutive relationships. (Franke et al., 2007, s. 227)

Citatet ovan ger också uttryck för att läraren har en särskild roll, som består i att arrangera och iscensätta undervisning. Detta är också en central tanke i den forskning som genomförs inom den variationsteoretiska traditionen (se t.ex. Kullberg, 2010; Runesson, 1999; Wernberg, 2009).

Gemensamt för alla forskarna ovan är att de uppfattar matematikundervisning som ett förlopp av interaktioner, det vill säga en process där undervisning och lärande är starkt sammankopplade, trots att det också kan betraktas som två olika företeelser. Som Wyndhamn (1990) påpekar är det därför knappast möjligt att resonera om undervisning utan att också beröra lärande. När undervisning uppmärksammas i den här studien innebär det att fokus inte endast riktas mot den direkta undervisningen. Det handlar lika mycket om att ställa undervisningsförloppet i relation till frågor om lärande med avseende på den undervisning som genomförs.

Undervisning och lärande i matematik är en sektor som får stor uppmärksamhet i Niss (1999) beskrivning av matematikdidaktisk forskning. Han tar särskilt upp två områden som vuxit fram i anslutning till undervisning och lärande under de senaste årtiondena. Det gäller forskning om (a) elevers lärandeprocesser tillika produkter samt (b) vad som sker i den faktiska matematikundervisningen. Mitt arbete hör till det senare området.

Matematikundervisning som kulturella system och sociala förlopp

Studien handlar således om processer i matematikundervisningen. Här innebär det att interaktionen mellan lärare och elever samt elever sinsemellan är i fokus. Det betyder också att matematiklärande uppfattas som en process under inverkan av sociala och kulturella faktorer (t. ex. Cobb, 1990; Lerman, 2000). Genom interaktionen sker alltså både utbyte av kunskap och värderingar samt användning av kulturella redskap (Säljö, 2000). Ett sådant förhållningssätt till undervisning och lärande i matematik har under de senaste decennierna influerat det matematikdidaktiska forskningsfältet och

1. Inledning

successivt fått allt större utrymme (Clements, 1996; Sfard, Forman & Kieran, 2001; Sfard, 2006; Voigt, 1996).

Lerman (2000) kallar detta perspektivskifte inom matematikdidaktisk forskning för den sociala vändningen, ”the social turn”. Med detta menar han inte att teorier som tidigare dominerat, helt bortser från sociala faktorer. Benämningen ska snarare ses som ett uttryck för att detta istället är något helt annat, nämligen

the emergence into the mathematics education research community of theories that see meaning, thinking and reasoning as products of social activity. This goes beyond the idea that social interactions provide a spark that generates or stimulates an individual’s internal meaning-making activity. (Lerman, 2000, s. 23)

Här tydliggör Lerman vad som är det nya i sättet att betrakta sociala faktorerers inverkan på matematiklärande. Tidigare har sociala aktiviteter uppfattats som indirekta påverkansfaktorer. Den sociala vändningen, menar Lerman (2000), innebär istället att lärande ses som en direkt följd av social interaktion. Kursändringen kan också beskrivas som en förskjutning av perspektiv i synen på lärande. Längre betraktades lärande som förvärvande av begrepp, mentala scheman, kunskap och färdigheter, men nu talar vi istället om ett deltagande perspektiv där lärande uppfattas som en process (Lerman, 2000).

Lave och Wenger (1991) har bidragit med ytterligare en aspekt av the social turn genom sin teori om situerat lärande i sociala praktiker och ”communities of practice”. De menar att människan ingår i många olika praktikgemenskaper, varav skolverksamhet är ett exempel. Utmärkande för en praktikgemenskap är, förutom att medlemmarna utövar en gemensam verksamhet, också deras ömsesidiga engagemang samt att det i denna kollektiva verksamhet utvecklas en gemensam repertoar av till exempel rutiner, verktyg, symboler och handlingar (Wenger, 1998). Allt detta är exempel på sådana företeelser som utgör en del av klassrumskulturen (Staub, 2007).

Av särskilt intresse är den gemensamma handlingsrepertoaren. Cohen et al. (2003) påpekar att elevernas lärande är beroende av mer än bara de enskilda handlingarna som är synliga i matematikklassrummet. Det handlar minst lika mycket om andra företeelser som är involverade i undervisningen. En del av dessa är mer framträdande, exempelvis material och olika arbetsformer. Andra kan vara mindre synliga eller medvetna, som normer och praxis. Genom att studera den här typen av fenomen som utvecklas i undervisningen kan dolda aspekter, som i förlängningen kan inverka på elevernas lärande, synliggöras. Forskare poängterar att den praxis som

1. Inledning

etableras i klassrummet är avgörande för vilka förutsättningar för lärande som utvecklas (Cobb & Yackel, 1996; Skott, et al., 2010).

För att undervisningen ska kunna utvecklas är det, nödvändigt att det finns en medvetenhet om kulturella faktorer och deras inverkan på undervisningsförloppet, framhåller Stigler och Hiebert (1997). Ett sådant förhållningssätt får också stöd hos en annan forskare inom det matematikdidaktiska fältet, vilket framgår av dennes text nedan. Med institutionalisering syftar Cobb (1990) på den snäva matematiska praktik som är resultatet av lärares och elevers matematikaktiviteter i skolan och som i sin tur begränsar individens matematiska handlingar.

Acculturation and institutionalization of mathematical practices are therefore a necessary aspect of children's mathematical education. Analyses that focus solely on individual children's construction of mathematical knowledge tell only half of a good story. (Cobb, 1990, s. 213)

Cobb förordar alltså ett förhållningssätt där analys av undervisning och lärande genomförs i relation till mer än en aspekt, så att det blir möjligt att komma fram till något som liknar en helhetsbild.

Denna fråga har nyligen aktualiserats av Schoenfeld (2012), som betonar vikten av att forskaren beaktar kulturella aspekters inverkan på matematikundervisningen. Det som pågår i matematikklassrummet i form av lärares och elevers handlingar utgör en del av det kulturella system ur vilket lärandemiljön växer fram. Vissa analysverktyg är därför alltför begränsade för att användas vid analys av verksamheten i klassrummet, menar Schoenfeld (2012). Han uppmanar därför forskaren att börja se sig om efter teoretiska verktyg som kan hjälpa till att synliggöra hur interaktionen i klassrummet inverkar på undervisningsförloppet.

Några forskare som följer denna uppmaning är Rezat och Sträßer (2012). Likt Schoenfeld och flertalet andra forskare som nämnts tidigare i avsnittet betraktar de undervisning inte endast som relationer begränsade till att omfatta lärare, elever och undervisningens innehåll. De resonerar med utgångspunkt från att de verktyg som lärare och elever använder också har en central roll i undervisningen. Därmed anser de det nödvändigt att inte bara analysera lärares och elevers handlingar i relation till varandra och till innehållet, utan också att inbegripa verktygen i analysen. Detta för att kunna synliggöra och förstå vad som sker i matematikundervisningen. För att kunna göra det vänder sig Rezat och Sträßer (2012) till verksamhetsteorin och särskilt den modell för verksamhetssystem som har utvecklats av Engeström (1987). Även om verktygen har en särställning i förhållande till andra

1. Inledning

kulturella och sociala faktorer i undervisningen, menar Rezat och Sträßer (2012) att modellen bidrar till att också andra aspekter kan komma att synliggöras genom analysarbetet.

I fokus för den här studien är matematikklassrummet. Med det avses i avhandlingen något annat än bara ett fysiskt rum. Det handlar snarare om lärares och elevers handlingar tillsammans med bland annat regler, roller och kultur, som synliggörs härigenom, vilket också framgår av definitionen som presenterats tidigare (se Goodchild, 2001). En näraliggande beskrivning är matematikklassrummet som liktydigt med den verksamhet som sker under matematiklektionerna genom lärares och elevers handlingar då de interagerar med varandra och med de verktyg som står till förfogande. Grunden för den senare beskrivningen återfinns i idén om undervisning som en verksamhet bestående av människors handlingar (Engeström, 1998; Leontiev, 1986). Tonvikten i mitt arbete ligger alltså på individernas handlingar som sker i relation till innehållet via olika former av verktyg. Därmed kan det räknas till den nyare tradition inom det matematikdidaktiska fältet, som innebär att kulturella och sociala aspekter ges större utrymme.

Som en följd av denna utveckling har det uppkommit behov av analysverktyg som gör det möjligt för forskaren att även upptäcka och analysera företeelser i matematikklassrummet som inte är direkt iögonfallande. Ett sådant analysverktyg, med rötter i verksamhetsteorin, har nyligen presenterats av Rezat och Sträßer (2012). På motsvarande grunder används i avhandlingen ett analysinstrument från Engeströms verksamhetsteori (se Engeström, 1987, 1998) för att analysera processer i matematikklassrummet.

Vad kan matematikdidaktisk forskning bidra med?

Ett framträdande drag inom det matematikdidaktiska fältet är forskares vilja att bidra till en förbättrad matematikundervisning (Niss, 1999; Skott et al., 2010). Det har dock visat sig att resultat från forskning om lärande och undervisning i matematik har haft svårt att nå ut till lärare som är verksamma i skolan (Boero, Dapuzo & Parenti, 1996; Grevholm, 2001; Olteanu & Olteanu, 2012). Genom att vidga perspektivet föreslår forskare som exempelvis Kilpatrick (1995), Niss (1999) och Skott et al. (2010) att matematikdidaktisk forskning kan ges en vidare innebörd och därmed inte bara uppfattas som direktiv för skolpraktiken. Skott et al. (2010) menar vidare att matematikdidaktiken vanligtvis erbjuder ”begrepp och teorier som kan bidra till förståelsen av vad som försiggår före, under och efter matematiklektionerna” (s. 14). Tydliga handlingsföreskrifter är alltså inte det som i huvudsak kan förväntas av matematikdidaktisk forskning. Det innebär

1. Inledning

enligt dessa forskare att matematikdidaktik inte främst kännetecknas av att vara preskriptiv eller normativ. Därmed delar de inte helt Jank och Meyers (1997b) uppfattning, att en av didaktikens huvuduppgifter är att föreslå hur en bättre undervisning bör se ut.

En viktig uppgift för forskningen kan istället vara att förhindra oavsiktliga misstag. Genom att visa på orimligheter i idéer som inte grundar sig på annat än spekulationer, men drivs av entusiastiska entreprenörer, kan forskare göra betydelsefulla insatser (Hiebert, 2003).

Även Kilpatrick (1995) ställer sig tvekan till ett preskriptivt förhållningssätt. Istället framhåller han att matematikdidaktikens främsta funktion är att vara ett verktyg till stöd för vårt tänkande.

Research in mathematics education gains its relevance to practice or to further research by its power to cause us to stop and think. It equips us not with results we can apply but rather with tools for thinking about our work. It supplies concepts and techniques, not recipes. (Kilpatrick, 1995, s. 25)

Genom att låta forskningsresultaten bidra med begreppsapparater och modeller kan dessa bli till tankeverktyg att användas av både forskare och lärare vid analys av undervisningssituationer. På sikt kan detta också bidra till att matematikundervisningen utvecklas, i enlighet med de intentioner som Kilpatrick (1995), Niss (1999) och Skott et al. (2010) uttrycker.

I enlighet med uppfattningen som kommer till uttryck ovan är det inte min strävan att i första hand presentera tydliga handlingsdirektiv. Det ska dock inte uppfattas som ett uttryck för att det saknas vilja att bidra till en förbättrad matematikundervisning. Genom att avhandlingen uppmärksammar lärares och elevers handlingar i relation till vad eleverna härigenom ges förutsättningar att lära, kan den förhoppningsvis bidra till ökad medvetenhet om olika handlingars betydelse i matematikundervisningen. Dessutom handlar det om att öka intresset för de tidiga skolårens matematikundervisning.

Sammanfattning

Avsikten med inledningskapitlet har varit att ge en bakgrund till den här studien, där lågstadiets matematikklassrum är i fokus. Till bakgrunden hör bland annat beskrivningar av matematikundervisning som har presenterats i nationella rapporter under det senaste årtiondet. I rapporterna framträder en bild av en matematikundervisning som domineras av individuellt arbete och som har bristande kopplingar till de kursplanemål som inte är

1. Inledning

innehållsrelaterade. Även om den sortens studier kan behövas, ger de också upphov till generella beskrivningar, inte minst i media, vilket snarare minskar respekten för lärares arbete istället för att stötta dem som försöker göra sitt bästa i att stödja elevers kunskapsutveckling i matematik.

Som en motvikt till dessa omfattande rapporter behövs det därför, enligt min mening, fler studier som inte bara strävar efter att i stora drag beskriva det uppenbara i undervisningen utan också avser att synliggöra mindre tydliga fenomen. Ett sätt att göra detta möjligt är att studera matematikklassrummet och det som sker där, så som det visar sig genom lärares och elevers handlingar. En fråga som jag har ställt mig är vad resultatet av en sådan undersökning skulle visa om inte bara en utan flera betydelsefulla undervisningsaspekter inbegrips i undersökningen. Då tänker jag särskilt på den språkliga kommunikationen i klassrummet, användningen av laborativt material och den rådande klassrumskulturen.

I mina funderingar har jag influerats av forskning om kulturella och sociala faktorer inverkan på matematikundervisningen och det allt större intresset för detta område. Det är en viktig anledning till att jag efterlyser beskrivningar av undervisning där även andra faktorer uppmärksammas utöver de som hör ihop med hur läraren presenterar ett innehåll eller hur arbetet är organiserat i klassrummet.

Några begrepp som är centrala i avhandlingen och som därför har tagits upp i första kapitlet, är exempelvis kultur och matematikklassrum. Av syftet framgår att det handlar om klassrumsforskning. Några exempel på senare klassrumsstudier som hör till avhandlingens intresseområden och därmed har betydelse för min studie, förekommer därför i kapitlet.

Matematik är ett mångsidigt begrepp, vilket också återspeglas i forskningen om lärande och undervisning i matematik. En översiktlig presentation av det matematikdidaktiska forskningsfältet visar att det innefattar forskning av många olika inriktningar och representerar flera teoretiska perspektiv. Kapitlet avslutas med ett resonemang om vad matematikdidaktisk forskning kan förväntas bidra med. Det framgår att det bör vara tankeverktyg i form av begrepp och teorier som kan komma lärare och forskare till användning och inte i första hand föreskrifter om hur undervisningen ska bedrivas. Avhandlingen ska ses som ett försök att eftersträva ett sådant förhållningssätt.

Arbetets disposition

Avhandlingen består av nio kapitel. I inledningskapitlet har syftet med arbetet presenterats tillsammans med centrala frågeställningar. Med detta första kapitel har jag velat ge en bakgrund till arbetet, bland annat genom en inblick i området matematikundervisning, dess forskningsfält samt en redogörelse för min egen relation till matematikundervisning och vägen till det här avhandlingsarbetet.

I kapitel 2 är skolmatematikens kunskap och metoder i centrum, vilket betyder att två av didaktikens grundfrågor, vad? och hur? särskilt uppmärksammas. Kapitlet avslutas med ett resonemang kring begreppet möjlighet till lärande.

Kapitel 3 behandlar den teoretiska utgångspunkten för avhandlingen, det vill säga verksamhetsteorin. Här presenteras verksamhetsteorin i relation till pedagogisk forskning. I samband med en kortare redogörelse för teorins utveckling uppmärksammas också begrepp som är relevanta i förhållande till avhandlingen. Slutligen presenteras mitt analysverktyg som ligger till grund för den senare av de två resultatpresentationerna.

I kapitel 4 presenteras metoden, det vill säga hur jag har gått tillväga för att genomföra studien. Redovisningen innehåller bland annat metoder för datainsamling och beskrivning av analysarbetet som har genomförts i två etapper, varav en deskriptiv och en teoretisk. Kapitlet avslutas med en introduktion till resultatredovisningen.

Kapitel 5 – 8 utgör själva resultatredovisningen. Där presenteras de fyra matematikklassrum som analysarbetet har utmynnat i. Varje kapitel består av två delar, där den första innehåller resultatet av den deskriptiva analysen. I den andra delen presenteras resultatet från den teoretiska analysen där verksamhetsteorin ligger till grund för analysverktyget som har använts.

I det sista kapitlet, nummer 9, diskuteras resultatet i relation till tidigare forskning och vad som har visat sig i form av ny kunskap. Där presenteras också mina idéer beträffande fortsatt forskning.

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

Matematikundervisningens resultat, det vill säga den kunskap som undervisningen förväntas leda till, är ett av de intresseområden som aktualiseras genom studien. Första delen av kapitlet behandlar därför matematikundervisningens innehåll, styrdokumentens anvisningar om vad eleverna ska lära sig i matematikundervisningen samt den förändring som kursplanerna har genomgått sedan grundskolan infördes. Kapitlets andra del fokuserar på lärares och elevers handlingar under matematiklektionerna. I avhandlingen definieras lärares och elevers handlingar som metoder i matematikundervisningen. Den andra delen av kapitlet handlar om metoder i matematikundervisningen och hur dessa kan beskrivas utifrån vad lärare och elever gör i relation till olika aspekter av undervisningsverksamheten, som artefakter, klassrumskultur och klassrummets arbetsorganisation. Kapitlet avslutas med ett resonemang om ”möjlighet till lärande”. Först ges här en kort bakgrund till motiven bakom matematikundervisning.

Motiv till att lära matematik

Matematiken har under lång tid haft en stark ställning i samhället (Kilpatrick et al., 2001; Wyndhamn, 1997). Detta har sin förklaring i uppfattningen att matematik genomsyrar den mänskliga tillvaron. Det är individens behov av matematikkunnskap som därmed har gett matematikundervisningen sitt berättigande, både historiskt och under senare tid (Bishop, 1996; Niss, 1996). Syftet med undervisningen är i korta drag att den ska

- bidra till samhällets teknologiska och socioekonomiska utveckling
- bidra till samhällets politiska, ideologiska och kulturella underhåll och utveckling
- ge individer förutsättningar som kan hjälpa dem att hantera sitt dagliga liv (Niss, 1996, s.13, egen översättning)

De bakomliggande motiven till matematikundervisning hör direkt samman med frågor om *vad* det är för matematiskt kunnande som samhället och samhällets individer behöver. Åsikterna om vad som är viktigt kunskap i matematik kan variera beroende på hur inflytandet från olika ideologier växlar (Ernest, 1991). Detta i sin tur påverkar hur skolmatematiken framträder i kursplanerna (Pettersson, 2003).

Vad ska eleverna lära sig?

Skolmatematiken bestäms främst genom styrdokumentet. Det betyder alltså att undervisningsinnehåll och matematikkunnande definieras genom de formuleringar i kursplanen som gäller för den aktuella tidpunkten (Pettersson, 2003; Samuelsson, 2007). När vi idag talar om vad eleverna ska lära sig i matematikundervisningen framträder således en annan syn på matematikkunnande, eftersom vi har en ny kursplan, jämfört med hur det såg ut för drygt ett tjugotal år sedan. Hur anvisningarna för skolmatematiken och den kunskap som undervisningen skall resultera i, har förändrats i kursplanerna under de senaste femtio åren, det vill säga sedan grundskolans genomförande, visar sig genom följande tillbakablick i styrdokumentet.

Från räkning till matematik – en förändrad kunskapssyn

Under årtiondena närmast före 1960-talet anses färdigheter i räkning viktigare än allt annat kunnande i skolmatematiken (Håstad, 1978; Pettersson, 2003; Wyndhamn, 1997). Denna uppfattning har modifierats en aning i grundskolans första läroplan Lgr62. Här framställs matematikundervisningens uppgift som ”att ge kunskap och färdighet i elementär aritmetik och algebra samt förtrogenhet med geometrins elementära begrepp och metoder” (Skolöverstyrelsen, 1962, s. 164). Läroplanen som följer därefter, Lgr69, innebär inte några förändringar av större betydelse för matematikkursen förutom att mekanisk räkning har tonats ner något (Pettersson, 2003).

Efter en tid som präglats av reformer och försöksverksamhet i samband med införandet av grundskolan infaller en period under 1970-talet då matematikundervisningen inte genomgår några omvälvande förändringar (Wyndhamn, 1997). När det visar sig att eleverna inte behärskar de fyra räknesätten, leder det till en diskussion som förordar ”back to basics”.

Genomgående i de läroplaner för grundskolan som hittills beskrivits är att stor vikt läggs vid att utveckla färdigheter inom matematiken. Samtidigt ges utrymme även åt förståelse- och faktakunskaper, till exempel att förstå begrepp och komma ihåg regler. Under tiden har det också pågått en diskussion, både nationellt och internationellt, kring begreppen *förståelse* och *färdighet* och relationen mellan de båda kunskapsformerna (Hiebert & Lefevre, 1986; Wyndhamn, 1997). Frågan har framför allt gällt om undervisningen först ska syfta till att utveckla färdigheter som i sin tur leder till förståelse eller vice versa. Terminologin har inte alltid varit helt entydig. Baroody (2003) förklarar begreppen med hjälp av exempel som visar att

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

förståelse närmast motsvaras av ”knowing why” medan färdigheter kan jämföras med ”knowing how-to”. Hiebert och Lefevre (1986) försöker istället klargöra skillnaden mellan förståelse och färdighet genom att uttrycka sig i termer av begreppslig förmåga och procedurkunnande.

Perhaps the biggest difference between procedural knowledge and conceptual knowledge is that the primary relationship in procedural knowledge is ”after”, which is used to sequence sub-procedures and superprocedures linearly. In contrast, conceptual knowledge is saturated with relationships of many kinds. (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 8)

Uppfattningen att förståelse och färdighet är helt skilda företeelser har successivt tonats ned sedan början av 1990-talet. På senare år är det istället samspelet mellan de båda kunskapsformerna som har betonats framför skiljaktigheterna (Wyndhamn, 1997).

Med Lgr80 inleddes en övergång till målstyrning. Tidigare läroplaner innehöll detaljerade anvisningar om undervisningsinnehåll och metoder som läraren skulle använda, vilket är utmärkande för en regelstyrd skola. Genom målstyrningen gavs lärare och arbetslag större utrymme när det gällde såväl valet av stoff som skulle ingå i skolans lokala arbetsplan som valet av undervisningsmetoder. Detta medförde både ökad frihet och ökat ansvar för läraren (Wyndhamn, 1997).

Lgr80 representerar alltså en ny typ av läroplan. Då efterföljaren Lpo94 genomfördes togs nästa steg i riktning mot mål- och resultatstyrning (Wyndhamn, 1997). Räknefärdigheter fick nu allt mindre uppmärksamhet, vilket samtidigt gav möjlighet att lyfta fram andra kunskapsformer i enlighet med huvudbetänkandets intentioner (se Läroplanskommittén, 1992). En annan nyhet var att innehållet som skulle undervisas var formulerat i mer övergripande termer jämfört med tidigare läroplaner. ”De mål som läroplaner och kursplaner anger uttrycks mindre i stoff och mer i termer av begrepp, sammanhang och i kunskap som instrument för lärande” skrev Lundgren (1999, s. 39) om den då förhållandevis nya läroplanen.

Pettersson (2003) noterar, att matematikinnehållet i Lpo94 jämfört med tidigare läroplaner, har gjorts både bredare och djupare och allt större utrymme har getts åt ett fördjupat matematiskt tänkande. Hon menar att teknikens utveckling och samhällets framåtskridande är anledning till att matematikämnet ges en vidgad innebörd, vilket i sin tur leder till utveckling av nya kompetensområden i matematiken. Petterssons resonemang ligger därmed i linje med de tankegångar om individens och samhällets behov av matematikkunnande, som tagits upp i föregående avsnitt. Det är också ett uttryck för att synen på matematikkunnande är föränderlig.

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

För skolämnet matematik har förändringen följaktligen medfört att kursplanerna inte bara anger mål med koppling till det matematiska innehållet (t. ex. algebra, aritmetik, geometri, statistik), så kallade innehållsmål. Med Lpo94 infördes i kursplanen (Skolverket, 2000) också en annan typ av lärandemål, som i jämförelse med innehållsmålen istället relaterar till matematikanvändningens process och de förmågor som behövs i denna process. De uppträder därför ofta under benämningar som processmål, förmågemål eller kompetensmål (Bergqvist et al., 2010; Skolinspektionen, 2009). I texten används fortsättningsvis termen förmågemål, i enlighet med formuleringarna i den senaste kursplanen, Lgr11.

Kursändringen i skolmatematiken innebär alltså att fokus, som tidigare riktats mot det matematiska innehållet, har förskjutits så att uppmärksamheten också riktas mot olika förmågor. Jämfört med Lpo94 är detta ännu mer framträdande i Lgr11. Kännetecknande för den tidigare kursplanen (Skolverket, 2000), var skillnaden som gjordes mellan innehållsmål och förmågemål som mål att uppnå respektive mål att sträva mot. Detta finns alltså inte i Lgr11. Riktlinjerna i de två senaste kursplanerna är dock desamma, nämligen att eleverna ska ges möjlighet att utöva matematik så att flera olika kompetenser kan utvecklas. Lärarens uppgift blir då att planera och genomföra verksamhet som ger förutsättningar för detta.

I kursplanen till Lpo94, liksom i efterföljaren Lgr11 förenas alltså två perspektiv på matematikkunnande. Björklund Boistrup, et al. (2007) menar att det handlar dels om ett övergripande perspektiv, vilket omfattar processer som är aktuella i så gott som all matematisk aktivitet, exempelvis förmåga att se samband. Det handlar också om ett så kallat områdesinriktat perspektiv som utgörs av olika delområden av matematiskt innehåll, exempelvis aritmetik och geometri. Det skiljer sig på så sätt från det övergripande perspektivet som innefattar ett flertal olika kompetenser. I Lgr11 uttrycks dessa i ett antal förmågor som eleverna ska ges förutsättningar att utveckla.

- formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder
- använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp
- välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter,
- föra och följa matematiska resonemang,

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

- använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser. (Lgr11, s. 63)

Beskrivningen kan sammanfattas i fem specifika förmågor: *problemlösningsförmåga*, *begreppsförmåga*, *metod- och beräkningsförmåga*, *resonemangsförmåga* och *kommunikationsförmåga*. Tillsammans utgör de en övergripande matematisk kompetens i enlighet med de generella beskrivningar som presenterats det senaste decenniet, till exempel *Hög tid för matematik* (2001), Kilpatrick et al. (2001) och Niss (2003).

Följande avsnitt redogör för matematisk kompetens med utgångspunkt i dessa tre sammanställningar. Av redovisningen framgår att den syn på matematikkunnande som Lgr 11 uttrycker och som kan anas redan i Lpo94 har mycket gemensamt med de tre ovanstående ramverken.

Matematisk kompetens – ett mångtydigt begrepp

Sedan 2000-talets början har begreppet matematisk kompetens förekommit allt oftare i matematikdidaktiska sammanhang. Ett annat ord som också används i avhandlingen är matematikkunnande. Niss (2003) definition visar vad det kan handla om. “*Mathematical competence* then means the ability to understand, judge, do and use mathematics in a variety of intra- and extra-mathematical contexts and situations in which mathematics plays or could play a role” (s. 7). Citatet upplyser om att matematisk kompetens kan beskrivas som en övergripande förmåga, vilken innefattar att förstå, värdera, utföra och använda matematik i olika sammanhang.

Under den senaste tioårsperioden har matematikdidaktisk litteratur bjudit på flera ramverk där matematikkunnande presenteras som en allmän kunskap i form av olika kompetenser, som i sin tur inte är kopplade till något specifikt matematiskt innehåll. Ett av de tidigare exemplen på en generell beskrivning av matematisk kompetens har utarbetats för motsvarande grund- och gymnasieskolan i USA (Kilpatrick et al., 2001). Matematisk kunskap liknas här vid ett rep som är sammanflätat av fem ihoptvinnade trådar där varje kompetens representeras av en tvinnad tråd. Följande fem kompetenser presenteras:

- begreppslig förståelse (förmåga att se samband, förståelse av matematiska begrepp och operationer)
- procedurkunnande (skicklighet i att utföra procedurer effektivt och precist)
- strategisk kompetens (kunna formulera, representera och lösa matematiska problem)

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

- logiskt resonemang (förmåga till logiskt tänkande och förklaringar)
- produktivt förhållningssätt (ser matematiken som användbar och har självtillit) (s. 116, egen översättning)

De fem inbördes relaterade komponenterna i beskrivningen bildar tillsammans matematiskt kunnande, ”strands of proficiency” (Kilpatrick et al., 2001).

En motsvarighet till detta finner vi i det danska KOM-projektet (Kompetencer og Matematiklæring) som startades år 2000 för att komma tillrätta med problematiken i matematikutbildningen (Niss, 2003). Projektet tog sin utgångspunkt i frågan ”*Vad innebär det att kunna matematik?*” vilket bland annat resulterade i en presentation av en modell med åtta olika kompetenser fördelade på två huvudgrupper (se figur 1 på nästa sida). Den ena gruppen omfattar fyra kompetenser som innebär att kunna fråga och svara i, med och om matematik, vilket är representerat i den vänstra delen av modellen. Dessa fyra kompetenser är

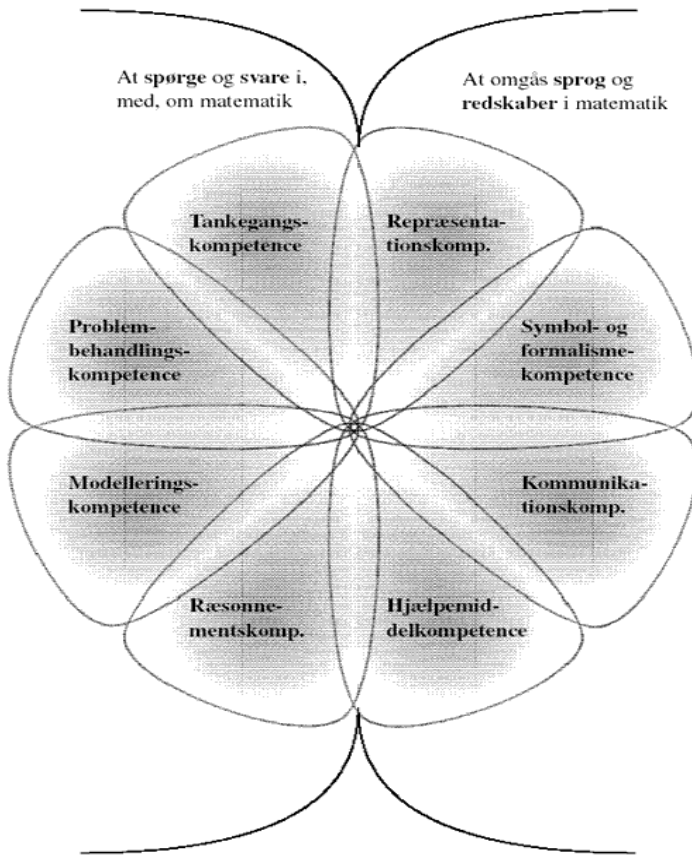
- Tankegångskompetens (hantera begrepp, kunna generalisera)
- Problembehandlingskompetens (formulera och lösa problem)
- Modelleringskompetens (konstruera, analysera och kritiskt granska matematiska modeller)
- Resonemangskompetens (följa och värdera ett matematiskt resonemang)

Den andra gruppen utgörs av kompetenser som gör det möjligt att hantera matematikens språk och redskap, till exempel symboler, men också olika tekniska hjälpmedel. Dessa fyra kompetenser återfinns i modellens högra del och har benämnts

- Representationskompetens (förstå, använda och växla mellan olika matematiska representationer)
- Symbol- och formalismkompetens (avkoda, översätta och hantera symbolisk matematiskt språk)
- Kommunikationskompetens (förstå och själv kunna uttrycka sig i matematiska texter och samtal)
- Hjälpmedelskompetens (kunna använda och förhålla sig till tekniska hjälpmedel)

Av modellen (figur 1) framgår att kompetenserna inte är åtskilda utan snarare starkt relaterade till varandra, vilket Niss (2003) poängterar samtidigt som han betonar att de är distinkta i sina olika egenarter. Tillsammans ger de ett svar på frågan som KOM-projektet utgick ifrån, vad det innebär att kunna matematik.

2. Skolmatematikens innehåll och metoder



Figur 1. En visuell presentation av de åtta matematiska kompetenserna (Niss, M. & Højgaard-Jensen, T. (2002)

Gemensamt för de två beskrivningarna (Kilpatrick et al., 2001, och Niss, 2003) ovan, är att matematisk kompetens utgörs av flera olika, tätt sammankopplade aspekter av kunskap, vilka representerar olika sidor av en komplex helhet.

En svensk motsvarighet till dessa två ramverk finner vi i rapporten *Hög tid för matematik* (2001). Matematisk kompetens framställs här i form av sju olika aspekter, som överensstämmer i stort med innehållet i ramverken i både KOM-rapporten och "strands of proficiency" (Kilpatrick et. al., 2001).

Produktivt förhållningssätt: att se matematik som meningsfull, användbar och värdefull, parat med stark tilltro till den egna förmågan att utöva matematik i vardagsliv, samhällsliv, kommande studier och yrkesliv.

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

Helhetsperspektiv: att se matematikens roll, värde och egenvärde i ett historiskt, kulturellt och samhälleligt perspektiv.

Begreppslig förståelse: att begripa innebörden av matematiska begrepp och operationer och hur dessa bildar sammanhängande nätverk.

Behärskande av procedurer: att på ett flexibelt, precist och effektivt sätt tillämpa olika slags procedurer och algoritmer.

Kommunikationsförmåga: att i tal och skrift kunna diskutera och argumentera kring frågeställningar i matematik.

Strategisk kompetens: att formulera, representera och lösa matematiska problem – såväl inommatematiska som från vardag och tillämpningar.

Argumentationsförmåga: att tänka logiskt och reflektera, samt förklara, troliggöra och berättiga matematiska påståenden. (*Hög tid för matematik*, 2001, s. 43)

De ramverk eller sammanställningar som har redovisats här utgör kärnan av vad som har presenterats av liknande karaktär under motsvarande tidsperiod. I likhet med både Kilpatrick et al. (2001) och Niss (2003) understryker också rapporten ovan att de sju aspekterna är sammanvävda och relaterade till varandra. Därmed illustreras återigen att matematikkunnande är mångfasetterat.

En central fråga i den här studien är vad eleverna ges möjlighet att lära. Frågan ska ses i relation till de förmågor som kan urskiljas i den senaste kursplanen, Lgr11. För att få en bättre uppfattning om vad dessa förmågor kan innebära, vilka motsvarigheter som finns i de olika ramverken och hur dessa kan jämföras med varandra, har en översikt sammanställts i tabellen på nästa sida (tabell 1). Lgr11-kolumnen innehåller, kanske något oväntat, totalt sju olika aspekter av matematikkunnande. De fem första kan kännas igen som förmågorna i kursplanens sammanfattande syftesbeskrivning. De resterande två, ”intresse och tilltro” samt ”se matematikens sammanhang och relevans” förekommer inte i sammanfattningen eller bland kunskapskraven utan bara i den inledande syftestexten. Liknande aspekter framträder i vissa av de andra ramverken, men under andra benämningar. Även om de inte karaktäriseras i kursplanen som förmågor eller långsiktiga mål, kan det för jämförelsens skull vara relevant att även ta med dessa kunskapsaspekter i kolumnen för Lgr11 nedan.

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

Tabell 1. Sammanställning av ramverkens kompetenser tillsammans med de förmågor i matematik som beskrivs i Lgr11.

Kilpatrick et al. (2001)	Hög tid (2001)	Niss (2003)	Lgr 11
strategisk kompetens	strategisk kompetens	problem- behandlings- kompetens	problemlösnings- förmåga
begreppslig förståelse	begreppslig förståelse	tankegångs- kompetens	begreppslig förmåga
procedurkunnande	behärskande av procedurer	symbol-och formalism- kompetens	metod- och beräkningsförmåga
logiskt resonemang	argumentations- förmåga:	resonemangs- kompetens	resonemangs- förmåga
	kommunikations- förmåga	kommunikations- kompetens	kommunikations- förmåga
		representations- kompetens	
produktivt förhållningssätt	produktivt förhållningssätt		intresse för matematik och tiltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanslagningar
	helhetsperspektiv		se matematikens sammanslagningar och relevans
		hjälpmedels- kompetens	
		modellerings- kompetens	

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

Tabellen visar att överensstämmelsen är stor mellan beskrivningen i *Hög tid för matematik* (2001) och Kilpatrick et al. (2001). En tydlig skillnad visar sig dock i att kommunikationsförmåga inte tas upp hos de senare, vilket de är ensamma om i det här sammanhanget. För övrigt dominerar likheterna mellan dessa båda ramverk och förmågorna som uttrycks i Lgr11, vilket tyder på att dokumenten vilar på en gemensam grund beträffande vad som är väsentliga aspekter av matematikkunnande.

Några motsvarigheter till kompetenser som *helhetsperspektiv* och *produktivt förhållningssätt* förekommer alltså inte i den sammanfattande syftesbeskrivningen i Lgr11. Däremot uppmärksammas kunskapsaspekter liknande dessa i den text där kursplanen inledningsvis redogör för syftet med matematikundervisningen. Genom formuleringar som ”Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar intresse för matematik och tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang” (s. 62) och ”ska eleverna även ges möjligheter att reflektera över matematikens betydelse, användning och begränsning ... och därigenom kunna se matematikens sammanhang och relevans” (s. 62), uttrycker Lgr11 att den här sortens kunnande också är värdefullt.

Jämförelsen mellan de tre olika kompetensbeskrivningarna visar också att KOM-rapportens presentation (Niss, 2003) avviker något från de övriga två ramverken. I denna ges till exempel uppmärksamhet åt flera kompetenser som tillsammans uttrycker förmåga att hantera matematikens språk och redskap. En motsvarighet till detta i Lgr11 utgörs av de två förmågorna kommunikationsförmåga samt metod- och beräkningsförmåga. Den senare innebär bland annat att ”välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter” (Lgr11, s. 63).

Sammanfattningsvis bidrar de generella beskrivningarna av matematisk kunskap ovan till att styrka bilden av en förändrad kunskapssyn i matematik, i jämförelse med vad som föreskrivs i styrdokumentet före Lpo94. De olika ramverken påminner i stort om varandra och även om de innehåller enstaka olikheter, råder inga större skillnader i uppfattningen om vad matematisk kompetens är. Denna övergripande kompetens ska också, som det har framkommit tidigare i texten, ses i kombination med ett innehållsligt perspektiv, vilket syftar på det specifika innehåll som kompetenserna utövas på. Tillsammans utgör dessa båda perspektiv förutsättningar för en helhetssyn på matematisk kompetens.

Följande avsnitt kommer därför att fokusera på undervisningsinnehållet, det vill säga det som är objektet för lärares och elevers handlingar i matematikundervisningen.

Aritmetik – ett dominerande innehåll i matematikundervisningen

Traditionellt brukar innehållet i matematikämnet i grundskolans tidigare år delas upp i fyra områden: aritmetik, geometri, statistik och algebra. Ett annat sätt att presentera matematikinnehållet möter vi i Skolverkets analyschema för de tidigare skolåren. De fyra områdena ovan motsvaras här av 1) taluppfattning, 2) mätning och rumsuppfattning, 3) sortering, tabeller och diagram samt dessutom mönster som har getts en mindre framträdande plats i analyschemats presentation (se Skolverket, 2009, s. 8). Taluppfattning kan sammanfattas som förmågan att förstå och hantera tal (Skolverket, 1997), vilket betyder att aritmetik kan relateras till taluppfattning. I min studie är det aritmetik (främst skriftliga räknemetoder för addition och subtraktion med tiotalsovergång), som är föremål för undervisningen i de deltagande klasserna. Därför är det aritmetiken och hur den framträder som undervisningsinnehåll i litteraturen, som uppmärksammas i detta avsnitt.

Själv ordet aritmetik kan närmast översättas till räknekonst och kommer ursprungligen från grekiskans ”arithmos”, som betyder tal. Tidigare styrdokument vittnar om att aritmetik, eller räkning som det ofta kallas i vardagsspråk, länge har varit det dominerande innehållet i matematikundervisningen (se tidigare avsnitt Från räkning till matematik – en förändrad kunskapssyn). Redan i 1842 års folkskolestadga står det uttryckt att eleverna efter avslutad skolgång skulle behärska ”de fyra räknesätten i hela tal”. Som främsta syfte för detta angavs att kunna klara kraven som eleverna mötte i det dagliga livet¹³ (Pettersson, 2003).

Räkning och matematik har länge använts som synonyma begrepp (Unenge, Sandahl & Wyndhamn, 1994), vilket också kan ha bidragit till den allmänna bilden av matematik som ett ”räkneämne”. Ett större sammanhang då räkning användes i betydelsen matematik ligger inte särskilt långt tillbaka i tiden. ”Läsa-skriva-räkna-satsningen” som fått stöd från regeringen under perioden 2008-2012 (www.regeringen.se) avsåg att stödja inte bara elevernas räknefärdigheter utan även andra kompetenser när det gäller matematik trots

¹³ I Skolmatematiskt arkiv (SMA) har några nummer av Svensk Lärartidning från 1884 gjorts tillgängliga på nätet. I en artikelserie diskuterar folkskolläraren och läroboksförfattaren J. P. Velanders bland annat räkneundervisningens mål. Ett syfte utöver det nyttoinriktade som redan nämnts är ”förståndets utveckling och tankekraftens stärkande”. Velanders skriver ”Äfven vi äro af den åsigten, att undervisningen i *hvarje* läroämne bör bidraga till förståndets utveckling och tankekraftens stärkande, men vi tro ej, att detta bör uppställas såsom främsta målet för något folkskoleämne, *inte ens matematiken*.” (Velanders, 1884). Den praktiska nyttan har en särställning, visar Velanders inlägg.

att det inte framgår av rubriceringen. Det är med andra ord inte särskilt förvånande att många fortfarande tänker på skolmatematik som räkning, vilket inte heller är något typiskt svenskt fenomen att döma av Boaler (2009).

Av tradition har en stor del av aritmetikundervisningen under grundskolans låg- och mellanstadium ägnats åt algoritmräkning. Att använda en algoritm för att genomföra en beräkning betyder att beräkningen utförs steg för steg enligt ett på förhand givet mönster (D. M. Clarke, 2006; Löwing & Kilborn, 2003). Det kan också uttryckas ”An algorithm is a finite step-by-step procedure for accomplishing a task that we wish to complete (Usiskin, 1998, s. 7).

Om den utbredda algoritmräkningen vittnar bland annat innehållet i våra matematikläromedel in på 1990-talet. Under den senaste tjuogoårsperioden har detta successivt förändrats genom att andra skriftliga räknemetoder har fått ta plats i undervisningen. Följande avsnitt uppmärksammar algoritmer, skriftlig huvudräkning och skillnaden dem emellan samt debatten som har uppkommit med anledning av att algoritmerna nästan helt har försvunnit från matematikundervisningen. Intresset riktas i första hand mot addition och subtraktion eftersom hanteringen av dessa räknesätt är det centrala innehållet i undervisningen som observerats i studien.

Standardalgoritmer eller skriftlig huvudräkning?

Den förändrade kunskapssyn i matematik som inom det svenska undervisningsområdet kommer till uttryck i de två senaste läroplanerna Lpo94 och Lgr11 inbegriper även det aritmetiska kunnandet. Till skillnad från tidigare kursplaner, som föreskrev algoritmer i undervisningen (se t. ex. Lgr80), innehåller de två senaste inga direktiv om några specifika skriftliga räknemetoder. I förmågemålen i Lgr11 står det till exempel att eleverna ska ges förutsättningar att utveckla sin förmåga att ”välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter” (s. 63).

Med det nya synsättet riktas uppmärksamheten mot andra kompetenser. Anghileri (2001) pekar särskilt på att eleverna genom undervisningen kan ges möjlighet att utveckla sin förmåga att resonera matematiskt, jämfört med tidigare då alla lärde samma procedurer och övade samma rutinuppgifter. D. M. Clarke (2006) är inne på samma linje då han hävdar att elevernas roll, som tidigare inneburit att komma ihåg procedurer, härigenom kan förändras till att istället handla om att tänka och förstå.

England och Nederländerna har gått i täten när det gäller att reformera undervisningen beträffande övergången från standardalgoritmer till att lägga större tonvikt vid elevernas egna beräkningsmetoder. Grunden för dessa reformer har varit forskning som stödjer sig på den så kallade ”guidance

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

principle”, det vill säga elever ska ges möjlighet att göra egna matematiska upptäckter och därmed på egen hand konstruera matematisk förståelse (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Som en följd av det här förhållningssättet, men också delvis som en reaktion på den utbredda kritiken angående algoritmräkningen, har en allmän trend spritts över stora delar av västvärlden. Den kännetecknas av att undervisningen fokuserar på huvudräkningsstrategier innan några formella algoritmer presenteras för eleverna (Norton, 2012).

Sett ur svenskt perspektiv har det inneburit att standardalgoritmerna, eller räkneuppställningar som de också kallas, successivt har ersatts av andra skriftliga räknemetoder i läroböckerna. En gemensam beteckning för dessa räknemetoder är ”skriftlig huvudräkning”. Det är idag ett etablerat begrepp i grundskolans matematikundervisning, främst genom spridning via olika läromedel (se t. ex. Andersson, Picetti, & Sundin, 2003; Rockström & Lantz, 2004; Rosenlund & Backström, 2001). Kännetecknande är bland annat användningen av så kallat mellanled (Rockström, 1991). Följande exempel visar hur $70 + 14$ utgör ett mellanled för beräkning av additionsuttrycket $56 + 28$. Exempel: $56 + 28 = 70 + 14 = 84$.

Det har visat sig att innebörden i själva uttrycket skriftlig huvudräkning kan uppfattas på olika sätt. Bentley och Bentley (2011) ifrågasätter därför om begreppet ska användas överhuvudtaget. De menar att huvudräkning som är skriftlig är inte huvudräkning utan en skriftlig räknemetod. De betraktar istället alla skriftliga räknemetoder som algoritmer. Löwing och Kilborn (2003) resonerar något annorlunda när de poängterar att en algoritm alltid utförs på samma sätt utan hänsyn till talen som ingår i beräkningen. Vid huvudräkning däremot, väljs istället den metod som tycks vara den mest effektiva med tanke på de aktuella talen, det vill säga den metod som innebär minst belastning på arbetsminnet. Om det ändå blir för mycket att hålla i huvudet, kan minnet avlastas efter hand med hjälp av stödanteckningar. Detta menar Löwing och Kilborn (2003), kallas ibland skriftlig huvudräkning.

I avhandlingen används fortsättningsvis termen ”standardalgoritm” i betydelsen algoritm enligt Usiskins (1998) definition tidigare i texten. Utmärkande för användningen av standardalgoritmer är att talen, oberoende av vilken talsort de representerar, behandlas som ental vid beräkningarna (se t. ex. Fuson et al., 1997). Med skriftlig huvudräkning menas i fortsättningen skriftliga räknemetoder som inte är standardalgoritmer. Som synonym till skriftlig huvudräkning används ibland också mellanledsräkning, i enlighet med beskrivningen ovan (se Rockström, 1991).

Internationell forskning pekar särskilt ut tre vanligt förekommande beräkningsmetoder för addition och subtraktion med tvåsiffriga tal (t. ex. Askew, 1997; Buys, 2001; Carpenter et al., 1997; Foxman & Beishuizen,

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

2002; Fuson et al., 1997). Dessa metoder beskrivs också av Bentley i samband med analysen av den svenska delen av TIMSS-undersökningen 2007 (Skolverket, 2008b), där de har fått följande benämningar: (I) talsortsvisa beräkningar, (II) stegvisa beräkningar samt (III) kompensationsberäkningar. Räkneexemplet ovan som illustrerade mellanled, $56 + 28 = 70 + 14 = 84$, hör till kategorin talsortsvisa beräkningar. Då subtraktion är aktuellt i avhandlingen finns det anledning att nämna ytterligare en beräkningsmetod, (IV) uppräknig (se Löwing & Kilborn, 2003), i vissa läromedel även kallad ”bakifrån med plus” (se Rockström, 2007). En ingående beskrivning som visar hur dessa beräkningsmetoder fungerar har presenterats av Engström, Engvall & Samuelsson (2007, s. 83-88).

SlopanDET av standardalgoritmerna i den svenska skolan till förmån för andra skriftliga metoder har inte skett helt utan reaktioner. En del av denna nationella debatt har kunnat följas i tidskriften *Nämnamnaren*, som ges ut av NCM (Nationellt Centrum för Matematikutbildning). Som det redan framgått tidigt i avhandlingen har diskussionen stundtals varit intensiv (se t. ex. Emanuelsson, 1989; Hedrén, 2006; Johansson, 2006; Mellin-Olsen, 1989; Nygren & Persson, 2006; Rockström, 2006, 2007, 2012; Unenge, 1989). Under senare år har även inlägg gjorts på tidskriftens debattsida på webben (<http://ncm.gu.se/node/928>). Frågan som de flesta diskuterar gäller huruvida eleverna ska lära sig standardalgoritmerna eller ej. Medan en stor del av diskussionen gäller vilka räknemetoder som är att föredra är det däremot glesare mellan inläggen som berör själva undervisningen.

Bland undantagen finns Emanuelsson (1989) och Johansson (2006), som båda menar att problemet inte är själva standardalgoritmerna, utan snarare hur undervisningen ser ut. Emanuelsson (1989) hänvisar till tidigare genomförda projekt (PUMP-projektet), som visar att ”Läraren gör algoritmräkningen till en rituell handling istället för meningsfull inläring” (s. 44). Liknande synpunkter uttrycker Nygren och Persson (2006), men deras intresse riktas istället mot skriftlig huvudräkning. I debatten som har förts de senaste 8-10 åren är det just skriftlig huvudräkning som har varit i fokus. Nygren och Persson (2006) har granskat läromedel som innehåller skriftlig huvudräkning och utifrån det drar de slutsatsen att skriftlig huvudräkning riskerar att övergå i nya standardalgoritmer. Samma fenomen har även noterats av Löwing och Kilborn (2003). De höjer en varningsflagga med anledning av att ”den skriftliga huvudräkningen ofta urartar till algoritmer som är betydligt krångligare än de vanligaste algoritmerna” (s. 16). Med detta yttrande syftar de troligen på metoden för subtraktionsberäkning, som särskilt har uppmärksamats eftersom det har visat sig att eleverna får svårigheter att

klara subtraktioner med tiotalsovergång¹⁴ (Bentley & Bentley, 2011; Löwing, 2008). Ett vanligt misstag i samband med subtraktionsberäkning, innebär att eleven kommer fram till att exempelvis $52 - 18 = 46$. Förklaringen till detta ligger i att eleven byter plats på entalen, vilket leder till att $8 - 2 = 6$. Det här tillvägagångssättet är typexempel på svårigheter som inte bara svenska elever råkar ut för vid subtraktion och följaktligen är något som länge har intresserat forskare också på andra håll i världen (t. ex. Beishuizen, 1993; Fuson, 2003; Fuson et al., 1997).

Rockström är en av de tidiga förespråkarna för skriftlig huvudräkning i svensk skola. Tillsammans med sina elever på mellanstadiet kom hon fram till att det är en användbar metod för att göra beräkningar. Den grundläggande tanken med skriftlig huvudräkning är, till skillnad från algoritmräkning, att den varierar beroende på talen som ingår i uppgiften och därmed uppmuntrar flexibelt tänkande hos eleven (Rockström, 1991). Ett sådant synsätt får stöd hos forskare som menar att när en uppgift kan lösas på flera olika sätt, inbjuds eleven att resonera matematiskt och använda sin begreppsliga förståelse för talen (Anghileri, 2006; McIntosh, 2006). Rockström (1991), pekar också på värdet i att eleverna får redovisa och förklara sina lösningar för varandra, vilket ger dem möjlighet att jämföra och värdera olika tankegångar. I detta kan vi känna igen några av de kompetenser som ingår i de tidigare presenterade ramverken liksom en del av förmågorna som uttrycks i Lgr 11, till exempel kommunikationsförmåga och resonemangsförmåga (se tabell 1).

Vilka metoder används i undervisningen?

När vi föds är våra hjärnor utrustade så att vi redan från mycket tidig ålder bland annat kan kategorisera vår omgivning utifrån talmängder (Butterworth, 2000). Det mesta av matematisk kunskap kan vi dock inte lära på egen hand. Detta har Niss uppmärksammat när han skriver ”as the learning of mathematics does not take place spontaneously and automatically, mathematics needs to be taught” (Niss, 1994, s. 367-368). För att vi ska bli matematiskt kompetenta är någon form av matematikundervisning följaktligen nödvändig. Resten av kapitlet ägnas därför åt själva

¹⁴ $35 - 18$ är exempel på en subtraktion med tiotalsovergång. När man subtraherar en talsort i taget räcker inte de fem entalen för att kunna ta bort åtta ental. Istället får man ta hjälp av de återstående två tiotalen, varifrån de resterande tre entalen subtraheras. Därefter återstår ett tiotal och sju ental. Uttryckt med skriftlig huvudräkning: $35 - 18 = 20 - 3 = 17$.

Exempel på subtraktion utan tiotalsovergång är $35 - 14 = 20 + 1 = 21$.

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

undervisningen och hur arbetet med skolmatematiken går till, det vill säga vilka handlingar som lärare och elever utför i matematikklassrummet.

I det här sammanhanget är ordet metod användbart, men utan att någon koppling görs till räknemetoder i föregående avsnitt. Marton (2000) definierar metoder i termer av ”vilka-gör-vad-med-hjälp-av-vilket” (s. 152). Det betyder att metoder i undervisningen motsvaras av arrangemang som kan beskrivas utifrån aktörer, artefakter och aktiviteter. Med Martons definition synliggörs metoder således genom lärares och elevers handlingar via artefakter. Enligt Säljö (2000) kan artefakter röra sig om fysiska redskap, exempelvis olika slags undervisningsmaterial, men också språk och symboler, så kallade intellektuella artefakter. Att dessa har en central roll i matematiken framgår som vi sett bland annat av KOM-rapporten (se Niss, 2003), där stor vikt läggs vid kompetenser som gör det möjligt att hantera matematikens språk och redskap.

Metod, i den mening som Marton (2000) uttrycker, kan alltså likställas med aktörernas handlingar via bland annat artefakter, vilket utgör kärnan i Engeströms (1987) struktur för den mänskliga verksamheten. I den verksamhet som kallas undervisning innehas aktörernas roller av lärare och elever. Genom Engeströms modell framgår således att lärares och elevers handlingar medieras¹⁵ via olika aspekter av undervisningsverksamheten, aspekter som inbegriper såväl kulturella artefakter som sociala faktorer (Goodchild, 2001).

Forskare pekar särskilt ut tre företeelser som de anser betydelsefulla för att kunna förstå matematikundervisningens processer. Det handlar om (a) gemensamma regler eller mönster för hur matematiken kommuniceras i klassrummet, (b) utveckling av klassrumsnormer som kan ge förutsättningar för matematiklärande samt (c) byggande av relationer som stödjer elevernas matematiklärande (Franke et al., 2007). Tillsammans utgör det stommen i det vi kan kalla klassrumskultur. Arbetet i matematikklassrummet påverkas alltså av sociala och kulturella faktorer, som till exempel språk och regler (Cobb, 1990; Rezat & Sträßer, 2012; Schoenfeld, 2012; Stigler & Hiebert, 1997).

Med utgångspunkt från Marton (2000) har jag resonerat ovan om metoder som olika handlingar, utförda via artefakter men även i relation till faktorer som hör ihop med klassrumskulturen. Vad lärare och elever gör i förhållande till de arbetsformer som förekommer kan vara ytterligare ett sätt att tänka kring metoder eftersom matematikundervisning i vissa sammanhang beskrivs utifrån hur arbetet är organiserat i klassrummet, i helklass, grupper eller som individuellt arbete (se t. ex. Bergqvist et al., 2010; Skolverket, 2004; Skolinspektionen, 2009). Mot bakgrund härav kommer resonemanget

¹⁵ Begreppet mediering förklaras närmare i kapitel 3.

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

om undervisningsmetoder i klassrummet att utgå från handlingar i relation till (a) artefakter, (b) klassrumskultur och (c) arbetsorganisation, då det fortsätter längre fram i kapitlet.

Dessförinnan presenteras olika metoder i undervisningen, bland annat med hjälp av Ernest (1991), vars beskrivningar har sin grund i skilda undervisningsideologier.

Olika metoder – olika undervisningsverksamheter

Ernest (1991) utgår från att lärares kunskapssyn ligger till grund för vilka arbetsmetoder de använder i matematikundervisningen. Uppfattningarna kan kopplas till fem olika ideologier, som tydliggörs genom Ernests beskrivning av vad lärare och elever gör i matematikklassrummet samt vilka verktyg de använder. En ideologi som Ernest (1991) presenterar är *Industrial Trainer*. Läraren betraktar här matematik som en samling objektiva fakta och regler, där tal och räkneoperationer står i centrum. Det främsta syftet med matematikundervisning är att eleverna ska lära sig att behärska den mest elementära matematiken, det vill säga kunna klara enkla beräkningar. Eleverna arbetar individuellt med mekaniska drillövningar samt övningar som ska hjälpa till att komma ihåg vad läraren har presenterat. Elevernas arbete är hårt och kräver disciplin, men genom att eleverna tävlar med varandra blir de motiverade. Det anses inte lämpligt att försöka anpassa innehållet till elevernas erfarenheter.

Vidare menar Ernest (1991) att hjälpmedel i undervisningen betraktas med misstro inom denna ideologi. För att eleverna inte ska distraheras av onödiga material som exempelvis spel och pussel, är papper och penna de självklara verktygen. Företrädare för *Industrial Trainer* är också skeptiska till att eleverna använder ”miniräknare” eftersom det erbjuder ett lättvindigt sätt att ta sig igenom det tunga beräkningsarbetet och hindrar utvecklingen av räknefärdigheter.

Inom ideologin som Ernest benämner *Technological Pragmatist*, betraktas matematisk kunskap som odiskutabel och matematiken ses utifrån två sidor. Den ena sidan utgörs av rent matematiska procedurer, färdigheter, fakta och kunskap, som eleven ska lära sig att bemästra. Den andra sidan gäller däremot den praktiska tillämpningen och användning av matematik, vilket på samma gång utgör själva motivet till skolmatematiken. Undervisningen ska ske på lämplig nivå för eleverna med syfte att förbereda dem för arbetslivet. Bland lärarens främsta uppgifter är att instruera eleverna och att visa på undervisningens relevans för det kommande arbetslivet för att öka deras motivation.

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

Elevernas arbete domineras här av färdighetsträning. Praktiska erfarenheter anses också ha en väsentlig betydelse för lärandet. Ernest (1991) liknar detta vid ett lärlingskap, där det läggs vikt vid egna erfarenheter. För en Technological Pragmatist är det därför väsentligt att eleverna har tillgång till material som ger förutsättningar för experimenterande och undersökande aktiviteter, inte minst genom ny teknologi. Det anses också betydelsefullt att läraren har tillgång till hjälpmedel för att illustrera sin undervisning och på så sätt även kunna bidra till ökad motivation.

Medan de två föregående ideologierna representerar ett nyttoinriktat perspektiv på matematikundervisning är det matematiken i sig som berättigar till undervisning enligt anhängarna till *Old Humanist*, den tredje ideologin. Matematik anses tillhöra "den rena kunskapen". Att föra över matematikens idéer och kulturella värden till nya generationer är undervisningens grundläggande syfte. Skolmatematiken utgör följaktligen, precis som själva disciplinen, en hierarkiskt strukturerad, självexisterande kunskap. Ju högre upp i matematiken man når, desto mer strikt och abstrakt är den.

Lärarens roll enligt *Old Humanist*, är att på ett inspirerande sätt visa och förklara matematikens strukturer för klassen, gärna med hjälp av visuella redskap eller andra resurser som kan bidra till motivation eller underlätta elevernas lärande. Ernest (1991) skriver inte uttryckligen vad han menar med resurser, men det skulle kunna syfta på olika hjälpmedel för att representera ett begrepp för klassen, exempelvis konkreta föremål, bilder eller informella symboler. Eleverna själva är däremot hänvisade till läroböcker och traditionella verktyg för matematisk konstruktion som exempelvis passare och linjal. Undersökande arbete med hjälp av laborativt material räknas som praktiskt arbete och hör därmed inte ihop med en "ren kunskap" som matematik. För en *Old Humanist* är det bara lågpresterande elever som tillåts använda laborativt material eftersom dessa ändå inte anses studera den riktiga matematiken.

En jämförelse mellan de tre ideologierna som hittills presenterats, visar att nyttoaspekten har inverkan på undervisningen hos både *Industrial Trainer* och *Technological Pragmatist*, där matematisk färdighetsträning är i fokus. I den tredje ideologin som presenterats är det matematiken i sig som står i centrum och för att eleverna ska förstå matematiska strukturer och bli goda problemlösare i matematik, utgår undervisningen från lärarens demonstrationer och förklaringar. För en *Old Humanist* är det att "undervisa matematik" som är fokus, i motsats till att "undervisa barn" (Ernest, 1991).

En kontrast till detta möter vi i *Progressive Educator*, som står för en mer elevcentrerad ideologi. Citatet "Experience, not curriculum... Child, not curriculum" från en då representativ text för lärare (Marsh, 1973, citerad i Alexander, 1984, s. 16)) illustrerar själva grundtanken. Undervisningen är

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

alltså till för elevens skull, dels för att eleven ska kunna utvecklas till en självständig utforskare och expert i matematik, dels för att bidra till positiva attityder och elevens tilltro till sitt eget matematikkunnande. Skolmatematiken lägger tonvikt på matematiken som ett språk tillsammans med problemlösning och andra näraliggande processer, exempelvis generalisering och, symbolisering, vilket innebär att det matematiska innehållet får stå tillbaka.

Influenser från Rousseau, Pestalozzi och Fröbel har bidragit till att uppmärksamma lekens värde liksom också vikten av en lämplig lärandemiljö som förutsättning för individens utveckling. Piagets uppfattning, att barn konstruerar sin egen kunskap ligger till grund för ideologins syn på lärande: I korthet kan detta beskrivas som att individens tidigare uppfattningar och tankemönster förändras och anpassas i mötet med nya erfarenheter (Glasersfeld, 1995).

Eftersom eleven anses lära sig matematik genom lek, diskussion samt upptäckande och undersökande aktiviteter blir lärarens huvudsakliga uppgift att organisera och strukturera den innehållsrika och varierande lärandemiljön. Läraren ska underlätta elevernas lärande, bland annat genom vägledning, men utan att vara alltför påträngande för eleverna. Läraren ska också se till att eleverna inte utsätts för situationer som kan ge upphov till negativa attityder. En Progressive Educator sätter också värde på elevens tankegångar och uppmuntrar eleven att komma med egna metoder för beräkningar och problemlösning.

Utmärkande för den femte ideologin, *Public Educator*, är främjandet av social rättvisa för alla i samhället som ett grundläggande motiv för undervisning (Ernest, 1991). Matematikundervisningen syftar därför till att stärka elevernas förmåga att hantera och lösa matematiska problem. Dessa presenteras i ett socialt sammanhang för att göra eleverna medvetna om matematikens roll i samhället. Matematik betraktas som en kulturbunden, socialt konstruerad företeelse, vilket också skolmatematiken ska återspegla. Skolmatematik får inte uppfattas som något påtvingat som eleverna känner sig främmande för. Istället ska matematiken vara förankrad i elevernas egen tillvaro så att de engageras att göra den till sin egen. På så sätt ska matematisk kunskap tillhandahålla både tankeredskap och ett sätt att "se". Grunden för detta tänkande ligger i Vygotskys teori om utveckling och Leontievs verksamhetsteori. Vygotsky menade att individens lärande är resultatet av social interaktion, där språkanvändningen har en central roll.

It is the functional use of the word, or any other sign, as means of focusing one's attention, selecting distinctive features and analyzing and

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

synthesizing them, that plays a central role in concept formation.
(Vygotsky, 1986, s. 106-107)

Vygotsky betraktade orden som en form av funktionella verktyg som individen använder vid utveckling av nya begrepp. I hans teori förekommer två sorters begrepp, vardagliga, som även benämns spontana, och vetenskapliga. De vardagliga begreppen utvecklas genom möten mellan människor och har sin grund i informella erfarenheter. De vetenskapliga begreppen får sin primära innebörd från verbala definitioner och når genom sin formella terminologi bortom all fysisk förekomst. Genom en sammansmältning, som innebär att det vetenskapliga begreppet successivt närmar sig en konkret nivå medan vardagsbegreppet går mot en abstrakt, generell innebörd sker utvecklingen av begreppet (Vygotsky, 1986). Det lilla barnet som sätter ihop två halvcirklar och kallar dessa för boll är exempel på hur begrepp utvecklas spontant genom social interaktion i informella situationer (se Björklund, 2008). När samma individ senare i skolmatematiken möter en definition av det matematiska begreppet sfär, kan elevens förståelse av begreppet boll vara till stöd för utveckling av det formella matematiska begreppet. Även skolmatematiken kan innehålla mer vardagliga begrepp. Samuelsson (2007) pekar exempelvis på att ”plussa” ibland används i undervisningen istället för det matematiskt mer korrekta addera.

Undervisning som bedrivs i andan av Public Educator innefattar en mängd olika handlingar. Ernest (1991) framhåller särskilt diskussion, både elev-lärare och elev-elev, arbete i grupp med projekt och problemlösning samt självständigt arbete med fokus på att upptäcka, undersöka och tänka kritiskt. I undervisningen förutsätts ett demokratiskt och öppet förhållningssätt. Undervisningsmaterialet ska vara autentiskt så att stoff kan hämtas från till exempel tidningar och andra resurser i samhället. För att kunna tillgodose olika undervisningsmetoder är det viktigt att det också finns flera sorters material för praktiskt bruk.

I beskrivningarna ovan, liksom i avhandlingen, är lärares och elevers handlingar i fokus. Det här avsnittet inleddes med ett resonemang om metoder som en motsvarighet till handlingar i undervisningen. En sammanfattning av de fem ideologierna som Ernest (1991) presenterar kan därför göras med utgångspunkt från de metoder som lärare och elever använder. Följande tabell redovisar de metoder som är utmärkande i relation till respektive ideologi. Av tabellen framgår också vad metoderna kan resultera i med avseende på möjlig kunskap i förhållande till matematik.

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

Tabell 2. *Relationen mellan lärares och elevers metoder samt möjligt matematikkunnande som framträder i Ernests (1991) fem undervisningsideologier. (Efter inspiration av Samuelsson, 2007, s. 257)*

Ideologier	Lärares metoder	Elevers metoder	Möjlig kunskap
Industrial trainer	presenterar fakta och regler	övar mekaniskt, memorerar	fakta, regler, behärskande av procedurer
Technological pragmatist	instruerar, använder hjälpmedel för att illustrera, anpassar efter elevernas nivå	färdighetstränar, undersöker och gör praktiska erfarenheter med hjälp av material	fakta, behärskande av procedurer, praktisk tillämpning
Old humanist	föreläser, demonstrerar visuellt och förklarar begrepp	lyssnar, försöker förstå, utövar teoretiskt	fakta, begreppslig förståelse
Progressive educator	arrangerar undervisningsmiljöer med stor variation av resurser, vägleder, lyssnar, underlättar, uppmuntrar	undersöker, upptäcker, diskuterar, ger egna förslag på lösningar	begreppslig förståelse, strategisk kompetens, kommunikationsförmåga, produktivt förhållningssätt
Public educator	erbjuder autentiskt och praktiskt undervisningsmaterial, utmanar eleverna genom att ifrågasätta, diskuterar med elever	undersöker, upptäcker, diskuterar, argumenterar, arbetar tillsammans med projekt och löser problem i grupp, presenterar lösningar	begreppslig förståelse, strategisk kompetens, kommunikationsförmåga, argumentationsförmåga, produktivt förhållningssätt, helhetsperspektiv

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

Översikten visar att det är olika metoder som dominerar inom de skilda ideologierna. Metoderna riktar uppmärksamheten mot vissa typer av matematikkunnande, det vill säga de bidrar med förutsättningar för eleverna att utveckla olika kompetenser i matematik. På liknande sätt beskrivs i Skolinspektionens kvalitetsgranskning (2009), sambandet mellan metoder som förekommer i undervisningen och kompetenser, med den skillnaden att metoderna då beskrivs i termer av arbetsformer.

Det finns en stark positiv korrelation mellan användning av läroboken och övning i att hantera procedurer, samt en stark negativ korrelation mellan läroboken och övriga kompetenser. I den lärarledda undervisningen förekommer större möjligheter för eleverna att träna sina andra förmågor, kompetenser, än i vissa andra arbetsformer, särskilt i arbete med läroboksuppgifter. (Skolinspektionen, 2009, s. 17)

Sannolikheten att det skulle finnas en enda undervisningsmetod som är mest effektiv oavsett målet, är helt otänkbar, påpekar Hiebert och Grouws (2007). Istället menar de att det är rimligt att tänka sig att en del metoder kan vara mer lämpade för att lära exempelvis räkneprocuder, medan andra metoder kan fungera bättre för att utveckla begreppslig förståelse.

I det här sammanhanget är det väsentligt att notera att det som kan tyckas vara enbart lärande av procedurer också kan inrymma begreppslig kunskap. Ett sådant resonemang, vilket kan jämföras med Hiebert och Carpenter (1992), betyder till exempel att traditionella algoritmer inte enbart hanteras med hjälp av procedurkunnande eftersom det också behövs kunskap om positionssystemet och olika talsorter. På samma sätt ingår ett visst mått av procedurkunskap utöver en omfattande talförståelse för att kunna utveckla goda färdigheter i skriftlig huvudräkning.

Av citatet ovan framgår att elevernas arbete i matematikboken främst ger övning i procedurhantering. Forskargruppen (Berqvist et al., 2010) som samverkat med Skolinspektionen kring kvalitetsgranskningen poängterar dock, helt i linje med resonemanget hos Hiebert och Carpenter (1992), att eleverna också behöver förstå själva tillvägagångssättet.

Man kan tänka sig att inte ens procedurhanteringen utvecklas väl, eftersom alltför begränsad matematisk förståelse (som skulle kunna nås via t. ex. via grundläggande resonemang, representationer och samband) utvecklas, vilket leder till att procedurerna lärs i huvudsak utantill. (Bergqvist et al., 2010, s. 51)

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

I forskarrapporten betonas således att den som ska bli skicklig på att hantera en procedur inte kan bli det bara genom upprepad övning i läroboken, eftersom det i sin tur resulterar i att procedureerna riskerar att endast bli utantillkunnande. Därmed bekräftas vad som nämnts tidigare i kapitlet, att de olika kompetenserna inte ska uppfattas som helt åtskilda utan att de istället överlappar varandra. Härigenom framstår också klart att läraren behöver använda mer än en metod för att eleverna ska kunna utveckla specifika matematiska kompetenser, vilket stämmer väl överens med vad som görs gällande hos Hiebert och Grouws (2007).

Tidigare i kapitlet har det framkommit att skolmatematiken definieras genom kursplanen och den syn på matematikkunnande som gäller utifrån uppfattningen om samhällets och individens behov under den aktuella perioden. När en ny kursplan tas i bruk betyder det inte att undervisningsmetoderna med automatik anpassas efter de nya synsätt som finns uttryckta. Forskning har visat att på en och samma skola kan undervisningens utformning i olika klassrum innebära att eleverna befinner sig i olika läroplaner (Carlgren & Marton, 2002). Den egna studien som forskarna refererar till, genomfördes 1987 och utgår från intervjuer med sex lärare samt observationer av deras undervisning på mellanstadiet.

Resonemanget hos Carlgren och Marton (2002) kan i viss mån jämföras med hur Ernest (1991) argumenterar kring de fem undervisningsideologierna. Det är då viktigt att notera att ideologierna som Ernest presenterar gäller matematikundervisning medan Carlgren och Marton uttrycker sig om all undervisning som de intervjuade lärarna är involverade i. Det innebär också att läraren är i fokus hos de senare, men det hindrar inte att de även uppmärksammar elevernas handlingar. I likhet med Ernest (1991) redovisar Carlgren och Marton (2002) inte bara vad lärare och elever gör under lektionerna, utan också vad eleverna ska lära sig. Det innebär att deras beskrivningar är ett värdefullt komplement till presentationerna av ideologierna hos Ernest (1991).

De sex bilderna av lärares arbete som presenteras hos Carlgren och Marton (2002) visar att metoderna som kännetecknar undervisningen i de olika klassrummen skiljer sig åt, trots att vid tiden då studien genomfördes ”var fortfarande skolarbete på mellanstadiet ganska traditionellt” (s. 34), som forskarna uttrycker det. Lärarna i beskrivningarna betecknas med var sin bokstav, A-F. Enligt Carlgren och Marton (2002) representerar lärare A den mest traditionella undervisningen¹⁶, i den meningen att klassundervisning och

¹⁶ Begreppet traditionell undervisning används även i fortsättningen med den betydelse som ges i texten ovan. Det ger dock en begränsad innebörd av hur en sådan undervisning kan bedrivas, vilket problematiseras i slutet av kapitel 2.

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

enskilt arbete är arbetsformer som avlöser varandra, medan lärare F befinner sig längst bort från det mönstret. En sammanställning över de sex lärarnas (A-F) undervisning presenteras i tabellen nedan.

Tabell 3. Sammanställning av lärares och elevers metoder i relation till möjlig kunskap. (Efter beskrivning av Carlgren och Marton, 2002).

Lärare	Lärares metoder	Elevers metoder	Möjlig kunskap
A	styr och bestämmer, har långa genomgångar, går runt och hjälper eleverna, ger extrauppgifter	tränar genom enskilt arbete i boken, övar på tid, repeterar, anstränger sig	fakta, regler, behärskande av procedurer
B	har genomgångar, använder elevernas erfarenheter, fokuserad på innehållet, ger extrauppgifter	färdighetstränar, kommunicerar (i skrift och vid muntliga framträdanden)	fakta, färdigheter, procedurkunnande begreppslig förståelse kommunikationsförmåga
C	vill ge utrymme för elevernas egna projekt försöker möta elevers individuella behov	individuellt arbete i egen takt, samarbetar	procedurkunnande, kommunikationsförmåga
D	varierar arbetsformerna, kollektiva uppgifter, individualiserar, arrangerar undervisningsmiljöer, utvärderar	färdighetstränar, samarbetar, använder olika uttrycksformer, redovisar för klassen, diskuterar, utvärderar.	färdigheter, begreppslig förståelse, problemlösningförmåga, kommunikationsförmåga argumentationsförmåga, sociala färdigheter
E	använder egna och elevers erfarenheter i undervisningen, anknyter till vardagen utvärderar,	samarbetar, undersöker, upptäcker, laborerar, redovisar och uppträder för klassen	lust och intresse, trygghet och delaktighet, begreppslig förståelse, problemlösningförmåga, kommunikationsförmåga sociala färdigheter, produktivt förhållningssätt
F	ger ansvar, analyserar, förändrar	tar ansvar, färdighetstränar, arbetar med teman, samarbetar, argumenterar,	trygghet och delaktighet färdigheter, begreppslig förståelse, kommunikationsförmåga, argumentationsförmåga, sociala färdigheter, produktivt förhålln. sätt

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

Översikten i tabellen ovan visar precis som hos Ernest (1991) att metoderna varierar och att de är riktade mot olika sorters kunskapsmål i de skilda klassrummen. Kunskapsmålen redovisas i den högra kolumnen under rubriken Möjlig kunskap. Här är de uttryckta som allmänna matematiska kompetenser utifrån vad som kommit fram i lärarintervjuerna när det gäller vilka metoder lärare och elever använder generellt under alla sorters lektioner i de olika klassrummen. Kompetenserna motsvarar de olika typer av kunnande som metoderna kan förväntas resultera i då de används under matematiklektionerna. Några avvikelser jämfört med Ernests ideologier (se tabell 2) som redovisats ska dock noteras. Ett exempel är sociala färdigheter, som både lärare D och E uttrycker att de arbetar med aktivt, medan detta är ett mer underförstått mål hos lärare F. När lärare E talar om vikten av att skapa såväl lust och intresse som trygghet och delaktighet kan det jämföras med produktivt förhållningssätt, något som förekommer som ett möjligt resultat av undervisningen inom ideologierna Progressive Educator och Public Educator, enligt Ernests (1991) presentation.

Vid jämförelse mellan de båda tabellerna framkommer att den undervisning som lärare A representerar har stora likheter med Industrial Trainer hos Ernest (1991). Lärare B visar gemensamma drag med såväl Technological Pragmatist som Old Humanist medan däremot undervisningen som bedrivs hos lärare C inte har någon närmare motsvarighet bland de fem ideologierna. Läraren uttrycker en intention att undervisa i likhet med det som beskrivs hos lärare E, men istället verkar lärare C hamna närmare lärare A och B i sin undervisning. Progressive Educator hos Ernest (1991) kan kännas igen i skildringen av undervisningen hos lärare D och E tillsammans medan lärare F bedriver en undervisning som har flera likheter med ideologin Public Educator. Carlgrens och Martons (2002) beskrivningar av de olika lärarnas arbete bekräftar därmed vad Ernest (1991) påpekar, att det inte finns några tydliga avgränsningar mellan ideologierna utan dessa ska betraktas som överlappande till viss del.

Leontievs (1986) definition av mänsklig verksamhet¹⁷, tillsammans med Samuelssons (2005, 2007) resonemang om verksamheter, ger argument för att betrakta ideologierna hos Ernest (1991) som olika typer av undervisningsverksamheter. I linje med ett sådant resonemang kan skildringarna hos Carlgren och Marton (2002) av de sex lärarnas arbete, ses som ytterligare exempel på varianter av undervisningsverksamheter, där vissa har mycket gemensamt med ideologierna hos Ernest (1991) medan andra är mer avvikande.

¹⁷ Leontievs (1986) definition innebär att människans handlingar är förutsättningen för en existerande verksamhet. Se vidare kapitel 3.

Artefakter

I undervisningen använder lärare och elever olika artefakter. Beskrivningarna i avsnittet ovan visar att artefakter har varierande betydelse i de olika undervisningsverksamheterna. Enligt Säljö (2000) utgörs artefakter av såväl fysiska som språkliga redskap. Gemensamt för dessa är den kulturella aspekten som hör ihop med att de är konstruerade av människan. Till artefakterna räknas även språket vi använder, både talat och skrivet språk och därmed också symboler, som har en särskild roll i matematiken. Följande avsnitt behandlar språket i matematikundervisningen med tonvikt på den muntliga kommunikationen. Därefter följer ett avsnitt som tar upp användningen av fysiska artefakter i undervisningen, vilket här syftar på laborativt material.

Språket i matematikundervisningen

I all undervisning har språket och hur detta används en väsentlig betydelse för vad som är möjligt att lära (Säljö, 2000). Resonemanget vilar på Vygotskys teori, att omvärlden medieras för individen genom kulturella redskap (Vygotsky, 1978). Överfört till matematikundervisning innebär det att kommunikationen med läraren fungerar som ett medierande verktyg mellan eleven och matematiken (Pimm, 1987). Det är alltså framför allt hur lärare och elever talar med varandra i klassrummet, som är avgörande för vad eleverna lär sig både om matematik och om sig själva som utövare av matematik (Franke et al., 2007). Det betyder att kommunikationens kvalitet har väsentlig betydelse för elevernas lärande.

I det traditionella matematikklassrummet, det vill säga där lektionen vanligtvis inleds med att läraren har genomgång med klassen och eleverna därefter fortsätter med liknande uppgifter, kännetecknas kommunikationen av att det är läraren som talar. Forskare konstaterar att lärarens sätt att förklara, instruera och reda ut felaktigheter innebär att det traditionella matematikklassrummet inte ger något större utrymme för elever att tala matematik, varken med läraren eller med varandra (Hiebert et al., 2003; Stigler & Hiebert, 1997; Wood, 1998). Som avhandlingen hittills har visat genom det som framkommit i rapporter och kvalitetsgranskningar från Skolverket (2003, 2004) och Skolinspektionen (2009), är det denna typ av matematikklassrum som dominerar i den svenska grundskolan. Matematiklektionerna ägnas till större delen åt enskilt arbete och diskussioner är sällsynta. Trenden tycks vara att ju äldre eleverna är, desto mer individuellt arbete och mindre tid för matematiska samtal (Skolverket, 2003). Det kan tyckas problematiskt eftersom eleverna, enligt forskare, behöver få möjlighet att även ”tala matematik” (se t. ex. Hiebert et al., 2003;

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

Stigler & Hiebert, 1997). Genom att eleverna får uttrycka sig muntligt skapas förutsättningar att utveckla matematisk förståelse. Därför förespråkar forskare sådana aktiviteter där eleverna ges tillfälle att presentera lösningar på problem, förklara sina lösningar och argumentera för varför en lösning fungerar samt även prata om olika sätt att representera matematik (Hiebert et al., 2003; Stigler & Hiebert, 1997; Wood, 1998).

Pimm (1987), vars forskning i huvudsak ägnats åt kommunikationen och språket i matematikundervisningen, poängterar att lärarens agerande i kommunikationen har väsentlig betydelse för vad eleven lär om matematik. Det innebär att läraren har en viktig funktion i att styra kommunikationen i avsikt att ge eleverna möjlighet att tala matematik. Det här sättet att resonera kring kommunikationen i klassrummet som en förutsättning för elevers matematiklärande har bland annat även Wood (1998) gett uttryck för senare. Beroende på kommunikationen som sker mellan lärare och elever i matematikklassrummet understryker hon att ”These interaction patterns serve to constrain or enhance children’s opportunities to actively construct mathematical meaning”, (Wood, 1998, s. 170).

Pimm (1987) pekar på förekomsten av två olika sorters talat språk i klassrummet, *budskapsinriktat* och *åhörarinriktat*. De två varianterna är resultatet av forskning som uppmärksammat skillnader när det gäller klassrumsspråkets olika stilar och syften (Brown, 1982). Det budskapsinriktade talet utmärks av att användaren är målinriktad och har för avsikt att uttrycka ett särskilt ärende eller meddelande. Användarens främsta syfte med det åhörarinriktade talet är däremot att etablera och vårda goda sociala relationer med den som lyssnar. Brown (1982) jämför två situationer, där en elev vid ena tillfället berättar livligt och obehindrat för sin kamrat om den gånga helgen, men som nästan tappar talförmågan när eleven ombeds att utveckla ett argument för klassen eller försvara sin ståndpunkt i diskussion med läraren. Det har naturligtvis betydelse vem eleven talar med, påpekar Brown (1982). Samtidigt menar hon att det alltför ofta ignoreras att detta är två typer av aktiviteter, där den ena handlar om att vara involverad i informellt småprat medan den andra innebär framläggande av följdriktiga ståndpunkter. Det är alltså inte själva talandet i sig som ska lyftas fram, menar Pimm (1987). Därmed argumenterar han inte heller för att det skulle vara tillräckligt om eleverna bara fick större talutrymme. Han hävdar istället att läraren måste hjälpa eleverna att utveckla sitt tal så att det blir tydligt, fokuserat och budskapsinriktat.

Lyssnarens roll skiljer sig också i relation till de två typerna av talat språk (Pimm, 1987). Sett ur elevens perspektiv domineras matematikundervisning av att vara passivt och inriktat på att lyssna, vilket kan jämföras med lyssnarens roll i åhörarinriktat tal. Eftersom främsta

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

avsikten med detta är att vara vänlig och upprätthålla goda relationer avbryts det sällan av den som lyssnar. För åhöraren handlar det i dessa situationer snarare om att hålla med talaren genom att ge uppmuntrande kommentarer. Pimm (1987) menar då att även om läraren opererar med budskapsinriktat tal i första hand, tar eleverna emot detta som om det vore åhörarinriktat eftersom de är måna om att behålla goda sociala relationer med läraren. Därför försöker de visa sig intresserade och avbryter inte heller om läraren sagt något som verkar oklart (ibid.).

Ett annat sätt att betrakta klassrumsspråket möter vi hos Setati och Adler (2000). De talar om språket som vi använder i matematikundervisningen som ett språk med både formella och informella inslag.

Informal language is the kind that learners use in everyday life to express their mathematical understanding. Formal mathematical language refers to the standard use of terminology (mathematics register) which is usually developed within formal settings like schools. In most mathematics classrooms both forms of language are used and these can be either in written or spoken form. (Setati & Adler, 2000, s. 248)

När Setati och Adler resonerar om formellt och informellt matematiskt språk ovan ligger det nära Vygotskys teori om spontana och vetenskapliga begrepp (Vygotsky, 1986), som omnämns tidigare i kapitlet (Se Olika metoder – olika undervisningsverksamheter). Utmaningen för läraren, som Setati och Adler (2000) ser, är att få eleverna att alltmer övergå från det informella språket som de behärskar förhållandevis flytande till det formella språk som är kännetecknande för matematisk verksamhet.

Ytterligare ett fenomen i lärares språkanvändning som Setati (1998, i Löwing, 2000) har uppmärksammat, är skillnaden mellan det som Setati betecknar ”explanation” och ”regulation”. Det förra är kopplat till redogörelse av fakta och förklaringar medan det senare används för social kontroll, exempelvis för att påkalla elevernas uppmärksamhet. Med utgångspunkt från Setatis resonemang har Löwing (2000) utvecklat ett instrument att använda för analys i studier av utländska lärares klassrumsspråk. Grunden i analysverktyget utgörs av två huvudkategorier: Det handlar dels om det *reglerande* språket (det vill säga det språk som används för social kontroll i klassrummet), och dels om det *undervisande* språket (det vill säga språket som används för att demonstrera, förklara och exemplifiera sammanhang i matematiken).

Senare redogör Löwing (2004) för att hon i sina studier har kommit fram till att lärare använder fyra varianter, fyra förklaringsmodeller av det *undervisande* språket:

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

- det formella undervisningsspråket, som innefattar
 - a) beskrivande språk och
 - b) förklarande språk
- det informella undervisningsspråket, som kan delas upp i
 - c) tillämpande språk och
 - d) laborativt språk.

Beteckningarna har följande innebörd. Beskrivande språk (a) används exempelvis när lärare och elever räknar högt på tavlan och därmed återger själva proceduren. Ett förklarande språk (b) utmärks istället av att det med hjälp av viktiga begrepp hjälper till att förklara hur eller varför en viss operation genomförs. Löwing (2000) ger som exempel subtraktionen $54 - 27$, som eleven kan förklara genom att säga: sju från fyra går inte så vi får låna ett tiotal från femman och växla till tio ental. Med tillämpande språk (c) menar Löwing det språk som används då en vardagshändelse tas som utgångspunkt för att förklara en beräkning. Till exempel om vi har en viss summa pengar och ska handla något och hur vi då kan välja att betala med de olika valörerna beroende på priset. Laborativt språk (d) används tillsammans med laborativa hjälpmedel och tydliggör därmed själva räkneoperationen som utförs med stöd av det aktuella materialet (Löwing, 2000, s. 46).

I det traditionella matematikklassrummet, vid undervisning med hela klassen är det läraren som dominerar kommunikationen, bland annat genom att ställa frågor (se t. ex. Hiebert et al., 2003). Många gånger sker denna kommunikation med klassen enligt den tredelade IRE-dialogen (Initiation – Response – Evaluation) (Cazden, 2001). Läraren tar initiativ och ställer en fråga, en elev väljs ut att svara och läraren följer upp genom återkoppling på elevens svar (se Mehan, 1979).

När lärare ger respons på elevers svar, vilket mycket förenklat motsvarar det tredje draget i IRE-dialogen, använder de olika strategier, beroende på syftet (Mercer, 1995). Det vanliga är att läraren *bekräftar elevens svar*, till exempel med ”Det är bra!”. Genom att istället *upprepa ett elevsvar* kan läraren rikta elevernas uppmärksamhet mot något i elevens svar i syfte att detta ska vara till stöd för elevernas lärande. Mercer (1995) menar också att lärare ofta *omformulerar elevers yttrande* för att därigenom ge klassen möjlighet att få ta del av vad som sagts i en version som stämmer bättre med det som läraren vill lyfta fram. Ett steg längre tar läraren då återkopplingen innebär att läraren *vidareutvecklar elevens svar*. Om eleven har uttryckt något som närmast är obegripligt för klassen, kan läraren utveckla detta och förklara innebörden för eleverna. O’Connor och Michaels (1993) tar upp de tre sistnämnda strategierna under en gemensam beteckning, ”revoicing”. De menar, i likhet med Mercer (1995), att den här typen av strategier hjälper till att tydliggöra eller utveckla en tanke.

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

Vid felaktiga eller olämpliga yttranden, är det framför allt två strategier som framträder (Mercer, 1995). De innebär att läraren antingen tydligt *avfärdar svaren* eller helt enkelt *ignorerar* dem. Ett kontrasterande exempel från Lampert, Rittenhouse och Crumbaugh (1996), visar hur hela klassen (år 5) engageras i en matematisk diskussion som startar i ett tveksamt elevyttrande. Eleven tycks tro att ”dividera med två” och ”ta bort en halv” kan leda till samma resultat. Istället för att markera för eleven att resonemanget verkar tvivelaktigt, involverar läraren alla elever i klassen och låter var och en komma med sina förslag, där de måste förklara sin tankegång och hur denna skiljer sig från någon annans. Genom att uppmuntra elevernas olika tänkande menar forskarna att ”the teacher sets the stage for students to clarify their thinking and relate thought to communication” (Lampert et al., 1996, s. 738). Lärarens agerande skapar alltså förutsättningar för eleverna att tydliggöra sina tankar genom att kommunicera dem och därmed kan kommunikation kopplas samman med själva tanken i sig. Elevernas olika förslag blir sedan föremål för diskussion om vad som kan vara mer eller mindre lämpliga lösningar.

För att eleverna ska ha möjlighet att uppfatta skillnaderna mellan olika resonemang i situationer liknande exemplet ovan och därmed kunna urskilja vad som är en giltig eller användbar lösning, menar Lampert (1990) att läraren måste tydliggöra för eleverna vad det är för matematisk kunskap som läraren använder för att kunna avgöra vad som är godtagbara argument. Det är med andra ord mycket viktigt att lärarens matematiska kunnande är väl utvecklat.

Ett annat sätt att betrakta strategier för återkoppling till eleven ger Hargreaves, McCallum och Gipps (2000) exempel på. De presenterar två kategorier, ”*Evaluating feedback strategies*” och ”*Descriptive feedback strategies*”. Till den förstnämnda kategorin hör belöning och straff samt att uttrycka uppskattning och missnöje. Den andra kategorin *Descriptive feedback strategies*, betyder att läraren inte bara konstaterar att eleven har lyckats eller misslyckats. Istället innebär dessa strategier bland annat att (a) berätta för eleverna när de har rätt eller fel, (b) beskriva varför ett svar är korrekt, (c) visa på andra, bättre sätt att göra något samt (d) få eleverna själva att föreslå hur de kan göra för att lyckas bättre.

De två kategorierna hos Hargreaves et al. (2000) utgör en del av den teoretiska grunden för Björklund Boistrups (2010) analys av bedömning i matematikklassrum. Hennes tolkning av ”*Descriptive feedback strategies*” är i analogi med de två strategier ovan som Mercer (1995) kallar omformulering och vidareutveckling av elevens svar.

Den här sortens återkoppling som kategorin ”*Descriptive feedback strategies*” (Hargreaves et al., 2000) representerar, kan också jämföras med

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

begreppet ”*scaffolding*”. När begreppet togs i bruk av Wood, Bruner och Ross (1976), var det för att uppmärksamma den sortens stöd som ges elever i samband med problemlösning, för att hjälpa dem att samordna sitt befintliga kunnande så att det kan användas i förhållande till den kunskap som uppgiften kräver. Med hjälp av korta, snabba och uppmuntrande bekräftelser bidrar läraren med stöd som kan medverka till att en elev kan lösa en uppgift som till en början verkar ligga över hans eller hennes förmåga (Mercer, 1995). Utmärkande är att läraren i största möjliga utsträckning anpassar sitt stöd till elevens behov, vilket Mercer (1995) formulerar på följande sätt.

But a crucial, essential quality of 'scaffolding' in all settings must be that it is the provision of guidance and support which is increased or withdrawn in response to the developing competence of the learner. (s. 75)

En viktig del i kommunikationen är således att läraren är lyhörd för eleven och den kunskap som eleven uttrycker. Ball (1993) är inne på samma linje, men betonar också vikten av att läraren utnyttjar matematiken på bästa sätt. ”With my ears to the ground, listening to my students, my eyes are focused on the mathematical horizon” (s. 376). Balls resonemang bekräftar därmed slutsatsen som förts fram tidigare, att läraren måste ha goda matematikkunskaper för att kunna vara ett tillräckligt stöd för eleverna i matematikklassrummet.

Ett helt annat tillvägagångssätt är *lotsning* (Lundgren, 1977), även kallat ”funnel pattern” (Cobb & Bauersfeld, 1995; Wood, 1998). Det skiljer sig från *scaffolding* genom att läraren med sina frågor och yttranden begränsar omfattningen av elevsvar som kan vara rimliga. Istället guidas eleverna att följa en bestämd väg genom att läraren ställer en serie frågor som tillsammans garanterat leder till en korrekt lösning av problemet, förutsatt att elevsvaren är konsekventa (Cobb & Bauersfeld, 1995). Löwing och Kilborn (2002) menar att läraren kan känna sig stressad av att många elever räcker upp handen och vill ha hjälp. Då försöker läraren istället minska svårighetsgraden för eleverna genom att lotsa med hjälp av ledande frågor och ibland även lägga svaren i munnen på eleverna. Genom *lotsningen* riskerar eleven gå miste om viktiga steg som annars kunde lett till förståelse.

Andra mönster som visar sig i klassrumskommunikationen är att lärare ibland uttrycker sig i vi-form, exempelvis ”vi brukar göra på det här sättet” i samband med subtraktion med tiotalsovergång. Pimm (1987) ser det som ett uttryck för en inneboende rädsla eller åtminstone försiktighet hos läraren att framhäva sina personliga matematiska tankegångar. Enligt Pimm kan det ha sitt ursprung i den allmänna bilden av matematiken som objektiv, absolut och opersonlig. Mercer (1995) har en helt annan uppfattning om lärares

användning av vi-fraser. Han menar att de ofta förekommer i samband med att lärare försöker återkoppla till tidigare undervisningssituationer (exempelvis när läraren säger till klassen ”förra veckan lärde vi oss hur man mäter vinklar”). Syftet med detta kan vara att hjälpa eleverna att upptäcka att de har gemensamma erfarenheter, vilket Mercer (1995) lyfter fram som en av de mest värdefulla tillgångarna läraren har att använda. Därigenom kan eleverna få möjlighet att återanknyta till den kunskap som bildar grund för den aktuella lektionen och som kan hjälpa dem i deras fortsatta lärande.

Det framkommer också att lärare använder särskilda nyckelfrågor eller vissa fraser för att skapa strukturer för eleverna (Mercer, 1995). En del elever plockar upp dem och använder sedan lärarens formuleringar som stöd vid det egna genomförandet av vissa uppgifter. Som den ryske litteraturteoretikern Bakhtin (1986, refererad i Mercer, 1995) påpekar, ”we learn words not from dictionaries but from people’s mouths, and these words always carry with them some of the meanings of their earlier users” (Mercer, 1995, s. 70).

Hittills i det här avsnittet har den muntliga kommunikationen och språket som förekommer i den, varit i fokus. I matematikundervisningen har också det matematiska symbolspråket en viktig roll i kommunikationen. I det här sammanhanget är det siffersymbolerna och vad de kan representera som är intressant. Pimm (1987) konstaterar att i jämförelse med exempelvis det egyptiska hieroglyfiska talsystemet, är vårt nuvarande talsystem betydligt svårare att få grepp om när det gäller innebörden, eftersom det är ett positionssystem. I det gamla egyptiska talsystemet representeras till exempel ental med en särskild sorts symbol, tiotal med annan symbol och hundratal med ytterligare en typ av symbol. För att skriva talet 25 behövs det alltså två tiotalssymboler och fem entalssymboler. I vårt talsystem framträder inte siffrornas innebörd med samma tydlighet. Trots det är kopplingen mellan vårt sätt att skriva tal och talets innebörd något vi tar för givet eftersom det är en kunskap som har förts vidare under många generationer (Pimm, 1987).

Från siffersymboler, som är ett sätt att representera tal i matematiken är steget inte långt till andra representationsformer, till exempel laborativt material. Nästa avsnitt handlar om användning av laborativt material i matematikundervisningen.

Fysiska artefakter i matematikundervisningen

Av föregående avsnitt framgår att den muntliga kommunikationen har en särställning i undervisningen när det gäller hur den kan användas som stöd för elevernas lärande. Men innebörden i det matematiska språket, kan också behöva tydliggöras för eleverna, bland annat genom konkretisering med hjälp av fysiska artefakter som till exempel laborativt material. Överhuvudtaget

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

betraktas fysiskt material ha en betydelsefull roll i samband med matematiklärande (Ball, 1992). De senaste decenniernas forskning och teorier om elevers hantering av konkreta föremål i samband med matematiklärande har bidragit till den successivt växande förekomsten av laborativt material i matematikklassrum motsvarande grundskolans (Moyer, 2001). Den här trenden finns också i Sverige. Rystedt och Trygg (2010) uttrycker till exempel att de på senare tid har noterat ett allt större intresse och en vilja att utveckla matematikundervisning där laborativt material används. Det har bland annat blivit synligt genom den mängd projekt som visat intresse för laborativ matematik inom ramen för Matematiksatsningen (Skolverket, 2011a).

Vad som ska betraktas som laborativt material är dock inte helt självklart. I avhandlingen används Moyers definition:

Manipulative materials are objects designed to represent explicitly and concretely mathematical ideas that are abstract. They have both visual and tactile appeal and can be manipulated by learners through hands-on experiences. (Moyer, 2001, s. 176)

Utmärkande för laborativa material är således att de är framställda för att tydligt och konkret representera abstrakta matematiska idéer. De ska dessutom se inbjudande ut att använda för eleverna.

Konkretisering ska emellertid inte uppfattas som en aktivitet där eleverna manipulerar sig fram till ett korrekt svar eller något som helt enkelt bara håller dem sysselsatta. Löwing och Kilborn (2002) poängterar att konkretisering måste användas av andra och viktigare skäl, som till exempel att hjälpa eleverna att förstå själva innebörden vid användningen av en metod. De pekar särskilt på två olika syften för konkretisering. I det ena fallet gäller det att stödja uppbyggande av en ny tankeform och i det andra handlar det om att hjälpa till att återskapa en tankeform som eleven har glömt.

Att det laborativa materialet lockar till användning för att det ser trevligt ut, ofta med vackra färger, kan också ge andra signaler till lärare och elever. Forskning vittnar om lärare som använder laborativt material för att ge eleverna omväxling eller som lek, till exempel den sista lektionen på fredagen (Moyer, 2001). Det synsätt som detta vittnar om medverkar till att materialet utgör en del av lärarens belöningssystem och därmed tillhör det inte heller den vanliga matematikundervisningen. Istället blir det en särskild sorts ”rolig matte”, menar Moyer (2001).

Även om forskningen generellt ger sitt stöd till användning av laborativt material i matematikundervisningen (Moyer, 2001), finns det också resultat som pekar i en annan riktning (Baroody, 1989). Det laborativa materialet är

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

inte på egen hand bärare av en matematisk innebörd eller förståelse (Ball, 1992; Clements, 1999; Löwing & Kilborn, 2002; Moyer, 2001). Ball framhåller att det krävs något mer än bara en praktisk/fysisk upplevelse för att förstå den matematiska tanken som representeras. "Although kinesthetic experience can enhance perception and thinking, understanding does not travel through the fingertips and up the arm" (Ball, 1992, s. 47). Det finns alltså ingen garanti för att bruket av laborativt material i matematikundervisningen leder till ett lyckat resultat, enligt vad bland annat Baroody (1989) och Clements (1999) ger uttryck för. Studier har bland annat visat att elever misslyckas med att koppla ihop sina handlingar där de har använt tiobasmaterial, med det etablerade skrivsättet, det vill säga symbolspråket. Det är till exempel ingen självklarhet för eleverna vad som symboliserar ental och tiotal i ett tiobasmaterial. Därmed är materialet inte alltid till hjälp för elever att undvika att blanda ihop ordningen på talsorterna, menar Clements (1999).

Löwing och Kilborn (2002) resonerar, i likhet med Clements (1999), med viss skepsis om bruket av laborativt material. De påpekar att om materialet används på ett passivt sätt utan någon tanke på vad det ska leda vidare till i nästa steg med avseende på elevens lärande, kan det till och med bli ett hinder för elevens fortsatta utveckling. Elever som till exempel använder knappar eller liknande för att lösa enkla additioner som $5+8$, genom att räkna ihop alla knapparna, fortsätter att använda samma strategi även när de ska lösa $35 + 8$. För att de ska lära sig att använda mer avancerade strategier, som exempelvis att räkna vidare från största termen, måste den nya tankeformen kommuniceras tillsammans med användning av materialet, framhåller Löwing och Kilborn (2002). Även Clements (1999) är noga med att betona vikten av lärarens medverkan för att eleven ska förstå med hjälp av materialet och inte riskera att det används slentrianmässigt.

Students may require concrete materials to build meaning initially, but they must *reflect on their actions* with manipulatives to do so. They need teachers who can reflect on their students' representations for mathematical ideas and help them develop increasing sophisticated and mathematical representations. (Clements, 1999, s. 47)

Det framgår av citatet att Clements förespråkar användning av laborativt material när eleven befinner sig i inledningsskedet av att lära sig exempelvis ett nytt begrepp. Ett sådant förhållningssätt framkommer även hos Löwing och Kilborn (2002), då de hävdar att ett av målen med att använda laborativt material är att kunna göra sig fri från det så snart som möjligt.

Moyer (2001) resonerar också om lärarens betydelse i samband med användning av material och hon är inne på samma linje som både Clements (1999) och Löwing och Kilborn (2002). Hon poängterar särskilt att det inte är någon enkel uppgift för läraren att guida eleverna så att de med hjälp av materialet kan koppla samman det nya som ska läras med den kunskap som de redan har. I sin studie noterade hon bland annat att lärare hade svårt att följa elevernas tankegång och hur de representerade den. Moyer (2001) menar därför att det är en stor utmaning för läraren att exempelvis tolka elevernas representationer av sitt eget matematiska tänkande och att visa och representera hur matematiska idéer hänger ihop.

Klassrumskultur

Det har tidigare framkommit att metoderna i matematikklassrummet påverkas av faktorer som tillhör klassrumskulturen (se t. ex. Seeger et al., 1998). I avsnittet om metoder i undervisningen har särskilt tre fenomen lyfts fram mot bakgrund av att de inom forskningen tillmäts en väsentlig roll i matematikundervisningen (se Franke et al., 2007). Det första av dessa, som gäller hur matematiken kommuniceras i klassrummet, det vill säga vad lärare och elever gör när de använder språket, har behandlats tidigare. De två andra företeelserna, utveckling av klassrumsnormer (eller snarare regler) samt byggande av relationer (klassrumsklimat) kommer att tas upp i det här avsnittet.

Avhandlingens intresse är som bekant riktat mot matematikklassrummet och det som försiggår där. Det har redan betonats i inledningskapitlet att klassrummet i det här sammanhanget inte bara avser den plats där ett antal elever har lektioner tillsammans med sin lärare vid bestämda tidpunkter. Klassrummet utgör också en självständig enhet med egna regler och handlingsmönster (se t. ex. Jablonka, 2011a). Då vi talar om detta som klassrumskultur ska det inte förväxlas med klassrummets kultur på en generell nivå, vilket snarare är en sida av skolkulturen. I avhandlingen har detta tidigare tagits upp som ”tradition of practice” eller enkelt uttryckt, skolkultur. Hit hör sådant som är gemensamt för många klassrum på olika håll i världen, bland annat vissa mönster i lärares och elevers interaktion (t. ex. IRE-dialogen i föregående avsnitt, se Mercer, 1995) och hur undervisningen är organiserad.

Till klassrummet hör även “the composition of influences that impinge upon the people in this space” (Goodchild, 2001, s. 123). Det syftar på de faktorer utanför klassrummet som påverkar det som sker där. Bland dessa finns bland annat skolorganisation och styrdokument, men också innehållet i elevernas ryggsäckar som har färgats av olika sociala och kulturella

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

bakgrundshistorier. Det senare reflekterar samhörigheten och gemenskapen med världen utanför klassrummet. Individerna i klassrummet ingår också i den lokala skolans gemenskap genom exempelvis en gemensam värdegrund (Goodchild, 2001).

Säljös (2000) definition antyder att kultur utgörs av kunskap och värderingar som förs vidare genom människors interaktion med sin omvärld. När klassrumskultur uppmärksammas i den här avhandlingen syftar det på den kultur som lärare och en grupp elever utvecklar tillsammans. Det är med andra ord en kultur som omfattar en begränsad grupp. En sådan gruppkultur beskrivs ofta som ”a set of *customs* that embody the thoughts that group members share” (Levine & Moreland, 1991, s. 258). Det bekräftar återigen vad exemplet med Pippi Långstrump i skolan illustrerade i inledningskapitlet, nämligen att gemensamma värden och uppfattningar som utgör en del av kulturen (De Corte & Verschaffel, 2007), kommer till uttryck genom individernas handlingar.

Jablonka (2011a) resonerar på ett liknande sätt om kultur, vilket redan har antytts i inledningskapitlet. Hon talar om olika typer av regler, som successivt utvecklas genom interaktionen mellan lärare och elever i gruppen. Regler inte är ett entydigt begrepp utan kan istället ses som en övergripande term. Jablonka (2011a) nämner bland annat särskilda regler, rutiner och normer som exempel på olika typer av regler. De flesta så kallade särskilda regler styr den sociala organisationen av arbetet i klassen. Det kan gälla hur eleverna förväntas ta ansvar vid grupparbete, att eleverna alltid skriver av det som läraren har skrivit på tavlan eller att lärarens uppmaning ”berätta mer om det här” betyder att läraren vill veta hur eleverna har tänkt när de gjorde sin beräkning (ibid.). Rutiner, så som Jablonka (2011a) beskriver dem kan närmast jämföras med de återkommande interaktionsmönster som framträder i samspelet mellan elever och lärare (t. ex. IRE-dialogen, se Mehan, 1979) eller eleverna sinsemellan, vilket tagits upp tidigare. Normer slutligen, fokuserar mer på de förväntningar och gemensamma värderingar som framträder (Jablonka, 2011a).

Sfard, som ägnat mycket av sin forskning åt regler som uppkommer genom samspelet i klassrummet, har skapat begreppet metaregler (eller meta-diskursiva regler), (Sfard, 2000; 2008). Metaregler är en teoretisk konstruktion Sfard (2000), men kan kännas igen i Jablonkas (2011a) generella beskrivningen av regler. Metaregler karaktäriseras som ”value laden and count as preferred ways of behavior” (Sfard, 2000, s. 170), vilket tyder på att de har stora likheter med normer, enligt beskrivningen ovan.

Wood (1998) har intresserat sig för *sociala normer* och konstaterar att dessa skiljer sig åt mellan traditionella matematikklassrum och klassrum där exempelvis eleverna ges mer utrymme att kommunicera och argumentera. I

jämförelse med Jablonkas beskrivning ovan framgår att sociala normer, så som Wood (1998) uppfattar dem, har stora likheter med särskilda regler. ”The social norms underlie the patterns and routines that become established in the classroom and that enable the students and teacher to interact harmoniously” (s. 170).

Den här typen av handlingar som de sociala normerna resulterar i kommer i sin tur att framstå som självklara och kan därför enligt Wood (1998) jämföras med ett dolt regelverk, vilket utgör grunden för de handlingsmönster som utvecklas i klassrummet. Exempel på sociala normer kan vara att elever förväntas argumentera för sina svar även när dessa är rätt eller att elever som inte räcker upp handen ändå ges möjlighet att svara på lärarens frågor.

Det finns en fara med själva ordet regler påpekar Sfard (2000), eftersom det kan föra tankarna till något förutbestämt som ska följas, men det gäller inte i det här sammanhanget, understryker hon. Det är snarare så att den här typen av regler existerar underförstått och kommuniceras mycket sällan, vilket både Jablonka (2011a) och Wood (1998) också uppmärksammar. En norm till exempel, blir synlig när någon bryter mot den eftersom själva överträdelsen framkallar en spontan reaktion hos andra deltagare att försöka korrigera det som har skett (Ben-Yehuda, Lavy, Linchevski & Sfard, 2005; Sfard, 2008). Det ges alltså inget medvetet utrymme i undervisningen åt regler av den sorten som beskrivits här. Likväl har de stort inflytande i matematikklassrummet, framhåller Jablonka (2011a) men det är inte något unikt för matematikundervisningen. Det dolda regelverket finns i alla klassrum oavsett vilket ämne som undervisas. (Yackel, Cobb & Wood, 1991).

Barn som börjar skolan har redan bestämda uppfattningar om vad det innebär att lära sig matematik och hur man lyckas med det i skolan. Franke och Carey (1997) visar i sin studie att förstaklassare uppfattar att de har svarat fel om läraren ställer en fråga om deras svar. Barnen menade också att man måste vara snabb eller känna till en strategi för att lyckas i matematik. Tillsammans utgör dessa uppfattningar ytterligare exempel på sociala normer.

Sociomatematisk kultur och sociomatematiska normer

I matematikklassrummet skapas förutom sociala normer också en sociomatematisk kultur, det vill säga det förhållningssätt gentemot matematik som utvecklas hos elever och lärare sinsemellan. En ofta använd definition av matematikklassrummets kultur är “the invisible and apparently shared meanings that teachers and pupils bring to the mathematics classroom and

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

that govern their interaction in it” (Nickson, 1992, s. 102). Det betyder att den kultur som är rådande i matematikklassrummet bildar grund för de matematiska aktiviteter som utövas här. Detta motsvarar också innebörden i det som har fått benämningen *sociomatematiska normer*. ”Social and sociomathematical norms can be thought of as taken-as-shared beliefs that constitute a basis for the mathematics practice in class” (Ju & Kwon, 2007, s. 268). Exempel på en sociomatematisk norm kan vara vad som anses vara en matematiskt accepterad argumentation då eleven förklarar en lösning av en uppgift.

Begreppet sociomatematiska normer introduceras av Yackel och Cobb (1996) i syfte att beskriva ”normative aspects of mathematical discussions that are specific to students’ mathematical activity” (s. 458). De vill med andra ord tolka elevens utveckling av värderingar och uppfattningar om matematik. Deras utgångspunkt är att kulturella och sociala processer ingår i ett dynamiskt system som i sin tur är integrerat i de matematiska aktiviteterna (se även Cobb & Yackel, 1998). Förutom att det matematiska lärandet i klassrummet påverkas av sociomatematiska normer som redan finns etablerade hos både lärare och elever, pågår också ständigt en process där dessa normer konstrueras om och nyskapas.

With regard to sociomathematical norms, what becomes mathematically normative in a classroom is constrained by the current goals, beliefs, suppositions, and assumptions of the classroom participants. At the same time these goals and largely implicit understandings are themselves influenced by what is legitimized as acceptable mathematical activity (Yackel & Cobb, 1996, s. 460)

I en annan artikel presenterar samma författare en teoretisk modell där samverkan mellan två perspektiv, det individuella/psykologiska och det sociala, bildar ramverk för analys av undervisning och lärande i matematikklassrummet. Av denna modell framgår att sociomatematiska normer liksom även *klassrummets matematiska praxis* uppträder som paralleller till sociala normer (Cobb & Yackel, 1996). Skillnaden mellan sociomatematiska normer och klassrummets matematiska praxis ligger främst i att den senare kan förändras allteftersom elevernas matematikkunnskap utvecklas. Det kan betyda att elever till en början måste förklara hur de tänker när de löser additioner eller subtraktioner i talområdet 0-10, men när de flesta elever behärskar detta förväntas de inte längre argumentera för sina tankar kring dessa beräkningar. För eleverna är det inte oproblemiskt att reglerna ändras, påpekar Jablonka (2011a), eftersom det gäller för dem att förstå vilka regler som gäller. Det innebär också att läraren måste vara uppmärksam på att

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

det kan finnas elever som uppfattar en lärandeaktivitet på ett annat sätt än läraren och de andra eleverna (Wistedt, 1987).

Bland forskare betonas också vikten av att lärare arbetar med att grundlägga normerande aspekter gällande elevernas matematiska aktiviteter. Detta är vad exempelvis Yackel och Cobb (1996) kommer fram till genom att analysera sociomatematiska normer som visar sig i matematikundervisningen i skolår 2. Liknande slutsatser drar också Kazemi och Stipek (2001) som studerat en matematiklektion om addition av bråktaal i fyra olika klasser där eleverna befann sig i år 4 eller 5. Forskarna poängterar särskilt att de sociala normer som kunde observeras inte kan ge motsvarande stöd för elevernas begreppsliga tänkande som vissa sociomatematiska normer.

Pimm (1987) menar att som läraren gör, förväntas också alla andra i klassrummet göra. Det betyder att lärarens sätt att styra över själva mönstret för kommunikationen i klassrummet, får till följd att eleverna lär sig i vilken omfattning olika tillvägagångssätt är accepterade i samband med att matematik kommuniceras under lektionen. För att kunna utveckla någon annan typ av matematikklassrum än det som eleverna förväntar sig är det därför nödvändigt med ett medvetet arbete som innebär att normers utveckling uppmärksammas, och inte bara rent generellt (Cobb, Wood & Yackel, 1993).

Sfard (2000) uppmärksammar elevperspektivet när hon talar om lärande av metaregler och poängterar vikten av att eleverna lär sig de dolda reglerna i klassrummet. Jablonka (2011a) ger uttryck för ett snarlikt förhållningssätt i sitt resonemang om regler i matematikklassrummet. Utmaningen för eleverna, påpekar hon, är att lära sig dessa regler för att kunna utveckla färdigheter som är nödvändiga för att kunna delta i undervisningen med framgång.

The rules regulate both at the same time, the expected mathematical productions that a student has to display in order to be considered as successful, as well as the favoured behaviour, aspirations and attitudes. (Jablonka, 2011a, s. 67)

I likhet med vad Kazemi och Stipek (2001) tidigare påtalat, har de sociomatematiska normerna således en viktig roll i elevernas matematiklärande.

Elevers perspektiv är också i fokus i en studie, som uppmärksammar tre olika aspekter av sociomatematiska normer, (a) normer som läraren stödjer, (b) normer som både lärare och elever demonstrerar i klassrummet och (c) normer som eleverna har uppfattat (Levenson, Tirosh & Tsamir, 2009). Resultatet visar att även om de normer som demonstreras i klassrummet är i

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

enlighet med de normer som läraren stödjer, är det osäkert om eleverna verkligen har uppfattat dessa normer. Forskarna drar därför slutsatsen att elevperspektivet behöver tas i beaktande vid studier av sociomatematiska normer.

Till matematikklassrummets kultur hör alltså bland annat sociomatematiska normer och matematikklassrummets praxis. Begreppet kultur kan även användas i andra sammanhang. De fyra bedömningsdiskurser eller kommunikationsmönster som Björklund Boistrup (2010) urskiljer i de klassrum som ingår i hennes studie, kan också betraktas som exempel på matematikklassrummets kultur. Rubrikerna för dessa kan jämföras med normer som ligger till grund för lärares och elevers handlingar i matematikklassrummet. I svensk översättning har de fått följande benämningar:

1. Gör det fort och gör det rätt
2. Vad som helst duger
3. Öppenhet med matematik
4. Resonemang tar tid (Björklund Boistrup, 2013, s. 154)

Den första varianten har stora likheter med det traditionella matematikklassrummet där läraren är den som leder samtalet, vilket domineras av korta yttranden från både elever och lärare. Fokus ligger på uppgifterna som ska göras och om elevernas svar är rätt eller fel. I nummer (2), vad som helst duger, är det också läraren som har initiativet till återkopplingen, som framför allt visar sig i form av beröm. Läraren är ibland mer passiv och ger sig då inte in i elevers matematiska resonemang även om dessa visar sig felaktiga.

Den tredje diskursen erbjuder mer av utmaningar för eleverna, bland annat genom att det ofta ställs öppna frågor. Till skillnad från de två första bedömningsdiskurserna är processerna i fokus här, liksom även i den fjärde diskursen. Både lärare och elever visar intresse för att kommunicera matematik och felaktigheter uppmärksammas och görs till undervisningsinnehåll. Det råder inte heller någon tveksamhet om vad som kan uppfattas som matematiskt korrekt. Även i den fjärde diskursen, resonemang tar tid, riktas alltså bedömningshandlingarna mot processer, exempelvis undersökande/problemlösning, resonerande/argumenterande och definierande/beskrivande. Tystnader är vanliga. Eleven får ofta erkännande för sitt visade matematiska kunnande och utmaningar mot nytt lärande är vanliga. Här ges eleven möjlighet att vara delaktig i arbetet att lära sig matematik.

Björklund Boistrup (2010) konstaterar att förekomsten av de fyra bedömningsdiskurserna varierar mellan olika klassrum. I den nämnda studien dominerar diskurs 2 och 3 i två av klassrummen medan alla fyra kunde

uppmärksammas i två andra klassrum. I ytterligare ett klassrum är det diskurs 3 och 4 som är vanligast. Resultatet bekräftar således att matematik-klassrummets kultur varierar mellan olika klassrum.

Klassrumsklimat

Ett område som tangerar kulturen i klassrummet gäller klassrumsklimat. Hattie (2009) pekar ut några faktorer med koppling till klassrumsklimatet som betydelsefulla för elevernas prestationsförmåga i klassrummet och som därför är väsentliga att lyfta fram i det här sammanhanget. Det gäller (a) känslan av *positivt sammanhang* i klassrummet och (b) *positiv kamratpåverkan*. Det första (a) känns igen som ett klassrumsklimat där målorientering, positiva mellanmänniska relationer och socialt stöd är typiska kännetecken medan (b) positiv kamratpåverkan, kan innebära exempelvis hjälp, vänskap, handledning och känslomässigt stöd. Hattie menar också att det omvända kan leda till bristande engagemang. Av stor vikt för elevernas resultat är också en tredje faktor, (c) *ledarskap i klassrummet*. Enligt Hattie (2009) hör det också till klassrumsklimatet eftersom det gäller lärarens förmåga att reducera störande moment med hjälp av situationsanpassad medvetenhet.

Arbetsorganisation

Förutom att sociala och kulturella faktorer påverkar arbetet i matematikklassrummet har även själva organisationen betydelse för metoderna som lärare och elever använder i klassrummet (Cobb, 1990; Rezat & Sträßer, 2012; Schoenfeld, 2012; Stigler & Hiebert, 1997).

Organisationen i klassrummet utgår vanligtvis från de olika arbetsformerna *helklassundervisning*, *grupparbete* och *enskilt arbete*. Undervisning i helklass tillsammans med individuellt arbete är de arbetsformer som har dominerat matematikundervisningen och fortfarande gör det, men med tiden har tonvikten förskjutits allt mer mot individuellt arbete i läroboken (Skolverket, 2003, Skolinspektionen, 2009). Bentley, som har analyserat svenska elevers resultat i TIMSS 2007 drar slutsatsen att det är dominansen av enskilt arbete i läroboken tillsammans med fokuseringen på procedurkunskap i undervisningen som är de främsta orsakerna till elevernas bristande kunskaper i taluppfattning och aritmetik (Skolverket, 2008b).

Med utgångspunkt från hur det har sett ut i klassrummen på senare tid, resonerar Granström (2007) kring tre vanliga arbetsformer för organisation av undervisning generellt, helklassundervisning, grupparbete och enskilt arbete.

Helklassundervisning har sitt ursprung i en tid då böcker var för dyrt att införskaffa för större delen av befolkningen. Läraren kom då att fungera som den huvudsakliga förmedlaren av kunskap. Utmärkande för helklassundervisning, även kallad katederundervisning, är dess hierarkiska struktur där läraren för ordet och därmed bestämmer vem som får yttra sig. Den som önskar säga något, visar detta genom att räcka upp handen. Genom att eleverna sitter vända med ansiktet mot läraren och bara ser varandras ryggar, minskas möjligheten för eleverna att kommunicera med varandra. Vid tiden för grundskolans genomförande var klassundervisning den dominerande arbetsformen (Granström, 2007).

Katederundervisning kan också jämföras med beteckningen lärarcentrerad undervisning (Cuban, 1993). I litteraturen representerar katederundervisning en klassrumspraktik som innebär att läraren ”överför” kunskap till eleven (Brophy, 1999; Garrett, 2008).

De senaste decennierna har inneburit ett paradigmskifte när det gäller synen på kunskap. Därmed har också föreställningen om god undervisning förändrats. I västvärlden har det i sin tur lett till att elevcentrerade klassrumspraktiker har förespråkats istället för lärarcentrerade, bland annat i syfte att skapa miljöer för lärande, där kunskap konstrueras av lärare och elever tillsammans (Brophy, 1999).

En arbetsform som sätter eleven i centrum är grupparbetet (Cuban, 1993). I motsats till helklassundervisning handlar grupparbete om att eleverna är aktiva och själva söker kunskap (Granström, 2007). Grupparbete ger eleverna möjlighet att samtala och bland annat diskutera matematik med varandra (Mercer, 1995). I svensk skolundervisning förekommer grupparbete mycket sparsamt. Möjliga förklaringar till detta är lärares bristande kunskap om själva arbetsformen samt det faktum att grupparbete kan leda till grupprocesser som är svåra att kontrollera (Forslund Frykedal & Hammar Chiriac, 2011; Granström, 2007).

Individuellt arbete är, som det redan framkommit, den vanligaste arbetsformen i matematikundervisningen. Granström (2007) skiljer mellan individuellt arbete, som innebär att läraren bestämmer hur många sidor eller uppgifter eleven ska göra under lektionen och enskilt arbete. Det senare ger, enligt Granströms definition, eleven större frihet att bestämma över hur tiden ska disponeras. Det kan exempelvis betyda att eleven får större beting att hantera över lite längre tid. Individuellt arbete är i sina olika varianter också en form av elevcentrerad undervisning eftersom det förutsätter att eleven själv är aktiv och tar ansvar för sitt lärande.

På senare tid har det uppkommit en diskussion om huruvida begreppen elevcentrerad respektive lärarcentrerad undervisning är relevanta, (D. J. Clarke, 2006; Mok, 2006a). Medan västerländska undervisningsreformer har

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

förordad elevcentrerad undervisning (Chazan & Ball, 1999), har denna kategorisering, enligt D. J. Clarke (2006), använts för att nedsättande låta asiatiska klassrum i motsats till de västerländska, stå som symbol för en lärarcentrerad klassrumspraktik. Detta till trots, presterar eleverna i dessa klassrum betydligt bättre än sina västerländska jämnåriga kamrater i internationella undersökningar, bland annat när det gäller matematik (D. J. Clarke, 2006).

Forskare som studerat matematikundervisning i asiatiska klassrum påtalar problematiken med dessa kategoriseringar och menar bland annat att beteckningarna speglar ett alltför stereotypt synsätt (D. J. Clarke, 2006; Li, 2011; Mok, 2006a, 2006b). Genom studier framträder sålunda att lärarcentrerad (i en del litteratur lärardominerad) undervisning även kan innebära att elever på olika sätt är engagerade i undervisningsaktiviteter (t. ex. Huang, Li & He, 2010; Li, 2011; Mok, 2006b), vilket föranleder vissa forskare att kalla det hela för en paradox. Mot bakgrund av dessa och andra forskares liknande erfarenheter gör Mok (2006b) följande summering: ”these studies suggest very clearly that the simple phrase ”teacher-dominating” tells too little to inform how the nature of the teacher’s intervention may contribute to learning” (s. 87).

Det här resonemanget kan jämföras med Boalers problematisering av traditionell kontra progressiv matematikundervisning som ett sätt att beskriva undervisningen i form av två ytterligheter. Genom sin forskning har Boaler (2009) kommit fram till att den sortens kategorisering inte har någon större betydelse eftersom båda typerna innehåller såväl effektiva som mindre effektiva undervisningsmetoder. Det finns undervisning som kan betraktas som traditionell för att den innehåller gemensamma genomgångar och individuellt arbete, men där eleverna också inbjuds att delta i matematiska resonemang och lösa problem som inte är rutinuppgifter. En sådan matematikundervisning måste uppmuntras, påpekar Boaler. Däremot finns det starka skäl att ställa sig kritisk till den variant av traditionell undervisning som innebär att eleverna lär sig matematik genom att kopiera lärarens metoder, inte minst för att det visat sig vara ineffektivt som undervisningsmetod (Boaler, 2009).

Lärarcentrerade kontra elevcentrerade undervisningsmetoder har även aktualiserats i den inhemska diskussionen. På samma sätt som det framstår som en motsägelse när undervisning i asiatiska matematikklassrum karaktäriseras som lärarcentrerad (Li, 2011; Mok, 2006a), har Liljestrand (2007) ställt sig frågan huruvida elevcentrerade undervisningsfilosofier möjligen är en paradox. Genom sitt resonemang, där en matematiklektion utgör empiriskt exempel, kommer han bland annat fram till att ”all undervisning är delvis beroende av läraren och lärarens perspektiv också

under situationer eller arbetsformer, där elever förväntas arbeta självständigt” (Liljestrand, 2007, s. 48). Förutom att diskussionerna som tagits upp här är tankeväckande visar de också på behovet av förfinade, väldefinierade begrepp i forskningen.

Granströms (2007) resonemang bildar ramen för detta avsnitt om klassrummets arbetsorganisation. Han konstaterar att förändrade arbetsformer bland annat har medfört allt mindre tid för ”det kollektiva samtalet”, det vill säga tillfällen för lärares och elevers gemensamma upplevelser i klassrummet. Det betyder att gemensamma erfarenheter, vilket redan framgått att Mercer (1995) ser som en mycket viktig tillgång, inte längre är möjligt att använda och gå tillbaka till i samma utsträckning som tidigare. Granström (2007) framhåller emellertid att alla arbetsformer är bra på sitt sätt och poängterar särskilt betydelsen av att läraren utövar sitt ledarskap med hjälp av kunskap om hur arbetsformer och olika processer hör samman.

Möjlighet till lärande

Frågan om relationen mellan undervisningen och dess resultat är central för min studie och har därför berörts redan tidigt i avhandlingen. Där framkom också att forskare, till exempel Hattie (2009), Hiebert och Grouws (2007), Cohen et al. (2003) samt Stigler och Hiebert (1997), har uppmärksammat det faktum att det är problematiskt att förutsäga lärande utifrån vilken undervisningsmetod som använts. Skälet till detta, som dessa forskare ser det, är att elevens lärande är beroende av flera undervisningsaspekter, vilket också de tidigare avsnitten i detta kapitel har försökt belysa. Det handlar således om olika faktorer i samverkan även om alla inte inverkar i lika hög grad på elevens lärande. Att det förhåller sig så kommer särskilt till uttryck hos Hattie (2009) då han sammanfattar sin omfattande forskningsöversikt om undervisning och lärande. Istället för att framhålla specifika undervisningsmetoder som i studier har visat sig gynnsamma för elevers prestationer pekar han på vikten av lärares kunskap och vad lärare gör som de absolut viktigaste påverkansfaktorerna när det gäller elevernas lärande.

På liknande sätt resonerar exempelvis Ma (1999) när hon betonar vikten av att läraren kan använda olika förklaringsmodeller i undervisningen. För att kunna göra det menar Ma att lärarens förståelse för grundläggande matematik är avgörande.

Ett sätt att komma ifrån svårigheterna kring diskussionen om undervisningsmetoderna som predicerande faktor för elevens lärande är att istället för lärande tala om ”opportunity to learn”, det vill säga tillfälle eller möjlighet till lärande. Själva begreppet kan enkelt förklaras med att elever som exponeras för ett specifikt innehåll, med största sannolikhet har en bättre

förutsättning att lära sig detta i jämförelse med elever som inte har fått möta det aktuella innehållet (Hiebert & Grouws, 2007). Men det handlar inte bara om mötet med ett innehåll utan i lika hög grad om de processer som sker i samband med det här mötet.

Providing an opportunity to learn what is intended means providing the conditions in which students are likely to *engage* in tasks that involve the relevant content. Such engagement might include listening, talking, writing, reasoning and a variety of other intellectual processes. (Hiebert, 2003, s. 10)

Att möjlighet till lärande verkligen uppfattas som ett hållbart koncept för att förutsäga lärande betonas i det amerikanska forskningsrådets rapport *Adding it up* (Kilpatrick et al., 2001). Av rapporttexten framgår att "opportunity to learn is widely considered the single most important predictor of student achievement" (ibid., s. 334). Med detta som grund kan det verka rimligt att fortsättningsvis i avhandlingen använda konceptet "möjligt lärande" för att beskriva relationen mellan undervisningsmetod och matematiskt kunnande.

Sammanfattning

De centrala frågorna i avhandlingen gäller alltså *hur* undervisningen kan beskrivas i termer av lärares och elevers metoder och *vad* eleverna, som ett resultat av undervisningen har möjlighet att lära, det vill säga vad som är möjligt lärande. Här följer en sammanfattning av tidigare forskning som behandlats i kapitlet och som utgör den teoretiska grunden i arbetet med dessa frågeställningar.

Vad ska eleverna lära sig?

Historiskt sett är det individens och samhällets behov av matematikkunnande som ligger bakom skolmatematikens utveckling. De svenska kursplanerna under tiden från 1960-talet och fram till idag ger uttryck för en förändrad syn i frågan om vad matematikkunnande innebär. Under denna period har matematiken gått från att presenteras som ett färdighetsämne där räknandet stod i centrum till att framställas som ett ämne där matematiskt kunnande uttrycks som förmågor att kunna utöva i relation till olika områden av matematiskt innehåll. Denna förändring innebär också nya utmaningar för läraren. Undervisningen ska inte bara medverka till att eleven utvecklar färdigheter och begreppslig förståelse i relation till det matematiska innehållet. Undervisningen ska även ge förutsättningar för eleven att utveckla

andra aspekter av matematikkunnande, till exempel att föra och följa matematiska resonemang.

Parallellt med denna utveckling har vi kunnat ta del av ett antal olika ramverk där matematisk kunskap presenteras i termer av generella kompetenser (t. ex. *Hög tid för matematik*, 2001; Kilpatrick et al., 2001; Niss, 2003). De olika ramverken motsvarar varandra i hög grad och likheterna med de fem förmågor som beskrivs i Lgr11 är stora även om terminologin inte alltid stämmer helt överens.

Aritmetik utgör en väsentlig del av innehållet i grundskolans matematikundervisning. Inte minst i de tidiga skolåren ägnas mycket undervisningstid åt att öva på räkning med de fyra räknesätten. På senare år har den ständiga diskussionen om standardalgoritmernas vara eller inte vara övergått till att bli en diskussion om användningen av skriftlig huvudräkning och de svårigheter som eleverna framför allt har visat då de använder skriftlig huvudräkning i samband med subtraktion.

Införandet av andra skriftliga räknemetoder istället för algoritmer kan kopplas samman med den nya kunskapssynen i matematik. Den forskning som på senare tid har bedrivits på det nationella planet beträffande skriftliga räknemetoder har mestadels gällt empiri från 2007 års TIMSS-undersökning (se Skolverket, 2008b). Forskning om situationen på lågstadiet, där addition och subtraktion med tiotalsovergång är nytt för de flesta elever tycks vara mer sällsynt även om det finns någon enstaka studie av senare datum. Förutom att innehållet orsakar svårigheter när eleverna ska lära sig är bristen på nyare svensk forskning en viktig anledning till att undervisningsinnehållet som uppmärksammas i avhandlingen är just skriftliga räknemetoder för addition och subtraktion, särskilt vid tiotalsovergång.

Vilka metoder används i undervisningen?

Kapitlet har också behandlat undervisningsmetoder i matematikundervisningen, det vill säga lärares och elevers handlingar, med utgångspunkt från Martons (2000) definition av begreppet metod. Det innebär att här motsvaras undervisningsmetoder av företeelser som kan beskrivas utifrån aktörer, artefakter och aktiviteter. Forskning har visat att det inte bara finns en stark koppling mellan metoder och artefakter. Sociala och kulturella faktorer som klassrumskultur, men även hur undervisningen är organiserad är också aspekter som står i nära förbindelse med metoderna som används i klassrummet.

Ernest (1991) har presenterat fem undervisningsideologier som bland annat kännetecknas av de olika metoder som lärare och elever använder under matematiklektionerna. Liknande handlingsmönster går också att känna

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

igen i beskrivningarna av sex lärares undervisning (Carlgren & Marton, 2002). Tillsammans bildar materialet ett teoretiskt underlag som visar lärares och elevers metoder i relation till det förväntade resultatet av undervisningen, det vill säga vad som är möjligt lärande.

Till artefakterna i undervisningen hör språket, som utgör ett omfattande område inom matematikdidaktisk forskning. En del forskare betonar vikten av att elever får möjlighet att tala matematik medan andra har fördjupat sig i språkets funktion i undervisningen. Vidare har forskare studerat lärares olika sätt att ge återkoppling på elevers svar. Förutom språket spelar också fysiska artefakter en väsentlig roll i matematikundervisningen. Här syftar det på laborativt material, som på senare tid har fått allt större uppmärksamhet. Forskningen poängterar bland annat att användning av laborativt material inte med självklarhet underlättar elevernas lärande och istället betonas vikten av lärares medverkan.

Kulturen i matematikklassrummet är ett annat intresseområde som uppmärksammas i kapitlet. Genom individernas handlingar kommer de gemensamma uppfattningar och normer som är en del av kulturen till uttryck i klassrummet. Klassrumskulturen utgörs av såväl en generell kultur med mönster som kan kännas igen i de flesta klassrum världen runt, som en unik kultur som lärare och elevgrupp utvecklar tillsammans. Genom bland annat uppföljande studier till internationella utvärderingar som exempelvis TIMSS har forskare konstaterat att kulturen i matematikklassrummet inverkar på elevers lärande. Denna kultur utgörs bland annat av sociomatematiska normer, det vill säga det förhållningssätt gentemot matematik som lärare och elever utvecklar emellan sig. I kulturen ingår också den matematiska praxis som råder i klassrummet.

Utöver artefakter och klassrumskultur är undervisningens organisation den tredje aspekten i relation till undervisningens metoder, som bearbetas i kapitlet. Generella beskrivningar av undervisning görs ofta i förhållande till hur undervisningen är organiserad, det vill säga vilka arbetsformer som används. Av detta framgår att olika arbetsformer skapar olika möjligheter till lärande. Nationella rapporter redovisar att individuellt arbete är den vanligaste arbetsformen i matematikundervisningen. Arbetsformer kan också beskrivas som mer lärarcentrerade eller elevcentrerade. Dessa beteckningar har dock ifrågasatts på senare tid, då det har visat sig att en schablonmässig användning kan leda till att begreppen missuppfattas, särskilt vid internationella jämförelser av undervisning.

Kapitlet avslutades med ett resonemang om problematiken kring förhållandet mellan undervisningen och dess utfall. Genom forskningen står det klart att det i princip är omöjligt att förutsäga resultatet av undervisningen utifrån metoderna som används. Det har lett fram till användningen av

2. Skolmatematikens innehåll och metoder

begreppet ”möjligt lärande”, som en förutsättning för att kunna diskutera relationen mellan undervisningsmetod och matematikkunskande.

I den här sammanfattningen framträder några centrala intresseområden som hör ihop med matematikundervisning. Förutom undervisningsinnehållet handlar det om metoder, artefakter, klassrumskultur och undervisningens organisation. Ett syfte med avhandlingen är att beskriva matematikundervisning så som den framträder genom lärares och elevers handlingar. En teoretisk utgångspunkt som är väsentlig i sammanhanget innebär att handlingarna medieras via olika aspekter av undervisningen, vilket kan utgöras av både kulturella och sociala faktorer. För att kunna ge en samlad bild av undervisningen är det därför en förutsättning att elevers och lärares metoder beskrivs och analyseras i relation till artefakter, klassrumskultur och undervisningens organisation. En sådan analys är bara möjlig mot bakgrund av ett teoretiskt underlag liknande det som har presenterats om de olika områdena i kapitlet. I anslutning till detta är avsikten också att föra ett resonemang kring möjligt lärande som ett resultat av de redovisade metoderna.

Den enda studie jag hittills har mött, som på ett liknande sätt, men ännu mer djupgående, skildrar det som sker i matematikklassrummet är Goodchilds (2001) fallstudie. Där är det högstadiets matematikundervisning som uppmärksammas. Att beskriva undervisning på lågstadiet framstår därför som en angelägen uppgift.

3. Teoretiska utgångspunkter

I samband med presentationen av det matematikdidaktiska området i det första kapitlet redovisades också hur synen på lärande har förändrats genom det som ofta kallas den sociala vändningen. Utmärkande för de teorier som då växte fram är att lärande betraktas som en social process, påverkad av historiska sammanhang. Det tar sig uttryck i användning av kulturellt utvecklade redskap som exempelvis språk och symboler. Vygotsky (1978, 1986) tillsammans med Lave och Wenger (1991) har nämnts som exempel på företrädare för de nya lärandeteorier. Till denna grupp hör också den teoribildning som utgör avhandlingens teoretiska ram, verksamhetsteorin. Utgångspunkt för teorin är uppfattningen att en verksamhet är uppbyggd av mänskliga handlingar. Detta understryks i ett ofta återkommande citat som är hämtat hos Leontiev, en av teorins förgrundsgestalter. Han skriver att ”Den mänskliga verksamheten existerar inte på något annat sätt än i form av en handling eller en kedja av handlingar” (Leontiev, 1986, s. 161). En annan grundläggande uppfattning inom verksamhetsteorin är tanken att vårt handlande kan förklaras och förstås i relation till de verksamheter vi ingår i (Engeström, 1987; Leontiev, 1986).

Inledningsvis redovisas här vilka tankar som ligger bakom användningen av detta teoretiska perspektiv. Därpå följer ett resonemang om verksamhetsteorins användbarhet inom det pedagogiska området och särskilt i relation till den här studien. Med hjälp av modeller och strukturer från Vygotsky, Leontiev och Engeström presenteras därefter verksamhetsteorin och dess framväxt. Slutligen aktualiseras studien på nytt genom beskrivningen av dess analysinstrument.

Verksamhetsteorin i relation till pedagogisk forskning

Bruket av teori inom forskning kan motiveras utifrån flera olika aspekter, men det är främst två skäl som varit vägledande i arbetet med studien. Det ena är de möjligheter som finns att initiera nya idéer, som kan uppkomma till följd av den teoretiska utgångspunkten. Enligt Boaler (2002) kan det ge upphov till att det egna perspektivet vidgas. Genom användning av teoretiska begrepp och strukturer öppnas möjligheter för osedda vyer som kan ge näring åt nya tankar. Därför kan det vara betydelsefullt att som forskare inte stanna vid en empirinära analys, utan även gå ett steg längre.

3. Teoretiska utgångspunkter

Det andra skälet är av mer pragmatisk karaktär, i likhet med det som Cobb (2007) förordar. Han framhåller att olika teorier ska användas till det som de är bäst lämpade för. Anledningen är att de var för sig kan väcka olika typer av frågeställningar. Det är alltså ett nyttobetonat förhållningssätt, tillsammans med möjligheten att inspireras till nya tankar, som har bidragit till valet av verksamhetsteorin som utgångspunkt i den teoretiska analysen.

Verksamhetsteorin förekommer inom flera olika forskningsfält, som exempelvis kommunikation, datateknik, pedagogik, psykologi och filosofi (se bl. a. Hedegaard, Chaiklin & Jensen, 1999). En analys av verksamhetsteoretisk forskning som publicerats inom det engelska språkområdet under en trettioårsperiod med början 1975 visar, att den verksamhetsteoretiska traditionen har fått ett ordentligt genomslag sedan slutet av 1990-talet (Roth, 2004). Inte minst har denna teori visat sig fördelaktig vid analys av data från klassrumsstudier (Roth & Lee, 2007).

Enligt verksamhetsteorin, så som den framställs hos Leontiev (1986), kan undervisning betraktas som en verksamhet eftersom den utgörs av mänskliga handlingar. Engeström (1998) beskriver verksamhet som ett kollektivt, flerstämmigt system som omfattar flera olika perspektiv. I verksamheten undervisning inbegrips inte bara det som sker utifrån lärarens synvinkel, även om det svenska ordet undervisning gärna associerar i första hand till lärares handlingar. Här är också elevperspektivet närvarande, vilket innebär en koppling till lärande. Därigenom skapas förutsättningar att studera relationen mellan till exempel metodiska och kognitiva aspekter i undervisningsverksamheten (Lerman, 1998).

Språk och andra verktyg som är betydelsefulla i undervisningssammanhang har en central roll i verksamhetsteorin. Ett utmärkande drag är tanken att sådana kulturella artefakter, som exempelvis vedertagna matematiska symboler, är bärare av innebörder som i allmänhet kan ses som förgivettagna (Cobb, Perlwitz & Underwood, 1996) Synsättet stämmer väl med huvuddragen i den nya riktning som matematikdidaktisk forskning har tagit de senaste decennierna genom den sociala vändningen. Detta ger en förklaring till varför verksamhetsteorin har fått ett ökat inflytande på det pedagogiska området under 2000-talet. Rezat och Sträßer (2012) är aktuella exempel på forskare som utgår från verksamhetsteorin när de utvecklar sin modell om artefakternas roll i undervisningen.

Ett verksamhetsteoretiskt förhållningssätt inom det pedagogiska fältet får också stöd av Hedegaard (2002), som framhåller att verksamhetsteorin och dess begrepp är användbara verktyg på olika nivåer inom utbildningsvetenskaplig forskning. Hon resonerar kring interaktionen mellan fyra olika analysnivåer som kan bidra till ett kulturellt, historiskt perspektiv på elevers lärande och personliga utveckling genom sin verksamhet i skolan.

3. Teoretiska utgångspunkter

(1) Mänsklighetens historia med dess framväxt och användning av verktyg. (2) Samhälle och kultur som villkor för elevers utveckling. Samhällets kulturhistoria innefattar också skolverksamheten, vars uppdrag under årens lopp har växlat med samhällets förändring. Detta har också påverkat dess innehåll, det vill säga de handlingar som utförs i skolan. ”If we want to understand child development, we have to conceptualize it in connection with the activities that are practised in the school as institution” (Hedegaard, 2002, s. 14). (3) Kulturell praktik i skolan och personlig utveckling sätter skolans egen praktik i fokus, där ämnesinnehåll och färdigheter som övas, inte alltid motsvarar behoven som efterfrågas hemma eller på jobbet. Uppmärksamheten riktas bland annat mot tradition of practice (se Mercer, 1993) och individens utveckling i samband med övergångar från exempelvis förskola till skola eller från utbildning till yrkesliv. I centrum är också den enskilda elevens vardagsverksamhet, till exempel utveckling av spontana begrepp som interagerar med skolans ämneskunskaper och vetenskapliga begrepp. Hedegaards beteckning ”the double move in teaching” (s. 78) ger uttryck för en undervisningsprocess som kan beskrivas som en dubbel rörelse mellan lärarens modell av ämnesrelevanta begrepp och elevens vardagskunskande, eftersom båda är utgångspunkt för undervisningen (Hedegaard, 2002). Detta leder vidare till nästa nivå. (4) Utveckling av psykologiska funktioner och förmågor, till exempel hur ämneskunskap kan påverka elevers begreppsutveckling och tänkande och samtidigt bli en personlig verksamhet. Det är den tredje nivån med en viss dragning mot den fjärde, som är intressant i relation till avhandlingen, eftersom matematikundervisning och vad elever ges möjlighet att lära är i fokus här.

Verksamhetsteorin och avhandlingen

Studien uppmärksammar matematikundervisningen i de tidiga skolåren med hjälp av följande frågeställningar.

- Vad är kännetecknande för lärares handlingar i dessa klassrum?
- Vad är kännetecknande för elevers handlingar i dessa klassrum?
- Vilka förutsättningar för lärande med avseende på olika kompetenser i matematik skapas i dessa klassrum?

Genom frågeställningarna riktas intresset mot lärares och elevers handlingar under matematiklektionerna, det vill säga processen i de olika matematikklassrummen. I enlighet med Leontiev (1986) och Engeström (1998) kan matematikundervisning betraktas som en verksamhet. Leontiev (1986) ger uttryck för att en verksamhet bara kan synliggöras och bli konkret genom att verksamhetens enheter, det vill säga olika handlingar och relationerna dem emellan, analyseras. För min studie innebär det att analys av

3. Teoretiska utgångspunkter

lärares och elevers handlingar under matematiklektioner kan göra det möjligt att uppmärksamma vad som är kännetecknande för matematikundervisning i några klassrum och därigenom också förstå de olika verksamheterna.

Inbyggt i varje verksamhetssystem finns en ömsesidig relation genom att individens utveckling och förändring kan förklaras och förstås i förhållande till den aktuella verksamheten. Berthén (2007) klargör vad detta reciproka förhållande kan innebära. ”De verksamheter som individen ingår i formar sålunda individens personlighet, samtidigt som de människor som deltar i verksamheterna också bidrar till att forma verksamheterna” (s. 48).

Mot bakgrund av ett sådant synsätt är följande hypotes möjlig: Handlingar som utförs under matematiklektioner styr hur undervisningsverksamheter för matematik konstitueras i olika klassrum. Handlingarna i sin tur påverkar läraren och eleverna och formar såväl lärarens undervisning som elevernas matematiska kunskaper och vice versa. Hypotesen bekräftas i viss mån av resultatet från en undersökning som nämnts tidigare (Emanuelsson & Sahlström, 2006). Deras studier av interaktion i matematikundervisningen visar att två olika matematikklassrum kan uppvisa stora skillnader beträffande både undervisning och hur matematik uppfattas, som en följd av interaktionen i de båda klassrummen.

Vikten av relevanta begrepp för att kunna beskriva processen i matematikklassrummet (Schoenfeld, 2012) har redan lyfts fram i kapitel 1. Lerman (1998) framhåller att sociokulturella teorier, som är nära besläktade med verksamhetsteorin, tillhandahåller en sådan begreppsapparat. ”What socio-cultural theories offer are languages in which to describe the process whereby the environment constructs the individuals, as well as the reverse” (s. 345).

Ett viktigt antagande i föreliggande studie är att språk, symboler och andra artefakter tillsammans med sociala normer uppmärksammas som betydelsefulla faktorer, i relation både till undervisning och till det matematikkunnande som undervisningen ger förutsättningar för. Rezat och Sträßer (2012) framhåller att medvetenhet om hur artefakterna kan påverka den didaktiska situationen, är avgörande för att förstå undervisning och lärande i matematik. De hänvisar till verksamhetsteorin så som den har utvecklats av Engeström (1987) och menar att styrkan i denna ligger i att den erbjuder en modell för analys av verksamheten där det också är möjligt att förutom artefakter också inbegripa andra betydelsefulla faktorer i lärandemiljön. Rezat och Sträßer syftar här på det som Engeström (1998) benämner ”the less visible social mediators of activity” (s. 78), vilket innefattar exempelvis regler och normer i matematikklassrummet.

Skott et al. (2010) anser att utgångspunkten i deltagandeperspektivet i sig också skapar förutsättningar för forskaren att uppfatta hur språk och

3. Teoretiska utgångspunkter

interaktion kan påverka vad som är möjligt för eleverna att lära. Verksamhetsteorin uppmärksammar bland annat relationen mellan mål, handlingar och resultat. Därigenom kan den även fungera som ett redskap i studien i avseendet att synliggöra vilken typ av matematikkunnande som handlingarna i de olika undervisningsverksamheterna kan skapa förutsättningar för.

Resonemanget ovan har lett fram till slutsatsen att verksamhetsteorin i Engeströms utformning kan vara till hjälp i en analys med avsikt att åskådliggöra och förstå de olika verksamheter som framträder i min studie. Hur analysverktyget är utformat redovisas mer ingående i avsnittet som följer efter presentationen av verksamhetsteorins framväxt.

Verksamhetsteorins utveckling och koppling till matematikundervisning

Verksamhetsteorin¹⁸ har, liksom den sociokulturella teorin, sitt ursprung i den kulturhistoriska skolan som växte fram i 1920-talets Ryssland. Dess filosofiska rötter kan spåras tillbaka till både Marx dialektiska materialism och klassisk tysk filosofi, representerad av Hegel (se t. ex. Leontiev, 1986; Roth & Lee, 2007; Vygotsky, 1978). Till de främsta företrädarna för denna tradition räknas Vygotsky, Leontiev och Luria. Deras verksamhet sträcker sig över flera decennier i det dåtida Sovjetunionen, men det är först under 1980-talet som deras bidrag till den verksamhetsteoretiska teoribildningen börjar nå ut till den anglosaxiska delen av världen (Roth & Lee, 2007). I slutet av 1980-talet vidareutvecklar Engeström teorin genom att sammanföra Vygotskys teoretiska rön och Leontievs struktur för verksamhet i en övergripande modell.

Den fortsatta presentationen tar upp några idéer som har stått i centrum vid utvecklingen av verksamhetsteorin. Eftersom kopplingen mellan verksamhetsteorin och matematikundervisningen är väsentlig för avhandlingen, är avsikten också att presentera exempel som visar på sådana förbindelser.

Vygotskys teori om mediering

Den ryske psykologen och pedagogen Vygotsky lade grunden till verksamhetsteorin genom att närma sig frågor om människans sociala och psykologiska utveckling på ett nytt sätt. Han var mycket kritisk till den

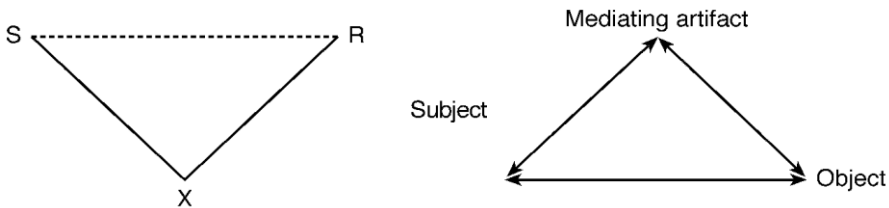
¹⁸ I engelskspråkig litteratur används benämningen Cultural-Historical Activity Theory (CHAT) (se t. ex. Roth & Lee, 2007).

3. Teoretiska utgångspunkter

samtida psykologiska forskningen som höll fast vid att mentala funktioner och känslor måste studeras var för sig. Vygotsky hävdar att detta är en av de största svagheter inom den traditionella psykologin eftersom

it [made] the thought process appear as an autonomous flow of "thoughts thinking themselves," segregated from the fullness of life, from the personal need and interests, the inclinations and impulses of the thinker. (Vygotsky, 1934/1986, s. 10)

Vygotsky (1934/1986) framhåller att mänskligt beteende är mycket mer komplext än det som beskrivs med den enkla modellen S (stimuli) → R (respons). Istället förordar han en modell som visar att stimuli förmedlas genom kulturella verktyg som till exempel språk och symboler. Detta skeende, som Vygotsky illustrerar med hjälp av den vänstra modellen i figur 2 nedan, benämner han "mediated act", medierad handling (Vygotsky, 1978, s. 40). De kulturella verktygen är följaktligen medierande redskap eller artefakter (Engeström, 2001; Säljö, 2000), det vill säga bokstäver, siffror etc.. I den vänstra modellen i figuren representeras de kulturella verktygen, av X. Vygotsky (1934/1986) menar att människan utvecklas och formas genom deltagande i kulturella aktiviteter och med stöd av de hjälpmedel som här erbjuds. Människan har förmåga att inte bara reagera på stimuli utan också aktivt medverka för att bearbeta och använda dem som redskap (Säljö, 2000; Vygotsky, 1934/1986). Vygotskys medierande triangel som den vanligtvis visas med subjekt, objekt och medierande artefakt (Engeström, 2001), kan ses till höger i figuren nedan.



Figur 2. Vygotskys modell över medierad handling till vänster och den omarbetade versionen till höger (hämtad från Engeström, 2001, s. 134)

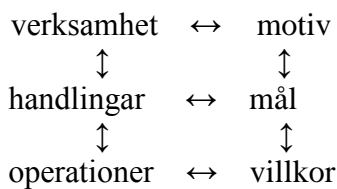
Idén om att fysiska såväl som språkliga redskap medierar verkligheten för människor i konkreta verksamheter är alltså central och enligt Säljö (2000) det som är mest utmärkande för den sociokulturella teorin i jämförelse med andra teorier för lärande.

Leontievs verksamhetsteori

Med utgångspunkt från Vygotskys teori om mediering utvecklar senare hans student och kollega Leontiev en teori där begreppet verksamhet är centralt. I likhet med Vygotsky betonar han att människan utvecklas mentalt genom sin praktiska verksamhet. ”Det är ju processerna i subjektets verksamhet, som alltid först är yttre och praktiskt och därefter också får formen av inre verksamhet, medvetandets verksamhet” (Leontiev, 1986, s. 33).

Genom sitt arbete uppmärksammade Leontiev (1986) att människans fysiska och mentala verksamhet har en gemensam struktur. Den yttre processen, externaliseringsprocessen, är av praktisk karaktär. Den omfattar människans användning och tillverkning av verktyg, artefakter, vilket i sin tur hjälper människan att påverka och förändra sin omvärld. Denna yttre process övergår i en inre verksamhet, internaliseringsprocessen, som är en mental process. Genom denna kan människan, tack vare sina erfarenheter och påverkan från omvärlden, förändras och utvecklas. Översatt till en skolkontext kan den yttre processen motsvaras av lärares och elevers handlingar under matematiklektionerna. Handlingarna resulterar i utveckling, till exempel i form av elevernas matematiklärande. Övergångarna mellan de yttre och inre processerna innebär att människan och omvärlden befinner sig i ett ständigt växelspel, vilket Leontiev ofta återkommer till i sina skrifter. Det är detta dialektiska förhållande, vilket har uppmärksammats tidigare i texten genom Berthén (2007), som ger förutsättningar till förändring och utveckling.

Leontiev har utarbetat en hierarkisk struktur för mänsklig verksamhet, med utgångspunkt i att all verksamhet karaktäriseras av att den drivs av vissa behov hos subjektet. I hans teoretiska modell nedan struktureras mänsklig verksamhet i tre nivåer, där olika drivkrafter styr verksamheten på respektive nivå.



Figur 3. Leontievs modell för verksamhetsstruktur (efter Leontiev, 1986)

Verksamhetsnivån

Högst upp i hierarkin finns den motivstyrda verksamheten, där det bakomliggande behovet utgör själva drivkraften till processen. Enligt Leontiev (1986) kan behovet vara såväl materiellt som ideellt, bara finnas i

3. Teoretiska utgångspunkter

fantasin eller som en tanke. I en verksamhet kan flera olika motiv ingå, dels samhällets och dels individernas personliga motiv. De individuella motiven stämmer inte alltid överens med motiven för verksamheten som helhet.

Vi har tidigare konstaterat att undervisning kan uppfattas som en verksamhet. Motiven för matematikundervisning finns uttryckt i kursplanen för Lgr11. Bakom dessa motiv finns behovet hos samhällets individer att utveckla matematikkunskaper som är nödvändiga för att klara skola, vardagsliv och att leva i ett demokratiskt samhälle (Löwing & Kilborn, 2002). Det har framkommit i inledningskapitlet att nyttoaspekten har varit och är det dominerande motivet för matematikundervisningen (Pettersson, 2003; Wyndhamn, 1997) men det har också visat sig, framför allt i den senaste läroplanen, att det kan finnas andra motiv av mer individuell karaktär, för att lära matematik. Några exempel som kommer till uttryck i Lgr11 är att det kan ge tilltro till den egna förmågan, utveckla individens intresse för matematik och ge estetiska upplevelser.

Knutagård (2002) ger ett exempel för att tydliggöra hur motivet för skolverksamhet kan skilja sig, dels mellan skola och elever, dels eleverna sinsemellan. Skolans, det vill säga verksamhetens motiv är att alla ska vilja lära sig, få kunskap och betyg för att även fortsätta studera. Elevernas motiv för att gå till skolan kan vara alltifrån att lära sig, till att komma hemifrån, träffa kamrater eller helt enkelt att vara tvungen att gå i skolan.

Handlingsnivån

På nästa nivå i Leontievs struktur finns handlingarna. De målinriktade handlingarna är de viktigaste beståndsdelarna i de enskilda mänskliga verksamheterna (Leontiev, 1986). Att detta är ett utmärkande drag i verksamhetsteorin uppmärksammas också av Roth och Lee.

An activity is realized through concrete *actions*, which are directed towards goals that are framed by individuals; in CHAT, actions and the goals they accomplish are the dominant features in human consciousness during active engagement with the world. (Roth & Lee, 2007, s. 201)

Handlingen, som kan vara en eller flera, individuell eller kollektiv, är en process som alltså bestäms av uppfattningen om det resultat som ska uppnås. Det finns därmed ett medvetet mål som handlingen är inriktad mot. Utöver den intentionella aspekten (vad handlingen ska uppnå), har handlingen också en operativ aspekt (hur det ska uppnås), som regleras av de givna villkoren (Leontiev, 1986). Genom att överföra denna tankegång på verksamheten matematikundervisning borde den kunna ge upphov till följande resonemang.

3. Teoretiska utgångspunkter

Matematikundervisningen realiseras genom de handlingar som lärare och elever utför under lektionerna. Lärarens gemensamma genomgångar i klassen består av en mängd konkreta handlingar som tillsammans utgör matematikundervisning. Andra handlingar är när elever arbetar enskilt med uppgifter i sina matteböcker. Utifrån lärarens perspektiv är målet (den intentionella aspekten) för dessa handlingar att eleverna ska utveckla särskilda kompetenser med avseende på ett specifikt matematiskt innehåll, vilket är formulerat i kursplanen eller finns i läroböckerna och/eller i skolornas lokala måldokument. För en elev däremot, kan ett mål vara att bli klar med matematikboken.

Det framkommer alltså att handlingar som är till synes identiska kan ha olika mål, samtidigt som olika slags handlingar kan ha samma mål (Leontiev, 1986). Det betyder att matematikundervisning kan se helt olika ut i två klasser där målet är detsamma. Det innebär också att två lärare kan välja samma arbetsform (den operationella aspekten), exempelvis att eleverna löser matematikuppgifter i grupp, med avsikten att handlingarna ska resultera i två olika mål. För den ena läraren kan målet vara att eleverna ska utveckla sin förmåga att kommunicera matematik genom att samtala om och argumentera kring frågeställningar och beräkningar, medan den andra läraren avser att handlingarna ska medverka till att eleverna blir säkrare på att formulera och lösa problem med hjälp av matematik.

Motiv – mål – handlingar – resultat

En verksamhet kan enligt Leontiev (1986) inte vara utan motiv, men den verksamhet ”vars motiv är dolt både subjektivt och objektivt sett” (s. 158) kallas omotiverad verksamhet. En tolkning av detta kan vara att om motivet fördunklas försvinner också kopplingen mellan resultat och motiv, vilket kan belysas med hjälp av exemplet som följer.

Berthén (2007) pekar på handlingarnas centrala funktion i Leontievs verksamhetsstruktur då hon poängterar att ”det är de målinriktade handlingarna som ger verksamheten dess innehåll och funktion – utan handlingar ingen verksamhet” (s. 50). Handlingarna bestäms enligt Leontiev (1986) av uppfattningen om resultatet som ska uppnås. I skolan kan formella strukturer, styrande regelverk och ekonomiska ramar medverka till att motivet för skolverksamheten fördunklas. Om det förväntade resultatet inte ses i relation till motivet kan det påverka uppfattningen om resultatet, vilket i sin tur inverkar på handlingarna. I matematikundervisningen kan det innebära att läraren väljer handlingar till exempel utifrån hur de nationella proven är utformade eller för att det är bestämt att alla lärare på lågstadiet måste använda en viss lärobok. För eleverna kan det då få till följd att de uppfattar att matematikundervisning är att arbeta i en matematikbok eller öva inför

3. Teoretiska utgångspunkter

prov. Handlingarna under matematiklektionerna har därför betydelse för elevernas kunskapsutveckling, direkt och indirekt. Den direkta inverkan visar sig som resultat uttryckt i olika sorters matematikkunnande. Indirekt kan det påverka elevernas matematiska kunskap då handlingarna som läraren väljer också illustrerar vad matematikundervisning kan vara och följaktligen också vad det innebär att lära sig och kunna matematik.

Svårigheten med handlingarnas precision i relation till målet aktualiseras också av Roth och Lee (2007). I det medvetna valet av handlingar för att uppnå ett visst mål kan individen låta sig styras av det bakomliggande motivet för verksamheten. Det kan bidra till att de valda handlingarna inte alltid är helt lämpliga med avseende på resultatet som dessa ska leda fram till. Av tidigare textavsnitt framgår att matematikundervisningen länge har dominerats av ett nyttotänkande, men att numera lyfts exempelvis tillitsskapande och möjlighet att väcka intresse för matematik också fram som motiv för undervisning i matematik. Andra bakomliggande motiv av mer överordnad karaktär kan vi finna i avsnittet om övergripande mål och riktlinjer i Lgr 11.

Skolan ska ansvara för att eleverna inhämtar och utvecklar sådana kunskaper som är nödvändiga för varje individ och samhällsmedlem. Dessa ger också grund för fortsatt utbildning.

Skolan ska bidra till elevernas harmoniska utveckling. Utforskande, nyfikenhet och lust att lära ska utgöra en grund för skolans verksamhet. (Lgr11, s. 13)

Motiven som uttrycks i texten kan ge berättigande för olika sorters handlingar i undervisningen, vilket också gäller undervisningen i matematik. Det kan bland annat leda till att handlingar som har sociala mål i fokus väljs istället för handlingar där matematiska förmågemål står i centrum.

Operationsnivån

Operationerna är placerade på den lägsta nivån i Leontievs verksamhetsstruktur. Dessa är oftast medvetna handlingar som senare har automatiserats och därmed blivit omedvetna eftersom de utförs rutinmässigt av människor. Med tiden övertas dessa handlingar av maskiner (Leontiev, 1986). Engeström uttrycker detta som att ”Tools are crystallized operations” (Engeström, 1987 s 67). I matematikundervisningen kan operationer motsvaras av beräkningar med hjälp av standardalgoritmer, exempelvis i subtraktion. En sådan beräkning kan utföras som en automatiserad handling,

3. Teoretiska utgångspunkter

det vill säga en operation, förutsatt att ett villkor är uppfyllt. Villkoret är att individen i det här fallet besitter goda tabellkunskaper inom det aktuella talområdet. Annars kan inte handlingen betraktas som en operation.

Ett exempel på en maskin som övertagit människors handlingar är miniräknaren, som kan utföra beräkningar med stora tal där algoritmer tidigare brukade användas. Genom att använda miniräknare minskar behovet av att behärska algoritmer. Därmed kan mer utrymme ges åt andra kunskapsformer i undervisningen. Ett sådant förhållningssätt visar sig både i den föregående kursplanen (Skolverket, 2000, 2008c) och i Lgr11 där problemlösningsförmåga, begreppsförmåga, metod- och beräkningsförmåga, resonemangsförmåga och kommunikationsförmåga lyfts fram. Trots detta är det, som vi redan sett, procedurkunnandet som är i fokus för matematikundervisningen i stort, enligt Skolinspektionens rapport (2009).

Av texten ovan framgår att det pågår en ständig rörelse mellan de olika nivåerna i verksamhetsstrukturen och det är också på det sättet som Leontiev (1986) menar att verksamhet ska uppfattas. Det dialektiska förhållandet mellan de olika nivåerna är förutsättningen för verksamhetens förändring och utveckling.

Individuell eller kollektiv verksamhet?

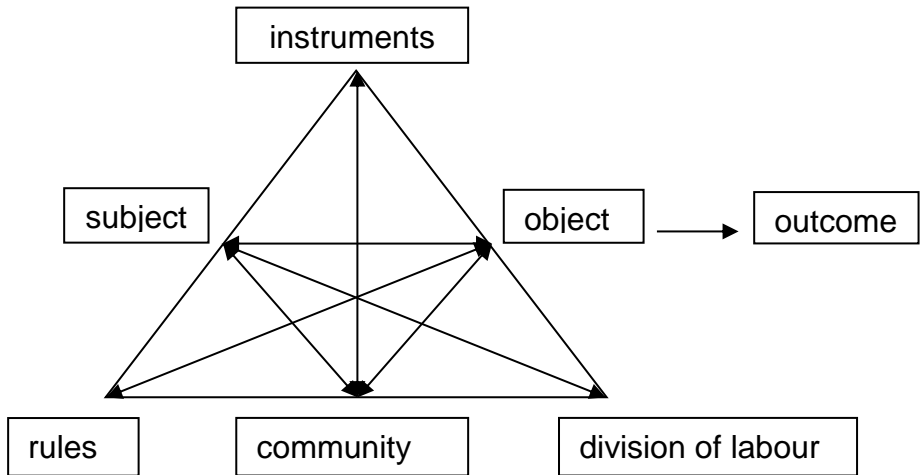
Det har hittills framkommit att Vygotskys teori om mediering utgör grunden för utveckling av verksamhetsteorin. Hans modell innehåller en begränsning då den bara beskriver mediering på individnivå. Leontiev vidareutvecklar Vygotskys teori, vilket utmynnar i en teoretisk struktur med verksamheten som utgångspunkt. Att Leontiev skiljer mellan kollektiv verksamhet och individuell handling har enligt Engeström och Miettinen (1999) medverkat till att hans utveckling av verksamhetsteorin fått stor betydelse.

Engeströms verksamhetsteori

I utvecklingen av verksamhetsteorin utgör Vygotskys och Leontievs teorier den första respektive andra generationens forskningsbidrag (Engeström, 2001). Bakom framväxten av den tredje generationen står Engeström. I sin avhandling pekar Engeström (1987) på att Vygotskys modell över medierad handling ger en alltför begränsad bild av verkligheten. Han instämmer även med Leontiev, som i texter publicerade 40 år tidigare, påpekar att modellen inte heller tar fasta på att mänsklig verksamhet innehåller samarbete och aspekter av social karaktär. Engeströms arbete resulterar i en modell, ”verksamhetstriangeln” (figur 4), där han i en övergripande modell sammanför Vygotskys modell för mediering och Leontievs generella struktur för verksamheter. Den övre delen av triangeln kan vi känna igen som

3. Teoretiska utgångspunkter

Vygotskys modell över medierad handling (Vygotsky, 1978). Aktörerna i verksamheten påverkas ständigt och ömsesidigt av varandra genom mediering (Cole & Engeström 1993; Engeström 1987, 1998). Den nedre delen av triangeln representerar denna kollektiva mediering av verksamheter. Jämfört med Vygotskys ursprungliga modell utökas här kontexten genom tillkomsten av nya medierande faktorer för att möjliggöra en bättre analys av handlingar (Engeström; 1987; Goodchild, 2001; Linikko, 2009).



Figur 4. Strukturen för den mänskliga verksamheten (Engeström, 1987, s. 78).

I Engeströms modell representerar *subjektet* individer eller grupper som realiserar verksamhetens motiv till ett resultat genom sina handlingar. *Objektet* är det som ska förändras, eller med Engeströms ord det "råmaterial" eller "problemområde" som verksamheten är riktad mot (Engeström, 1987). Linikko (2009) menar att det är själva studiens fokus som avgör vad som definieras som subjekt och med ett annat fokus kan detta subjekt definieras som objekt. Det innebär att både lärare och elever i studien skulle kunna definieras som subjekt i relation till det gemensamma objektet, det matematikkunnande som eleven ska utveckla. Med lärarens undervisning i fokus för forskarens frågeställningar intar läraren rollen som subjekt. För läraren som subjekt kan eleven ses som ett förkroppsligande av själva motivet för matematikundervisningen. För eleven som subjekt framträder objektet "matmatikkunnande som ska utvecklas" genom de aktiviteter och uppgifter som visar sig genom olika handlingar under matematiklektionerna och som medverkar till att skapa en bild av vad det innebär att kunna matematik. Om undervisningen främst består av enskilt arbete i matematikboken kan detta exempelvis bidra till att eleven ser

3. Teoretiska utgångspunkter

procedurkunnande som liktydigt med matematisk kunskap. Genom att eleverna bland annat får lösa uppgifter tillsammans, föra matematiska resonemang och tvingas argumentera för sina tankar kan det bli synligt för eleverna att matematisk kunskap omfattar mer än bara procedurkunnande.

Gemenskap (community) i modellen ovan omfattar ett antal individer och/eller grupper, vars objekt för verksamheten är detsamma som för subjektet. En grupp som delar samma objekt eller motiv i verksamheten kan även liknas vid en praktikgemenskap så som den presenteras av Wenger (1998). Den utmärks av att medlemmarna, genom sin medverkan i en kollektiv verksamhet, bland annat utvecklar gemensamma regler, rutiner och verktyg.

De medierande handlingarna som utförs för att realisera motivet sker i relation till medierande faktorer. I modellen utgörs dessa faktorer av instrument, regler och arbetsdelning. I triangelbasens vänstra hörn finns *regler* (rules). Detta syftar på överenskommelser och regleringar, såväl uttryckta som underförstådda, det vill säga både väl synliga och dolda. De senare kan ta sig uttryck i olika normer som påverkar individens handlingar inom verksamhetssystemet. Ett exempel på detta är sociomatematiska normer (se kapitel 2). De synliga visar sig bland annat genom olika praxis under matematiklektionerna.

I det motsatta hörnet av triangelns bas finns faktorn *arbetsdelning* (division of labour). Den kan betraktas både horisontellt och vertikalt, där det förstnämnda syftar på uppdelningen av arbetsuppgifter inom gemenskapen. Den vertikala aspekten hör ihop med frågor om makt och status (Engeström, 1987). I klassrummet förekommer olika arbetsformer där elever arbetar på egen hand, i par eller grupp eller deltar i gemensam genomgång, vilket är exempel på horisontell arbetsdelning. Att lärare och elever utför olika sorters handlingar, som exempelvis att läraren ställer frågor och eleven svarar eller eleven löser uppgifter och läraren rättar, kan relateras till lärares och elevers olika maktpositioner och därigenom till den vertikala aspekten. I avhandlingen uppmärksammas däremot endast den horisontella aspekten, det vill säga arbetsdelning betraktas utan hänsyn till hierarkiska strukturer.

Instruments, som finns i toppen av triangeln, motsvaras av språk, symboler och andra mentala och fysiska redskap. Ett annat ord för detta är, som tidigare nämnts, artefakter. Det har också framkommit att teorin om mediering genom artefakter är en grundpelare i verksamhetsteorin. Artefakter är kulturellt utvecklade redskap i form av till exempel verktyg och symboler (Vygotsky, 1978; Säljö, 2000). Vygotsky betonar skillnaden mellan dessa två grupper genom att också benämna dem fysiska respektive psykologiska verktyg. Till de senare räknar han språk, olika system för räkning, algebraiska symboler, skriftspråk, men även diagram och kartor mm.

3. Teoretiska utgångspunkter

Engeström (1987) drar en parallell mellan Vygotskys uppdelning av artefakter och idén om primära och sekundära artefakter så som den uttrycks hos Wartofsky (1979). De primära motsvaras av Vygotskys fysiska artefakter och används i konkreta handlingar. Engeströms (1987) mening är att Vygotsky ger en något ensidig bild av psykologiska verktyg, eftersom denne lägger tonvikt på symboler och ords betydelse, och han föredrar därför Wartofskys vidare definition av sekundära artefakter.

secondary artifacts are those used in the preservation and transmission of the acquired skills or modes of action or praxis by which this production [the production of the means of existence] is carried out. (Wartofsky, 1979, s. 202)

Wartofsky använder också en annan benämning för sekundära artefakter, ”reflexive embodiments” (1979, s. 201), vilket antyder att mentala aktiviteter finns inbyggda i de sekundära artefakterna. En motsvarighet till detta uttrycker Linikko (2009) då han skriver att ”Den mänskliga förmågan att t. ex tillägna och använda sig av ett språk, leder till att språket blir en andra gradens stimuli” (s. 51). Sekundära artefakter tar sig olika uttryck och kan kommuniceras muntligt eller visuellt, eftersom dessa representationer ”are ’not in the mind’, as mental entities They are externally embodied representations” (Wartofsky, 1979, s. 202). Med utgångspunkt från vårt talsystem som exempel på en sekundär artefakt, kan vårt sätt att skriva tal illustrera den mentala aktivitet som finns inneboende i det symboliska uttrycket. Talet 35 synliggör en mental aktivitet som kan relateras till att 35 innebär tre tiotal och fem ental.

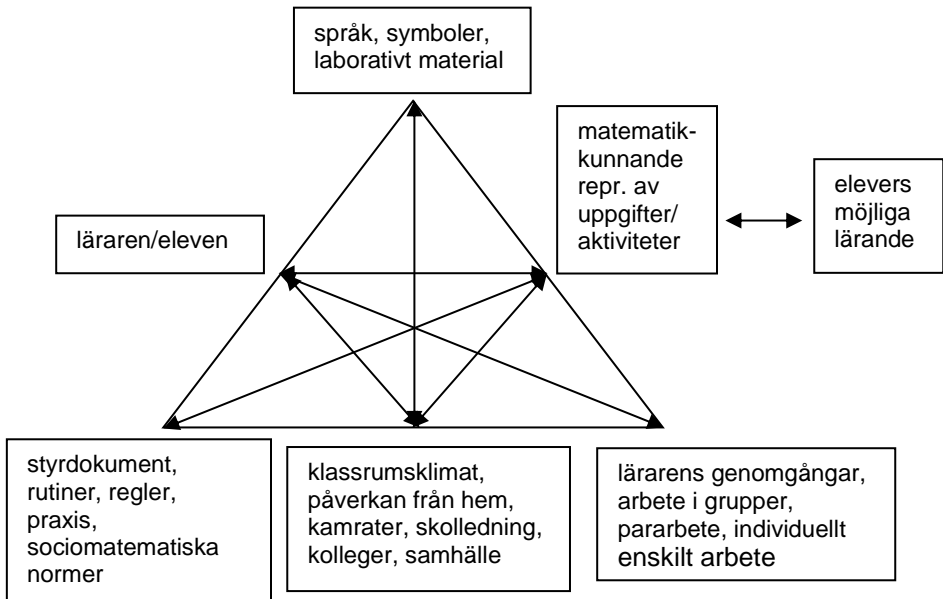
Utanför själva modellen över den mänskliga verksamheten har Engeström placerat *resultatet* (outcome). Med hjälp av de målinriktade handlingarna kan resultatet uppnås. Resultatet uppkommer till följd av att objektet förändras. Resultatet som kan förväntas uppkomma till följd av de målinriktade handlingarna i matematikundervisningen är ett förändrat och utvecklat matematikkunnande hos eleverna.

Engeström (1998) liknar strukturen för verksamheter vid ett isberg, där toppen av isberget representeras av mediering via artefakter. Utformningen av verksamhetstriangeln illustrerar också att i ”botten på isberget” återfinns regler och arbetsdelning, som är mediatorer av social karaktär. Genom Engeströms modell kan aktörernas handlingar fokuseras i relation till både synliga och mindre synliga medierande faktorer i verksamheten.

Mitt analysverktyg

De konkreta vardagsverksamheterna bildar utgångspunkt för verksamhetsteoretiskt analysarbete. Matematikundervisning utgör en vardagsverksamhet där elever och lärare ingår. I enlighet med Leontievs synsätt (1986), kan denna verksamhet endast synliggöras genom att lärares och elevers handlingar och relationerna dem emellan analyseras.

Analysverktyget som används i studien utgår från Engeströms modell för verksamhetsstruktur (se figur 4 ovan). Linikko (2009) har inspirerat till en bearbetning av modellen. En anpassning till verksamheten matematikundervisning ger modellen följande utseende, som jag menar kan illustrera ett matematikklassrum:



Figur 5. En verksamhetsstruktur över matematikundervisning (efter idé från Linikko, 2009, s. 60)

Av modellen ovan framgår att verksamheternas aktörer i studien är lärare och elever. Både lärare och elever kan definieras som subjekt. Vem som intar rollen som subjekt avgörs genom frågeställningens fokus. Objektet som lärares och elevers handlingar riktas mot, motsvarar det matematikkunnande som eleven ska utveckla. I modellen är det representerat av den uppgift eller matematikaktivitet som är föremål för lärares och elevers handlingar, vilket

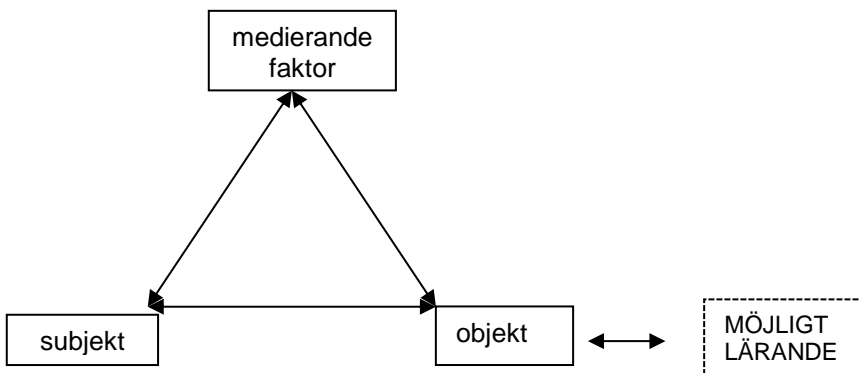
3. Teoretiska utgångspunkter

kan ha olika innebörd beroende på om det är subjektet läraren som uppmärksammas eller om det är subjektet eleven.

Analysen riktar alltså uppmärksamheten mot lärares och elevers handlingar. Det är alltså processen i matematikundervisningen som fokuseras, det vill säga det som sker under matematiklektionerna. Handlingarna medieras genom olika faktorer, vilka i Engeströms modell sammanfattas som artefakter, regler, gemenskap och arbetsdelning. Rektanglarna i figuren innehåller exempel på vad dessa faktorer kan utgöras av.

För att elevernas befintliga matematikkunnande ska utvecklas måste handlingarna skapa förutsättningar för detta. Förändringen av objektet, som Engeström (1987) skriver om, kan ske genom handlingarnas indirekta påverkan på objektet. Lärares och elevers handlingar står i direkt förbindelse med de uppgifter och olika matematikaktiviteter som är föremål för dessa. Handlingarna utövas därmed indirekt på objektet, det vill säga elevens befintliga matematikkunnande. I denna studie innebär det att handlingarna i matematikundervisningen kan leda till att elevernas matematikkunnande utvecklas, under förutsättning att handlingarna som lärare och elever utför kan ge möjlighet till detta.

Handlingarna i förhållande till relationen subjekt – objekt – medierande faktor är alltså i fokus för analysen. I modellen över verksamheten matematikundervisning ovan (figur 5) utgörs den stora triangeln av mindre trianglar, där denna relation representeras med utgångspunkt från de medierande faktorerna artefakter, regler, gemenskap och arbetsdelning. I modellen återfinns dessa i noderna, det vill säga där två triangelsidor möts, vilket motsvarar de mindre trianglarnas ändpunkter. En generaliserad modell över hur handlingar medieras via faktorer illustreras i figuren nedan.



Figur 6. Generaliserad modell över medierade handlingar

3. Teoretiska utgångspunkter

Modellen ger möjlighet att analysera handlingar utifrån minst två perspektiv, med antingen läraren eller elever som subjekt. De dubbelriktade pilarna illustrerar att det råder ett dialektiskt förhållande mellan den yttre processen (handlingarna) som analyseras, och den inre processen (individens förändring och utveckling). Resultatet av lärares och elevers handlingar, utförda via medierande faktorer, illustreras i figuren som möjligt lärande. Detta presenteras främst i termer av olika aspekter av matematikundervisning.

Genom att utgå från modellen ovan och de fyra typer av medierande faktorer som är aktuella i Engeströms modell över verksamhetssystem kan analysverktyget utgöras av fyra olika modeller. Utöver modellen med (a) handlingar via regler, utgörs analysverktyget således av ytterligare tre modeller, (b) handlingar via artefakter, (c) handlingar via gemenskap och (d) handlingar via arbetsdelning. Varje modell kan dessutom leda till minst två olika analyser beroende på vad som är i fokus, dvs. vad som definieras som subjekt, läraren eller eleverna.

Avsikten med att använda analysverktyget som beskrivits ovan är att komma fram till vilket matematiskt kunnande, uttryckt i olika kompetenser, som lärares och elevers handlingar i relation till de medierande faktorerna kan ge upphov till. Hiebert (2003) framhåller att det är möjligt att på goda grunder förutsäga vad elever kan komma att lära sig, genom att studera vad de ges möjlighet att lära. Med utgångspunkt från analysarbete som fokuserar lärares och elevers handlingar under matematiklektioner, är det därför fullt rimligt att dra slutsatser om vad som är möjligt lärande för eleverna i de olika verksamheterna i fråga om matematisk kompetens.

Sammanfattning

Verksamhetsteorin utgör avhandlingens teoretiska ram. Teorin, har fått ett märkbart genombrott under de senaste två decennierna och förekommer inom ett flertal forskningsområden, däribland pedagogik. Teorins grundare, där Vygotsky, Leontiev och Luria hör till de främsta, inspirerades av den kulturhistoriska skolan som växte fram i Ryssland på 1920-talet. Centrala tankar som utgör grunden i verksamhetsteorin är att verksamhet existerar i form av mänskliga handlingar och att vårt handlande kan förklaras och förstås i relation till de verksamheter där vi ingår. Teorins framväxt kan beskrivas i tre steg där Vygotskys teori om mediering genom artefakter utgör grunden för de två efterföljande. I nästa steg utvecklar Leontiev (1986) en hierarkisk modell som strukturerar mänsklig verksamhet i tre nivåer, där olika drivkrafter är styrande. Ett dialektiskt förhållande råder mellan de olika nivåerna, vilket leder till att verksamheten kan utvecklas och förändras. Engeström (1987) tar ytterligare ett steg då han sammanför Vygotskys

3. Teoretiska utgångspunkter

modell över medierad handling med Leontievs struktur över verksamhet i sin modell, ”verksamhetstriangeln”. Genom Engeströms utveckling av teorin tillkommer nya medierande faktorer, som möjliggör en förbättrad analys av verksamheten med utgångspunkt från aktörernas handlingar. Engeströms modell ligger därför till grund för studiens analysverktyg.

4. Metod

Kapitlet inleds med en presentation av den metodologiska ansatsen. Det följs av en översikt som visar tidsplanen för undersökningen och därefter redovisas de urvalsfrågor som har uppmärksammats. I avsnittet om undersökningens genomförande behandlas arbetet på fältet, transkriberingsarbetet samt tillvägagångssätt för analysarbetets genomförande. Avsnittet därpå redogör för kvalitetsaspekter som har uppmärksammats i arbetet samt hur forskningsetiska regler har beaktats.

Metodologiska utgångspunkter

Ett övergripande syfte för avhandlingen är att studera matematikundervisning på lågstadiet. Studiens kärnfrågor gäller vad som kännetecknar lärares och elevers handlingar i matematikundervisningen i några olika klassrum då undervisningsinnehållet är skriftliga metoder för addition och subtraktion (med tiotalsovergång) samt vilka förutsättningar för lärande som därmed skapas. För bearbetning av denna och liknande frågeställningar kan kvalitativ metod vara ett lämpligt verktyg eftersom den används för att identifiera och bestämma betydelsefulla egenskaper hos empiriska fenomen (Starrin, 1994). I sökandet efter drag som kan vara utmärkande för undervisningen i olika matematikklassrum riktas intresset mot lärares och elevers handlingar under matematiklektionerna. I detta finns likheter med en naturalistisk tradition, vilket är en forskningsinriktning där studier av människors samspel i naturliga situationer står i centrum i strävan efter att skapa förståelse kring detta (Bryman, 2011). Här betyder det att beskrivningar som presenteras i studiens resultatkapitel utgår från data som har samlats i autentiska situationer. En definition av det sistnämnda ger Granström (2004), som menar att det som är karaktäristiskt för en autentisk situation är att ”...interaktion mellan människor *uppstår eller pågår utan forskarens eller psykologens medverkan*” (s. 290).

Undersökningen har genomförts som en fältstudie eftersom studien riktar uppmärksamheten mot vad elever och lärare gör i matematikklassrummet. Fältstudien ger forskaren möjlighet att studera människor och deras handlingar i vardagliga kontexter (Bryman, 2011; Hammersley, 1998). Datasamlingen utgörs av deltagande observation som till övervägande del har genomförts i form av videoinspelningar parallellt med att också ljudupptagningar har gjorts. Även fältanteckningar ingår i det empiriska materialet, bland annat som dokumentation av det fåtal lektioner som inte har

4. Metod

filmats. I en del litteratur förekommer fältarbete och deltagande observation som synonyma begrepp (Fangen, 2005). I detta arbete används dock begreppet deltagande observation endast som benämning på själva datainsamlingsmetoden.

Tre frågeställningar utgör studiens kärna. Genom de två första avser studien att uppmärksamma och identifiera utmärkande drag som framträder i matematikundervisningen i olika klassrum och som blir synliga genom (a) dels elevers och (b) dels lärares handlingar. Lindblad och Sahlström (2001) menar att detaljerade studier av interaktion kan synliggöra vardagslivets komplexitet eftersom denna speglas genom individens interaktion. För elever och lärare utgör matematiklektionerna en del av vardagen.

Den tredje frågeställningen riktar intresset mot (c) vilken sorts matematikkunnande som undervisningen i de olika klassrummen kan skapa förutsättningar för i mötet med eleverna, det vill säga vad som är möjligt lärande. Med hjälp av analysredskap från verksamhetsteorin bearbetas frågeställningar som särskilt fokuserar relationen matematikundervisning – möjligt lärande. Föregående kapitel har presenterat verksamhetsteorin, som utgör teoretisk ansats för arbetet. Samma kapitel innehåller också en beskrivning av analysredskapet.

Bearbetningen av frågeställningarna ovan har utmynnat i en resultatredovisning som utgörs av kapitel 5-8. I vart och ett av dessa kapitel presenteras ett matematikklassrum, respektive en typ av undervisningsverksamhet. Varje kapitel består alltså av två huvuddelar där matematikklassrummet beskrivs i den första delen. Dessa beskrivningar, där de två första frågeställningarna (a) och (b) varit vägledande, visar på de karaktäristiska drag i undervisningen som har kunnat urskiljas i det empiriska materialet. Detta är resultatet av det tidigare skedet av analysen, där det är tolkningen av vad materialet självt har visat, som har medverkat till att intressanta mönster har kunnat urskiljas. Man kan därför säga att analysarbetet som har lett fram till presentationen av de fyra matematikklassrummen har drivits av empirin. Ett sådant tillvägagångssätt är kännetecknande för en induktiv analys eller teorigenererande (Bryman, 2011; Hammar Chiriack & Einarsson, 2013) eller ”upptäckandets väg” som det också kallas (Patel & Davidson, 2003). Att stora delar av analysprocessen är empirinära betyder emellertid inte att analysen har genomförts helt utan inflytande från någon teori. Eftersom det inte verkar alldeles enkelt för forskaren att helt bortse från sin egen förförståelse kan en induktiv analys följaktligen inte betraktas som helt teorilös (Braun & Clarke, 2006).

Resultatet som presenteras i den andra delen av varje kapitel innebär att även den tredje frågeställningen (c) ges utrymme. Här har verksamhetsteorin legat till grund för analysarbetet och därigenom bistått med begrepp och

4. Metod

analysverktyg. Själva analysen har utgått från resultatkapitlens beskrivningar av de fyra matematikklassrummen. En analys som på detta sätt drivs framåt med hjälp av en teori kan betecknas som deduktiv eller teoriprovande (Bryman, 2011; Hammar Chiriac & Einarsson, 2013).

Tidsplan för undersökningen

Den empiriska undersökningen genomfördes enligt följande plan:

2009	mars	Förfrågan om deltagande skickas ut till lärare och rektorer.
	april	Besök i klasserna, muntlig information till lärare och elever
	april-maj	Skriftlig förfrågan till föräldrarna om samtycke
	april - maj	Genomförande av 5-minuterssamtal med lärare
	april - juni	Matematiklektioner videofilmas i klasserna (år 2)
	sept - dec	Observation av matematiklektioner Matematiklektioner videofilmas i klasserna (år 3)
2010		Transkriberingsarbete
2010- 2011		Bearbetning av det empiriska materialet
2011- 2013		Textproduktion

Urval

Ett centralt urval för denna studie är de deltagande klasserna, men även andra aspekter har kommit ifråga under urvalsprocessen. Hammersley och Atkinson (1995) nämner exempelvis tid som en viktig faktor att ta hänsyn till. Faktorerna nedan har legat till grund för de urval som har gjorts och har därmed varit aktuella under forsknings-processen. Det gäller

- undervisningsinnehåll
- klasser som deltagit i studien
- tidpunkter, både övergripande och på klassrumsnivå för genomförande av videofilmning

4. Metod

- d) antalet filmade och observerade lektioner i förhållande till de olika klasserna
- e) särskilda urval med hänsyn till videofilmning

I detta avsnitt redovisas urvalet med avseende på a) undervisningsinnehåll, b) klasser som deltagit i studien samt c) tankar bakom tidsplanen för videoinspelningarna i stort och tidpunkter för filmning på klassrumsnivå. Även klassernas lärare presenteras. Urvalsfrågor som hör ihop med d) antalet filmade och observerade lektioner, tas upp i avsnittet ”Fältarbete” där en översikt redovisas i tabell 4. Tillsammans med specifika frågeställningar som gäller videoanvändningen i studien behandlas slutligen i avsnittet Video e) specifika urval som videofilmningen har gett upphov till

Undervisningsinnehåll

Avhandlingen riktar uppmärksamheten mot undervisning av skriftliga räknemetoder för addition och subtraktion, framför allt när det gäller tiotalsövergång. Därför har endast lektioner med detta undervisningsinnehåll videofilmats. Att fokusera på undervisning som omfattar ett begränsat innehåll är ett medvetet val, eftersom undervisningsinnehållet är en viktig grund för undervisningens planering och därmed för de handlingar som utförs under lektionerna. I sammanfattningen av inledningskapitlet har detta tagits upp som den så kallade hur-frågan. Varför valet föll på addition och subtraktion med tiotalsövergång som undervisningsinnehåll har bland annat förklarats i avsnittet ”Aritmetik – ett omdiskuterat område i skolmatematiken”, även det i inledningskapitlet.

Urvalet av klasser

Undersökningen genomfördes i sex klasser från två olika kommuner. Gensvaret på min förfrågan om att medverka i denna studie var till en början ganska svagt. En förklaring till detta kan vara att lärare av tradition är ovana vid tanken på att bli filmade under lektioner (Skolverket, 2012a). Denna begränsade tillgänglighet bidrog till ett urval som närmast kan betecknas som ett *bekvämlighetsurval* (Bryman, 2011), då alla som var villiga att medverka i studien också fick möjlighet att göra det. Eftersom en del kontakter med ytterligare lärare togs genom besök på skolor som redan hade lämnat positivt besked förekom i viss mån även det som Bryman kallar *snöbollsurval*. De urvalsprinciper som har presenterats ovan motsvarar dem som vanligtvis tillämpas i en etnografisk undersökning (Bryman, 2011).

Resultatet som redovisas utgår i huvudsak från de videofilmade matematiklektionerna i fem av de sex klasser som från början ingick i

4. Metod

studien.¹⁹ Redan före sommaren blev det känt att ett lärarbyte skulle genomföras i en av klasserna inför trean. Den tilltänkta läraren tillfrågades om medverkan i projektet och lämnade positivt besked. Ett lärarbyte kan dock innebära att nya relationer måste byggas mellan lärare och elever. Det kan i sin tur innebära förändringar av de handlingsmönster som utvecklats i interaktionen mellan elever och en tidigare lärare. Den insamlade empirin kunde därmed bli svår att analysera och därför beslutades att inte använda något av det inspelade materialet från det aktuella klassrummet i det fortsatta forskningsarbetet.

De fem klasserna som medverkade i studien motsvarade varandra storleksmässigt med 24 eller 25 elever i varje klass. I fyra av klasserna ansvarade lärarna för undervisningen i samtliga teoretiska ämnen inklusive matematik. I en klass delade två lärare på all undervisning utom idrott. Den läraren som undervisade vid de lektioner som videofilmades hade huvudansvar för matematiken och undervisade de flesta av klassens lektioner i ämnet.

Medverkande lärare

Beskrivningen av de fem lärare som medverkar i studien bygger på information från ett kort samtal som fördes med var och en i början av studien. Det främsta syftet med samtalet var att få information om lärarnas utbildning och yrkeserfarenheter. Ofta ställdes frågorna till läraren i samband med att videofilmningen av den första matematiklektionen i klassen hade avslutats och eleverna hade gått ut på rast eller slutat för dagen. Samtalen dokumenterades med anteckningar för hand.

Nedan följer en kort presentation av de fem lärarna. Varje lärare betecknas med en romersk siffra. Samma beteckning återfinns i tabell 4 som anger antalet videofilmade och observerade lektioner i varje klass. Med hjälp av den romerska siffran kan varje klass kopplas samman med sin lärare.

Lärare I är utbildad ma/no-lärare 1-7 och har varit verksam lärare i 17 år.

Lärare II har utbildning som sv/so-lärare 1-7 med två års erfarenhet från arbete i år 1-3. Har undervisat i år 4-6 under närmare arton av sina tjugo år av yrkesverksamhet.

Lärare III är utbildad sv/so-lärare 1-7 sedan tio år tillbaka, men har skaffat sig formell behörighet att undervisa matematik i år 1-3.

¹⁹ I sin helhet består materialet av 24 videofilmade lektioner och 4 som endast observerats.

4. Metod

Lärare IV har genomgått utbildning till ma/no-lärare 1-7, men har under sina femton yrkesverksamma år främst arbetat i år 4-6.

Lärare V är utbildad lågstadielärare med närmare trettio år i yrket.

Av presentationen framgår att lärarna i studien har mellan tio och trettio års erfarenhet av att undervisa yngre elever. Alla utom Lärare II beskrev sig som formellt behöriga att undervisa matematik i år 1-3. Vid tidpunkten för samtalet med lärarna innebar det genomgången högskolekurs i tidiga skolårens matematikdidaktik med omfattningen 15 högskolepoäng, eller motsvarande.

Tidsperiod för datainsamling och tidpunkter för filmning

Datainsamlingen inleddes på vårterminen när eleverna gick i klass 2 och fortsatte under höstterminen då eleverna hade kommit till sitt tredje skolår. Valet av tidpunkt hör samman med att de flesta klasser arbetar intensivt med addition och subtraktion både med och utan tiotalsovergång under en stor del av denna period. Därtill kommer att elever och lärare under ett och halvt år har haft möjlighet att utveckla och etablera relationer och förhållningssätt i den gemensamma klassrumsmiljön. Enligt min bedömning har det betydelse för möjligheten att kunna urskilja utmärkande drag i de olika miljöerna, vilket är väsentligt för denna studie.

Ett annat urval som också har koppling till tiden är valet av tidpunkter för observationerna, det vill säga videofilmningen. Elevernas första möte med addition och subtraktion med tiotalsovergång brukar inträffa en bit in på höstterminen i år 2 när det gäller addition och följas av subtraktion under våren. Detta framgår av flera läromedel och stämmer även med egen erfarenhet. Samma innehåll återkommer sedan under hösten i år 3, men då oftast inom ett utvidgat talområde. För att få en så god inblick som möjligt i denna undervisning i de olika klasserna, har undervisningen så långt det var genomförbart observerats redan från första lektionen i varje klass, då detta innehåll togs upp. Ytterligare en aspekt av hur tidpunkterna valdes gäller lektionernas placering under skoldagen. En genomgång av klassernas schema visade att matematiklektionerna ofta är placerade på förmiddagen. För att få en så varierad bild som möjligt strävade jag därför efter att inte bara videofilma lektioner som låg först på dagen eller direkt efter en rast, Såväl Bryman (2011) som Hammersley och Atkinson (1995) framhåller vikten av att forskaren är noga med att göra sina observationer vid olika tider och dagar, för att inte riskera att dra slutsatser om företeelser som bara existerar vid en specifik tidpunkt.

Att kunna närvara vid varje lektion då det aktuella undervisningsinnehållet behandlades hade förstås varit önskvärt. Eftersom

4. Metod

tiden som fanns till förfogande för genomförandet av datainsamlingen var begränsad var inte detta möjligt. Trots detta har ett omfattande material genererats i och med att nästan alla lektioner som ingår i studien har videofilmats.

Undersökningens genomförande

I avsnittet beskrivs genomförandet i tre delar där den första omfattar fältarbetet. Inledningsvis redovisas hur kontakt skapades med fältet, vilket följs av en beskrivning av arbetet både före och i samband med videoinspelningarna i klassrummen. Inom ramen för fältarbetet tas också observatörsrollen upp, liksom även användningen av video som metod för datainsamling samt bruket av fältanteckningar i studien. Den andra delen utgörs av transkriberingsarbetet, som här redovisas tillsammans med en transkriberingsnyckel. I den tredje delen är arbetet med att analysera det empiriska materialet i centrum. En analysmodell presenteras tillsammans med redovisningen av analysprocessen. Beskrivningen avslutas med reflektioner över den egna processen under analysarbetet.

Tillträde till fältet

Med hjälp av information från kommunernas hemsidor skickades förfrågan om medverkan i studien via mail till rektorer och lärare, som var verksamma i år 2 vid kommunala skolor i två kommuner (bilaga 1). Så småningom hade svar inkommit från fyra lärare som ställde sig positiva till att delta. Ambitionen var att försöka etablera kontakt med sex klasser. Ett nytt mailutskick gjordes, men det gav inget resultat. Då togs istället på nytt kontakt med skolorna som redan hade tackat ja till att medverka, men också med några ytterligare skolor, för att därigenom få tillfälle att komma och presentera projektet för lärare som undervisade i år 2. Efter skolbesöken fanns det tillgång till sex klasser, vars lärare hade accepterat mitt önskemål om att få bedriva klassrumsforskning i deras närhet.

Fältarbete

Arbetet på fältet har bestått av deltagande observation under matematiklektioner i fem klasser, tillsammans med enstaka spontana samtal med klassernas lärare oftast efter lektionernas slut. Några veckor före första observationstillfället gjordes ett besök i respektive klass, då både elever och lärare informerades muntligt om att jag skulle videofilma deras matematiklektioner vid några tillfällen. Lärarna hade fått kännedom om detta redan i samband med att de inbjöds att delta. Till varje lärare överlämnades

4. Metod

också informationsbrev om studien med blanketter om förfrågan om elevers och föräldrars samtycke (bilaga 2). Vid ett andra besök samlades dessa blanketter in och då gavs också ytterligare information om videofilmandet. Frågor om hur vi skulle gå tillväga med elever som inte ville delta diskuterades och löstes på olika sätt i de två klasser där det var aktuellt. Dessa elever (två elever i vardera klassen) var antingen tillsammans med en annan lärare eller arbetade på egen hand i ett angränsande rum då klassens matematiklektioner videofilmades.

Inför lektionerna som skulle filmas under vårterminen, det vill säga den första inspelningsomgången, kom varje lärare och jag överens om lämplig tidpunkt för ett lektionstillfälle som skulle passa ihop med tiden då det aktuella undervisningsinnehållet skulle tas upp i klassen. I början av höstterminen kontaktades lärarna på nytt och jag fick ta del av deras terminsplaneringar för matematikundervisningen. Utifrån detta framtogs en plan för när lektionerna skulle filmas i de olika klasserna. Under terminen hölls kontinuerlig kontakt med lärarna och vid behov (t. ex då terminsplaneringen inte höll) justerades tiderna för videoinspelningarna. För att inte inverka på planeringen av matematikundervisningen hände det någon gång att en planerad videoinspelning fick ställas in. Några dagar före ett planerat filmningstillfälle kontaktades läraren via mail. En gång inträffade det dock att en lärare helt hade glömt att jag skulle komma, vilket inte hindrade att filmningen kunde genomföras som planerat. Genom att tillbringa ett flertal lektioner i de olika klassrummen fick jag en god inblick i de olika miljöerna. Detta har bidragit till min uppfattning att de videofilmade lektionerna är exempel på matematiklektioner hämtade från en skolvardag och inte några uppvisningslektioner.

Det insamlade datamaterialet utgörs till största delen av de videofilmade lektionerna. Fyra lektioner har inte videofilmats. Dessa lektioner ingick i en separat observationsstudie som genomfördes i två av de deltagande klasserna under höstterminen när eleverna befann sig i klass 3. Observationerna genomfördes under matematiklektioner med ett annat undervisningsinnehåll jämfört med de filmade lektionerna. Dokumentation gjordes, dels med hjälp av ett observationsschema som utformats i förväg, dels i form av fältanteckningar. I denna studie har endast fältanteckningarna från den mindre observationsstudien använts i analysarbetet. Dessa har här kunnat ge stöd åt företeelser som redan har visat sig vid analysen av det empiriska materialet från videoinspelningarna. Hur fördelningen ser ut när det gäller antalet matematiklektioner som videofilmats eller enbart observerats i förhållande till de fem deltagande klasserna framgår av tabellen nedan.

4. Metod

Tabell 4. Antalet lektioner som videofilmats eller observerats i respektive klass under vt i klass 2 och under ht i klass 3.²⁰

Klass	Videofilmade lekt. vt klass 2	Videofilmade lekt. ht klass 3	Observerade lekt. ht klass3	Totalt (min/klass)
I	1	1	3	120 +160
II	1	4	0	205
III	1	3	1	125 + 45
IV	1	7*	0	265
V	1	4	0	165
Totalt	5	19	4	880+205

Det totala antalet lektioner som redovisas i tabellen ovan uppgår till 28. Av dessa har 24 lektioner videofilmats. Tillsammans utgör det videodokumenterade materialet som har använts i denna studie 880 minuter matematikundervisning. Det framgår av tabellen att den totala tiden för observation och videofilmning varierar mellan klasserna. I de klasser där lektionerna följde ett återkommande upplägg, har jag som regel tillbringat mindre tid jämfört med de klasser där lektionerna tycktes variera i stor utsträckning. En grundregel som har varit vägledande är att man deltar i sådan omfattning att det är tillräckligt i förhållande till den kunskap man vill nå, vilket rekommenderas av Fangen (2005).

Tabell 4 visar också att under vårterminen i år 2 videofilmades bara en lektion i respektive klass, totalt fem lektioner. Det skulle visa sig att april och maj inte var de bästa månaderna för att hitta lektionstillfällen som passade tidsmässigt för både forskare och lärare. Samtidigt var det betydelsefullt att närvara med videokameran i ett så tidigt skede som möjligt i undervisningen när skriftliga räknemetoder i addition och subtraktion var i fokus. Därför fick det räcka med att videofilm en lektion med sådant innehåll i varje klass under vårterminen i tvåan.

Klassrumsobservationer

Det har tidigare framkommit att studiens datainsamling har skett i form av deltagande observation och att videoteknik har använts för att dokumentera det som sker under matematiklektionerna.

Deltagande observation innebär att observatören deltar i en social miljö under ganska lång tid för att få en bild av individernas beteende i denna miljö

²⁰ Av de videofilmade lektionerna i klass IV (ht år 3) är fyra lektioner i halvklass. Det totala antalet lektioner är sju, men antalet lektioner som är olika till sitt upplägg är fem.

4. Metod

(Bryman, 2011). Det har framgått av beskrivningen ovan att klassernas undervisning följdes sporadiskt under en längre period som varade från mitten av vårterminen i klass 2 till mitten/slutet av höstterminen i klass 3.

Observatörens deltagande i miljön kan se väldigt olika ut och omfattningen av deltagandet skiljer mellan olika observationsstudier. Detta gäller inte minst då videokamera används. Deltagande observation med hjälp av videokamera har olika innebörd för olika forskare. Det kan betyda alltifrån att ställa in en kamera i rummet och sedan lämna det, till att gå runt med kameran bland eleverna och bjuda in dem att interagera med såväl dig själv som med kameran (Sparman, 2005). När lektionerna har videofilmats har jag varit närvarande hela tiden för att kunna anpassa kameravinkeln från kamerans plats på stativet och ibland även för att gå runt med kameran i klassrummet. Samtidigt som min strävan har varit att märkas så lite som möjligt i klassrummet finns en medvetenhet om att det knappast har kunnat undgå någon i dessa situationer att de har varit föremål för observation. Eftersom elever och lärare har varit medvetna om att de blivit observerade kan detta betecknas som *öppen observation* (Hammar Chiriac & Einarsson, 2013).

Min bakgrund som lärare var känd för klasslärarna redan från brevet med förfrågan om deltagande i studien (bilaga 1). I samband med det första besöket i varje klass fick eleverna veta att jag var forskare och lärare och att jag var intresserad av hur de arbetar på sina ”mattelektioner”. Vid de tillfällen då föräldrar var på besök i klassen presenterade jag mig som forskare med intresse för undervisning och lärande i matematik.

Det har redan framhållits att det är autentiska situationer som har observerats. Detta kan tyckas motsägelsefullt då det är tveksamt om situationer där det finns en närvarande observatör kan uppfattas som naturliga. Här råder dock delade meningar då det finns flera studier, exempelvis inom skolforskning, som visar att deltagarnas beteende inte påverkas i den omfattning som kunde förväntas. Granström (2004) förklarar detta med att vardagliga beteenden är stabila och att människor tycks ha svårt att förstå sig och visa upp ”bättre sidor”, trots att de är medvetna om att de är observerade. Man kan också diskutera huruvida autenticitet är möjlig då videokamera används, men det kan vara minst lika störande med en observatör som antecknar i sitt block jämfört med någon som videofilmnar. Dessutom är dagens barn och ungdomar redan vana hemifrån vid att bli filmade, vilket kan medverka till att detta inte påverkar situationerna i någon större utsträckning (Sparman, 2005). Eleverna verkade också vana vid att det fanns andra personer som rörde sig i klassrummet och min upplevelse var att de ganska snart betraktade mig som vilken annan vuxen som helst i klassrummet.

4. Metod

Jämfört med eleverna tycks lärarna ha påverkats i högre grad av insikten om att de har blivit filmade. Ett exempel på detta är en situation då en lärare låter eleverna börja arbeta på egen hand efter den avslutade genomgången. Efter någon minut bryter läraren aktiviteten genom att säga ”jag missade en sak”. Läraren förklarar detta för eleverna med att ”jag blev så stressad av att vi blir filmade idag så jag glömde faktiskt en sak”. Därefter återupptar läraren genomgången med eleverna och genomför det missade momentet. Denna situation utspelade sig under den första lektionen som filmades i den aktuella klassen och något liknande inträffade inte någon mer gång varken i denna eller i någon av de andra klasserna.

Efter lektionernas slut kommenterade lärarna vid några tillfällen spontant sina upplevelser av att bli filmade. Det framkom då att några tyckte att det kändes nervöst de första minuterna av lektionen, särskilt den första lektionen som filmades. Alla uttryckte dock att de ganska snabbt glömde bort att de blev filmade eftersom undervisningen och eleverna krävde deras fulla uppmärksamhet. Slutsatsen blir därför att man inte helt kan bortse från att min närvaro haft betydelse. Samtidigt är det tveksamt om elevers och lärares agerande har påverkats i den omfattning att det har inverkat på de handlingsmönster som förekommer i de olika miljöerna. Därför finns det anledning att upprepa det som tidigare har kommit till uttryck, att dessa miljöer visar exempel på matematikundervisning i en skolvardag Och det är ju det som avhandlingen avser att beskriva.

Förutom att observatörsrollen i den här studien har varit öppen kan en annan aspekt av rollen som observatör beskrivas i graden av deltagande. Fangen (2005) menar att forskarens utmaning är att kombinera deltagande och observation på ett sätt så att forskaren själv förstår som en insider och kan beskriva så att situationen blir begriplig för en utomstående.

I rollen som observatör har mitt deltagande i de pågående aktiviteterna i klassrummen varit så liten som möjligt, men ändå inte helt försumbar, vilket framgår av textavsnittet ovan. Samtal har ibland förts med elever och lärare före och efter lektionerna, men under pågående lektion har dessa varit mycket begränsade. Under vistelsen i de olika klassrummen har jag ibland involverats i samtal med elever, oftast har detta skett på deras eget initiativ. De har frågat mig något och då har det ibland varit svårt att lägga band på ”läraren” i mig och låta bli svara. Några enstaka gånger har det därför hänt att en elev som har hamnat på villovägar har fått lite stöttning i arbetet med att lösa en uppgift, för att sedan kunna fortsätta vidare på egen hand. Vid dessa tillfällen har min uppmärksamhet och videokamerans lins riktats mot en enskild elev, vilket kan ha gjort att jag har missat något annat som varit av större vikt. Eftersom det mest har handlat om ett kort ögonblick vid något

4. Metod

enstaka tillfälle är min bedömning att det är utan betydelse för resultatet som helhet.

Min observatörsroll kan därför närmast liknas vid det som Fangen (2005) betecknar som *delvis deltagande observatör*. Här deltar forskaren i det sociala samspelet, men inte i de aktiviteter som deltagarna utövar i de observerade situationerna. Detta har också visat sig vara den vanligaste forskarrollen i fältarbete (Fangen, 2005; Granström, 2004).

Video

Inom kvalitativ forskning har videoinspelningar på senare tid blivit en etablerad metod för datainsamling (Heikkilä & Sahlström, 2003; Sparrman, 2005). Beslutet att videofilma matematiklektionerna grundar sig i att videokameran framstod som ett lämpligt hjälpmedel för att fånga olika skeenden och situationer i matematikklassrummet. Det andra alternativet skulle i så fall varit att göra ljudinspelningar i kombination med att föra anteckningar. Det var i det läget inte särskilt svårt att se fördelarna med att videofilma, särskilt med tanke på behovet att inte bara dokumentera muntlig kommunikation utan också få med till exempel gester och andra sätt att förstärka det talade språket. Videotekniken erbjuder helt enkelt kraftfulla verktyg som lämpar sig väl för forskning i komplexa lärandemiljöer (Derry et al, 2010; Jordan & Henderson, 1995;).

Genom att använda video kan alltså även studier av ickeverbala mänskliga handlingar underlättas. Det gäller till exempel också situationer där materiella objekt är sammanflätade med interaktionen (Heath, Hindmarsh & Luff, 2010; Sparrman, 2005). Materiella objekt kan här förstås som hjälpmedel i matematikundervisningen, som exempelvis olika sorters laborativt material, tallinje, siffror osv. Videokameran framstod därför som ett användbart verktyg med tanke på valet av studieobjekt. Genom att använda videoteknik gavs också obegränsade möjligheter att återvända till det inspelade materialet. En av fördelarna med video är just att oavsett antalet visningar kvarstår detaljrikedomen i ursprungsmaterialet, vilket ger forskaren möjlighet att upptäcka fenomen som inte har varit synliga från början (Jordan & Henderson, 1995).

Den ökade användningen av video har medfört andra krav på de forskare som idag utnyttjar denna teknik jämfört med dem som använde videofilmning i en tid då detta innebar nyskapande inom både metod- och teknikanvändning (Derry et al, 2010). Det finns därför anledning att ge en utförlig beskrivning av själva tillvägagångssättet vid filmandet. De utmaningar som har visat sig under arbetet kan på olika sätt kopplas samman med resonemang kring urval, analys, teknik och etik. Att detta är områden

4. Metod

som kräver omsorgsfull hantering då data samlas med hjälp av videoteknik vittnar Derry och hennes forskarkollegor om (2010). De stödjer sig på ett uttalande från Dewey när de påtalar vikten av att forskare reflekterar och visar öppenhet kring de olika val som sker under forskningsprocessen. Ett sådant förhållningsätt kan vara betydelsefullt, inte minst i samband med videoanvändning eftersom detta i sig medför att nya och ibland kanske oväntade valsituationer kan uppkomma.

selective emphasis is inevitable whenever reflection occurs. Such selective emphasis is a negative force only if, in the researcher's thinking and actions, the presence and operation of choice are concealed, denied, or disregarded. (Derry et al., 2010, s. 15)

Urvalsfrågorna som tas upp i följande avsnitt gäller främst tekniska aspekter, men även analysfrågan kommer att beröras. Etiska frågeställningar som aktualiserats vid användningen av videoteknik tas upp tillsammans med andra forskningsetiska överväganden i ett separat avsnitt.

Metodologiska reflektioner

Avgörande för valet att använda videokamera har varit forskningsfrågan och som en följd av denna, behovet av noggrann dokumentation av interaktionen i de olika matematikklassrummen. Videobaserad forskning där det empiriska materialet består av i stort sett helt oredigerade videofilmer, som undersöks utifrån relativt öppna frågeställningar utan någon starkare teoristyrning, speglar ett induktivt förhållningssätt (Derry et al., 2010). Ett exempel på en sådan studie som har väckt mitt intresse är *Learning lessons* (Mehan, 1979). Liksom i Mehans studie är fokus i denna avhandling interaktionen mellan lärare och elever, med avsikten att fånga upp det som händer i klassrummet. Till skillnad från Mehan, som följde undervisningen i olika ämnen i endast en klass, uppmärksammas här fem klassers matematiklektioner med ett och samma undervisningsinnehåll.

Förutom det gemensamma forskningsintresset finns det också likheter mellan studierna i valet av metod och teknisk utrustning för dokumentation. I båda projekten har videokamera använts tillsammans med en separat mikrofon för att fånga upp lärarens och elevernas röster. Allt videofilmade och ljudinspelat material har sedan transkriberats.

Före själva datainsamlingen gjordes några korta provfilmningar i ett av klassrummen för att utveckla större säkerhet i att hantera kameran. Parallellt med datainsamlingen har mitt eget kunnande stärkts när det gäller

4. Metod

videofilmning och datainsamlingen har kunnat genomföras utan några tekniska missöden.

Tekniska hjälpmedel under datainsamlingen har alltså varit en digital videokamera tillsammans med en separat minibandspelare. Syftet med att använda en extra källa för ljudupptagning var främst att den skulle kunna vara ett komplement till ljudet på videofilmen. Placeringen av minibandspelaren på ett bord i närheten av den plats där läraren oftast brukade befinna sig, var ett sätt att försäkra mig om att få en så god ljudåtergivning som möjligt av lärarens tal. Jämfört med att använda mygga är fördelen med en extern mikrofon, placerad exempelvis på ett bord, att man kan förbereda sin utrustning i lugn och ro och kvaliteten på ljudupptagningen blir ofta bra (Heikkilä & Sahlström, 2003). Bandspelaren som användes fångade inte bara upp lärarens yttranden, utan också en hel del av den kommunikation som förekom bland eleverna vid de närmaste borden eller bänkarna.

Ljudkvaliteten på videofilmen varierade, vilket medförde begränsningar vid analysarbetet. De separata ljudinspelningarna kom därför till nytta åtskilliga gånger då lärarens eller elevernas repliker inte alltid gick att uttyda i filmmaterialet. Lösningen blev då att istället lyssna till den valda sekvensen i ljudfilen.

I fokus för mitt intresse har varit lärarens och elevers interaktion, men redan kamerans position medförde här vissa begränsningar. Eftersom jag genomförde datainsamlingen helt på egen hand föll valet på att använda bara en kamera. Idealet hade förstås varit två. Då hade det gett möjlighet till placering av en kamera framför och en bakom eleverna i avsikt att få med alla ansiktsuttryck och handlingar som annars är svår fångade bakifrån och på distans. Med bara en kamera att tillgå riktades fokus mot lärarens agerande och interaktionen med eleverna, vilket ledde till att kameran placerades långt bak i rummet, oftast i mitten.

Beroende på de olika klassrummens möblering och form har videokamerans placering varierat något. Några av klassrummen var korta och breda, till formen, som en liggande rektangel, medan andra kunde liknas vid en rektangel som vilar på en av sina kortsidor. I de förra klassrummen fungerade det bäst att ha kameran vid sidan, men fortfarande ganska långt bak. Här blev det då möjligt att även fånga upp något mer av elevernas agerande och inte bara deras muntliga medverkan. Tillgången till endast en kamera och klassrummens form är exempel på yttre faktorer som inte kunde påverkas på annat sätt än genom att försöka hitta så bra placeringar som möjligt för kameran. Sparrman (2005) menar att rummens form och möblering är exempel på begränsande faktorer i samband med videofilmning. För att inte störa pågående aktiviteter måste forskaren istället anpassa sig och

4. Metod

ibland acceptera kameravinklar som är mindre bra. I viss mån kan detta kompenseras med fältanteckningar, vilket beskrivs i nästa avsnitt.

En annan nyckelfråga i samband med videoanvändning är huruvida kameran ska ha en fast placering. När datainsamlingen inleddes var min inställning att kameran skulle vara placerad på ett stativ i klassrummet eftersom det finns många fördelar med en fixerad kameraposition. Det innebär att forskaren kan undvika att vara alltför påträngande för individerna och samtidigt ger det möjlighet att anteckna händelser och aktiviteter som kanske inte fångas upp av kameran (Heath, Hindmarsh & Luff, 2010).

Under aktiviteter då läraren och klassen hade genomgångar eller löste uppgifter tillsammans på tavlan stod alltså kameran på sitt stativ på golvet. För att få med så mycket som möjligt av det som skrevs på tavlan användes ofta kamerans zoom. Den kom också till nytta i situationer då det på viss distans gick att filma när elever och lärare förklarade med stöd av laborativt material. Att inte behöva komma alltför nära i samband med att situationer videofilmades kunde, enligt min uppfattning, vara en fördel, då min närhet annars skulle kunna inverka mer på situationen jämfört med om avståndet var större. När kameran stod på sitt stativ var jag därför stundtals upptagen av att hantera den, dels för att inte missa tillfällen som behövde in- eller utzoomas och dels för att om möjligt kunna rikta kameran mot elever som talade i klassrummet vid gemensamma aktiviteter.

Vikten av att försöka anpassa användningen av videokameran till de givna förutsättningarna har berörts ovan. Detta kom även att påverka beslutet om att placera kameran på stativ. Redan under den första lektionen som videofilmades blev det uppenbart att en del aktiviteter i klassrummet kunde bara filmas under förutsättning att kameran var flyttbar. Heath, Hindmarsh och Luff (2010) menar att det kan vara bra att påbörja datainsamlingen med kameran på en bestämd plats. Om man däremot upptäcker att de praktiska omständigheterna i samband med vissa aktiviteter kräver större flexibilitet i kamerahanderingen, är det rimligt att inte hålla fast vid en fixerad position utan istället ta med kameran. För att då kunna följa en del av elevernas arbete vid de tillfällen när de arbetade på egen hand eller samarbetade kring uppgifter parvis eller i grupper, blev min lösning att gå runt i klassrummet och filma. I början stoppade jag inspelningen varje gång kamerans position bytte från fast till rörlig eller vid längre förflyttningar i klassrummet. En följd av detta blev att varje lektionstillfälle gav upphov till flera kortare filmsekvenser och det blev många dokument att hålla ordning på. Efter att ha filmat några lektioner på detta sätt genomfördes de återstående med att göra ett enda långt filmavsnitt för varje filmad lektion, vilket gjorde materialet mer lättöverskådligt och det blev färre enheter att hålla reda på. På datorn skapades mappar för varje klassrum, i vilka de aktuella filmerna sparades

4. Metod

tillsammans med ljudfilerna från minibandspelaren. Därefter överfördes allt material till en extern hårddisk som förvaras inlåst då den inte används.

Fältanteckningar

I anslutning till varje lektion som videofilmades fördes anteckningar i ett block över sådant som kunde tillföra ytterligare information till filmmaterialet (jfr Sparrman, 2005). Det kunde exempelvis handla om vilka personer som fanns i klassrummet utöver klassen och läraren, om det var hel- eller halvklass, hur lektionen var schemalagd i förhållande till skoldagens raster och vad klassen hade gjort den föregående lektionen. Noteringar gjordes också om vilka sidor i läroböckerna som hade varit aktuella under lektionen så att det i efterhand skulle vara lätt att hitta de uppgifter som på olika sätt förekom i videofilmerna. Under de första lektionerna antecknades också lärarens noteringar på tavlan, då det fanns en osäkerhet om hur bra de skulle framträda på filmen. När det visade sig att detta kunde lösas med hjälp av zoomningstekniken behövdes inte längre några anteckningar över vad som skrevs på tavlan. Under de pågående filmsessionerna blev det därför möjligt att ibland även göra mycket korta anteckningar över intressanta situationer, som inte kunde fångas upp av kameran på grund av dess placering på stativet.

Transkriberingar

Behovet av noggrannhet och detaljrikedom i transkriberingarna styrs av forskarens intresse i det kommande analysarbetet (Jordan & Henderson, 1995; Linell, 1994). Då analysarbetet i denna studie primärt har utgått från det transkriberade materialet och inte från videofilmerna, har det varit väsentligt att inte bara transkribera den muntliga kommunikationen i klassrummet utan också vad som händer i interaktionen för övrigt. Det gäller exempelvis gester, vad som skrivs på tavlan samt vilka verktyg/hjälpmiddel som förekommer och hur dessa används. När det sedan har behövts har videon utgjort en extra källa att gå tillbaka till då texten inte har skapat tillräcklig klarhet. I den muntliga kommunikationen har turtagningar och prosodi dokumenterats, men även överlappningar i tal och andra företeelser som på olika sätt kan spegla affektiva uttryck i deltagarnas muntliga kommunikation finns återgivna i transkripten. Linell (1994) ger exempel på tre nivåer av talåtergivning, vilka kan ses som tre olika grader av normering på väg mot en alltmer skriftspråklig text. Nivå I innebär en noggrann transkribering som återger talspråk, intonation, emfas, talstyrka överlappningar, tvekanden etc. En något förenklad återgivning möter på nivå II, men transkriptionen är fortfarande ordgrann. Det innebär att alla ord som är möjliga att identifiera återges i den transkriberade texten tillsammans med

4. Metod

omtagningar, felstarter etc. Även längre pauser markeras. Transkribering i enlighet med nivå III ligger nära en skriftspråklig text eftersom yttranden inleds med stor bokstav samt innehåller komma och punkt. På denna nivå är transkriptionen inte helt ordagrann eftersom den enbart syftar till att återge innehållet i det som sagts.

För analysarbete inom samhällsvetenskapliga discipliner rekommenderar Linell (1994) en ganska enkel bastranskription på en nivå mellan I och II, som beskrivits ovan. De principer som har varit vägledande för transkriberingsarbetet i denna studie motsvarar främst nivå II för talåtergivning. För att göra den transkriberade texten mer läsvänlig har stor bokstav och skiljetecken använts motsvarande nivå III och orden har inte skrivits ut som talspråk utan oftast anpassats till skriftspråk. En transkriptionsnyckel presenteras nedan i tabell 5. Ett exempel på transkribering som innehåller några av notationerna i figuren nedan visas i nästa avsnitt.

I textmaterialet har tidsangivelser lagts in med jämna mellanrum i marginalen, dels för att få en överblick över hur olika aktiviteter har varit fördelade över lektionen, dels för att lätt kunna gå tillbaka till motsvarande avsnitt i videofilmen.

Tabell 5. *Transkriptionsnyckel, inspirerad av Linell (1994).*

SYMBOLER	INNEBÖRD
...	paus 1-2 sek, pauser längre än två sekunder uttrycks i tid, exempelvis (3s.)
<u>Det är</u>	samtidigt tal, de aktuella textraderna är placerade rakt under varandra
<i>många</i>	betonat ord
→	personens yttrande fortsätter i den- samma nästa replik
[ohörbart]	ohörbart tal
/.../	tal som utelämnats vid transkribering för att det inte är relevant i samman- hanget
[PEKAR]	beskriver ickeverbala handlingar

Transkriberingsarbetet har varit tidsödande och när det inleddes var intentionen att allt material skulle transkriberas. Så skedde i princip, men med det finns vissa undantag. En del sessioner där ljudets kvalitet inte var på

4. Metod

en sådan nivå att det kunde transkriberas utan att det skulle behövas åtskilliga reprislyssningar av både videofilm och ljudband är fortfarande inte transkriberade. Detta är främst filmmaterial från senare delen av några lektioner då eleverna arbetar på egen hand eller tillsammans. Eftersom de flesta lektioner har transkriberats i sin helhet blir bedömningen att bortfallet på grund av bristande ljudkvalitet knappast kan ha någon större betydelse för resultatet.

Beteckningar för elever och lärare

I de flesta replikväxlingarna betecknas eleverna med bokstaven E, följt av en siffra, till exempel E1, E2 och E3 för att skilja mellan olika elever som deltar i samma replikväxling. Det betyder exempelvis att E1 i alla excerpt troligen står för olika elever de flesta gånger. För studiens syfte har det dock ingen betydelse vem av eleverna som agerar i de olika situationerna eftersom det är innehållet i interaktionen som är i fokus. Det finns situationer där det inte har gått att avgöra vem av de deltagande eleverna som talar. Det har markerats med E? medan E utan något efterföljande tecken betyder att flera elever talar samtidigt. På liknande sätt betecknas läraren alltid med L och andra pedagoger som förekommer har markerats med P.

I det videofilmade materialet förekommer emellanåt både elevers och lärares namn. För att bevara personernas anonymitet, har både elevers och lärares autentiska namn ersatts med en slumpmässigt vald bokstav vid de tillfällena då namnen förekommer i lärares eller elevers yttranden. Istället för att beteckna repliker från dessa omnämnda personer med exempelvis E1 eller E2, anges istället den bokstav som redan använts i replikväxlingen vid det aktuella tillfället. Här följer ett exempel på utdrag från det transkriberade materialet.

- E1 [AVBRYTER LÄRAREN] Jag fattar inte varför det blir plus.
- E2 Jag [ohörbart]
- L T, förklara varför det blir plus där!
- T Äh, att största entalet är först.
- E1 Är det så man tänker hela tiden? Om det andra, som är längst bort dit [PEKAR ÅT HÖGER], om det är störst, då är det minus?
- L Alltså, ja, precis! För att om det är, om du har *många* här [PEKAR PÅ ENTALSTVÅAN] och ska ta bort några stycken bara →
- E1 [AVBRYTER] Mm, då är det ju minus.
- L då har du ju kvar.

Analysarbete

Två av de frågor som studien söker svar på är

- Vad är kännetecknande för lärares handlingar i studiens klassrum
- Vad är kännetecknande för elevers handlingar i studiens klassrum då skriftliga räknemetoder för addition och subtraktion är undervisningsinnehåll?

Problemformuleringen kan karaktäriseras som öppen. Detta har också berörts i samband med metodologiska utgångspunkter där det framkommit att ett teorigerande förhållningssätt har legat till grund för analysarbetet av det empiriska materialet. Ett tecken på detta är bland annat att analysarbetet har börjat ganska förutsättningslöst. Tidigare i kapitlet har det framkommit att analysarbetet har genomförts i två omgångar som har utmynnat i olika resultatredovisningar. Den första av dessa avser endast att besvara frågeställningarna ovan. I det efterföljande analysarbetet uppmärksammas tillsammans med de två ovan även den tredje frågan som står i centrum i studien.

- Vilka förutsättningar för lärande med avseende på olika kompetenser i matematik skapas i dessa klassrum?

Den första analysomgången, som i fortsättningen kallas analys I, kan betecknas som en empirinära analys. Syftet med denna har varit att urskilja företeelser som bildar mönster i materialet och som därmed pekar på utmärkande drag i matematikklassrummet. I enlighet med Braun och Clarke (2006) kan analys I betecknas som induktiv eftersom empirin är utgångspunkten för kodningsprocessen, som alltså har skett utan något förutbestämt kodningsschema. Då denna analysomgång inte i första hand avser att vara teorigerande, kan den enligt Howitt (2010) också karaktäriseras som deskriptiv.

Resultatet av analys I, som alltså är mina analyser av empirin, utgör sedan grunden för den andra analysomgången (analys II). Här har verksamhetsteorin använts som analysverktyg. (Se kapitel 3.) Utgångspunkten för analys II är de olika matematikklassrummens kännetecknande drag med avseende på såväl generella som specifika undervisningsprocesser i matematik. Genom verksamhetsteorin erbjuds en teoretisk referensram där både sociala och psykologiska faktorer är inkluderade i en helhet (Knutagård, 2003). Detta helhetsperspektiv är avgörande för att verksamhetsteorin ska framstå som ett lämpligt verktyg vid analys av lärandemiljöerna som framträder i studien.

Genom att distansera från praktiken skapas således möjlighet att förklara och förstå resultatet som framkommit genom analys I. Användning av teoretiska begrepp är nödvändigt för att den komplexitet som forskaren möter

4. Metod

i matematikklassrummet ska kunna förenklas och bli hanterbar Seeger et al. (1998).

Förarbetet

Ett av de första stegen på väg in i analysarbetet togs redan under transkriberingen av det inspelade materialet. Arbetet med att transkribera de videofilmade lektionerna gav utrymme för tankeverksamhet som genererade idéer inför analysarbetet. Även om transkriberingsarbete kan upplevas som tidsödande framhålls det som ett utmärkt sätt för forskaren att bekanta sig med materialet.

As we have noted, the time spent in transcription is not wasted, as it informs the early stages of analysis, and you will develop a far more thorough understanding of your data through having transcribed it. (Braun & Clarke, 2006, s. 88)

Fördelarna med att själv transkribera är således, förutom att det ger forskaren god kännedom om materialet, att det också kan verka inspirerande för analysen. Arbetet med att transkribera kan därmed fungera som en injektion för forskaren till att vilja förstå och komma igång med att analysera sitt datamaterial (Howitt, 2010).

Parallellt med transkriberingen gjordes också en del egna kommentarer på ett block bredvid datorn. Varje transkriberad lektion skrevs ut som ett eget dokument. Noteringarna från blocket överfördes därefter i form av enstaka nyckelord och korta beskrivningar till ett utrymme överst på första sidan i respektive dokument.

Det transkriberade materialets olika delar

Det material som genererats från ett klassrum kallas här datauppsättning. En liknande definition för att tydliggöra skillnaden mellan datamaterialets olika delar förekommer hos Braun och Clarke (2006). Det empiriska materialet i sin helhet består av fem uppsättningar data som tillsammans utgörs av 213 sidor transkriberat material.²¹ Analysarbetet har genomförts dels med fokus på en datauppsättning i taget, dels genom jämförelse mellan olika datauppsättningar. Undantag från detta gjordes under steg 1 (se nedan) då den första lektionen i varje datauppsättning ensam utgjorde materialet som var föremål för den inledande analysen.

²¹ Som tidigare redovisats medverkade sex klasser i datainsamlingen, men endast material från fem av dessa har ingått i analysen.

Analys I: analysmodellen

Tillvägagångssättet för analys I har utvecklats från en modell för tematisk analys som Braun och Clarke lyfter fram. Deras analysmodell omfattar följande punkter:

1. Familiarizing yourself with your data
 2. Generating initial codes
 3. Searching for themes
 4. Reviewing themes
 5. Defining and naming themes
 6. Producing the report
- (Braun & Clarke, 2006, s. 87)

Min analysmodell som presenteras nedan, har stora likheter med det analysförfarande som Braun och Clarke (2006) redovisar. Till skillnad från deras modell innehåller min endast fem steg eftersom data redan har blivit bekanta genom transkriberingen. Min modell kan även jämföras med beskrivningen av olika analysnivåer som Merriam (1998) har gjort. Steg 1 och 2 i modellen nedan motsvaras av den deskriptiva nivån hos Merriam (1998).

- 1) Den första lektionen i varje datauppsättning är utgångspunkt här. Skapande av koder genom en empirinära analys och sökande efter teman.
- 2) Analys av de olika datauppsättningarna under vägledning av koder och teman från steg 1. Skapande av nya koder och sökande efter ytterligare teman. Granskning och jämförelse mellan koder och empiri, mellan koder och teman samt mellan olika koder.
- 3) De nya teman som skapats fortsätter tillsammans med tidigare teman att vägleda analysen, vilket innebär upprepning av steg 2.
- 4) Ny granskning och jämförelse mellan teman, koder och empiri för att undvika att dessa befinner sig på olika analytiska nivåer. Bearbetning av temanamnen.
- 5) Resultatredovisningen sammanställs. Excerpten väljs ut.

Analysmodellen som presenterats ovan ligger alltså till grund för själva genomförandet av analys I, vilket är det som beskrivs närmast.

Analys I: analysprocessen

Det framgår av redogörelsen att de olika stegen under analysprocessen har i praktiken fungerat mer överlappande än vad som själva modellen uttrycker.

Steg 1

Det har tidigare nämnts att transkriberingsarbetet fungerade som en startsignal för själva analysarbetet. Mycket av arbetet under steg 1 handlade om att bekanta sig med materialet, vilket redan hade skett i samband med att transkriberingen genomfördes på egen hand. När denna var avslutad gjordes en noggrann genomläsning av den första videofilmade lektionen från respektive klassrum. Vid genomläsningen fördes anteckningar i marginalen om de olika handlingar och tecken på interaktion som föreföll intressanta i relation till forskningsfrågan. Noteringarna ledde så småningom fram till skapandet av olika koder, som kan beskrivas som benämningar på händelser och fenomen som var synliga i texten. Braun och Clarke (2006) menar att koderna kan fungera som etiketter för olika särdrag som framträder i materialet. I det här skedet, men även under steg 2, var kodningen öppen. Det betyder att koderna motsvarar eller ligger mycket nära själva textmaterialet (Howitt, 2010). I min studie omfattade de alltifrån korta uttalanden till situationer som innehöll flera turer i kommunikationen.

Genom att kombinera koder kunde vissa mönster börja urskiljas, något som i sin tur medförde att idéer för utformande av teman också började ta form. Att skapa koder är ett sätt att organisera data i meningsfulla konstellationer, som befinner sig nära det empiriska materialet. Ett tema utgör däremot ett begrepp på en högre analytisk nivå (Braun & Clarke, 2006). Detta synsätt möter vi också hos Merriam (1998), som istället för teman använder benämningen kategorier när hon skriver att ”It should be clear that categories are abstractions derived from the data, not the data themselves” (s. 181). Hon menar därmed att dessa befinner sig på en högre abstraktionsnivå i analysen.

Teman kan således bidra till att synliggöra fenomen som inte framträder direkt i det empiriska materialet. Skapandet av koder och teman startade under steg 1 och dominerade länge analysarbetet, närmare bestämt under de tre första stegen.

Steg 2

När arbetet övergick till steg 2 fanns det en uppsättning koder att utgå ifrån i det fortsatta analysarbetet. Idéer till utformande av teman hade också börjat ta form, genom de mönster som en del av koderna gav upphov till. Dessa teman fungerade, tillsammans med de befintliga koderna som vägvisare för

4. Metod

analysarbetet under steg 2. Därigenom riktades blicken mot specifika fenomen vid bearbetningen av varje befintlig datauppsättning. Under steg 2 gjordes den första genomgången av alla fem datauppsättningarna i sin helhet, en i taget.

Rent konkret innebar steg 2 att en uppsättning data omsorgsfullt lästes igenom, lektion för lektion, och på så sätt analyserades materialet från ett klassrum i taget. Textavsnitt som kunde relateras till befintliga teman markerades med olika färger. Utöver detta skapades också nya koder ju längre analysarbetet avancerade genom de olika datauppsättningarna. Inledningsvis bearbetades en datauppsättning åt gången, men eftersom det successivt tillkom nya koder innebar det också att analysen så småningom pågick parallellt i flera av datauppsättningarna. Varje datauppsättning som analyserades ledde till en förnyad genomgång av de andra uppsättningarna, framför allt för att jämföra koder och empiri samt koder och teman och ibland för att göra omgrupperingar då nya koder tillkommit. Detta kan närmast jämföras med punkt 3 och 4 i analysmodellen hos Braun & Clarke (2006), det vill säga sökande efter teman samt granskning av teman. Som en följd av detta arbete skedde bildandet av två huvudteman, *generella undervisningsprocesser i matematik* och *specifika undervisningsprocesser i matematik*. Detta fick sedan till följd att alla övriga teman, både de som redan existerade och de som sedan skapades kom att utgöra underteman till något av dessa två.

Steg 3

Granskning och jämförelse mellan empiriskt material och analyserade data under steg 2, innebar ibland att nya teman skapades, som i sin tur blev vägledande för den fortsatta analysen. Det finns ingen tydlig övergång mellan steg 2 och 3 eftersom arbetet successivt övergick alltmer till ett pendlande fram och tillbaka mellan dessa steg. Detta är ett vanligt handlingsätt vid kvalitativ analys (Braun & Clarke, 2006) och nödvändigt för att göra ett bra analysarbete (Howitt, 2010).

I den fortsatta analysen utkristalliserade så småningom fyra olika matematikklassrum ur de fem datauppsättningarna. Flera av de teman som nu existerade förekom i ett par av dessa medan vissa teman bara kunde urskiljas i ett klassrum. De två som tillsammans kom att utgöra ett matematikklassrum kan naturligtvis inte betraktas som identiska. Skälet till att de två klassrummen sammanfördes var att de mönster och fenomen som framträdde i det empiriska materialet från dessa klassrum uppfattades som mycket snarlika. De teman som skapades utifrån de två datauppsättningarna motsvarade således varandra i hög grad.

4. Metod

Denna studie avser inte att ge en heltäckande bild av undervisningen i de olika klassrummen. Syftet är istället att beskriva vad som kännetecknar de olika matematikklassrummen genom att lyfta fram utmärkande drag i lärares och elevers handlingar som har framträtt i datamaterialet. Mot bakgrund av detta resonemang kunde datauppsättningarna från de två klassrummen ge upphov till ett matematikklassrum.

Steg 4 och 5

Under steg 4 inriktades arbetet på att göra nya jämförelser mellan teman, koder och data. Syftet med detta var att försöka precisera varje tema så att det tydligare framgick vad som var dess specifika drag. Flera teman hade arbetsnamn som behövde preciseras. En sådan bearbetning är inte oviktig eftersom temana bör tilldelas kärnfulla beteckningar för att läsaren ska kunna få en god bild av vad ett tema står för (Braun & Clarke, 2006). Jämförelser mellan teman gjordes också för att försöka klargöra hur dessa var relaterade till varandra med avseende på analysnivån så att denna inte skilde sig alltför mycket mellan olika teman.

Avslutningsvis sammanställdes presentationerna av de fyra matematikklassrummen. Excerpten som skulle representera de olika temana valdes ut. Den bearbetning som gjordes i samband med textproduktionen under steg 5 medförde återigen att några teman fick nya benämningar. Detta visar också på den pendelrörelse som pågick, i det här fallet mellan konkreta och teoretiska begrepp. Därmed utgjorde även skrivandet en väsentlig del av själva analysen då det ibland medverkade till att lyfta analysen till en ny nivå.

Redovisningen av resultatet sker genom att de fyra matematikklassrummen presenteras i var sitt kapitel under benämningarna Almen, Björken, Eken och Lönnen. Varje kapitel består av två delar, där den första delen utgör resultatet av analys I. Den andra delen innehåller resultatet från genomförandet av analys II, vilket beskrivs nedan.

Analys II

Med utgångspunkt från resultatet som redovisas i första delen av varje kapitel 5, 6, 7 och 8 genomfördes senare en teoretisk analys av metoderna i de olika verksamheterna. Det analysverktyg som legat till grund för analysen har som bekant hämtats från verksamhetsteorin (se vidare kapitel 3). Det betyder att subjekt, objekt och metoder, det vill säga lärares och elevers handlingar med hjälp av artefakter eller andra kulturella faktorer, har varit i fokus. I analysen intog lärare och elever omväxlande subjektets position. Det genomgående objektet motsvarar den kunskap som eleven förväntas utveckla som en följd av undervisningen, här representerat av de uppgifter eller olika

4. Metod

matematikaktiviteter som är föremål för lärares och elevers handlingar. I analysen har dessa inte specificerats eller getts något större utrymme, dels för att det matematiska innehållet är givet och dels för att istället rikta intresset mot vad som ges möjlighet att lära. Det senare är ju en av frågeställningarna som avhandlingen söker svar på. Metoderna uppmärksammades i relation till faktorer av kulturell och social karaktär. Det kan jämföras med att handlingarna sker via ett raster som inverkar på metoderna, vilka i sin tur har inflytande över kulturella och sociala faktorer.

Resultatet från analys II presenteras enligt en struktur som uppmärksammar de olika noderna i Engeströms (1987) verksamhetssystem. Eftersom artefakter har getts ett relativt stort utrymme i redovisningen har den noden delats upp i språklig kommunikation och laborativt material.

Reflektioner över den egna processen

I arbetet med att samla in och analysera data har mina tidigare lärarerfarenheter från lågstadiet ofta varit en tillgång, särskilt i mötet med elever och lärare i de olika klassrummen. Mycket av det som har observerats eller fångats upp med videokameran har varit välbekanta företeelser. Den stora utmaningen blev därför att försöka se bortanför det omedelbart igenkännbara i situationer som på ytan framträdde på ett sätt i datamaterialet, men som skulle kunna innebära något annat på en högre analytisk nivå. Jag instämmer med Elvstrand, Högberg och Nordvall (2009) i att det inte finns några genvägar till att utveckla ett analytiskt förhållningssätt, utan det handlar främst om mycket övning och läsning av texter. Så småningom var det inte heller bara de påtagliga händelserna i materialet som fångade min uppmärksamhet. Sådant som kanske inte hade noterats vid första eller andra genomläsningen av en datauppsättning framträdde vid nästa lästillfälle. På detta sätt utvecklades min analytiska förmåga under tiden som arbetet pågick.

Kvalitetsaspekter i forskningsprocessen

Under arbetet med studien har följande kvalitetskriterier särskilt uppmärksammats: (a) reflexivitet, (b) intern logik (c) generaliserbarhet samt (d) etiska överväganden. Larsson (2005) diskuterar kvalitetskriterier i framställningen som helhet och påtalar att perspektivmedvetenhet, intern logik och god etik är aspekter som har betydelse för slutproduktens kvalitet. Perspektivmedvetenhet innebär enligt Larsson (2005) att forskaren redovisar sin egen förståelse. Detta kan också vara ett uttryck för reflexivitet, vilket är den kvalitetsaspekt som tas upp inledningsvis.

Reflexivitet

Inom samhällsforskning efterfrågas ett reflexivt förhållningssätt. Det innebär att forskaren ska reflektera över sina olika beslut under processen och vilka konsekvenser olika val och bortval kan föra med sig (Bryman, 2011). Från flera håll poängteras vikten av att forskaren visar sin medvetenhet om att hon eller han ingår i den sociala värld som är själva studieobjektet.

Forskningsprocessen utgör en (re)konstruktion av den sociala verkligheten, där forskaren dels interaktivt samspelar med de beforskade, dels aktivt tolkande hela tiden skapar bilder för sig själv och för andra: bilder vilka selektivt lyfter fram vissa bud på hur förhållanden – upplevelser, situationer, relationer – kan förstås, och (därmed) negligerar alternativa tolkningar. (Alvesson & Sköldberg, 1994, s. 13)

Genom att jag återkommande reflekterat över mina teoretiska utgångspunkter samt tillvägagångssätt och val i olika sammanhang, har läsaren beretts möjlighet till inblick i de överväganden som har gjorts och i de förutsättningar som varit rådande för mitt arbete. Vägen till beslut har föregåtts av mycket resonering fram och tillbaka med mig själv, vilket skulle kunna motsvara den inre dialog som Berg (2009) ger uttryck för.

Reflexivity [further] implies a shift in the way we understand data and their collection. To accomplish this, the researcher must make use of an internal dialogue that repeatedly examines *what the researcher knows* and *how the researcher came to know this*. To be reflexive is to have an ongoing conversation with yourself. (Berg, 2009, s. 198)

Reflexivitet kan alltså innebära att forskaren visar medvetenhet om sin egen förförståelse. Larsson (2005) framhåller att det är betydelsefullt att forskaren öppet redovisar sin förförståelse eftersom all tolkning görs mot bakgrund av denna. Därigenom tydliggörs utgångspunkten för tolkningen och forskarens perspektiv framgår klart, vilket också bidrar till den öppenhet som är nödvändig för att forskningen ska kunna utsättas för kritisk granskning. Enligt detta resonemang blir då forskarens redovisning av sin förförståelse ett kvalitetskrav (Larsson, 2005). Min bakgrund som lågstadielärare under många år har redan ventilerats vid ett flertal tillfällen i texten. Jag har även reflekterat över vilken nytta jag har haft av mina lärarberfarenheter, men också tagit upp de svårigheter jag har mött med anledning av min lärarbakgrund. Genom att reflektera över den egna personligheten skapar man som forskare möjlighet att distansera sig från sig själv och kan därmed placera sin egen person inom parentes. Risken finns annars att forskare som är väl bekanta

4. Metod

med det aktuella fältet låter sina tolkningar av empirin styras av antaganden som ställts upp i förväg (Kullberg, 2004). Ett annat sätt att undvika att ge utrymme åt förutfattade meningar är att vara uppmärksam på sina egna slutsatser (Roth, 2001).

De verkliga stötestenarna visade sig under en period i början av analysarbetet. Mina lärarögon siktade in sig på det som verkade välbekant i det empiriska materialet och en hel del förblev osett. Detta är ett vanligt förekommande fenomen hos nybörjare i analysarbete och inte minst bland lärare som övergår till att bli forskare, vilket framkommer i följande citat från Roth, som här har inspirerats av både Bourdieu och Derrida.

Whereas the ethnographic observer focuses on events subsequently recorded in the form of field notes, the teacher is absorbed in the act of teaching rather than recording of events—they have, as all practitioners, a particular perspective that radically differs from those any onlooker has. (Bourdieu, 1990). Later, recollections are seen not only through the filter of the different intentionality but also through a filter that changes, imperceptibly and with time. (Derrida, 1995) (Roth, 2007, s. 368)

Det enda sättet för mig att komma tillrätta med svårigheterna som mina lärarögon hade vållat var att enträget fortsätta med kodningen av det empiriska materialet och låta detta vara styrande.

Intern logik

Detta kriterium kan kort beskrivas som överensstämmelse mellan forskningsfråga, datainsamlingsmetod och analysförfarande (Kullberg, 2004). Att forskningsfrågan bör styra forskningsprocessen kommer klart till uttryck hos Howe (2003) som skriver ”research questions should drive data collection techniques and analysis rather than vice versa” (s. 39). Detta förhållningssätt får också stöd av Larsson (2005), men han anser inte att denna tes är fullständig. Istället framhåller han vikten av att även antaganden om forskning och det studerade fenomenets natur tas i beaktande när man diskuterar huruvida det råder harmoni mellan forskningsfråga och metod.

Det fenomen som uppmärksammas i denna studie är undervisning och lärande i matematik. Mer specifikt gäller det lärares och elevers handlingar och interaktion i matematikklassrummet. Att göra en observationsstudie förefaller som en lämplig metod för att studera detta. Om istället intervjuer av lärare och elever hade genomförts hade data exempelvis kunnat säga något om deras uppfattningar om det som händer i matematikklassrummet, vilket inte är syftet med denna studie. Därför är observation den metod som har valts för datainsamlingen. Tanken om den interna logiken speglar, enligt

4. Metod

Larsson (2005), idén om att ett vetenskapligt arbete ska vara som ett slutet system där alla delar är väl sammanfogade. Intentionen under forskningsprocessen, från början till slut, har därför varit att i möjligaste mån hålla fast vid den röda tråd som forskningsfrågan utgör. Redovisning av tidigare forskning har skett med tanke på att den ska vara relevant för den här studien och strävan har varit att alla frågeställningar som formulerats också ska bli bearbetade och kommenterade. I detta ingår också att studiens resultat diskuteras i ljuset av dessa tidigare forskningsresultat. Hur väl det har lyckats i mitt arbete kan återspeglas i graden av harmoni mellan del och helhet, vilket är ett annat sätt att formulera detta kvalitetskriterium (Larsson, 2005).

Generaliserbarhet

Kombinationen kvalitativa studier och generaliserbarhet är inte okomplicerad. Larsson (2009) visar på olika sätt att argumentera för hur generalisering kan utformas i kvalitativa studier. Ett av dessa, som är användbart i detta arbete, är generalisering via kontextlikhet. Grundtanken är att generalisering av tolkningen ska kunna göras till andra fall där kontexten är densamma som hos det som studerats. Detta resonemang har sina rötter hos Lincoln och Guba (1999), som påtalar vikten av att vara frikostig i redovisning av empirin och därför bör forskaren “accumulate *empirical* evidence about contextual similarity; the responsibility of the original investigator ends in providing sufficient descriptive data to make such similarity judgements possible” (Lincoln & Guba, 1999, s. 404).

Presentationerna av de fyra matematikklassrummen är omfattande, eftersom de innehåller gott om excerpt med tillhörande tolkningar och därutöver en hel del beskrivningar. Detta är menat som ett sätt att visa generositet i redovisningen av empirin, på det sätt som Larsson (2009) efterlyser. Därmed kan det också vara möjligt att göra generaliseringar till andra liknande kontexter, vilket i det här fallet skulle vara andra matematikklassrum.

Etiska överväganden

Forskningsetiska överväganden är väsentliga för att skydda forskningspersonerna i olika avseenden. Enligt Vetenskapsrådet (2011) handlar det framför allt om att göra rimliga avvägningar mellan olika intressen som alla har ett berättigande. Det gäller såväl samhällets krav på ny kunskap och god kvalitet i forskning som individers rätt att skyddas från skada och kränkning. Det senare, även kallat individskyddskravet, har varit utgångspunkt för mina forskningsetiska överväganden. I skriften *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*

4. Metod

konkretiseras individskyddskravet i fyra olika huvudkrav (Vetenskapsrådet, 2011). Metodkapitlet avslutas här med en redogörelse för hur dessa krav har beaktats i min forskningsprocess.

Det första brevet som skickades till rektorer och lärare i år 2 för att ”värva” deltagare till studien, innehöll information om studien och dess övergripande syfte. De lärare som accepterade att delta hade därmed fått skriftlig information. I samband med att jag besökte skolor där det fanns lärare som var positiva till att medverka, informerades de ytterligare om själva studien och lärarna hade också tillfälle att ställa frågor. Eleverna informerades i samband med att jag besökte klassen och läraren i syfte att bestämma tidpunkt för den första lektionen som skulle filmas. Därigenom har *informationskravet* fullgjorts. I ett tidigare avsnitt, ”Fältarbete” redovisas både detta och mitt tillvägagångssätt för att erhålla samtycke från elever och föräldrar för att kunna uppfylla *samtyckeskravet*. För de elever där föräldrarna inte hade gett samtycke ordnades matematikundervisning i ett annat rum.

Som forskare kan man på fältet också träffa på personer utöver dem som har delgivits information och lämnat sitt samtycke, men det är knappast möjligt att inför varje observationstillfälle få in extra samtycke från enstaka individer (Bryman, 2011). I de situationer då detta har inträffat har det oftast gällt resurslärare, som ibland har kommit in i klassrummet när lektionen har pågått en stund. Då det har varit möjligt har de fått mycket kort information om mitt ärende direkt efter lektionen och då även blivit tillfrågade om han/hon haft något att invända mot att eventuellt finnas med i filmmaterialet. Föräldrar, som har varit på besök, har ofta uttryckt sig positivt till att deras barn deltar i forskningsprojektet.

Kravet på *konfidentialitet* har följts genom att såväl elevers som lärares namn är fingerade. För att försvåra för andra att känna igen de klassrum som presenteras i inledningarna till de fyra miljöer som redovisas i resultatkapitlet har en hel del detaljer utelämnats i beskrivningarna. Av dessa framkommer också att klassrum på lågstadiet uppvisar många likheter i den ursprungliga utformningen, till exempel rummets form, placering av dörrar osv. Namn på skolor förekommer inte heller i studien. Tillsammans kan detta bidra till att det är svårare för kolleger, elever och andra läsare att kunna koppla ihop ett klassrum med en viss skola. Däremot kan man bara spekulera kring huruvida de olika lärarna som har medverkat i studien känner igen sig själva där de förekommer i excerpt som representerar de olika klassrummen. Det verkar inte helt orimligt att de kan göra det. Förhoppningsvis är det inte lika enkelt för kolleger att känna igen sina arbetskamrater och detta gäller säkert även eleverna, som också utgör en betydligt större grupp jämfört med lärarna.

4. Metod

Genom att det empiriska materialet som har genererats under denna forskningsprocess endast används i forskningssyfte uppfylls även Vetenskapsrådets fjärde krav, *nyttjandekravet*.

Introduktion till resultatredovisningen

Det här avsnittet utgör en övergång från metodkapitlet till resultatredovisningen. Syftet med resultatredovisningen är att presentera vad som kännetecknar några olika matematikklassrum på lågstadiet då innehållet i undervisningen är skriftliga räknemetoder i addition och subtraktion. Beskrivningarna utgår från lärares och elevers handlingar i matematikklassrummet och har samlats under de temanamn som framkommit genom analysarbetet. Presentationerna innehåller flera excerpt från olika undervisningssituationer. Excerpten visar sådana exempel på lärares och elevers handlingar som är utmärkande för det klassrum som beskrivs. Handlingarna är inte isolerade företeelser, utan sker i ett ständigt pågående förlopp av processer som blir synliggjorda genom handlingarna.

Två sorters undervisningsprocesser beskrivs, generella och specifika. Generella undervisningsprocesser i matematik omfattar handlingar som sker i relation till matematikämnet rent allmänt. Specifika undervisningsprocesser däremot, beskriver handlingar som utförs i förhållande till det aktuella undervisningsinnehållet, skriftliga räknemetoder i addition och subtraktion.

Som redan framkommit tidigare i texten har den inledande empirinära analysen utmynnat i fyra matematikklassrum, som presenteras i var sitt kapitel under beteckningarna Almen, Björken, Eken och Lönner. Varje resultatkapitel inleds med en kort miljöbeskrivning där några typiska drag tas upp, framför allt med avseende på sociala aspekter. Alla klassrum som ingår i studien är ljusa med mycket fönster och utrustade med stor skrivtavla, diverse skåp, hyllor, lärarens bord och extra bord. I några av klassrummen sitter eleverna två och två eller fyra och fyra i rader där alla är vända åt samma håll. En del klassrum är möblerade med bord eller bänkar så att eleverna sitter fyra eller fem tillsammans i grupper.

Efter miljöbeskrivningen, under rubriken I matematikklassrummet, återfinns resultatet från den deskriptiva analysen. Här redovisas de handlingar som är utmärkande, enligt följande struktur.

- I. Generella undervisningsprocesser i matematik
- II. Specifika undervisningsprocesser i matematik

4. Metod

I den andra delen, En x-inriktad verksamhet²² som följer efter I matematikklassrummet, är det istället mitt analysverktyg som ligger till grund för redovisningen av resultatet. Här är undervisningsverksamheten i fokus. Denna del avslutas med en presentation av vad som utifrån analysen visat sig vara möjligt att lära i den aktuella verksamheten.

²² De olika verksamheterna skiljer sig åt, vilket är synligt i rubriceringen för den andra delen av respektive resultatkapitel. Här har benämningen istället ersatts med x, eftersom beskrivningen gäller strukturen för alla de fyra kapitlen.

5. Almen

I matematikklassrummet

Det verkar ganska trångt i klassrummet. Ändå är det vanligtvis en lugn atmosfär som möter den som besöker klassrummet även om någon enstaka elev hörs betydligt mer än de övriga. När eleverna arbetar på egen hand i matematikboken hjälper de ofta varandra, vilket emellanåt också bidrar till en högre ljudvolym. Läraren är överlag sparsam med tillsägelser, även då volymen når över samtalsnivå. Några elever hämtar då hörselkåpor, men de flesta eleverna visar inte att de berörs av att ljudnivån i klassrummet ibland är högre. Hörselkåpor ligger på ett bord tillsammans med en del laborativt material som eleverna kan använda om de vill. Materialet utnyttjas mycket sporadiskt.

Vid mitt första besök har läraren beskrivit klassen som mycket ”aktiv” och särskilt betonat att eleverna är livliga och entusiastiska. Det är inte ovanligt att matematiklektionerna avslutas med att läraren sätter sig vid pianot och börjar spela en sång som är välbekant för eleverna. Ofta är det rörelsesånger och eleverna är snabbt med på lärarens initiativ. De både sjunger och gör rörelser. Eleverna ser ut att uppskatta att sjunga tillsammans och det råder en glad och lättsam stämning i klassrummet.

I. Generella undervisningsprocesser i matematik

I det här avsnittet redovisas elevers och lärares handlingar i relation till matematik rent allmänt, men utan direkt anknytning till det aktuella undervisningsinnehållet.

Matematik hanteras mest på egen hand, men även alla tillsammans

Matematiklektionerna inleds med någon aktivitet där alla elever kan delta samtidigt. Tiden för dessa aktiviteter varar från ett par upp till ungefär tio minuter. Lektionerna fortsätter sedan med att läraren går igenom eller repeterar skriftliga räknemetoder gemensamt med hela klassen, genom att de löser uppgifter tillsammans på tavlan. Vid de gemensamma genomgångarna förekommer det att elever spontant ställer frågor eller uttrycker synpunkter. Efter genomgången skriver läraren på tavlan den aktuella sidan i matematikboken, ibland är det två sidor, som sedan eleverna arbetar med på egen hand under resten av lektionen. Det betyder att en stor del av

lektionstiden går åt till att eleverna övar på samma typ av uppgifter som läraren har visat och först gått igenom tillsammans med klassen. Som mest upptar de gemensamma aktiviteterna och helklassgenomgångarna halva lektionstiden, men ibland inte mer än tredjedel. Vid de lektionerna förfogar eleverna över cirka 30 minuter för att arbeta i matematikboken. Ofta hjälper eleverna varandra när de arbetar. Elever som blir klara med de angivna sidorna går vidare till bokens extrasidor. Undervisningens organisation växlar således mellan helklassaktiviteter och enskilt arbete, där tonvikten ligger på elevens arbete i matematikboken.

Alla involveras

Aktiviteterna som ofta inleder matematiklektionerna innebär att alla i klassen ges möjlighet att delta, ibland som individer och ibland tillsammans med en kamrat. Det kan vara ett spel, exempelvis "kappsegling"²³ eller bingo, där man utgår från en särskild multiplikationstabell. Det kan också bestå i att läraren säger ett tal som utgör den ena tiokamraten²⁴ eller helt enkelt bara ställer frågor i stil med "sju plus sju?" På tecken från läraren svarar klassen unisont. När läraren informerar om dagens aktivitet möts detta med jaa-rop från eleverna och de är snabbt med på noterna, oavsett om det gäller att spela kappsegling eller svara gemensamt på lärarens snabba frågor. Även föräldrar som är på besök involveras i aktiviteterna när läraren behöver extra assistans, som exempelvis att slå tärningarna i bingospelet. Vissa av aktiviteterna innehåller tävlingsmoment, vilket tycks vara ett uppskattat inslag att döma av många elevers entusiastiska uttryck. Detta innebär att det stundtals blir ganska högljutt, under dessa tillfällen särskilt när klassen spelar spel och de flesta eleverna är väldigt ivriga.

I samband med genomgångar är det inte bara elever som räcker upp handen som förväntas svara. Läraren riktar även frågor till elever som inte räcker upp handen, vilket talar för att alla förväntas delta aktivt.

²³ Kappseglingsspelet består av en spelplan med ett antal segelbåtar där var och en har ett tal mellan 10 och 20 angivet i seglet, en tiosidig tärning och minst tio markörer i två olika färger. Eleverna, som spelar i par, turas om att slå två slag åt gången med tärningen, adderar de två talen som tärningen visar och placerar en av sina markörer på seglet med det tal som motsvarar den aktuella summan. Om talet inte finns eller redan använts går turen över till kamraten. Den elev som först har lyckats täcka fem segel har vunnit.

²⁴ Då läraren säger sju svarar eleverna tre, då läraren säger sexton svarar eleverna fyra etc.

Matematikprestationer uppmärksammas som kollektiva framgångar

Ett återkommande inslag är lärarens kommentarer som uttrycker uppskattning över elevernas prestationer. Vanligtvis förekommer det i form av kollektivt beröm i samband med att lektioner avslutas, som i följande exempel.

Excerpt A1

- L Får jag säga en sak till er, angående det här med mellanled? Ni är *mycket* duktigare på det nu, än när ni gjorde det dom första gångerna. Känner ni det→
- E Ja!
- E1 Yes!
- L att det går lätt nu?
- E Yes!

Lärarens beröm är exempel på feedback som har koppling till det matematiska innehållet, att kunna använda mellanled som en skriftlig räknemetod. Då eleverna bjuds in att kollektivt bejaka lärarens respons ges de möjlighet att också själva uttrycka sig positivt om den egna matematiska förmågan.

Andra exempel på lärarens beröm ger uttryck för att matematikboken har en central roll i matematikundervisningen.

Excerpt A2

- L Hörni ni, det är så att det har gått väldigt bra. Dom flesta har kommit *långt*.

Här får eleverna positiv återkoppling på sina prestationer, men utan att det framgår specifikt vad de har lyckats med matematiskt. Däremot framkommer det i lärarens respons att det är bra att de flesta har kommit långt, vilket signalerar att när eleverna hinner göra många uppgifter i boken innebär det att de är framgångsrika i skolmatematiken.

Gemensamt för båda exemplen är att läraren vänder sig till hela klassen, vilket är kännetecknande för det här matematikklassrummet när det handlar om positiv feedback.

Matematik är att följa (lärobokens) metoder och regler

Undervisningen utgår till stora delar från hur undervisningsinnehållet är strukturerat i den lärobok som lärare och elever använder. Lärarens kommunikation antyder att läroboken innehåller regler och direktiv om hur eleverna ska gå tillväga, bland annat när de använder skriftliga metoder för

att göra additions- och subtraktionsberäkningar. Vid situationen som återges nedan, ska klassen under lärarens ledning tillsammans lösa en textuppgift²⁵ i matematikboken. En elev har just läst uppgiften²⁶ högt för klassen då läraren uppmärksammar eleverna på att boken ger anvisningar om hur de kan tänka när de löser uppgiften.

Excerpt A3

- L Ja. Första talet här, så har dom gjort en pratbubbla, och det ser ni ju. Och där står det *precis* hur man kan tänka.

Läraren betonar här ordet *precis*, vilket förstärker uppfattningen som läraren vidareförmedlar, det vill säga matematikboken innehåller bestämda anvisningar om hur man ska tänka. Då elevernas möte med matematik ofta sker via matematikboken, kan lärarens uttryckssätt bidra till en föreställning om att matematik är att använda metoder och regler som andra (i det här fallet läroboksförfattaren) har utformat.

Exemplet ovan belyser relationen till matematik generellt och tyder, i likhet med föregående utdrag (excerpt A2), på att undervisningen styrs av matematikboken. Det kan betyda att eleverna ser matematik som något regelstyrt.

Matematik kräver tankearbete

Det har framkommit tidigare i redovisningen att någon form av gemensam aktivitet ofta inleder matematiklektionerna i klassrummet Almen. Läraren kommenterar dessa aktiviteter i stil med att eleverna ska ”värma upp”. Detta för tankarna till idrottsverksamhet, men här syftar det istället på att komma igång med tankeverksamheten. Följande utdrag återger hur läraren inleder matematiklektionen efter dagens lunchpaus.

Excerpt A4

- L Idag ska vi räkna mellanled igen, fast idag blir det att *tänka* lite mer, tror jag. Nu kommer ett nytt sätt att tänka när vi räknar mellanled.
- E1 Nu?

²⁵ I detta arbete används benämningen textuppgift istället för problemlösningsuppgift, vilket annars är vanligt för den typ av uppgifter som presenteras i fotnoten nedan. Här vet eleverna att de ska använda antingen addition eller subtraktion, vilket gör att det knappast kan betecknas som äkta problemlösning.

²⁶ ”Det finns 32 glassar i frysen. 15 glassar äter Anton och hans kompisar upp. Hur många finns det sen kvar” (Rockström & Lantz, 2005, s. 56).

- L Ja, jag ska berätta om det strax, men först ska vi ta och värma upp huvudena lite, när jag säger en tiokompis och ni säger den andra.

Båda lärarens repliker ovan lyfter fram tankeverksamhet som en central aspekt i samband med matematikundervisning. När läraren säger att de ska ”värma upp huvudena” ger det uttryck för att hjärnan spelar en väsentlig roll vid utförande av matematiska handlingar. Nedan följer ytterligare ett exempel på hur hjärnan uppmärksammas då läraren inleder en matematiklektion.

Excerpt A5

- L Då så, då är det matte nu och då får vi köra igång med detsamma idag, så att vi hinner lite grann. Ska ni ta upp era matte, nej vänta ett tag förresten! Ner med locken! /.../ Vi tar bara så här [ohörbart] hjärnan [PEKAR PÅ SITT HUVUD]. Först, vad är två plus två, svara alla!

Läraren återkommer således till att hjärnan behöver motioneras innan eleverna ska arbeta med det aktuella innehållet. Vad det innebär att använda hjärnan verkar handla mest om att komma ihåg talfakta. Ett utmärkande drag i den här typen av matematikklassrum tycks alltså vara att matematikaktiviteter uppfattas som tankekrävande samtidigt som tankeverksamhet tycks syfta på att komma ihåg.

Laborativt material används högst sporadiskt av läraren för att representera matematiska begrepp eller tankeformer. Detsamma gäller eleverna som inte verkar använda något material på eget initiativ. Vid några tillfällen, då elever inte tycks förstå, visar läraren subtraktionsberäkning med hjälp av sina fingrar och någon gång använder en elev tiobasmaterial. Lärarens begränsade användning av laborativt material kan betyda att materialet i första hand ses som ett hjälpmedel när elever inte förstår. Därmed ges ytterligare tyngd åt synsättet som innebär att matematik är verksamhet för hjärnan, men inte så mycket för handen.

Matematik är att räkna både snabbt och rätt

Det har tidigare framkommit att läraren berömmar eleverna gemensamt för att många har kommit långt under lektionen (excerpt A2), det vill säga de har gjort många uppgifter i matematikboken. Det är alltså viktigt att vara snabb med sina uppgifter. Läraren låter också eleverna möta matematikaktiviteter där tonvikten särskilt ligger på att vara snabb, något som tycks väcka motivation hos många av eleverna. Exempel på en sådan aktivitet är när

eleverna ska ”göra remsor”²⁷ med tjugo uppgifter. I utdraget som följer nedan har läraren just avslutat den gemensamma genomgången och instruerat eleverna vilka sidor de ska arbeta med i boken. När det står klart för eleverna att de först ska få göra var sin ”remsa” hörs ett unisont ”jaa” från större delen av klassen. De flesta elever ser ut att uppskatta den här sortens aktiviteter som de kan utföra snabbt under förutsättning att de har tillräckliga kunskaper. Några enstaka elever visar däremot inte samma stora entusiasm, men de genomför uppgifterna utan att visa något tydligt missnöje.

Excerpt A6

- L /.../ Mm, nu är det så här, att ni ska alldeles strax få sätta igång och räkna...mellanleden här. Båda dom här två sidorna handlar om mellanleden, *men* eftersom det är så bra att bli snabb på att räkna såna här tal som fem plus sju också [PEKAR PÅ FEMMAN OCH SJUAN PÅ TAVLAN], då kör vi en sån här liten remsa som →
- E Jaa!
- L /.../ Jag vet att ni är *snabba*, *men* jag vill att ni gör *rätt* också.

Av lärarens yttrande till eleverna framgår att det är bra att kunna räkna snabbt. Elevernas entusiasm kan bero på att de är inriktade på att göra uppgifterna snabbt, vilket är särskilt lockande för dem som är tävlingsinriktade. När snabbhet betonas i det här sammanhanget kan det betyda att eleverna förväntas behärska de olika additions- och subtraktionstabellerna så att de inte behöver utföra egentliga beräkningar utan kan använda talfakta som de kommer ihåg. Lärarens tillägg i den sista repliken uppmärksammar dock att det finns andra aspekter i matematiken som också är viktiga, bland annat att göra rätt.

Exemplet ovan illustrerar således att lärare och elever delar en uppfattning som innebär att det är viktigt att vara snabb i arbetet med matematik. Det framkommer emellertid att detta inte är det enda som är väsentligt då läraren försöker poängtera att det också är viktigt att göra rätt.

II. Specifika undervisningsprocesser i matematik

Avsnittet uppmärksammar lärares och elevers handlingar i förhållande till det specifika undervisningsinnehållet.

²⁷ En remsa innehåller 20 additions- eller subtraktionsuppgifter inom talområdet 10-20, ofta med tiotalsovergång, som eleverna förväntas lösa så snabbt som möjligt.

Mellanledet visar hur eleven tänker, i enlighet med läroboken

Ett kännetecknande drag för Almen är att matematik innebär att följa lärobokens regler och anvisningar. Utmärkande är också uppfattningen att mellanledet²⁸ representerar ett sätt att tänka vid genomförande av beräkningar. Läraren säger till exempel ”vi ska ha ett mellanled här, tala om hur vi tänker”. Följande excerpt (A7) visar hur mellanledet framställs i läroboken. På lärarens uppmaning läser en elev högt för klassen innan eleverna börjar arbeta på egen hand efter lärarens genomgång.

Excerpt A7

- E1 [LÄSER] ”Räkna varje talsort för sig. Börja med tiotalen. Skriv mellanled som visar hur du tänker.”²⁹

Texten som eleven läser innehåller först en anvisning om hur eleverna ska tänka. Därefter uppmanas de att skriva hur de tänker, vilket här betyder att de ska följa tankesättet som läroboken anger i texten som eleven har läst..

Lärarens uppmaningar till eleverna liknar lärobokens formuleringar om mellanled. Det visar bland annat exemplet nedan. Enligt lärarens inledande replik kan eleverna klara att lösa additionsuppgifter utan att använda mellanled. För säkerhets skull ska de ändå skriva ut mellanledet eftersom det, enligt lärarens yttrande, kan hjälpa eleverna att bli säkra på hur de ska skriva själva tankesättet. Det kan också vara så att en del elever fortfarande är osäkra på hur mellanledet ska skrivas, men läraren uppmanar ändå alla att skriva mellanled, även de som kan lösa uppgifterna som ren huvudräkning. Uppgiften som läraren syftar på i utdraget nedan är $43+26$.

Excerpt A8

- L /.../ Jag vet att ni kan räkna ut det där, *utan* att skriva ett mellanled, men vi gör det i alla fall, bara för att vi ska vara säkra på hur vi →
- E1 Va?
- L skriver när man tänker.

Replikväxlingen ovan ger ytterligare exempel på hur mellanledet beskrivs som ett sätt att uttrycka och tydliggöra tankesätt vid additions- och subtraktionsberäkning. Det visar också att läraren eftersträvar att alla elever ska skriva mellanled, även de som klarar att göra beräkningarna utan att

²⁸ Kapitel 2 har tidigare gett exempel på mellanled vid addition. Här presenteras ett exempel på mellanled vid subtraktion utan tiotalsovergång.

Vid beräkningen $68-23=40+5=45$ utgör $40+5$ ett mellanled.

²⁹ Boken som används är Rockström, B. & Lantz, M. (2005). *Matteboken 3A*, [Grundbok], (2. uppl.). Stockholm: Bonnier utbildning. Eleven läser från sid. 56.

använda mellanled. Den uppfattningen kommer tydligt till uttryck vid andra tillfällen då läraren säger till eleverna att de inte får hoppa över mellanledet.

Att mellanledet inte i första hand uttrycker elevens egen tankegång utan är ett tankesätt som de måste lära sig framgår särskilt av sekvensen som följer härnäst. I samtalet mellan läraren och klassen framkommer att eleverna tidigare har tyckt att mellanledet vid subtraktion är svårt eftersom det ska vara plustecken mellan talsorterna i mellanledet trots att det gäller subtraktionsberäkning³⁰. Replikväxlingen nedan följer direkt efter att en elev (D) som tilltalas av läraren, just har redogjort för att beräkningen av $47-15$ resulterar i mellanledet $30+2$. Läraren har samtidigt skrivit $47-15=30+2$ på tavlan.

Excerpt A9

- L Jättetydligt, nu blev det *väldigt* tydligt och klart. Bra D!...Ni tyckte *förut*, när vi höll på med det här, att det var lite konstigt med plusset.
- D Nej, det var det inte!
- L När ni började skriva, när ni tänkte i huvudet, då tänkte ni ju så, alltid. Men sen när ni skulle börja skriva då tyckte ni att det kändes lite konstigt. Men *det* har ni vant er vid nu, för man kan ju inte ta minus.

Lärarens yttranden ovan antyder, trots elevens invändning, att det inte är självklart för eleverna att skriva mellanled som innehåller plustecken när de löser subtraktioner. En tolkning av lärarens andra yttrande kan vara att eleverna tänkte rätt när de tidigare genomförde enklare beräkningar, exempelvis $18-15$ eller $12-7$ som ren huvudräkning. När eleverna sedan skulle börja skriva mellanled och använda plustecken mellan talsorterna upplevde de till en början att det var konstigt. Då läraren säger att de nu har vant sig, kan det betyda att eleverna har övat mycket på att utföra subtraktioner där de har skrivit mellanled, så att de numera vet att det ska vara plustecken mellan tiotal och ental³¹. Med ett sådant tillvägagångssätt framstår mellanledet som en procedur som eleven måste lära sig att tillämpa genom upprepad övning. Därmed är det inte elevernas egna tankar som kommer till uttryck i mellanledet. Att använda mellanled för att lösa subtraktioner innebär här att använda ett tankesätt som ursprungligen kommer från läroboken.

³⁰ Några veckor tidigare har eleverna lärt sig att detta gäller vid addition, vilket framgår av det videofilmade materialet.

³¹ Samtalet gäller subtraktion *utan* tiotalsövergång. Läraren har vid det här tillfället ännu inte gått igenom subtraktion *med* tiotalsövergång, där mellanledet skrivs med ett minustecken.

Procedurmässiga beskrivningar då mellanledet är i fokus

Genomgångar i helklass inleds vanligtvis med att klassen tillsammans löser additions- eller subtraktionsuppgifter som läraren har skrivit på tavlan. Vid dessa tillfällen är symbolspråket³² utgångspunkt för samtalet mellan lärare och elever. I läroboken som används är talsorter ett centralt begrepp. Tiotal och ental är också termer som förekommer både i boken och i kommunikationen i klassrummet.

När eleverna ska berätta för läraren och klassen hur subtraktionerna beräknas uppmanas de att redogöra för mellanledet. Det kan betyda att läraren vill hindra eleverna från att säga svaret direkt, vilket framgår av lärarens inledande replik i det andra excerptet nedan. Då uppmärksamheten riktas mot mellanledet tycks det bidra till att procedurerna hamnar i fokus när eleverna beskriver beräkningarna. Ett tecken på detta är att elever i sina redovisningar använder entalsnamnen, det vill säga talnamnen mellan noll och tio, även när de pratar om tiotalen i uppgifterna.

Följande excerpt visar ett exempel där eleven A konsekvent använder entalsnamn för att redovisa beräkningen av additionsuttrycket $43+26$, som läraren har skrivit på tavlan. Läraren följer upp elevens kortfattade svar med hjälp av frågor, som kan synliggöra de olika räknehandlingarna var för sig, först tiotaladditionen, fyrtio plus tjugo och därefter entalsadditionen, tre plus sex.

Excerpt A10

- L Fyrtiotvå³³ plus hur ska vi tänka nu då? Kommer ni ihåg?
/.../
- L Vi tar, A berätta!
- A Fyra plus två plus tre plus sex.
- L Okej, vad är fyra plus två som du sa först?
- A Sextio.
- L För du tänkte fyrtio plus tjugo, eller hur [PEKAR SAMTIDIGT PÅ TIOTALEN]?...Ja! Då skriver vi det [SKRIVER 60], sextio. Vad sa du sen?
- A Ähh, nio.
- L Och vad var det du la ihop då?
- A Plus nio.
- L Ja, plus, vad var det du la ihop?
- A Ähh...

³² De symboler som eleverna möter i de aktuella situationerna är siffror samt plus-minus- och likhetstecken.

³³ Läraren säger fyrtiotvå, men talet som är skrivet på tavlan är 43. Eleven utgår från talet på tavlan.

5. Almen

- L Var vad det som blev nio?
A Tre.
L Plus?
A Plus sex.
E? Är nio.
L Tre plus sex, och eftersom det är ental [PEKAR PÅ ENTALEN], så blir det inte mer än nio, eller hur [SKRIVER 9 TILL HÖGER OM +]? Och då blir talet?
A Sextionio.
L Sextionio [SKRIVER = 69]. Var det svårt A?
A Nej.
L Du tyckte det var lätt?
A Ja.

Det framgår att eleven inte gör någon skillnad mellan tiotal och ental i sitt språkbruk, men verkar ändå inte ha några svårigheter att hålla isär talsorterna i den slutliga beräkningen. Läraren uppmärksammar eleven och klassen på att när eleven säger att fyra plus två är sextio, betyder det egentligen fyrtio plus tjugo. Genom att formulera om elevens svar och sedan också tala om tre plus sex som ental, placeras talsorterna i blickfånget. På så vis sätter läraren den begreppsliga förståelsen i fokus. I det här sammanhanget innebär det att förstå entalssiffrors och tiotalssiffrors olika värde.

Att behärska proceduren verkar inte vara någon garanti för att eleverna ska lyckas med additions- eller subtraktionsberäkningarna. Det framgår av nästa exempel där eleven visar säkerhet i proceduren, så långt det är möjligt. Till skillnad från eleven A i excerptet ovan uttrycker däremot den här eleven en viss osäkerhet när det gäller talsorterna. Det visar sig särskilt då eleven kommer till momentet för beräkning av entalen och säger fem minus tio. Av detta kan vi ana att eleven inte är helt övertygad om vad siffran ett representerar i talet tjuogoett, ental eller tiotal.

Excerpt A11

- L [SKRIVER På TAVLAN 55-21=] Jag vill inte höra svaret. Jag vill höra mellanledet...P!
P Femtio minus tjugo är trettio.
L [SKRIVER 30 EFTER =]
P Och så plus.
L [SKRIVER +]
P Och så är det fem minus tio...fyra ..fyra...fyrtio... [TILL LÄRAREN SOM VÄNTAR MED ATT SKRIVA], en fyra.
L [SKRIVER 4 =] Och det blir?
P Ähh, trettiofyra.
L [SKRIVER 34] Trettiofyra. Precis! Ja det gäller att hålla ordning på när det är tiotal och när det är ental.

Det procedurmässiga förhållningssättet blir särskilt tydligt då eleven säger att det ska vara plus. Eleven har helt enkelt lärt sig att det ska vara ett plustecken och följer den regeln utan att dessförinnan ha tagit reda på resultatet av entalsberäkningen och hur detta kan påverka beräkningen av subtraktionsuttrycket som helhet.

Talsorter uppmärksammas genom lärarens frågor och omformuleringar

Exemplet med eleven A tidigare (Excerpt A10) illustrerar hur läraren formulerar om elevens svar och därigenom kan synliggöra att entalsciffror och tiotalssiffror har olika värde. Ental och tiotal är begrepp som ofta förekommer genom lärarens initiativ, dels genom omformuleringar men också genom att läraren ställer frågor till eleverna. Det senare exemplifieras i excerptet nedan, vilket återger slutet av en sekvens. Inledningsvis har läraren gett eleverna uppgiften $7+7$ på tavlan, varvid en elev snabbt kommer med svaret fjorton. Både lärare och elever verkar vara överens om att detta var en enkel uppgift. Därefter skriver läraren ytterligare ett additionsuttryck på tavlan, $70+70$. Även denna gång är eleverna snabba med svaret, 140. En elev ombeds då att förklara tankegången bakom den sista beräkningen. Elevens redogörelse inleder excerptet nedan.

Excerpt A12:

- E1 Det är bara, om man tar bort alla nollor, då är det likadant som det där talet där uppe. Det är bara att plussa på en nolla, och sen bara, man kan ju skriva sju plus sju är lika med fjorton och sen är det bara att sätta till en nolla på varje ställe.
- L För när det står en nolla efter, vad är det för slags tal då?
- E1 Äh, tiotal
- L Tiotal ja. Och då har vi sju tiotal plus sju tiotal [PEKAR PÅ TIOTALEN] och då blir det fjorton tiotal [PEKAR PÅ 140].

Eleven pratar om att ”man tar bort alla nollor” och att ”sätta till en nolla på varje ställe”, vilket i det närmaste uttrycker ett procedurmässigt förhållningssätt. På samma gång ger eleven intryck av säkerhet i själva tillämpningen och visar även medvetenhet om att talen med nollor efter är tiotal. Därför kan det ändå finnas anledning att tro att eleven har viss förståelse när det gäller talsorterna, i likhet med eleven D i det tidigare exemplet (excerpt A10). En förklaring till den här elevens uttryckssätt kan vara att vid presentationen fokuserar eleven på själva görandet, det vill säga tillvägagångssättet. Därmed ligger det nära till hands att redovisa en procedur. Då läraren ställer sin fråga riktas sedan uppmärksamheten mot tiotalen och hur dessa kan kännas igen. Genom att läraren visar på likheterna

mellan talen 14 och 140, skapas förutsättningar för eleverna att se samband mellan tal, och därigenom kunna göra generaliseringar till större tal, exempelvis talområdet 100-999. Med sin fråga riktar läraren fokus mot begreppslig förståelse. Här innebär det att upptäcka och förstå samband mellan tal och i ett vidare perspektiv, förstå hur talsystemet är uppbyggt.

Tillsammans illustrerar de tre senaste excerpten att eleverna placerar proceduren i centrum. Med hjälp av lärarens frågor och omformuleringar av elevernas yttranden uppmärksammas talsorter och deras innebörd. Det betyder att eleverna också ges möjlighet till begreppslig förståelse.

”Nyckelordsregler” som hjälp vid subtraktion

Det har tidigare framkommit bland generella matematikprocesser i Almen att matematik innebär att följa bestämda regler. Detta visar sig också i relation till innehållet som undervisas. En återkommande företeelse är att läraren gör eleverna uppmärksamma på särskilda ”nyckelord”, det vill säga ord som genom sin innebörd kan fungera som stöd för att komma ihåg en särskild regel. I följande exempel sker det i samband med att eleverna utför beräkningar av subtraktionsuttryck som innehåller tiotalsovergång. Kommunikationen som återges nedan utspelar sig i samband med att läraren introducerar subtraktion med tiotalsovergång med hjälp av ett uppgiftsexempel på tavlan, 42-26. Tillsammans har läraren och klassen klarat av momentet då tiotalen subtraheras och nu står det $40-20=20$ på tavlan. Den diskussion som då uppkommer angående hur mellanledet ska skrivas redovisas i excerptet som följer. Läraren upprepar vid flera tillfällen att något ”fattas” och syftar då på de fyra ental som återstår att subtrahera, vilket blir synligt i mellanledet, när detta skrivs 20-4. Ordet ”fattas” är därmed ett av de nyckelord som här förekommer i samband med subtraktionsberäkning

Excerpt A13

- L Titta, nu ska jag skriva så här! Två ta bort sex, minus sex [SKRIVER $2-6 = \text{UNDER } 40-20=20$]. Då kan jag ta bort två...det fattas fyra ju, eller hur?
- E? Mm.
- E1 Men då kan du inte skriva det?
- L Jo, då kan jag skriva så här, det fattas fyra [SKRIVER -4 TILL HÖGER OM $=$], jag skriver minus fyra.
- E? För det blir noll?
- L Kan jag ta bort dom fyra [PEKAR PÅ FYRAN] någon annanstans ifrån?
- E Mm...
- L B?
- B Från dom där tjugo →

5. Almen

- L Jag kan ju ta bort dom från dom här tjugo [PEKAR PÅ 20 TILL HÖGER OM =], eller hur?
- B och så blir det ju sexton.
- L ...Så då skriver jag mellanledet så här, fyrtio minus tjugo [PEKAR PÅ TIOTALEN, FYRAN OCH TVÅAN I UPPGIFTEN], det blir tjugo [SKRIVER 20 TILL HÖGER OM =]. Och sen så, två minus sex [PEKAR PÅ TVÅAN OCH SEXAN I UPPGIFTEN], det gick bara att ta bort två [HÅLLER UPP 2 FINGRAR], men då *fattades* det fyra. Då skriver jag, då tar jag bort det från tjugo istället [SKRIVER – 4], eller hur?

Kommunikationen kretsar kring vad som ska skrivas i mellanledet. När läraren i sin andra replik säger ”det fattas fyra, jag skriver minus fyra”, kan det liknas vid en regel som läraren ger eleverna till hjälp för att komma ihåg när det ska vara minustecken i mellanledet. Detta uttryckssätt upprepas i samband med att läraren återigen går igenom hela beräkningen (sista repliken i excerptet). Slutsatsen som läraren förmedlar är att då entalen i subtraktionsuttryckets andra tal överskrider entalen i det första talet, det vill säga det inte finns tillräckligt med ental att subtrahera ifrån, ska det vara minustecken i mellanledet. Med hjälp av nyckelordet ”fattas” konstruerar läraren en regel. Innebörden i ordet kan hjälpa eleverna att associera till subtraktion, eller som läraren uttrycker det, ta bort. Därmed kan nyckelordet fungera som vägledning för eleverna vid valet mellan plus- eller minustecken i mellanledet. Då läraren presenterar sin regel som innebär att om det fattas ental skriver jag minus, speglar detta ett synsätt som är utmärkande för Almen, att matematik innebär att komma ihåg och använda regler som andra har utformat.

Beräkningen av entalen, 2-6 visar sig problematisk för eleverna och någon uttrycker att det blir noll. När entalssubtraktionen sätts in i det aktuella sammanhanget, där fyra ska subtraheras från de återstående tiotalen, ges eleverna möjlighet att förstå betydelsen av lärarens formulering, ”det fattas fyra” och vad detta resulterar i när det gäller den slutliga beräkningen. Därmed kan regeln hjälpa eleverna på väg mot en förståelse för hur själva subtraktionen genomförs då den innehåller tiotalsovergång.

En annan elev, A, som berättar hur man löser en subtraktionsuppgift med tiotalsovergång byter ut ordet fattas och säger istället att det blir ”en som saknas” när man ska subtrahera fem ental från fyra ental i subtraktionen 54-25. Då eleven kan tillämpa regeln med nyckelordet, men istället väljer en synonym, kan det betyda att eleven uppfattar sambandet mellan innebörden i nyckelordet och valet av minustecken i mellanledet. Lärarens regel tycks därmed vara till hjälp för eleven att utföra subtraktioner med tiotalsovergång

vid användning av mellanled. Eftersom eleven just har utfört tiotalssubtraktionen har läraren skrivit $54-25=30$ på tavlan.

Excerpt A14

- L Ja [SKRIVER – 1 TILL HÖGER OM 30], hörde ni vad A sa?
Hon använde ordet *saknas*. Och *saknas* det en, då måste jag ta bort en här [PEKAR PÅ ETTAN OCH SKRIVER =].

Läraren uppmärksammar eleverna i klassen på att eleven använder ordet ”saknas” och upprepar regeln som formulerats tidigare. Som vi kan se byter läraren den här gången ut ordet *fattas* mot *saknas*. Då läraren visar att det är möjligt att använda synonyma nyckelord riktas uppmärksamheten mot själva meningen i nyckelordet. Det betyder att det är nyckelordets innebörd som är väsentligt för eleverna och inte själva ordet som sådant. Förutom att proceduren är i fokus, visar det sig alltså att även viss begreppslig kunskap aktualiseras när eleverna genomför subtraktionsberäkningar med hjälp av mellanled.

Regeln med nyckelord brukas även vid subtraktion utan tiotalsovergång, men då är det inte ordet ”*fattas*” som är aktuellt. Istället är det ordet ”*kvar*” som kommer till användning. Följande excerpt återger slutet av en sekvens då klassen tillsammans med läraren löser uppgiften 45-22, som läraren har skrivit på tavlan. De har subtraherat tiotalen och gemensamt kommit fram till att det är tjugo. På tavlan står nu $45-22=20$ och när de ska genomföra entalssubtraktionen, ger elever i klassen två helt olika förslag på vad som ska skrivas härnäst, antingen plus fem eller minus tre. Läraren ställer då frågan om entalen på nytt, vilket är det första som sägs i excerptet nedan. Läraren ställer frågan på ett sådant sätt och visar samtidigt med sina fingrar, att det är näst intill omöjligt för eleven att svara något annat än det som förväntas. När läraren i nästa drag säger till eleven ”nu sa du *minus* tre”, syftar detta på att eleven nyss har föreslagit att det ska stå minus tre i mellanledet.

Excerpt A15

- L Hur många ental har du kvar då?... Om du har fem [VISAR 5 FINGRAR], och ska ta bort två?
E1 Tre.
L Du har tre ental kvar. Nu sa du *minus* tre, men om du har kvar, vad tror du man ska använda för tecken då, när man har kvar?
E1 Plus.
L Plus [SKRIVER + TILL HÖGER OM 20]. Det låter väl som plus är ett väldigt bra ord för tecken för när man har *kvar*, va?... Om det *fattas* så skulle man inte använda det

Återigen visar det sig att läraren kopplar ihop ett bestämt ord med ett räknesätt och dess tecken. Den här gången är det ordet "kvar", vars innebörd läraren associerar med plustecknet. Vid andra tillfällen talar läraren också om att något är över, exempelvis "och *då* måste du ha plus, när det finns *över*". Av excerptet framgår också att läraren gör en jämförelse mellan kvar och fattas, en kontrasterande jämförelse. Härigenom ges eleverna möjlighet att observera att de två orden har helt olika innebörd och därmed också hör ihop med två skilda räknesätt.

Elever använder lärarens regler, men skapar även egna

Nyckelorden uppträder, som det framgår av resultatet, inte bara i lärarens uttryckssätt. De förekommer också då eleverna kommunicerar med såväl läraren som med andra elever. Följande excerpt visar hur elever använder nyckelordsregler i situationer då de hjälper varandra när de arbetar med uppgifter på egen hand i matematikboken. Av exemplet blir det synligt att som läraren säger, så säger även eleverna. Här är det en elev, E2, som hjälper sin bänkkamrat E1, att lösa 65-39, genom att nästan ordagrant använda den formulering som tidigare förekommit vid lärarens genomgång med klassen.

Excerpt A16

- E1 HAR PÅBÖRJAT UPPGIFTEN 65-39 OCH HAR SKRIVIT 30 + I SIN BOK.
- E1 [TILL BÄNKKAMRATEN] Blir det så?
- E2 Va?
- E1 Blir det ett plus där?
- /.../
- E2 Jamen, nej, fem minus nio är det.
- E1 Ja, och det blir fyra.
- E2 Men du kan ju bara ta bort fem. Du kan ju inte ta bort nio. Du kan bara ta bort fem. Då måste det vara *minus* eftersom det *fattas*. [E1 ÄNDRAR PLUSTECKNET TILL ETT MINUSTECKEN OCH LÖSER KLART UPPGIFTEN].

Förklaringen som E2 ger i den sista repliken tyder på att eleven har förstått kopplingen mellan nyckelordsregeln och valet av tecken i mellanledet. Eleven E2 kan dessutom tillämpa sitt kunnande vid subtraktionsberäkning med tiotalsövergång.

Reglerna med nyckelord kan alltså hjälpa eleverna att hålla reda på när det ska vara plus eller minus i mellanledet. Ändå framkommer det att många elever är osäkra. En del konstruerar egna regler, som kan vara mer eller mindre lyckade. Det finns också elever som efterfrågar nya regler, kanske för att de inte har förstått reglerna som presenterats tidigare. Följande

elevkommentarer är exempel på en mindre lyckad regel som en elev kommit fram till på egen hand.

Excerpt A17:

- E1 /.../ för när det är plus i början då tar jag plus ett och när det är minus i början tar jag minus ett.
 E2 Ja, det gör jag med.

Eleven E1 utgår med andra ord från det ursprungliga uttrycket. Elevens regel, som det tydliga är fler som använder, innebär att om det är ett additionsuttryck blir det plus i mellanledet. Ett subtraktionsuttryck medför däremot att mellanledet skrivs med minustecken. Att eleven väljer just talet ett ska nog bara ses som ett exempel från eleven. Denna regel fungerar naturligtvis för additionsuttrycket, men inte vid all subtraktion eftersom subtraktion utan tiotalsovergång också leder till ett plustecken i mellanledet.

Den som inte förstår försöker hitta andra regler som kan fungera bättre, vilket illustreras i exemplet nedan. Situationen utspelar sig efter att klassen just har löst uppgiften 45-22 tillsammans med läraren, vilket delvis har redovisats ovan (excerpt A15). Det har rått delade meningar bland eleverna om det ska vara plus eller minus i mellanledet, men med hjälp av läraren har de kommit fram till att det ska stå plus tre. På tavlan har läraren nu skrivit $45-22=20+3=23$. Några elever verkar fortfarande osäkra och särskilt en av eleverna visar frustration över att inte förstå, det vill säga han kommer inte ihåg nyckelordsregeln eller verkar inte förstå hur den kan användas. Eleven ställer därför många frågor vid lärarens genomgång. Utdraget inleds med att eleven (E1) avbryter läraren, och säger att han inte förstår varför det blir plustecken i mellanledet. Läraren överlåter då till en annan elev (T) att förklara. Eleven presenterar en egen konstruerad regel som utgår från talens inbördes placering i subtraktionsuttrycket. Enligt eleven blir det plustecken i mellanledet när det största entalet finns i det första av de två talen i subtraktionsuttrycket (t. ex. 45-22).

Excerpt A18

- E1 [AVBRYTER LÄRAREN] Jag fattar inte varför det blir plus.
 E2 Jag [ohörbart]
 L T, förklara varför det blir plus där!
 T Åh, att största entalet är först.
 E1 Är det så man tänker hela tiden? Om det andra, som är längst bort dit [PEKAR ÅT HÖGER], om det är störst, då är det minus?
 L Alltså, ja, precis! För att om det är, om du har *många* här [PEKAR PÅ ENTALSTVÅAN] och ska ta bort några stycken bara, →

5. Almen

E1 [AVBRYTER] Mm, då är det ju minus.
L då har du ju kvar.

Eleven, E1, verkar inte ha någon hjälp av nyckelordsregeln utan efterfrågar ett sätt att tänka "hela tiden". Eleven tycks efterfråga en regel som kan tillämpas på samma sätt varje gång vid den här sortens beräkningar. Regeln som kamraten presenterar innebär att det blir plus när "största entalet är först". Den utgår alltså från talens placeringar i subtraktionsuttrycket. Därmed skiljer den sig från regeln som läraren presenterar där nyckelord har en central funktion.

Det framgår av de olika turerna i excerptet ovan att det pågår parallella samtal mellan lärare och elever. Läraren följer upp svaret som eleven T ger och möjligen den första frågan som E1 ställer, "är det så man tänker hela tiden". Därför handlar lärarens kommentarer om när det blir plus i mellanledet. Eleven E1 går däremot snabbt vidare och drar slutsatsen att om det motsatta råder, det vill säga om entalet i det högra talet är störst, blir det minus i mellanledet. Följden av detta blir att de två sista replikerna framstår som helt motsägelsefulla.

Exemplen ovan illustrerar hur eleverna försöker hitta mönster som vägledning för att kunna göra rätt när de skriver mellanled. Eleverna konstruerar rena minnesregler. Läraren däremot, riktar uppmärksamheten inte bara mot en procedur att komma ihåg utan också mot begreppslig förståelse där innebörden i nyckelorden kan vara till stöd för eleverna när de ska tillämpa proceduren.

Spontan konkretisering med fingrarna

Helklassgenomgångarna sker med utgångspunkt från additions- eller subtraktionsuttryck, det vill säga symbolspråket som läraren har skrivit på tavlan. I situationer då eleverna verkar osäkra, använder läraren sina fingrar för att konkretisera. Det inträffar då läraren går igenom subtraktionsuppgifter där vissa beräkningar leder fram till att tiotal och ental adderas i mellanledet, medan andra medför att entalen subtraheras från tiotalen. Om det blir plus- eller minustecken i mellanledet beror på om uppgiften innehåller tiotalsövergång eller ej. Då läraren använder fingrarna tycks det förekomma som en spontan handling, vilket verkar naturligt eftersom fingrarna finns nära till hands.

Uppgiften som läraren och klassen löser tillsammans nedan är 45-27. De har subtraherat tiotalen, fyrtio minus tjugo, och läraren fokuserar nu på subtraktionen med entalen. Det framgår av excerptet att läraren först visar fem fingrar (hela handen) och sedan viker ner de fem fingrarna, en i taget då sju ska subtraheras från fem.

Excerpt A19

- L Ja, nu är det minus [PEKAR PÅ MINUSTECKNET OCH SEDAN PÅ FEMMAN]. Och nu är det fem här igen [VISAR UPP 5 FINGRAR], och nu ska ni ta bort [PEKAR PÅ SJUAN]?...
- E? Sju.
- L Sju.
- K Då blir det minus!
- L [RÄKNAR PÅ HANDENS FINGRAR OCH VIKER NER ETT FINGER I TAGET] Ett två tre fyra fem kan vi ta bort, och hur många fattas det som vi inte har tagit bort, K?
- K Två.

När läraren visar talet fem med sina fingrar och sedan tar bort dessa, en i taget, illustreras subtraktionen $5 - 5$. Den aktuella subtraktionen är $5 - 7$, vilket inte är möjligt för läraren att konkretisera, då det inte går att visa ett konkret antal som är mindre än noll. Lärarens fingrar synliggör inte för eleverna hur många ental som återstår att ta bort. Fingrarna ger inte heller möjlighet att visa 45-27 i sin helhet. Med hjälp av fingrarna kan bara en begränsad del av själva räkneoperationen visas för eleverna. Det betyder att fingrarna i den här situationen inte är en funktionell representation som ger förutsättning att förstå innebörden i räkneoperationen som helhet. En spontan användning av det som finns till hands för att konkretisera räkneoperationerna kan följaktligen leda till att syftet med konkretiseringen inte uppnås helt.

Sammanfattning

En översikt på rubriknivå visar följande utmärkande drag för Almen.

Generella undervisningsprocesser i matematik

- Matematik hanteras mest på egen hand men även alla tillsammans
- Alla involveras
- Matematikprestationer uppmärksammas som kollektiva framgångar
- Matematik är att följa (lärobokens) metoder och regler
- Matematik kräver tankearbete
- Matematik är att räkna både snabbt och rätt

Specifika matematikprocesser

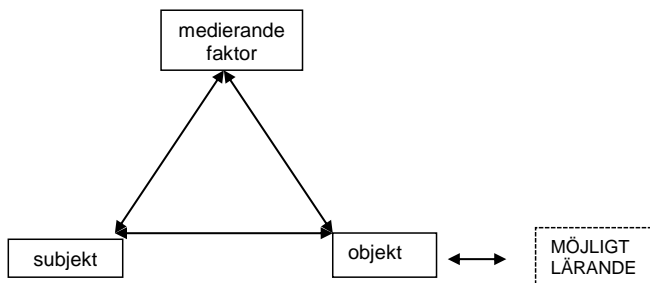
- Mellanledet visar hur eleven tänker, i enlighet med läroboken
- Procedurmässiga beskrivningar då mellanledet är i fokus
- Talsorter uppmärksammas genom lärarens frågor och omformuleringar
- ”Nyckelordsregler” som hjälp vid subtraktion
- Elever använder lärarens regler men skapar även egna

- Spontan konkretisering med fingrarna

En procedurinriktad verksamhet

Presentationen ovan är resultatet av en empirinära analys. Den redogör för processer som är utmärkande för Almen som matematikklassrum. Resultatet som redovisas härnäst är följden av den analys som genomförts med hjälp av analysverktyget och med utgångspunkt i de redovisade processerna som visat sig genom lärares och elevers handlingar. I enlighet med den definition som tidigare presenterats (Marton, 2000) kan handlingarna jämföras med metoder, vilket här handlar om vad lärare och elever gör med hjälp av artefakter men också i förhållande till faktorer med koppling till klassrumskulturen eller hur arbetet är organiserat i klassrummet. Med Engeströms (1987) modell för verksamhetssystem som grund för analysen, uppmärksammas således metoder som handlingar medierade via följande faktorer: (1) artefakter, (2) regler, (3) gemenskap och (4) arbetsdelning.

En generell modell av analysverktyget illustrerar relationen mellan subjekt, objekt och medierande faktor. Modellen har tidigare presenterats i kapitel 3, men här visas den på nytt.



Figur 7. Generaliserad modell över medierade handlingar.

För modellen gäller generellt att subjektet ibland representeras av läraren, ibland av eleven. Lärares och elevers metoder är föremålet för analysen. Metoderna är riktade mot objektet, det vill säga den uppgift eller matematikaktivitet som representerar det matematikkunnande eleven ska utveckla. Vad som görs möjligt att lära är således resultatet av metoderna, det vill säga lärares och elevers handlingar som utövas i relation till en viss faktor. I enlighet med Engeström (1987) utgörs dessa faktorer av artefakter, regler, gemenskap och arbetsdelning. Resultatet, vad som görs möjligt att lära, presenteras i termer av olika förmågor och kunskapsaspekter som kommer till uttryck i Lgr11.

I studien har faktorn artefakter begränsats till laborativt material och språklig kommunikation. I enlighet med Engeström (1987) och Wartofsky (1979) kan vi också tala om primära respektive sekundära artefakter. Det senare representeras i den här resultatredovisningen av talat språk och symbolspråk. Eftersom språkliga handlingar är ständigt förekommande i matematikundervisningen jämfört med handlingar via laborativt material, har sekundära artefakter getts större utrymme och placerats först i avsnittet om artefakter i vardera av avhandlingens fyra resultatkapitel. Efter avsnittet om handlingar via artefakter redovisas handlingar som medieras genom regler. I det här sammanhanget ska regler förstås dels som normer och praxis som visar sig i interaktionen mellan lärare och elever i matematikklassrummet, dels som uppfattningar som kan utvecklas till etablerade normer. I det efterföljande avsnittet uppmärksammas gemenskap, vilket här motsvaras av samhörighet med klassen som helhet, lärare och klass tillsammans eller inom mindre grupper i det fysiska klassrummet. Det kan även spegla influenser från världen utanför klassrummet, som exempelvis familj, kamrater och andra lärare. Den fjärde medierande faktorn som redovisas, arbetsdelning, syftar på de arbetsformer som kännetecknar verksamheten. I det här sammanhanget tas ingen hänsyn till maktfaktorer eller hierarkiska strukturer, utan det handlar enbart om ett sätt att beskriva själva organisationen i klassrummet.

Redovisningen som följer innehåller kursiverade ord i de olika avsnitten. Dessa ord återfinns sedan i den efterföljande översikten som sammanfattar lärares och elevers metoder i undervisningen i förhållande till möjligt lärande i Almen. Motsvarande princip gäller också i de tre återstående resultatkapitlen.

Artefakter

Här befinner vi oss i den övre delen av Engeströms (1987) modell för verksamhetsstruktur (se figur 4 i kap 3). Inledningsvis uppmärksammas sålunda sekundära artefakter, det vill säga talat språk och symbolspråk. Vid helklassgenomgångar i den här verksamheten dominerar läraren kommunikationen genom att ställa många frågor som följs av elevernas korta svar, precis som i det traditionella matematikklassrummet. Symbolspråket, det vill säga additions- eller subtraktionsuttryck på tavlan, är utgångspunkt för dessa samtal. Genom svaren redogör eleverna för hur mellanledet ska skrivas, steg för steg, ibland med stöd av lärarens frågor. På så sätt beskrivs själva proceduren och följaktligen använder både lärare och elever metoden *beskrivande språk*.

I samband med att läraren ger återkoppling på elevernas svar framträder ett mönster som innebär att läraren upprepar elevernas svar, men med viss korrigerande, så kallad "revoicing". Det innebär exempelvis att då eleverna inte använder korrekta talnamn omformulerar läraren deras yttranden. Det betyder att läraren synliggör det formella matematiska språket för hela klassen. Omformuleringarna innebär också att läraren använder ett *förklarande språk*. Därmed riktar läraren uppmärksamheten inte endast mot proceduren utan också mot centrala begrepp. På liknande sätt fungerar också metoden då läraren *ställer frågor* som ger elever möjlighet att själva *korrigera* sitt ordval och använda de rätta talnamnen. Lärarens frågor och omformuleringar tyder dock på att många elever håller fast vid ett beskrivande språk där proceduren är det väsentliga, vilket innebär att *metod- och beräkningsförmågan* är i centrum. Det visar sig också att flera elever tar fasta på vissa formuleringar som läraren använder. När elever förklarar för varandra upprepas då nästan ordagrant vad läraren har sagt vid genomgångar.

Ett annat utmärkande drag i den språkliga kommunikationen är att läraren återkommande ger *kollektivt beröm* och positiv återkoppling. Vi kan därför säga att läraren också använder ett *uppmuntrande språk*. Kännetecknande för lärarens respons är att den ges i relation till elevers specifika prestationer. Det betyder att den ibland är riktad mot det matematiska innehållet som eleverna har hanterat och ibland mot själva omfattningen, det vill säga mängden av sidor eller uppgifter som eleverna har klarat av. När lärarens återkoppling sker i förhållande till det matematiska innehållet ges elever möjlighet att utveckla *tilltro till den egna förmågan* att använda matematik.

Primära artefakter i form av laborativt material används i begränsad omfattning. Det betyder att någon elev vid enstaka tillfällen hämtar tiobasmaterial på ett bord då eleven löser uppgifter på egen hand. Vid de tillfällen läraren konkretiserar verkar det vara en *spontan handling* med hjälp av fingrarna. Vid subtraktion med tiotalsövergång visar det sig att fingrarna har stora begränsningar som representation för beräkningen av tvåsiffrig subtraktion där det förekommer tiotalsövergång. Eftersom fingrarna, så som de används här, inte kan illustrera själva grundprincipen för den typen av subtraktionsberäkningar tydliggörs inte heller den matematiska tankeformen för eleverna.

Istället är det med hjälp av sekundära artefakter som siffror samt plus-, minus- och likhetstecken som de flesta handlingar utförs. När eleverna arbetar på egen hand i sina matematikböcker innebär det att de övar på uppgifter liknande dem som läraren nyss gått igenom med klassen. Då eleverna utför räknehandlingar med hjälp av de stödanteckningar som mellanledet kan vara, men utan några andra synliga hjälpmedel än papper och

penna, är de beroende av sina tidigare kunskaper om talfakta. Eftersom procedurer är i fokus i den här verksamheten är eleverna därför hänvisade till att komma ihåg hur de ska göra för att kunna lösa uppgifterna.

Regler

Då uppmärksamheten riktas mot handlingar via olika typer av regler har vi förflyttat oss till den nedre vänstra triangeln i Engeströms modell. Med hjälp av analysverktyget synliggörs vid sidan av sociomatematiska och sociala normer också regler för att hantera det matematiska innehållet. Verksamheten präglas av en norm som innebär att matematik är uppbyggt av *regler som måste läras*. Det kommer bland annat till uttryck då läraren betonar vikten av att följa matematikbokens metoder. Genom att rätta sig efter matematikbokens anvisningar kan eleverna således lära sig matematikens regler.

Regler för att utföra subtraktionsberäkningar konstrueras även av läraren, till exempel genom att ange särskilda *nyckelord* som kan vara till hjälp för att eleverna ska veta vilket tecken, plus eller minus, som ska skrivas i mellanledet. Även eleverna *skapar regler* för att lättare kunna hantera matematiken. Detta sker i samspråk med läraren. I det här sammanhanget kan själva mellanledet uppfattas som en sorts regel, som eleverna ska lära sig att skriva på rätt sätt. För att kunna använda reglerna måste eleverna komma ihåg dem och för att kunna komma ihåg reglerna är det nödvändigt att eleverna *övar* på dem genom att göra många uppgifter av samma sort. Därför ägnas en stor del av lektionstiden åt att eleverna övar genom att arbeta individuellt i matematikboken. Sett utifrån själva undervisningsinnehållet, matematik, kan detta liknas vid en *regelstyrd* verksamhet. När verksamheten styrs av regler för matematiken, får det till följd att procedurerna hamnar i centrum och därmed också *metod- och beräkningsförmågan*.

En del av uppgifterna som eleverna genomför uppmuntras de att göra snabbt, men också rätt. Läraren ger även beröm när många i klassen har hunnit långt (i boken) under lektionen. Tillsammans uttrycker det stöd för en sociomatematisk norm som kan betecknas ”gör det fort och gör det rätt”. Bland eleverna sinsemellan förekommer däremot sällan diskussioner om hur långt de har kommit. Istället är det vanligt att elever hjälper varandra.

Att det är väsentligt att tänka i samband med matematik poängteras med jämna mellanrum av läraren. I dessa situationer innebär tankeverksamhet att *komma ihåg*. Följaktligen är detta en verksamhet där faktakunskap har en central roll. I kombination med att matematiken nästan uteslutande representeras med symbolspråk och inte med några konkretiserande representationer bekräftas uppfattningen att matematik är tankeverksamhet.

Sociala normer som visar sig är att även elever som inte räcker upp handen förväntas svara på frågor exempelvis i samband med genomgångar. Det kan vara ett uttryck för att läraren försöker involvera alla elever i den pågående aktiviteten, vilket är en metod som också hör samman med gemenskap som medierande faktor. Det handlar alltså fortfarande om analys där intresset riktas mot faktorer i den nedre delen av Engeströms (1987) modell.

Gemenskap

Lektionerna inleds med korta gemensamma aktiviteter för hela klassen. Eleverna visar stort engagemang, oavsett om det gäller att *delta* i bingo eller gemensamt besvara lärarens snabba frågor. Då matematiken är det gemensamma intresset i dessa situationer, kan den positiva och entusiastiska atmosfären medverka till att eleverna ser matematik som något lustfyllt som ibland utövas i gemenskap med hela klassen.

Gemenskap som en betydelsefull faktor, bland annat för att stärka känslan av tillhörighet, visar sig också mot slutet av lektioner då läraren tar initiativ till gemensamma sångavbrott. Genom att sjunga tillsammans deltar alla i samma aktivitet, precis som i början på lektionerna. Vid sångtillfällena liksom vid de gemensamma aktiviteterna råder en frimodig och glad atmosfär.

Aktiviteterna som har beskrivits ovan är exempel på lärares och elevers kollektiva, gemensamma upplevelser. En företeelse med motsvarande funktion är det kollektiva samtalet där deltagarna utbyter erfarenheter. Här använder läraren en liknande metod, men tonvikten ligger istället på ett gemensamt utbyte i olika aktiviteter och mindre på samtal. Därför har metoden fått benämningen *kollektivt utbyte*.

Då läraren använder metoden kollektivt utbyte där gemenskapen klassen eller klassen och läraren tillsammans utgör ett medel för lärarens handlingar resulterar det i en till synes stark gemenskap där lärare och elever verkar sträva åt samma håll, bland annat genom att visa *intresse* för olika matematikaktiviteter.

Arbetsdelning

Den nedre delen av ”verksamhetstriangeln” är också utgångspunkt då faktorn arbetsdelning är i fokus. Resultatet av analysen visar att i den här typen av verksamhet är det tydligt att lärare och elever har olika roller. Läraren *leder genomgångar*, ställer frågor och skriver på tavlan medan eleverna svarar på lärarens frågor och *beskriver* hur uppgifterna ska lösas. I de situationerna är läraren den aktiva, som leder kommunikationen och bestämmer vem som får yttra sig. Här skulle vi kunna tala om en lärarcentrerad undervisning.

5. Almen

Efter de gemensamma helklassgenomgångarna instrueras eleverna om hur de ska arbeta vidare i sina böcker. Läraren portionerar ut de sidor som är relevanta för den aktuella lektionen. När eleven sedan *övar* på egen hand i boken är det exempel på individuellt arbete, det vill säga en elevcentrerad undervisning där läraren ändå har ett stort inflytande över elevens arbete. Eftersom tonvikten ligger på att eleven övar kan detta ge upphov till en bild av matematik som något individuellt och uppgiftsstyrt. Sammantaget tyder både lärares och elevers handlingar i relation till faktorn arbetsdelning på att de ger förutsättningar att utveckla *metod- och beräkningsförmåga*.

Vad är möjligt för Almens elever att lära?

Vad som är möjligt lärande utifrån de metoder som kännetecknar den här verksamheten sammanfattas i tabellen som följer. Tidigare i texten har lärares och elevers handlingar via sekundära artefakter presenterats före handlingar via primära artefakter. Tabellen följer inte denna struktur och istället är primära artefakter placerade före sekundära, vilket också gäller motsvarande tabeller i de efterföljande kapitlen.

Sammanställningen på nästa sida visar att lärares och elevers metoder i matematikklassrummet Almen ger eleverna i första hand möjlighet att utveckla metod- och beräkningsförmåga. I någon mån skapas även förutsättningar för eleverna att utveckla begreppsförmåga, tilltro till den egna förmågan samt intresse för matematik. Eftersom läraren dominerar kommunikationen ges mycket begränsade möjligheter för eleverna att utveckla såväl kommunikationsförmåga som resonemangsförmåga. Sammantaget betyder det att den här typen av verksamhet utmärks av att vara *procedurinriktad*.

5. Almen

Tabell 6. Översikt som visar lärares och elevers metoder i relation till möjligt lärande i Almen.

FAKTOR	LÄRARE	ELEVER	MÖJLIGT LÄRANDE
Primära artefakter	Visar spontant	Försöker förstå	
Sekundära artefakter	Beskriver	Beskriver	Metod- och beräkningsförmåga
	Förklarar Ställer frågor	Beskriver Korrigerar sig	Begreppsförmåga
	Kollektiv uppmuntran om matematik-prestationer	Bejakar	Tilltro till sin förmåga att använda matematik
Regler	Betonar matematik som regelstyrd	Försöker komma ihåg och förstå	Metod- och beräkningsförmåga
		Gör egna regler	Metod- och beräkningsförmåga
		Övar	Metod- och beräkningsförmåga
Gemenskap	Leder kollektivt utbyte	Deltar	Intresse
Arbetsdelning	Leder genomgångar	Beskriver	Metod- och beräkningsförmåga
	Instruerar	Övar	Metod- och beräkningsförmåga

6. Björken

I matematikklassrummet

Klassrummet ligger vägg i vägg med lokaler för fritidsverksamhet och under vissa tider av skoldagen har eleverna i klassen tillgång till dessa utrymmen. Kapprummet används gemensamt av klassen och dem som deltar i fritidsverksamheten. I direkt anslutning till klassrummet finns också ett grupprum, som eleverna kan använda utom då det är upptaget av specialläraren. En del elever går till de intilliggande rummen när det är dags för individuellt arbete, gärna tillsammans med en kamrat och då efter lärarens medgivande. Under lektionerna finns även andra vuxna i klassrummet, utöver läraren. En fritidspedagog är resurs några gånger i veckan och ibland är någon förälder på besök.

Under lärarens genomgångar är det några elever, vars intresse lätt tycks fångas av annat än det som läraren just då riktar uppmärksamheten mot. Ett återkommande mönster är att läraren ger sina tillsägelser i förbifarten och därmed får de inte något större utrymme i kommunikationen. Istället är läraren snabbt tillbaka i samtalet om det som är föremål för genomgången.

När eleverna arbetar på egen hand är det oftast mycket lugnt i klassrummet. Eleverna sitter på sina egna platser medan läraren går runt och hjälper dem som räcker upp handen. Elever och lärare talar med varandra i vad som kan betecknas som låg eller normal samtalston. Om några blir för högljudda höjer läraren rösten, vilket snabbt leder till att ljudnivån sjunker igen.

Ibland störs arbetsron av sådant som sker i kapprummet, bland annat då andra barn rör sig i korridoren på väg till eller från aktiviteter i fritidslokalen. Klassrumsdörren står ofta öppen och när det är mycket liv och rörelse utanför klassrummet inverkar det även på det som pågår där inne. Följden blir då att läraren eller någon elev stänger dörren, men då har det redan orsakat viss oro bland eleverna.

Den öppna klassrumsdörren tycks även medföra att andra som inte hör hemma i Björkens klassrum, barn såväl som vuxna, inte ser något hinder för att avbryta eller störa undervisningen. Det kan vara pedagoger på skolan som tittar in och lämnar meddelanden till läraren, eller till och med avbryter arbetet utan förvarning, för att ställa en fråga till klassen eller läraren. På liknande sätt gör också andra elever som kommer till klassen med avsikt att kontakta läraren. Avbrotten är inte långvariga, men varje gång tar det några minuter innan alla i klassen har återgått till sina ursprungliga aktiviteter.

Bortsett från det som beskrivits ovan kännetecknas Björken av ett relativt lugnt arbetsklimat. Några elever är dock inte alltid så fokuserade som läraren önskar, vilket medför att läraren ger dem diskreta tillrättavisningar.

I. Generella undervisningsprocesser i matematik

Avsnittet redogör för utmärkande processer i relation till matematik och skolmatematik, men inte specifikt till själva undervisningsinnehållet.

Matematik är att göra många uppgifter på egen hand

Matematiklektionerna inleds med 5-15 minuters helklassundervisning, då läraren tillsammans med klassen går igenom ett nytt moment eller repeterar något som eleverna har mött tidigare. Därefter arbetar eleverna på egen hand i matematikboken. Läraren anger så kallade stoppsidor för varje lektion och de elever som blir klara hämtar lösblad med fler uppgifter, ibland av samma typ som de arbetat med under lektionen. De kan också hämta av materialet som finns i matematikskåpet efter att först ha hört sig för hos läraren. De elever som har en långsammare inläringstakt får vid sidan av uppgifterna i matematikboken möjlighet att arbeta vid datorn med anpassade uppgifter.

Möbleringen i klassrummet, där elevernas bänkar står tillsammans i grupper, inbjuder till kommunikation mellan eleverna. Ändå är det sällan som eleverna talar med varandra om matematik på lärarens uppmaning. När eleverna själva tar initiativ till sådana samtal kan det vara för att hjälpa en bänkkamrat, men i en del grupper handlar samtalen ofta om hur långt de har kommit i matteboken. Det tyder på att det finns en tävlingsanda och den verkar mer utbredd i vissa av grupperna. Då eleverna håller på med enskilt arbete i matematikboken sätter några av dem upp sina pennfack som insynsskydd mot eleverna som sitter närmast, alternativt håller för sin bok med en hand samtidigt som de arbetar. Det talar för att eleverna inte i första hand ser matematiken som något att samarbeta kring.

Baserat på de möten med matematik som eleverna gör vid lärarens genomgångar och i arbetet med uppgifterna i matematikboken framträder matematisk verksamhet som individuell och uppgiftsstyrd.

Snabba elever behöver inte vänta

När eleverna arbetar individuellt går läraren oftast runt i klassen och hjälper dem som räcker upp handen. Något som då inträffar återkommande är att en del elever, de som tycks arbeta snabbt, inte sitter kvar på sin plats och räcker upp handen i väntan på läraren. Istället söker de upp läraren, som då är upptagen med att hjälpa en annan elev. Elevernas frågor till läraren handlar

främst om hur långt de får arbeta i boken, vad de ska fortsätta med när de är klara med de aktuella sidorna eller liknande. Oftast blir de inte avvisade, utan istället avbryts det pågående samtalet mellan läraren och den andra eleven.

Vanligtvis accepterar inte läraren att elever avbryter när läraren är upptagen med en elev, men det verkar inte gälla riktigt alla. Föregående avsnitt pekar på att matematiken här framstår som uppgiftsinriktad och för en del elever tycks matematik också betyda tävling. Lärarens och de snabba elevernas agerande som beskrivits ovan kan vara tecken på att det råder en tävlingsmentalitet. Det kan också betyda att eleverna är motiverade att få fortsätta med andra typer av uppgifter, bland annat där de använder det laborativa materialet. För att få mer tid till det har de här eleverna hittat ett sätt att kringgå en regel som annars är gällande.

Elever belönas med laborativ matematik

Elevernas aktiviteter domineras således av arbetet i läroboken. De som snabbt blir klara får även göra en del extra uppgifter som finns på lösblad. Därutöver är eleverna sysselsatta antingen med aktiviteter där de använder något av det laborativa materialet i hyllan, främst material för färdighetsträning och spel, eller arbetar individuellt vid datorn. Det senare innebär ofta färdighetsträning och gäller i första hand de elever som följer en individuell planering istället för den som läraren har gjort för klassen generellt. Det har redan framkommit att elever som blir klara med de anvisade sidorna i matematikboken frågar läraren om de får spela spel eller göra någon annan aktivitet där det laborativa materialet förekommer. Det tyder på att eleverna verkar tycka om den här typen av aktiviteter. Därutöver används inte laborativt material i någon märkbar omfattning av eleverna i klassen.

Det laborativa materialet tas alltså i bruk när eleverna är klara med sina ordinarie uppgifter. Det kan jämföras med att eleverna belönas för att de har arbetat bra och då får de göra något som de tycker om, exempelvis spela spel eller liknande.

II. Specifika undervisningsprocesser i matematik

Här redovisas teman som uttrycker elevers och lärares handlingar utförda med avseende på det aktuella undervisningsinnehållet.

Mellanledet kan vara hjälpmedel eller tankeuttryck

Vid genomgångar i klassen pekar läraren på mellanledet som en hjälp för eleverna när de räknar. ”Det är ju därför man skriver mellanleden, för man

vill ha hjälp av det”. Ett liknande förhållningssätt kommer till uttryck i excerptet nedan. I den aktuella situationen har läraren skrivit $71+27$ på tavlan och en elev har just gett svaret 98. Eleven uppmanas då av läraren att berätta hur han tänkte. Samtidigt som eleven berättar skriver läraren elevens redovisning på tavlan som en fortsättning på det redan skrivna uttrycket. På tavlan står det nu $71+27=90+8=98$ då läraren ger följande kommentar.

Excerpt B1

- L Om man vill, så kan man naturligtvis skriva ut [PEKAR PÅ $90+8$] på det här sättet, alltså skriva ett mellanled, om man behöver. Man *kan* också göra precis som N tänkte [PEKAR PÅ FÖREGÅENDE UPPGIFT], skriva direkt [ohörbart].

Lärarens yttrande visar på en inställning som tycks vara utmärkande i det här matematikklassrummet, att beroende på vilket behov de har är det upp till eleverna att bestämma om de vill skriva ut mellanledet eller bara använda det som tankeverktyg på vägen till ett svar.

Samma förhållningssätt visar sig återkommande, men läraren uppmantrar också eleverna att skriva mellanled, i alla fall om de känner sig osäkra, vilket kommer till uttryck i följande excerpt. Här har några elever turats om att berätta för klassen hur man kan lösa additionen $38+44$. Som ett resultat av deras resonemang har läraren skrivit $70+12=82$ på tavlan och kommenterar sedan.

Excerpt B2

- L Så man skriver ett mellanled. Det är väl enklast kanske, för annars är det risk att man tappar den där tian faktiskt. Den *där* tian [PEKAR PÅ ETTAN]. Det är nog bättre att man tar, att man är bombsäker på, det här [PEKAR PÅ $70+12$] innan man släpper mellanledet.

Till skillnad från föregående exempel är själva räkneoperationen här något mer komplicerad, eftersom summan av entalen ($8+4$) är mer än tio. Det är troligen anledningen till att läraren uppmanar eleverna att skriva mellanled såvida de inte känner sig väldigt säkra. Frågan är om eleverna uppfattar att detta är annorlunda jämfört med att beräkna additionsuppgifter utan tiotalsövergång. Den rådande grundprincipen tycks vara att mellanledet är en hjälp för de elever som behöver det, vilket innebär att vissa elever alltid skriver mellanled medan andra aldrig gör det.

Under vissa matematiklektioner finns förutom klassläraren ytterligare en pedagog som resurs i klassrummet. Till skillnad från vad klassläraren ger uttryck för, framhåller den andra pedagogen att mellanledet är till för att pedagogerna ska få inblick i hur eleven tänker. Därför ska eleverna skriva

mellanled, enligt den här pedagogen. Excerptet nedan återger en del av kommunikationen mellan pedagogen och en elev i samband med att eleverna arbetar individuellt med sina uppgifter i boken. Pedagogen har just upptäckt att eleven har skrivit svaren direkt, utan några mellanled.

Excerpt B3

- P Du ska skriva mellanled också. Där, ska du skriva mellanled, så vi ser hur du tänker.
- E1 [ohörbart]
- P Att man får se hur du tänker, när du fått fram det här.

Pedagogerna uttalar således olika uppfattningar om mellanledet. Å ena sidan gäller det funktionen, som innebär att mellanledet är antingen ett hjälpmedel eller ett uttryck för elevernas tankegång. Å andra sidan handlar det om huruvida eleverna själva har möjlighet att välja om de ska skriva mellanled eller om det är bestämt att alla ska göra det. Eleverna vet därför inte alltid med säkerhet vad som förväntas av dem. De flesta eleverna verkar dock följa klasslärarens rekommendationer och skriver inte ut mellanledet eftersom de inte anser sig vara hjälpta av det.

Elevernas egna räknestrategier i fokus

I samband med genomgångarna ställer läraren frågor till eleverna. Avsikten med frågorna är att uppmåna eleverna att redogöra för sina lösningar på det additions- eller subtraktionsuttryck som presenterats på tavlan. Ofta får eleverna frågan ”Hur tänkte du?”. Följande excerpt är exempel på hur en elev besvarar lärarens fråga. Replikväxlingen i det första exemplet har föregåtts av att läraren har skrivit $24+8$ på tavlan och eleven E1 har just sagt 32. Direkt därefter ställer läraren den fråga som inleder excerptet.

Excerpt B4

- L Hur tänkte du?
- E1 Äh...tiokamraten plus fyra är sex. Då har vi ju... trettio. Och så är det två kvar och då blir det trettio två.
- L Det var ett tag sen vi räknade med det där, men det är helt riktigt, så gjorde vi. Fast det är ett tag sen [HAR NU SKRIVIT $24+6+2=$]. Man räknar upp till trettio [GÖR EN OSYNLIG CIRKEL KRING $24+6$]. Och sen [SKRIVER 32]. Finns det något annat sätt att tänka?

Läraren fortsätter alltså att fråga efter andra sätt att tänka för att lösa $24+8$ och ytterligare en elev får redovisa sitt tankesätt. I likhet med eleven ovan använder även den eleven en strategi som går ut på att förenkla additionen

genom att göra hela tiotal med hjälp av en kompensationsmetod.³⁴ Därefter gör läraren eleverna uppmärksamma på ytterligare ett alternativ för att lösa uppgiften.

Excerpt B5

- L Sen kan man faktiskt tänka så här, vi säger om jag hade haft, vi tar bort och gör om det och skriver fyra plus åtta [TÄCKER 24 MED HANDEN OCH SKRIVER $4 + 8 =$ UNDER 24]. Vad är fyra plus åtta? Den där tabellen kan ju ni. Fyra plus åtta, det är ju stora plus...F?
- F Tolv.
- L Det är ju tolv, va [SKRIVER 12]. Om man då har tjugofyra plus åtta [SKRIVER $24 + 8 =$ UNDER $4 + 8 = 12$], vad kan man tänka då?... Om man använder sig av den kunskapen [PEKAR PÅ $4 + 8 = 12$]? G hur tänkte du?
- G Trettiofå...det är bara att man lägger till tjuugo.

Den strategin som läraren visar här bygger på att eleverna känner igen additionen $4 + 8$ och bryter loss den från resten av uttrycket där det då återstår att addera tjuugo. Utmärkande för de strategier som eleverna har redovisat och som läraren visar i exemplet ovan är att de utgår från en förståelse för hur talen är uppbyggda.

Elevernas egna tankesätt och lösningsstrategier är i fokus även när läraren strävar efter att visa ett specifikt tillvägagångssätt att utföra en beräkning. Följande excerpt visar ett sådant exempel. Av den sista repliken framgår att lärarens intention är att klassen särskilt ska lära sig att använda en särskild räknemetod, som just har förekommit i resonemanget mellan lärare och elever. Det är additionen $37 + 11$ som är föremål för uppmärksamheten och det första förslaget på lösning som en elev ger är att ta trettio plus tio och därefter sju plus ett. Excerptet inleds med lärarens kommenterar till den här eleven i form av en upprepning som fokuserar tiotalen. Därefter går läraren över till entalen och överlåter sedan till en annan elev (U) att fortsätta additionen genom att beräkna sju plus ett. Eleven verkar inte inställd på att göra någon separat entalsberäkning utan vill gärna ge svaret 48 direkt, men här gör läraren ett inbrott och lyfter fram entalsadditionen sju plus ett igen.

Excerpt B6

- L /.../ Man tar *först* tiotalen, som du gjorde nu [PEKAR PÅ 30 OCH 10]. Trettio plus tio är lika med fyrtio. Och sen då, har vi den där [GÖR EN UPPÅTRIKTAD PIL UNDER SJUAN I 37 OCH SKRIVER 7 UNDER PILEN], och den där [GÖR EN PIL UNDER ENTALSETTAN I TALET 11 OCH SKRIVER 1

³⁴ Kompensationsmetod, se Engström, Engvall & Samuelsson (2007, s. 83-88).

6. Björken

- UNDER PILEN OCH DÄREFTER ETT PLUSTECKEN TILL HÖGER OM 40]... Och vad är det?... sju plus ett [PEKAR PÅ SIFFRORNA UNDER PILARNA]?
[EN ELEV UTTRYCKER ATT LÄRAREN STÅR I VÄGEN SÅ ATT DE INTE SER VAD SOM STÅR PÅ TAVLAN.]
- U Det blir fyrti...åtta.
L Ja. Vad blir sju plus ett först?
U ... Åtta
L Ja. Och då blir svaret
U Fyrtioåtta.
L [SKRIVER EFTER PLUSTECKNET $8 = 48$]. Så man tar *en* talsort i taget, och adderar, lägger ihop. U?
U Mm, jag tänkte, först tar man...det är ju elva.
L Mm.
U Det är ju tio och en etta.
L Mm.
U Då, eller...sen är det ju trettiosju. Då lägger man på ettan på sjuan →
L Mm.
U så det blir åtta.
L Mm.
U Sen tian på...trettio.
L Jaa, då gjorde du egentligen samma sak, det är bara att du tog entalen först. Det gick ju det med...H?
H Jag tog...tre...elva minus tre, då var det åtta. Och då tog jag tre stycken ifrån elvan och satte över på sjuan, så är det fyrtio [ohörbart]
L Ja, det *går* att göra så. Får du koll på det bara, så går det att göra så. Du plockar över tre dit [PEKAR FRÅN 11 TILL SJUAN I 37] och fyller upp till fyrtio, och då hade du åtta kvar där [PEKAR PÅ 11]. Ja så är det. Men den här metoden nu då, ska vi försöka lära oss, att ta *en* talsort i taget.

En bit in i excerptet, efter att eleven U har gett svaret ”fyrtioåtta”, gör läraren en sammanfattning av den räknemetod som just har redovisats, ”så man tar *en* talsort i taget, och adderar, lägger ihop”. Direkt därefter ger läraren åter ordet till eleven U, som räcker upp handen igen. Den fortsatta replikväxlingen visar att U egentligen har använt en annan räknemetod än den som läraren beskriver. Istället för att dela upp båda termerna i talsorter behåller U den första termen 37, men delar däremot upp talet 11 och adderar först ett och sedan tio till 37. Den här räknemetoden kan närmast jämföras med det som kallas den stegvisa metoden. Det som var lärarens intention, att använda räknemetoden talsorter fullföljdes alltså inte helt genom resonemanget hos eleven U.

När eleven U redogör för sitt tankesätt ger det uttryck för att eleverna riktar uppmärksamheten mot sina egna strategier. Lärarens frågor som har karaktären ”hur tänkte du?” sätter elevernas egna tankesätt i fokus och elevernas redogörelser visar att de tillämpar sina kunskaper om tal och tals uppbyggnad. Läraren visar därmed intresse för elevernas egna räknestrategier och uttrycker även uppskattning när många elever vill dela med sig av sina tankar (se t. ex. excerpt B12). Tillsammans bidrar det till att eleverna tycks vara inriktade på att redovisa egna räknestrategier även då läraren försöker demonstrera nya räknemetoder i avsikt att eleverna ska försöka lära sig dessa. Läraren verkar sålunda ge två olika budskap till eleverna. Det ena riktar uppmärksamheten mot elevernas egna tankesätt, medan det andra innebär att eleverna ska lära sig att tillämpa en bestämd räknemetod. Av elevernas olika redogörelser framgår att deras egna tankesätt är i fokus. Lärarens intention, att eleverna ska lära sig ett nytt sätt att räkna, hamnar i skymundan och ges mindre utrymme vid helklassgenomgångar, något som verkar vara kännetecknande för Björken.

Snarlika formuleringar ges olika innebörd

När lärare och elever kommunicerar förekommer formuleringar som liknar varandra, trots att de inte verkar ha samma innebörd. Ett sådant exempel är uttrycket ”närmaste tiotal”, samt de liknande benämningarna ”ett jämnt tiotal” och ”ett jämnt tiotal som ligger närmast svaret”. Uttrycken är särskilt vanliga vid subtraktionsberäkning med räknemetoden ”räkna uppåt”, även kallad ”lägga-till-metoden” eller ”bakifrån med plus”.³⁵ En grundläggande princip i den här räknemetoden är att den bygger på användningen av ”lämpliga” tiotal som hållpunkter i uppåträknandet. Benämningen ”närmaste tiotal” syftar vanligtvis på det tiotal som kommer närmast efter talet som uppåträknningen utgår ifrån. En annan hållpunkt är tiotalet närmast före det tal dit uppåträknningen sker. Det här tiotalet benämns ofta på ett sätt som har likheter med uttrycket ”närmaste tiotal”. De två excerpten som följer illustrerar hur uttrycket ”närmaste tiotal” har en bestämd innebörd. Det andra excerptet visar också hur lärare och elever använder liknande formuleringar då de syftar på talet som utgör den andra hållpunkten för uppåträknningen.

Subtraktionen som beräknas i det första exemplet är 40-17. På lärarens fråga har en elev (R) just föreslagit att de ska utgå från det lägre talet, det vill säga sjuutton. Excerptet inleds med att läraren bekräftar elevens svar.

³⁵ Se kapitel 2, avsnittet om aritmetik.

Excerpt B7

- L Det lägre talet, ja. Jaha, då gör vi det. Då ställer vi oss på det lägre talet [PEKAR PÅ 17], och det är sjutton... Då tänker man så här, ja hur var det man skulle tänka, kommer ni ihåg... från igår? Skulle jag ta allt på en gång?... Nej, inte nu i början i alla fall, när vi övar på det här. Då ska vi *inte* ta allt på en gång, för då riskerar vi att hamna fel. R igen!
- R Man tar *plus* tre.
- L Varför just tre?
- R För att då kommer man upp till närmsta tiotal.
- L Håller ni med R?
- E Jaa.
- L Det låter väldigt klokt, va.

Av elevens förklaring framgår att närmsta tiotal här syftar på tjugo. Detta är tiotalet närmast efter sjutton, som också är det tal som utgör startpunkten för uppåträknningen. Läraren bekräftar att elevens tankegång är användbar och klassen instämmer med läraren.

Nästa exempel visar hur elever och lärare även använder benämningar som liknar uttrycket ”närmaste tiotal” och att dessa då inte motsvarar tiotalet närmast efter startpunkten för uppåträknningen. I sekvensen som återges nedan löser klassen och läraren tillsammans uppgiften 74–57 genom att läraren demonstrerar på tallinjen. Inledningsvis använder eleven G ”närmaste tiotal” i enlighet med den innebörd som framkommer i exemplet ovan, vilket här motsvarar tiotalet närmast efter 57.

Excerpt B8³⁶

- L Vad ska jag hoppa till på tallinjen, tycker ni, om jag är på femtiosju?...Ja det är många som har en idé om det, vad trevligt. G, vad tycker du?
- G Sextio.
- L Det är ju bra. Varför tycker du att det är bra?
- G För att det är upp till närmsta tiotal.
/.../
- L Vad tycker ni är ett lämpligt ställe att gå till då, från sextio? S vad tycker du?
- S Sjuttio.
- L Ja, det är ju bra. Varför tycker du sjuttio, förresten?
- S För att det är närmast sextio.
- L Ja, närmast sextio, på vilket sätt. Hur tänkte du? Det är helt rätt, S. Varför just sjuttio, varför inte sextioåtta eller sjuttio två?
- S För att sjuttio är som sextio fast ... en annan siffra

³⁶ Excerpt B8 är en direkt fortsättning på excerpt B12 som redovisas längre fram.

6. Björken

- L Ja, jag tror du tänker, jag förstår hur du tänker. Kan någon annan säga, ja, vad sa du S? Nej? N?
- N Ja, det ligger ju närmast svaret, tiotal.
- L Just det, det är en bra tanke. Det är tiotal, och det ligger närmast svaret, K!
- K Det är det närmaste tiotalet.
- L Ja, ett jämnt tiotal som ligger närmast svaret.

När eleven S svarar att talet 70 är lämpligt att gå till, är det rimligt eftersom det inte går att förflytta sig längre med hela tiohopp utan att passera talet 74. Då S säger att hon valde 70 för att det är närmast 60 relaterar hon till den första hållpunkten och utifrån den är talet 70 det närmaste tiotalet³⁷. Hennes svar skiljer sig däremot från eleven N, då han uttrycker att det ligger närmast svaret. Begreppet svar betecknar i det här fallet inte resultatet av subtraktionen $74-57$ utan syftar istället på talet 74. Detta är det tal varifrån 57 ska subtraheras och det är samtidigt slutmålet vid användning av strategin ”räkna uppåt”. När den tredje eleven K svarar att ”det är det närmaste tiotalet” gör eleven närmast en upprepning av lärarens kommentar. Det resulterar i samma uttryck som eleven G just har använt, men K syftar nu på ett annat tal jämfört med G, som syftade på talet 60. Lärarens tillägg, att det ligger närmast svaret kan här fungera som ett förtydligande.

Resonemanget ovan visar alltså att ”närmaste tiotal” har en bestämd innebörd jämfört med liknande benämningar. Det vedertagna, att det syftar på tiotalet närmast efter talet där uppåträkningsen påbörjas, kommer klart till uttryck hos eleven G. Det framgår dock att det finns elever (exempelvis K) som använder, ”närmaste tiotal” för att beteckna även den andra hållpunkten i uppåträkningsen.

Genom det andra exemplet synliggörs också att snarlika formuleringar vanligtvis används för att benämna den andra hållpunkten, vilket alltså motsvarar ett helt annat tal i uppåträkningsen. De små skillnaderna i uttryckssätten kan vara svåra för eleverna att upptäcka, vilket kan bidra till att det inte riktigt står klart för alla elever vad som avses med ”närmaste tiotal” och hur innebörden skiljer sig åt i de likartade benämningarna. Eleven K kanske är en av dem. Att det råder osäkerhet visar sig då många händer sträcks i luften då eleverna själva arbetar med liknande uppgifter. En fråga som då ställs till läraren är ”hur vet man vad som är närmaste tiotal”. Det tyder på att det finns elever som saknar den begreppsliga förståelse som behövs för att kunna använda räknemetoden ”räkna uppåt”.

³⁷ Beräkningen startade med utgångspunkt från talet 57, och genom att gå tre steg till 60, det ”närmaste tiotalet”, har 60 blivit den nya utgångspunkten.

Elevernas tidigare kunskap uppmärksammas

Vanligt förekommande i samband med genomgångar är att läraren anknyter till begrepp som eleverna har mött tidigare i matematikundervisningen. Följande excerpt visar hur det kan gå till. Läraren repeterar här begreppen tiotal och ental tillsammans med klassen. I den första repliken svarar en elev på lärarens fråga om vilket tal som står skrivet på tavlan.

Excerpt B9

- E1 Tjugofyra.
 L Ja, det är riktigt. Och nu är frågan, vad betyder den där tvåan [UNDER TVÅAN GÖR L EN LODRÄT PIL SOM PEKAR UPPÅT MOT SIFFRAN 2]?...D!
 D Tjugo.
 L Precis [SKRIVER 20 UNDER PILEN]. Och vad betyder den där fyran [GÖR EN LODRÄT PIL SOM PEKAR UPPÅT MOT SIFFRAN 4]?...N!
 N Fyra.
 L [SKRIVER 4 UNDER PILEN] Så är det va?... Beroende på var i talet siffran står [PEKAR PÅ 24], så vet man vad den betyder. Vad *kallas* den där talsorten [PEKAR PÅ 20 UNDER PILEN] som den där tvåan betyder [PEKAR PÅ TVÅAN I 24]? Vad kallas den?... Vad säger vi?...T!
 T Tiotal.
 L Just det! Kände ni igen det ordet?
 E Ja. [SPRIDDA RÖSTER]
 L Tiotal. Alla kände igen det, ja? Och vad kallas den där talsorten [PEKAR PÅ FYRAN I 24]? Den fyran representerar?... Vad kallas den? /.../ Jaa, B!
 B Ental.
 L Tiotal och ental [PEKAR PÅ TVÅAN OCH FYRAN]...så är det, va? Det var inget nytt?...

Genom att fråga eleverna om de kände igen ordet tiotal antyder läraren för eleverna att de har mött ordet förut i matematikundervisningen. Och när läraren sedan konstaterar lite frågande i den sista repliken att ”det var inget nytt?” blir eleverna åter påmind om att tiotal och ental är begrepp som de har mött tidigare. Då läraren ställer frågor av typen ”vad betyder den där tvåan” riktas uppmärksamheten mot siffrornas innebörd med avseende på vilken talsort de tillhör. Genom att läraren skriver ut talen tjugo och fyra under talet 24 och markerar med pilar tydliggörs de två talsorterna ytterligare. Av elevens svar, tjugo, framgår att eleven D är medveten om att siffran två motsvarar tiotalen i 24. Med sin kommentar, ”beroende på var i talet siffran står så vet man vad den betyder” poängterar läraren att siffrans placering har

betydelse för dess värde. Här berör läraren positionssystemets grundidé och uppmärksammar återigen begrepp som är väsentliga i sammanhanget.

Läraren anknyter inte bara till begrepp som tagits upp tidigare utan demonstrerar också hur eleverna kan ha nytta av sina tabellkunskaper. I exemplet nedan handlar det om ”stora plus”³⁸. Excerptet illustrerar hur läraren visar för eleverna att additionen $24+8$ enkelt kan lösas med hjälp av kunskapen om att $4+8=12$.

Excerpt B10

- L Sen kan man faktiskt tänka så här, vi säger om jag hade haft, vi tar bort och gör om det och skriver fyra plus åtta [SKRIVER $4 + 8=$]. Vad är fyra plus åtta? Den där tabellen kan ju ni. Fyra plus åtta, det är ju stora plus ... D!
- D Tolv.
- L Det är ju tolv, va [SKRIVER 12]. Om man då har tjugofyra plus åtta [SKRIVER $24 + 8=$ UNDER $4+8=12$], vad kan man tänka då? ... Om man använder sig av *den* kunskapen [PEKAR PÅ $4+8=12$]? F, hur tänkte du?
- F Trettitvå ... det är bara att man lägger till tjuo.
- L Just precis [SKRIVER $20+12$]. Då har vi tjuo, plus dom där tolv va [SKRIVER $= 32$]?

Då läraren visar för eleverna hur de kan använda sin kunskap om att $4+8=12$, som stöd för att lösa $24+8$, kan det hjälpa eleverna att upptäcka hur de kan överföra sitt tabellkunnande på ett större talområde. Genom att skriva $24+8=$ under $4+8=12$, så att motsvarande talsorter är placerade rakt under varandra synliggörs att $4+8$ ingår i $24+8$. På så sätt skapas möjligheter för eleverna att se samband mellan talen, vilket kan vara ett stöd vid generalisering av additionstabellen. Exemplet ovan visar därmed att begreppslig kunskap hamnar i centrum då undervisningen anknyter till elevernas tidigare matematikkunnande.

Matematiska symboler kompletteras med andra tecken

Vid genomgångarna skriver läraren additions- och subtraktionsuttrycken på tavlan. I några av excerpten ovan (t. ex. B6 och B9) framkommer att läraren även gör pilar på tavlan tillsammans med siffrorna, det vill säga det vedertagna symbolspråket³⁹. Läraren använder också andra tecken, exempelvis prickar eller cirklar som markerar särskilda siffror. Flera av dessa

³⁸ Stora plus omfattar addition med tiotalsovergång, i första hand inom talområdet 0-20. Exempel på detta är $8 + 5 = 13$ och $7 + 9 = 16$.

³⁹ Symbolerna som avses här är siffror, plus-, minus- och likhetstecken.

tecken förekommer i samband med följande replikväxling då läraren och klassen tillsammans löser en tvåsiffrig addition. När läraren just har skrivit additionsuttrycket $37+11=$ på tavlan och frågar hur man kan göra för att lösa uppgiften är det en elev som har ett förslag. Lärarens sista replik nedan motsvarar den inledande repliken i excerpt B6 ovan. I exemplet nedan har dock lärarens användning av tavlan återgetts något mer utförligt.

Excerpt B11

- E1 Jag skulle ta trettio.
L [SKRIVER 30 UNDER TIOTALSTREAN OCH RINGAR IN TALET 30.] Ja.
E1 Ja, plus tio ... Och det blir fyrtio. Sen tar man sju plus ett.
L Just det. Vad blir trettio plus tio? [SKRIVER 10 UNDER TIOTALSETTAN OCH RINGAR IN TALET 10. GÖR LODRÄTA PILAR FRÅN DE INRINGADE TALEN UPP MOT TIOTALSSIFFRORNA. SKRIVER + MELLAN DE INRINGADE TALEN 30 OCH 10.]
E Fyrtio.
L Fyrtio (SKRIVER 40 TILL HÖGER OM =). Man tar *först* tiotalen, som du gjorde nu [PEKAR PÅ 30 OCH 10 OCH SEDAN PÅ TIOTALSSIFFRORNA I UTTRYCKET] Trettio plus tio är lika med fyrtio. Och sen då, har vi den där [GÖR EN UPPÅTRIKTAD PIL UNDER SJUAN I 37, SKRIVER 7 UNDER PILEN OCH RINGAR IN SIFFRAN MED EN MINDRE RING ÄN KRING TIOTALEN], och den där [GÖR EN PIL UNDER ENTALSETTAN I TALET 11, SKRIVER 1 UNDER PILEN, RINGAR IN ETTAN OCH GÖR DÄREFTER ETT PLUSTECKEN TILL HÖGER OM 40].

Texten mellan replikerna beskriver hur läraren gör pilar och skriver motsvarande tal för tiotalen under tiotalssiffrorna, exempelvis 30 under 3 och gör sedan på samma sätt med entalen. Genom lärarens tillvägagångssätt understryks siffrornas talvärde, vilket ger eleverna förutsättningar att urskilja de olika talsorterna som ingår i talen.

Demonstration på tallinjen när subtraktionsmetoden skapar svårigheter

Symbolspråket skrivet på tavlan är vanligtvis utgångspunkt för undervisningen. Andra hjälpmedel i form av laborativt material är inte något vanligt inslag vid helklassgenomgång. Det förekommer inte heller att elever använder det när de arbetar med uppgifter i matematikboken. Det har tidigare

framkommit att laborativt material däremot används som belöning när elever är klara med uppgifterna som ingår i lektionens beting.

Subtraktionsmetoden ”räkna uppåt” visar sig vara svår för eleverna och läraren väljer då att demonstrera på tallinjen⁴⁰, vilket återges i följande excerpt (se även excerpt B8, som till viss del överlappar B12 nedan). Till sin hjälp har läraren också en overheadprojektor. Tillsammans arbetar lärare och elever med att lösa uppgiften 74–57 genom att hoppa på tallinjen och använda strategin ”räkna uppåt”, vilket läraren här också kallar ”att räkna med plus”. Läraren växlar mellan att sitta vid overheadprojektorn framför klassen och att stå vid tavlan där subtraktionen står skriven. Excerptet inleds med att eleven H besvarar lärarens fråga som gäller vilket tal de ska utgå ifrån när det ska ”räkna *uppåt* med plus”.

Excerpt B12

- H Femtiosju.
- L Ja, precis, bra! Och så ska vi räkna upp, okej. Det var alltså talet femtiosju vi hade. Nu satte jag ett kryss på det [GÖR ETT KRYSS PÅ TALLINJEN VID TALET 57]. Och det andra talet var sjuttiofyra [GÖR KRYSS VID 74 PÅ TALLINJEN]. Och då var det frågan om sjuttiofyra minus femtiosju. Okej. Då skulle vi ställa oss där [PLACERAR EN PENNA UNDER TALLINJEN SÅ ATT SPETSEN PEKAR UPPÅT MOT TALET 57]... Och så ska vi räkna upp. /.../ Vad tycker ni är ett lämpligt steg att gå till, om man ska använda mellanled alltså, och skriva flera hopp. Vad tycker ni är ett *lämpligt* ställe att göra paus på, i huvudet, för det här handlar ju om att ha det i huvudet. Nu har vi ju tallinjen framför oss, men sen när man räknar själv så får man ju ha det här i huvudet [PEKAR PÅ SITT EGET HUVUD]. Vad ska jag *hoppa* till på tallinjen, tycker ni, om jag är på femtiosju?... Ja det är många som har en idé om det, vad trevligt. G, vad tycker du?
- G Sextio.
- L Det är ju bra. Varför tycker du att det är bra?
- G För att det är upp till närmsta tiotal.
- L Närmsta tiotal. Jag gör en pil [GÖR EN PIL PARALLELLT MED TALLINJEN FRÅN 57 TILL 60], så där. Och då är frågan då naturligtvis, och det måste man också tänka på, hur långt är det dit...från femtiosju, F?
- F Tre.

⁴⁰ Tallinjen i exemplet visar talen från 51 till och med 75. Talen där entalssiffran är noll (t. ex. 60) eller fem (t. ex. 65) är markerade med ett längre lodrätt streck.

6. Björken

- L Då skriver jag tre här [GÅR TILL TAVLAN OCH SKRIVER
SÅ ATT DET NU STÅR $74-57 = 3$], den första, det jag lägger
på, /.../ [PEKAR PÅ TREAN] tre.

Tallinjen gör det möjligt för läraren att illustrera de ”hopp” som utförs vid uppåträkning till talet 74 och där talet 57 utgör startpunkt. Därmed synliggörs också vilka tiotal som är hållpunkter efter varje avslutat ”hopp”. Läraren visar både ”hopp” (drar linjer parallellt med tallinjen mellan de aktuella talen) och hållpunkter (markerar dessa tal med kryss) på tallinjen och skriver dessutom mellanledet med symbolspråk på tavlan parallellt med detta. Härigenom får eleverna möjlighet att möta två olika representationer samtidigt. Det betyder att subtraktion visar sig både genom symbolspråk och visualisering på tallinjen, där subtraktion illustreras som en ”räknauppåt”-handling. Genom att även ”stopptalen”, det vill säga hållpunkterna framträder på tallinjen, visualiseras inte bara talen som representerar hoppen och som skrivs i mellanledet. Det framkommer av lärarens yttrande att det kritiska med denna strategi är just att kunna hålla reda på var man befinner sig på tallinjen eftersom det inte antecknas i mellanledet. Därmed kan tallinjen bidra till att även rikta uppmärksamheten mot hållpunkterna, som har en nyckelroll i strategin ”räkna uppåt” trots att de är helt osynliga i mellanledet.

Excerptet visar att läraren uttrycker till eleverna att när de räknar själva måste de hålla talen i huvudet. Det tyder på att läraren utgår från att eleverna själva inte kommer att använda tallinjen som hjälpmedel, utan att de istället använder symbolspråket som verktyg vid sina beräkningar. I det sammanhanget kan tallinjen fungera som en mental bild.

Läraren leder elever genom subtraktionsberäkningar

Frågorna som läraren ställer i samband med genomgång på tallinjen följer ett visst mönster och hjälper på så sätt eleverna fram till en riktig lösning. Inte sällan är det frågor där svaren är självklara, exempelvis när läraren frågar hur långt det är från 57 till talet 60, som är markerat på tallinjen (exc. B12). Liknande frågor till vägledning för eleverna visar sig också när beräkningen i exemplet ovan börjar närma sig slutet. Då har läraren markerat tre hopp med pilar som är parallella med tallinjen, $57 \rightarrow 60$, $60 \rightarrow 70$ och $70 \rightarrow 74$. På tavlan står $74-57=3+10+4=$.

Excerpt B13

- L Nu M, kan du kolla, är vi framme vid sjuttiofyra, eller har vi
 hoppat färdigt, upp till det högre talet?
M Hoppat färdigt.
L Det har vi gjort, va?
M Mm.

6. Björken

- L Då är det klart. Hur mycket blev det? Ja, nu måste vi lägga ihop förstås [SKRIVER = TILL HÖGER OM 4], dom här tre hoppen. Vi gjorde ju tre hopp, va. Ett, två och tre hopp [VISAR PÅ TALLINJEN, UTANFÖR BILD] och därför har vi tre termer på tavlan [PEKAR MOT UPPGIFTEN PÅ TAVLAN].. Och hur mycket har vi hoppat sammanlagt, K?... Sägg det lite högre bara.
- K Sjutton.

Samma mönster, att läraren ställer en serie korta frågor där svaret i princip är givet förekommer inte bara i samband med genomgångar som i exemplet med tallinjen ovan. Efter genomgångarna som inleder lektionerna arbetar eleverna individuellt med de sidor i matematikboken som läraren har skrivit på tavlan. Under tiden går läraren runt till de elever som räcker upp handen. När eleverna arbetar med subtraktion är det många händer i luften samtidigt. Genom att besvara lärarens frågor, tar sig eleverna genom beräkningen fram till en korrekt lösning. I excerptet nedan får vi följa kommunikationen mellan läraren och en elev som har påbörjat beräkningen av subtraktionen 30-14. Eleven har redan skrivit siffran sex i sin bok, men läraren tar initiativ till att börja om från början.

Excerpt B14

- L Då börjar vi om. Tänk så här, du ska räkna från fjorton. Vad är närmsta tiotal?
- E1 Mm, femton.
- L Nej, det är inget tiotal. Närmsta tiotal?
- E1 Jaha, tjuugo.
- L Just det. Och hur mycket lägger du på för att få tjuugo?... (5s.)
Om du har fjorton?
- E1 Fjorton ... sex.
- L Ja, sex. Då kan du skriva det där. Är du framme på tretti nu?
- E1 Men jag har ju redan skrivit det (PEKAR PÅ SEXAN).
- L Ja, sex ja.
- E1 Mm.
- L Hur mycket har du kvar upp till dit (PEKAR PÅ 30) nu då?
- E1 ... (6s.) Tio.
- L Mm, då skriver du tio. (E SKRIVER +10) Är du framme sen ... trettio?
- E1 Mm.

Genom att besvara frågor som exempelvis ”Hur mycket har du kvar upp till dit?” och ”Är du framme?” tar sig eleven genom beräkningen steg för steg. Svaren verkar givna eftersom eleven bland annat får hjälp genom att läraren ställer sin fråga och samtidigt pekar på talet som efterfrågas. Då uppgiften är färdiglost och eleven ska fortsätta på nästa säger läraren att ”det är likadant

där”. Därmed framhåller läraren att uppgifterna kan lösas enligt samma princip, det vill säga man upprepar det nyss genomförda tillvägagångssättet steg för steg. Genom lärarens handlingar riktas uppmärksamheten mot proceduren, som i exemplet ovan innebär att eleven lär sig att genomföra subtraktion med metoden “räkna uppåt” med stöd av vissa återkommande frågor.

Sammanfattning

Matematikklassrummet Björken kan sammanfattas i följande översikt.

Generella undervisningsprocesser i matematik

- Matematik är att göra många uppgifter på egen hand
- Snabba elever behöver inte vänta
- Elever belönas med laborativ matematik

Specifika undervisningsprocesser i matematik

- Mellanledet kan vara hjälpmedel eller tankeuttryck
- Elevernas egna räknestrategier i fokus
- Snarlika formuleringar ges olika innebörd
- Elevernas tidigare kunskap uppmärksammas
- Matematiska symboler kompletteras med andra tecken
- Demonstration på tallinjen när subtraktionsmetoden skapar svårigheter
- Läraren leder elever genom subtraktionsberäkningar

En procedur- och begreppsriktad verksamhet

I den fortsatta redovisningen skildras verksamheten utifrån resultatet av den teoretiska analysen, det vill säga vad som har kunnat synliggöras med hjälp av analysverktyget. Presentationen följer samma struktur som i föregående kapitel.

Artefakter

Tydligt framträdande vid analysen av handlingar med hjälp av artefakter är att symbolspråket står i centrum. Det betyder att läraren vid genomgångar utgår från ett additions- eller subtraktionsuttryck som är skrivet på tavlan. Ett återkommande mönster är att läraren då *ställer frågor* av typen ”hur kan man tänka?” Därmed uppmuntras elevernas tankesätt och deras egna lösningsmetoder hamnar i centrum. Lärarens agerande vittnar om intresse för elevernas egna räknestrategier.

Eleverna redogör för sina tillvägagångssätt, bland annat med hjälp av formella begrepp, som exempelvis ental och tiotal. Det framgår av elevernas

redovisningar att lösningsmetoderna utgår från deras begreppsliga förståelse för tal och de uttrycker sig med hjälp av ett *förklarande språk*.

Det finns även elever som istället redovisar räknemetoder på ett sätt som kan liknas vid att flytta siffror, vilket speglar ett procedurmässigt förhållningssätt. De använder därmed vad som kallas ett *beskrivande språk*. Likväl, när läraren efterfrågar elevernas tankar och egna lösningsmetoder dominerar kommunikationen av ett *förklarande språk*.

Utmärkande är också att vissa uttryckssätt som förekommer, till exempel närmaste tiotal, inte tydliggörs helt av läraren. Istället bejakas elevernas resonemang oavsett om dessa visar att eleverna verkar osäkra eller uttrycker förståelse. Då läraren i sådana situationer godvilligt accepterar alla elevsvar kan det jämföras med kommunikationsmönstret ”vad som helst duger”. Här kan det bidra till att eleverna inte ges tillräckliga förutsättningar att urskilja innebörden i ett uttryckssätt, jämfört med snarlika formuleringar, där betydelsen inte är densamma.

En annan metod som återkommer är att läraren återkopplar till kunskap som eleverna förväntas besitta. Det kan gälla såväl begreppslig förståelse som talfakta. Då läraren *riktar uppmärksamheten mot elevernas tidigare kunskap* leder det till att lärare och elever använder ett *förklarande språk*. Det innebär att fokus riktas mot begreppsligt kunnande. Lärarens handlingar medverkar därmed till att ge förutsättningar för eleverna att utveckla *begreppsförmåga*. Analysen visar också att många elever fokuserar på proceduren, vilket snarare bidrar till att skapa möjligheter att utveckla *metod- och beräkningsförmåga*.

Den senare förmågan är också i fokus i situationer när läraren hjälper enskilda elever. Analysen visar att kommunikationen då utmärks av ”funnel pattern”, som med en svensk beteckning brukar beskrivas som *lotsning*. Ett sådant mönster innebär att läraren ställer en serie ledande frågor till eleverna, som därigenom tar sig igenom beräkningen steg för steg genom att besvara lärarens frågor med hjälp av ett *beskrivande språk*. Det betyder att eleven får hjälp att klara den aktuella uppgiften och därmed även andra som är likadana, förutsatt att eleven kommer ihåg de olika stegen i proceduren.

De karakteristiska drag som har framkommit hittills gäller det undervisande språket, det vill säga det språk som används för att demonstrera och förklara det matematiska innehåll som är föremål för undervisning. Inte helt ovanligt i den här verksamheten är att läraren också använder ett *reglerande språk*, det vill säga ger elever tillsägelser i syfte att utöva social kontroll i klassrummet. Det handlar då om diskreta tillrättavisningar som läraren flikar in i det undervisande språket.

Då ljust istället riktas mot lärares och elevers handlingar med hjälp av primära artefakter visar sig två utmärkande metoder. Laborativt material

används (a) i samband med helklassgenomgångar och (b) då elever är klara med sina uppgifter i boken och med eventuella extrablad. Det förstnämnda (a) innebär att läraren använder laborativt material, inte som något ständigt återkommande inslag varje lektion, utan snarare för att *demonstrera* ett specifikt moment, som verkar svårt för eleverna. Ett sådant exempel är subtraktionsberäkning med räknemetoden ”räkna uppåt”, där läraren tar hjälp av tallinjen. Läraren visar subtraktionen på tallinjen för eleverna, som besvarar lärarens lotsande frågor och tittar på medan läraren utför förflyttningarna på tallinjen. Genom lärarens demonstration på tallinjen ges eleverna möjlighet att få en klarare bild av tillvägagångssättet för ”räkna uppåt” vid subtraktion. Dessutom uppmärksammas också relationer mellan tal, vilket talar för att inte bara procedurmässig utan också begreppslig kunskap berörs.

Den andra utmärkande metoden (b) som synliggörs genom analysen innebär att laborativt material används av de elever som tillräckligt snabbt blir klara med de aktuella sidorna i boken. Ofta rör det sig om samma elever. Elevernas attityd verkar mycket positiv till de speciella aktiviteter där laborativt material förekommer, vilket tyder på att deras *intresse* för att utöva matematik på det här sättet, är i fokus. Materialet kan därför liknas vid en form av *belöning* som eleverna får när de är klara med övriga uppgifter.

Betecknande för verksamheten är följaktligen att läraren använder laborativt material för att demonstrera enstaka matematiska moment för eleverna. För eleverna, särskilt de som är snabba, fungerar det laborativa materialet även som en belöning i slutet på lektionerna.

Regler

Lärarens återkommande frågor i stil med ”hur tänker du?” antyder att det här matematikklassrummet präglas av en undervisning där eleven ges möjlighet att utvecklas till en självständig utforskare i matematik med *tilltro till sitt eget matematikkunnande*. I enlighet härmed överlåter läraren också till eleverna att själva bestämma sitt matematiska handlande, bland annat när det gäller huruvida de ska skriva mellanled då de gör sina beräkningar. Detta beskriver dock bara en sida av verksamheten. En annan sida, som också blir synlig då faktorn regler i Engeströms modell är utgångspunkt för analysen, är att elevernas möte med matematik innebär att göra många uppgifter på egen hand. Detta pekar i motsatt riktning jämfört med beskrivningen ovan och det betyder att matematiken också är uppgiftsstyrd och inte bara en kreativ verksamhet.

Motsägelsefulla förhållningssätt tycks vara kännetecknande för den här verksamheten. Det kommer till uttryck bland annat i frågan om mellanledets

användning, då pedagogerna ger eleverna helt olika anvisningar, där en innebär att eleverna inte själva har möjlighet att välja om de ska använda mellanled. Det innebär att eleverna möter två skilda synsätt beträffande mellanledets funktion, att vara ett hjälpmedel eller uttryck för elevernas tankar. Frågan om mellanledets funktion och användning är ett exempel som illustrerar att det inte råder full samstämmighet i Björken kring centrala frågor i matematiken.

Typiskt för Björkens verksamhet är också att en del sociala normer vittnar om att elever tar egna initiativ till viss praxis. Exempel på sådan *elevstyrd praxis* är att en del elever, företrädesvis de som arbetar snabbt, tillåts avbryta läraren för att få sina frågor besvarade, även då läraren är upptagen med att hjälpa en annan elev. Ofta handlar det om att dessa elever vill ha klartecken från läraren så att de kan fortsätta med andra aktiviteter, vilket inte kräver några omfattande lärarinsatser. Eleverna ges därmed möjlighet att snabbt gå vidare med andra aktiviteter, medan å andra sidan en och annan elev kanske störs i sitt resonemang med läraren.

Ett annat exempel på elevstyrd praxis är att elever, gärna två eller tre tillsammans, tar initiativ till att sitta och arbeta i andra utrymmen i huset, vilket läraren också medger.

Annan praxis som framträder är att goda prestationer, som att snabbt vara klar med sina uppgifter, belönas med aktiviteter där laborativt material förekommer eller att arbete vid datorn innebär att arbeta med lättare uppgifter jämfört med innehållet i matematikboken.

Specifikt för Björken är sålunda bristen på samstämmighet, vilket bland annat visar sig i att det förekommer olika uppfattningar om mellanledets funktion och användning. Rådande praxis är alltså inte gemensam.

Genomförandet av undervisningen synliggör också två skilda synsätt, matematik som en skapande verksamhet och matematik som något uppgiftsstyrt. Det förekommer också flera typer av elevstyrd praxis.

Gemenskap

Analysresultatet visar att lärares och elevers metoder ger uttryck för att gemenskap inte definieras som hela klassen tillsammans, utan snarare som enskilda individer eller ibland mindre grupper. Större delen av lektionerna ägnas åt individuellt arbete där en tävlingsmentalitet tydligt visar sig i flera av grupperna. Eleverna diskuterar hur långt de har kommit på de aktuella sidorna och skapar också insynsskydd, så att bänkkamrater inte kan se deras uppgifter eller var de befinner sig på sidorna. Detta är något som läraren emellertid verkar förbise. Elevernas agerande kan förstärka tävlingsandan men det kan även vara ett resultat av den. Det kan också tala för att elever

känner sig osäkra i den här verksamheten. *Omvänd kamratpåverkan* kan vara en lämplig benämning på den här metoden, eftersom elevernas handlingar snarare visar tecken på konkurrens än på samhörighet. Det framstår inte heller som en självklarhet att alla hjälper varandra, utan istället är det bara vissa elever som får hjälp av sina kamrater, vilket också stärker en sådan tolkning.

Arbetsdelning

Arbetet i verksamheten delas mellan elever och lärare på det sättet att läraren inleder lektionerna med *genomgångar* som kan vara både kortare och längre. Läraren ställer frågor, skriver på tavlan och förklarar samt demonstrerar ibland matematiken med hjälp av laborativt material medan eleverna besvarar frågor. Denna beskrivning pekar på att det är en lärarcentrerad verksamhet.

Som en kontrast till detta, är läraren återhållsam med att föra eleverna i en bestämd riktning, både när det gäller deras matematiska tänkande och den sociala styrningen i verksamheten. Vid genomgångarna uppmanas exempelvis eleverna att förklara sina egna räknestrategier och komma med fler lösningsförslag.

Efter genomgångarna *övar* eleverna individuellt på de sidor i matematikboken som är aktuella för lektionen. Ibland förekommer också *veckobeting*. Detta gör att verksamheten även framstår som elevcentrerad. Förutom att eleverna deltar med egna lösningsidéer och inte utsätts för ständig påverkan från läraren att tänka i en viss riktning, utmärks både de lärarcentrerade och de elevcentrerade inslagen av återhållsam lärarstyrning. Analysen som utgår från faktorn arbetsdelning bekräftar därmed det som tidigare framkommit, att elever som tillhör den här typen av verksamhet ges möjlighet att utveckla både *begreppsförmåga* och *metod- och beräkningsförmåga*. Tonvikten ligger dock på det senare.

Vad är möjligt för Björkens elever att lära?

Av översikten på nästa sida framgår att matematikklassrummet Björken kännetecknas av metoder som ger eleverna möjlighet att utveckla både begreppsförmåga och metod- och beräkningsförmåga, där det senare verkar dominera. Här framträder också metoder som kan bidra med förutsättningar för elever att utveckla tilltro till den egna förmågan och intresse för matematik, samtidigt som det finns metoder där det är tveksamt vad de kan bidra till. Metoder som gör det möjligt att utveckla kommunikationsförmåga och resonemangsförmåga har inte någon framträdande roll i verksamheten. Den här typen av verksamhet kan därmed beskrivas som *procedur- och begreppsriktad*.

6. Björken

Tabell 7. Översikt som visar lärares och elevers metoder i relation till möjligt lärande i Björken.

FAKTOR	LÄRARE	ELEVER	MÖJLIGT LÄRANDE
Primära artefakter	Demonstrerar	Försöker förstå	
	Tillåter som belöning	Belönar sig	Intresse
Sekundära artefakter	Ställer frågor "Hur kan man tänka?"	Förklarar/ beskriver	Begreppsförmåga/ Metod- och beräkningsförmåga
	Uppmärksammar tidigare kunskap	Förklarar	Begreppsförmåga
	Lotsar	Beskriver	Metod- och beräkningsförmåga
Regler	Reglerande språk	Anpassar sig	
	Ger olika direktiv Accepterar	Gör olika Styr viss praxis	Tilltro till sin förmåga
Gemenskap	Förbiser	Omvänd kamrat- påverkan	
Arbetsdelning	Leder genomgångar och styr återhållsamt	Förklarar/ beskriver	Begreppsförmåga / Metod- och beräkningsförmåga
	Ger beting	Övar	Metod- och beräkningsförmåga

7. Eken

I matematikklassrummet

Det här klassrummet kännetecknas av att det förutom den ordinarie inredningen också har en del bilder på väggarna som illustrerar olika matematiska begrepp. Här finns till exempel både likhetstecknet, bråktal och olika geometriska figurer representerade. Något särskilt material för matematikundervisning, utöver de tiostavar och entalssymboler som ingår i tiobasmaterialet som finns på tavlan, är däremot inte synligt i klassrummet utan förvaras i skåp bakom stängda dörrar. Till klassrummet hör också en dator, men den verkar inte användas under matematiklektionerna. Ett förenklat schema över dagen med symbolliknande bilder som visar de aktuella aktiviteterna finns på tavlan. Intill klassrummet ligger ett gruppum som används då några av klassens elever arbetar tillsammans med specialpedagogen.

Det är för det mesta ganska lugnt i klassrummet, men några elever kräver mer av lärarens uppmärksamhet. Under nästan alla lektioner finns en elevassistent närvarande i klassen för att särskilt stödja en elev och ibland är en förälder på besök. När det är flera vuxna som samtidigt hjälper elever påverkas ljudvolymen i klassrummet, men eleverna visar inga tydliga tecken på att de känner sig störda. Lärare och elever verkar trivas och ha roligt tillsammans och det förekommer ofta glada skratt under lektionerna. Det ger ett intryck av positiv atmosfär för den som är besökare i det här klassrummet.

I. Generella undervisningsprocesser i matematik

Som i tidigare presentationer omfattar detta avsnitt lärares och elevers handlingar i relation till matematik generellt, handlingar som alltså är typiska för matematikklassrummet Eken.

Matematiklärande, ett gemensamt projekt

Kommunikationen mellan lärare och elever tyder på att det finns ett gemensamt projekt där både lärare och elever är delaktiga. Ett exempel då det gemensamma projektet kommer till uttryck är då läraren relaterar till gemensamma erfarenheter från tidigare matematiklektioner och samtidigt betonar att de är överens om hur en av räknelagarna ska tillämpas.

Excerpt E1

- L Så... igår var ju vi rätt överens om det här, va [SKRIVER $7+4=$
HÖGST UPP PÅ TAVLAN]? Vad är sju plus fyra...K!
- K Elva. [L SKRIVER 11]
- L Bra! Vad är fyra plus sju [SKRIVER $4+7=$ PÅ NY RAD
UNDER $7+4= 11$]...O!
- O Elva.
- L [SKRIVER 11] Så det spelar alltså ingen roll vilken ordning jag
har på addition?
- E Nä.
- L Det var vi överens om igår, eller hur?
- E Mm.
- L Bra! Kom ihåg det!

Läraren upprepar ett uttryckssätt som betonar enighet mellan lärare och elever.

Samstämmighet och delaktighet visar sig också på andra sätt, vilket framgår av excerptet nedan. Klassen och läraren löser tillsammans uppgiften 42-13, som läraren har skrivit på tavlan. Det framgår av lärarens yttrande att det är första gången klassen möter en subtraktion med tiotalsovergång tillsammans och de har just konstaterat att det inte går att räkna två minus tre. Läraren gör då eleverna uppmärksamma på att de har ett gemensamt talesätt, som kan vara till hjälp i den nya situationen.

Excerpt E2

- L Precis. Här stöter vi på nåt nytt, faktiskt. Att vi har ju två minus
tre [PEKAR PÅ TVÅAN, MINUSTECKNET OCH TREAN],
ett mindre tal minus ett större, det brukar vi ju alltid säga att det
går inte. Ja hur ska vi göra då då, för att uträkning *går* det ändå
att göra. Men *hur* ska vi göra det?

Lärarens yttrande ”det brukar vi ju alltid säga” poängterar att lärare och elever har ett gemensamt språkbruk, här i form av en regel som kan ge eleverna vägledning. Liknande uttryckssätt, exempelvis ”det som vi har tränat på tillsammans”, vittnar också om att lärare och elever arbetar gemensamt mot ett mål. I utdraget ovan ställer läraren frågor till eleverna, varvid de bjuds in att tillsammans med läraren diskutera hur de ska kunna lösa denna nya typ av subtraktion. Därmed ges nya tillfällen för lärare och elever att diskutera och skapa enighet kring det matematiska innehållet, något som i sin tur kan medverka till elevers kunskapsutveckling.

Ett annat exempel som tyder på elevernas delaktighet är att eleverna får agera inför klassen i samband med redovisningar. Vid dessa tillfällen tar eleverna lärarens plats framför klassen och läraren ställer sig oftast en bit

ifrån. Det innebär också att eleverna använder samma formuleringar som läraren, skriver på tavlan och använder tiobasmaterial på tavlan så som läraren brukar göra. Den praxis som synliggörs härigenom, ger uttryck för att både lärare och elever har viktiga roller i matematikundervisningen.

Gemensamt för exemplen ovan är att de visar på en strävan efter samstämmighet samt att lärare och elever är delaktiga i ett gemensamt projekt. Det innebär att ”vi”, det vill säga elever och lärare, arbetar tillsammans i syfte att eleverna ska lära matematik.

Matematik med variation, tillsammans och individuellt

Läraren inleder alltid lektionen med en genomgång som varierar i längd ifrån ett par till drygt femton minuter, beroende på om inledningen mest är en instruktion inför elevernas kommande aktiviteter eller genomgång av ett matematiskt moment. Ibland sker genomgångarna i halvklass. Eleverna arbetar också individuellt i matematikboken. En återkommande aktivitet är också att eleverna arbetar två och två med att lösa uppgifter, då de ofta även använder laborativt material. Lösningarna presenteras för klassen genom att eleverna visar på tavlan med tiobasmaterial och skriver med det matematiska symbolspråket. Då eleverna presenterar sina lösningar på tavlan räcker det inte att de bara berättar hur de har gått tillväga. Läraren ställer frågor i stil med ”varför tar du plus?” och ”förklara hur det kan bli minus fyra”, vilket uppmanar eleverna att förklara och argumentera för sitt tänkande.

Det här matematikklassrummet erbjuder således flera olika sätt att utöva matematik, genom övning, muntlig kommunikation, laboration, argumentation samt redovisning.

Från konkret till abstrakt, från gemensamt till individuellt

Ett metodiskt tillvägagångssätt som är framträdande kan beskrivas i följande steg: (1) Lektionerna inleds med hel- eller halvklassgenomgång då lärare och elever löser ett antal uppgifter tillsammans på tavlan. Till en början används symbolspråket parallellt med att läraren illustrerar med ett laborativt material, ofta tiobasmaterialet, på tavlan. (2) Eleverna löser samma typ av räkneuppgifter tillsammans med läraren, men nu utan något material på tavlan som kan hjälpa till att konkretisera räkneoperationen. (3) Eleverna övar på egen hand genom att arbeta med liknande uppgifter i matematikboken eller löser uppgifter parvis.

Excerptet nedan visar att läraren suddar ut och tar bort allt som tidigare funnits på tavlan. Nu går de över till det andra steget, som här innebär att tänka talen och inte se dem på annat sätt än som skrivna symboler.

Excerpt E3

- L Nu tänkte jag att vi skulle köra här, några tal utan tiotalen och entalen här [TAR BORT TIOSTAVAR OCH ENTALSSYMBOLER FRÅN TAVLAN]. Bara liksom *tänka* det i huvudet utan att *se* det [SUDDAR ALLT]... sextisju minus femton [SKRIVER $67 - 15 =$], hur ska vi börja tänka när vi ska räkna ut det här talet?

Genom lärarens yttrande synliggörs en intention om att gå från det konkreta till det abstrakta.

I andra situationer är det övergången från den gemensamma övningen tillsammans med läraren till det individuella arbetet, att göra motsvarande på egen hand, som tydliggörs.

Excerpt E4

- L Ja där på sidan femtiofyra
 /.../
 där handlar det om just att räkna subtraktion, det som vi har tränat på tillsammans på tavlan. Men på sidan femtiofyra, ja då ska du försöka klara av det här själv.

Av lärarens yttrande framgår att eleverna nu ska fortsätta med samma typ av uppgifter som de just har övat på tillsammans.

Att gå från det konkreta till det abstrakta och från det gemensamma till det individuella är utmärkande för det tillvägagångssätt som tillämpas i det här matematikklassrummet.

Allmän uppskattning uttrycks genom kollektivt beröm och individuell återkoppling

I samband med att lektionerna avslutas är ett återkommande inslag att läraren berömmar eleverna. Exempel på vad eleverna får höra är ”bra jobbat”, ”ni har arbetat jätteduktigt, tycker jag”, ”kanonjobb idag”. Den här typen av beröm har ingen direkt koppling till uppgifterna eller det aktuella innehållet utan ger istället uttryck för en allmän uppskattning. På liknande sätt uttrycker läraren förtjusning över att många elever är aktiva i den pågående klassrumskommunikationen, ”Härligt att se så många händer uppe!” Även enskilda elevers prestationer uppmärksammas och ibland sker det inte bara verbalt. Ett sådant exempel är då en elev med visst stöd av läraren just har lyckats lösa subtraktionen $84 - 47$. Läraren skakar hand med eleven och säger ”Bra!”, varvid eleven ser förtjust ut. Precis som det kollektiva berömmet är detta också exempel på återkoppling som inte anknyter till det matematiska innehållet.

Misstag slätas över

Elever som redovisar sina beräkningar inför klassen lyckas inte alltid helt med sin uppgift. I sådana situationer slätar läraren över eller urskuldar eleverna för deras misstag. Excerptet nedan visar hur detta kan gå till. Lärarens kommentar föregås av att två elever presenterar för klassen hur de har löst subtraktionen $83-39$ via mellanledet $50-6$. När de subtraherar entalen säger de nio minus tre istället för tre minus nio, vilket läraren kommenterar på den näst sista raden i excerptet. Läraren inleder sin kommentar med att ge eleverna beröm för att de har gjort en bra start på redovisningen.

Excerpt E5

- L Tack så mycket! Ja det *här* [PEKAR PÅ $50-6=44$], det ser helt rätt ut och så börjar ni ju så bra här [PEKAR PÅ TITOTALSSIFFRORNA 8 OCH 3], att ni sa att ni tog åttio minus trettio, eller om ni sa åtta minus tre, men det blev i varje fall femtio [PEKAR PÅ 50], kvar från tiotalen... Men sen, vilka tal är det vi tar minus varann sen?... Jag tror ni tänkte rätt, fast ni kanske inte sa det riktigt rätt i ord.

Elevernas redovisning har skett i ett långsamt tempo. När läraren ursäktar eleverna och säger att de nog tänkte rätt, kan det betyda att läraren är angelägen om att eleverna inte ska behöva känna att de har misslyckats.

Lärarens återkoppling på elevernas prestationer domineras av positiva ytringar till eleverna både som grupp och enskilda individer. Elever som inte lyckas till fullo eller inte verkar helt säkra uppmärksammas för det som har gått bra, medan läraren finner ursäkter för deras tillkortakommanden. På så sätt kan lärarens agerande ge förutsättningar för att eleverna utvecklar tilltro till sig själva och sitt matematikkunnande.

Med sina förklaringar visar eleverna att de förstår

I det här matematikklassrummet är det inte bara läraren som förväntas förklara för eleverna vid genomgångar och när de ställer frågor. Det har också framkommit att läraren ofta uppmanar eleverna att förklara hur de tänker. Det här gäller även då eleverna arbetar med att genomföra beräkningar enskilt och i par. Läraren går då runt bland eleverna i klassen och vid ett sådant tillfälle uppstår replikväxlingen som återges i excerptet nedan. Två elever som arbetar tillsammans har just förklarat sin tankegång för läraren och fått bekräftat att deras lösning kan fungera. Eleven som ställer sin fråga till läraren verkar tycka att det är onödigt att få ”påhälsning” av läraren och uttrycker en viss motsträvighet.

Excerpt E6

- E Men varför var du tvungen att komma hit?
L Det är för att jag ville att ni skulle förklara för mig [FNISSAR],
 så jobbig är jag.

Läraren bemöter eleverna med både humor och bestämdhet. Inför eleverna uttrycker läraren en viss förståelse för deras motstånd, genom att säga ”så jobbig är jag”. Det visar att läraren här tar elevernas perspektiv. Samtidigt har läraren dessförinnan hållit fast vid sin intention och sett till att eleverna har fått förklara sin lösning av uppgiften,

Den här situationen kan vara ett uttryck för att läraren arbetar aktivt med att utveckla gemensamma normer. Den aktuella normen, som tyder på att förklaringar är ett sätt för eleverna att visa att de förstår och kan argumentera, delas ännu inte av alla elever och läraren måste därför argumentera för sitt handlande. Genom att inte avvika från sin linje markerar läraren för eleverna vad som förväntas av dem i det här matematikklassrummet.

Stöd och uppmuntran till elevers resonemang

När elever förklarar uppmanas de även att förklara *varför* de har gjort på ett visst sätt, det vill säga läraren strävar efter att de ska resonera och argumentera för sin tankegång. Excerptet nedan är hämtat från en situation där två elever löser uppgifter tillsammans. Den ena eleven har svårt att få gehör för sina tankar och beklagar sig för läraren, som då instruerar båda eleverna om hur de kan uttrycka sig till varandra. På grund av dålig ljudkvalitet i inspelningen av den aktuella sekvensen är det bara lärarens röst som återges.

Excerpt E7

- L Och resonera, så att det inte bara blir du som säger hur det ska
 vara. Resonera mer hur tycker du, så här tycker jag, hur tycker
 du [ohörbart] /.../
E [ohörbart]
L Då måste du säga varför du inte tycker det blir det.

Situationen kan ses som ett exempel på hur läraren ger råd för att hjälpa eleverna att bli bättre på att föra resonemang och argumentera för sina matematiska idéer.

I andra situationer, som nästa excerpt kan belysa, betonas vikten av att både kunna prata och lyssna på varandra.

Excerpt E8

- L Hur har det gått för er?

7. Eken

- D Det går inte bra.
L Vad är det som inte går bra?
/.../
L Är det svårt A, D också?
E [ohörbart]
L Ni måste prata med varann. Säg, A, vad det är du tycker är svårt, så får D lyssna på dig där.
A Det här, det går inte sätta minustecken där, det går inte sätta sju där, minus tre.
L Nä, varför gör det inte det då?
A Därför då blir det knäppt!
L Jag tror han har nåt smart tänk, D. Lyssna på honom en gång för han tänker faktiskt väldigt bra.

När eleverna säger att det inte har gått bra bemöts de av lärarens kommentarer som gör eleverna uppmärksamma på att de kan ha hjälp av varandras tankar. Det betyder att det är viktigt att eleverna både pratar och lyssnar på varandra när de löser uppgifter tillsammans.

Båda exemplen ovan visar hur läraren uppmuntrar elevers resonemang genom att ge råd och stöd i situationer då eleverna upplever motgångar.

II. Specifika undervisningsprocesser i matematik

De teman som presenteras fortsättningsvis gäller precis som tidigare lärares och elevers handlingar i förhållande till själva undervisningsinnehållet.

Mellanledet underlättar, matematik ska vara enkelt

Mellanledet har en central roll då eleverna arbetar med tvåsiffrig additions- och subtraktionsberäkning. När läraren här talar om mellanled uttrycker språkbruket att mellanledet är ett hjälpmedel som underlättar vid beräkningar. Det antyder också att matematik ska vara så enkelt som möjligt. Ett exempel som illustrerar detta är då läraren pekar på mellanledet i beräkningen som skrivits på tavlan och säger "Och här har vi mellanledet som gör att man ganska enkelt kommer fram till rätt svar".

Det är inte bara läraren som uttrycker att mellanledet kan vara en hjälp vid beräkningar. Denna uppfattning delas också av elever, vilket framgår av svaret på lärarens fråga i excerptet nedan. Läraren ställer sin fråga till klassen efter att de tillsammans har löst en uppgift på tavlan. Eleverna har räknat och berättat medan läraren har skrivit. På tavlan står nu $589-263=300+20+6=326$.

Excerpt E9

- L Varför gör vi det här mellanledet?... M!
M För att det ska vara lättare att räkna.

7. Eken

- L Visst är det lättare att räkna trehundra plus tjugo plus sex än och räkna femhundraåttionio minus tvåhundrasextiotre?
E Mm.

Här har eleverna tillfälle att visa att de delar lärarens uppfattning om nyttan med mellanled. Elevens svar stämmer med synsättet som läraren verkar vilja etablera i Eken, det vill säga att mellanledet är ett hjälpmedel som gör beräkningarna lättare att genomföra. Av kommunikationen ovan framgår alltså att matematik ska vara enkelt, vilket mellanledet här anses bidra till.

När eleverna ska arbeta på egen hand efter gemensamma genomgångar påminner läraren ibland om att ”vi skriver *mellanled* överallt”. Det är tecken på att läraren strävar efter att göra användningen av mellanledet till en praxis för alla elever.

Räknetoder förklaras steg för steg

Det har redan framkommit att både elever och lärare bidrar med förklaringar i stor omfattning. När läraren presenterar en ny beräkningsmetod för klassen, sker det steg för steg efter en bestämd ordning. Vid genomgången uppmärksammas en talsort i taget genom att läraren ställer frågor i stil med ”Vilket tal ska vi börja med?” och ”Vilka tal ska vi gå vidare med?” De två excerpten nedan illustrerar hur läraren går tillväga för att beräkna subtraktionsuttrycket $58-34=$, som är skrivet på tavlan. Vid genomgången använder läraren avbildade tiostavar och fyrkantiga entalssymboler som ingår i en särskild uppsättning tiobasmaterial, anpassad för att användas på tavlan.

Excerpt E10

- L /.../. Om vi ska räkna ut femtioåtta minus trettiofyra, vilka tal ska vi då börja med?...J!
J Tiotalen.
L Vi börjar med tiotalen. I femtioåtta är det fem tiotal [GÖR ETT STRECK UNDER FEMMAN] , i trettiofyra är det tre tiotal [GÖR ETT STRECK UNDER TREAN]. Fem tiotal minus tre tiotal [PEKAR PÅ FEMMAN OCH TREAN]...ja här har vi fem [PEKAR PÅ TIOSTAVARNA] och så tar vi bort ett, två, tre [TAR SAMTIDIGT BORT TRE TIOSTAVAR]. Hur många tiotal har vi kvar?...M.
M Tjugo.
L Vi har kvar tjugo. Två tiotal eller tjugo. Det är ju samma sak, bara olika sätt att säga det [SKRIVER 20 EFTER =]....Mm. Vilka tal ska jag gå vidare på nu då?

Det framgår av beskrivningarna i hakparenteserna ovan att läraren markerar tiotalen genom att dra streck under de aktuella siffrorna och demonstrerar

själva räknehandlingen genom att ta bort tre tiostavar. Vi kan också lägga märke till att läraren tydliggör antalet tiotal i respektive tal, exempelvis ” i femtioåtta är det fem tiotal”. Därmed förekommer de synonyma tiotalsbenämningarna och talnamnen parallellt, till exempel två tiotal och tjugo.

Frågan som läraren ställer sist i excerptet ovan leder in eleverna på beräkningen av entalen. Samma förfarande som ovan upprepas, men nu med entalen, det vill säga $8-4=4$. Nästa steg i beräkningsproceduren blir sedan att utföra räkneoperationen som själva mellanledet uttrycker. Följande excerpt visar hur läraren går vidare och demonstrerar med hjälp av både material och extra tecken på tavlan, hur tiotal och ental slutligen adderas med varandra,

Excerpt E11

- L Då har jag kvar fyra [SKRIVER 4 EN BIT TILL HÖGER OM 20]... ental. När jag tog tiotalen [PEKAR PÅ TIOSTAVARNA] minus varandra, då fick jag kvar tjugo. När jag tog entalen [PEKAR PÅ ENTALSSYMBOLERNA] minus varandra, då fick jag kvar fyra. När jag nu ska räkna ut vad det här blir, så måste jag räkna ut tiotalen jag har kvar *plus* entalen som jag har kvar. Jag måste lägga ihop det [SKRIVER + MELLAN 20 OCH 4 OCH = TILL HÖGER OM 4] för att komma fram till rätt svar. Vad *är* femtioåtta minus trettiofyra?... H.
- H Tjugofyra.
- L Tjugofyra, ja [SKRIVER 24]. Det här, tjugo plus fyra, det är ju själva mellanledet [PEKAR PÅ $20 + 4$ OCH GÖR EN KLAMMER UNDER UTTRYCKET], där vi räknar ut hur många tiotal som är kvar, hur många ental som är kvar, för att lättare komma fram till det här rätta svaret, tjugofyra.

Här sammanfattar läraren hur de har kommit fram till det som utgör själva mellanledet, först beräkna tiotalen och sedan entalen, vilket innebär att läraren riktar uppmärksamheten mot proceduren. Genom att illustrera med tiobasmaterial och använda synonyma begrepp för talnamnen (se excerpt E10) ges eleverna även förutsättningar att utveckla förståelse för talens innebörd.

Undervisning i små steg, där eleverna ges möjlighet att öva additions- och subtraktionsberäkning tillsammans med läraren innan de övar på egen hand vittnar om en miljö som är procedurinriktad. Det framgår inte minst av de rutinmässiga frågorna och elevernas fåordiga svar. Tillvägagångssättet tyder också på att matematik innebär att följa regler, exempelvis börja med tiotalen vid addition och subtraktion. Genom att läraren synliggör själva

räkneoperationen med hjälp av konkretiserande material riktas dock uppmärksamhet även mot begreppen.

Oklarheter och missuppfattningar blir undervisningsinnehåll

Flera av de teman som hittills har presenterats pekar på att förklaringar spelar en central roll i det här matematikklassrummet. Exempel som har visat detta är då läraren går igenom och förklarar en räknemetod för klassen (excerpt E10-11), elever som försöker förklara för varandra (och lyssna på) hur de tänker (excerpt E8) och elever som förklarar för läraren för att visa att de förstår, trots att de tycker det verkar onödigt (excerpt E6).

Andra situationer där förklaringar är vanliga är då läraren griper in för att göra elever observanta på att de har missuppfattat ett matematiskt begrepp eller fenomen. Ett begrepp som ibland orsakar svårigheter för eleverna är likhetstecknet, vilket återspeglas genom excerptet nedan.

Dialogen utspelar sig mellan läraren och två elever som just har påbörjat sin redovisning inför klassen där de ska berätta hur de har löst subtraktionen 37-14. Först subtraherar de tiotalen med varandra. Eleverna turas om att berätta, medan läraren skriver på tavlan. När det står $37-14=30-10=20$ på tavlan säger en av eleverna ”sen ska vi fortsätta och skriva minus”. Därefter följer den första repliken nedan, som visar att läraren avbryter, pekar på likhetstecknet och frågar eleverna om de känner till innebörden.

Excerpt E12

- L *Då vill jag att ni tittar här...[PEKAR PÅ 20] Kommer ni ihåg det här tecknet [PEKAR PÅ LIKHETSTECKNEN]? Vad betyder det?*
/.../
- L Titta, titta nu! Vad betyder det här tecknet? [PEKAR PÅ LIKHETSTECKNEN]
- E1 Att det blir det talet
- S Att det blir lika mycket, på båda sidor.
- L Nu säger S, säg det en gång till, det är jättebra!
- S Att det blir lika mycket på båda sidor.
- L Ja, och då kollar vi, *är* det lika mycket på båda sidorna?
[PEKAR PÅ 37-14]
- E Nä.
- L Det är inte det, va? Så *här* [GÖR ETT STRECK ÖVER DET FÖRSTA LIKHETSTECKNET] kan ni inte ha likhetstecknet.

Vi kan se att eleverna E1 och S har två olika förklaringar. Förklaringen som eleven E1 ger, ”det blir det talet”, antyder att eleven uppfattar att likhetstecknet producerar ett resultat. Eleven S däremot, visar förståelse för att likhetstecknet uttrycker ekvivalens, vilket läraren också lyfter fram för

klassen genom att låta eleven upprepa sitt svar. Läraren involverar sedan resten av klassen för att kontrollera om de två eleverna har använt likhetstecknet på rätt sätt. När det visar sig att de inte har gjort det stryker läraren över det felaktigt placerade likhetstecknet mellan 37-14 och 30-10.

Utdraget ovan visar exempel på lyhördhet hos läraren, som genom att fånga upp elevers missförstånd av ett begrepp kan sätta detta i fokus. Det är också vanligt att elever som inte förstår ställer frågor i samband med helklassgenomgångar. Genom att ta vara på en situation där klassen deltar gemensamt, skapas förutsättningar även för andra elever att utveckla begreppslig kunskap, vilket i exemplet ovan motsvaras av förståelse för likhetstecknets innebörd.

Då eleverna förklarar godtar läraren inte rutinmässigt deras förklaringar, utan försöker istället få eleverna att utveckla sina tankar ytterligare. Det visar sig bland annat i situationen som följer härnäst, där eleverna ombeds att redogöra för varför det ska vara plustecken i mellanledet.

Bakgrunden till situationen är att den observerade undervisningen många gånger upptas av svårigheten som eleverna ställs inför i samband med subtraktionsberäkningar, om det ska vara plus eller minus i mellanledet. Eleverna i Eken övar på subtraktionsberäkningar, både med och utan tiotalsövergång, vid genomgångar tillsammans med läraren och genom att lösa uppgifter på egen hand eller i par, som i exemplet nedan.

Av excerptet framgår att en av eleverna har ett procedurmässigt förhållningssätt vid beräkningar med mellanled. Eleven följer en regel som utgår från entalens storlek och placeringar i uttrycket. Det tyder på att innebörden i själva räknemetoden inte är helt klar för eleven. Läraren försöker få eleverna att förklara sitt tillvägagångssätt på annat sätt än med hjälp av den här regeln som utgår från talens placeringar. Uppgiften som lärare och elever diskuterar är 78-37. Vi kommer in i samtalet när eleverna har utfört en del av beräkningen, $78-37=40+1$, då läraren gör eleverna observanta på plustecknet som de har skrivit i mellanledet.

Excerpt E13

- L [LÅGMÄLT] Nu måste ni verkligen hålla koll på det här allihopa. Varför blir det addition där [PEKAR MOT UPPGIFTEN]...P.
- P ... För att det är mindre tal åt höger.
- L På entalen menar du?
- P Ja.
- L Ja. Och varför blir det just addition då? Blir det bara för att det är mindre tal?
- P Nää...

- L Det är så rätt som du säger, men... hur ska man... kan ni inte hjälpa till och förklara lite mer, nån? O!
- O Man tar ju så här tiotalen för sig och entalen för sig. Så då *delar* man ju liksom på talet, så man måste plussa ihop det igen.

Läraren nöjer sig inte med den första elevens svar, ”att det är ett mindre tal åt höger”. Därmed ges möjlighet för eleverna att försöka ge ett utförligare svar, vilket här resulterar i något mer än det procedurmässiga förhållningssätt som den första eleven visar upp. Då eleven O förklarar och berättar att man delar på talet, är det talet i sin helhet som istället är utgångspunkt och inte de separata talsorterna, vilket ger uttryck för att eleven O inte fokuserar proceduren i första hand. Läraren upprepar därefter elevens svar (det har inte tagits med i excerptet), vilket ytterligare riktar uppmärksamheten mot talen som helheter och mindre mot proceduren där tiotal och ental hanteras var för sig.

Det matematiska innehållet representeras med variation

Det matematiska innehållet representeras på olika sätt för eleverna, men symbolspråket och den muntliga kommunikationen är dominerande. Därutöver förekommer bland annat tiobasmaterial och låtsaspengar. Förutom elevernas material i små lådor, finns som vi sett också en särskild uppsättning tiobasmaterial som är avsedd att användas på skrivtavlan. Det materialet används vid gemensamma genomgångar av läraren och av eleverna när de presenterar sina lösningar på tavlan. Ibland utnyttjar läraren också sina fingrar för att uttrycka tal för eleverna.

Här följer nu två exempel på situationer där pengar och tiobasmaterial figurerar. I det första exemplet används pengar för att synliggöra talsorternas olika värde, medan det andra demonstrerar hur läraren med hjälp av tiobasmaterial kan illustrera subtraktion med tiotalsovergång.

Inför arbetet med två- och tresiffrig addition och subtraktion förbereds eleverna genom att läraren uppmärksammar de olika talsorterna. Ett sätt att göra detta är genom att eleverna använder låtsaspengar i form av enkronor, tiokronor och hundralappar. Kommunikationen mellan lärare och elever i excerptet nedan utgör en del av en undervisningssekvens. Den inleds med att eleverna på lärarens uppmaning tar upp 137 kronor ur sina askar. Eleverna, som arbetar tillsammans två och två, lägger upp pengarna så att det finns en hundralapp, tre tiar och sju enkronor på deras bord. Till att börja med ställer läraren frågor i stil med ”hur många tiokronor behövde ni för att göra det här?” och eleverna svarar utan svårighet. Därefter skriver läraren talet 137 på tavlan och övergår sedan till att ställa frågor som gäller siffrornas olika värde, vilket också inleder excerptet.

Excerpt E14

- L /.../ Där har jag ju skrivit hundrattiosju [PEKAR HÖGST UPP PÅ TAVLAN]. Vilken siffra är mest värd av dom där?...Är det ettan, trean eller sjuan som är mest värd?...G!
- G Sjuan.
- L Sjuan, okej. Så då tar du sju stycken [GÖR EN UPPÅTPEKANDE PIL UNDER SJUAN], är det enkronorna eller?
- G Äh...ja.
- L Ja...men om du får sju enkronor [RITAR 7 ENKRONOR UNDER PILEN] →
- G Mm.
- L och H får den här ettan [GÖR EN PIL UNDER ETTAN]... vem kan handla mest i affären [ENSTAKA FNISS HÖRS I KLASSRUMMET]?
- G Men alltså jag trodde att du menade ett, tre eller sju. Inte etthundra eller trettio eller sju.
- L Jag förstod det. Men nu om jag tänker, där dom står, om dom står ihop sådär som etthundrattiosju?
- G Då är det hundra.
- L Då är ettan mest värd, fast det bara är en etta. Är det någon annan som håller med, eller?
- E Jaa.
- L Ni gör det! [SUDDAR PILAR OCH ENKRONOR]... för den där ettan [PEKAR] är ju vadå, vad kallar vi det, T?
- T Hundratal.
- L Och trean? [PEKAR] ...R!
- R Tiototal.
- L Sjuan? [PEKAR] ...G nej R, förlåt.
- R Ental.
- L Ental, ja. Så även fast vi har jättemånga ental så är ju dom inte värda nånting nästan om man jämför.

Då läraren anknyter till pengarna som eleverna har på sina bord och därtill ritat sju enkronor på tavlan riktas nu elevernas uppmärksamhet inte bara mot siffrornas värde utan också mot pengarnas olika valörer. Genom att läraren också frågar vem som kan handla mest i affären får eleven möjlighet att koppla till sina vardagserfarenheter.

Eleven G upptäcker att hon har missuppfattat lärarens fråga och visar att hon förstår att siffrorna har olika värde beroende på placeringen i talet. När läraren lite senare säger att entalen nästan inte är värda något även om man har jättemånga, uppmärksammas återigen att skillnaden mellan siffrornas talvärde beror på om de är ental, tiotal eller hundratal. Här är det upp till eleverna själva att göra kopplingen till de sju enkronorna på bänken. När

talen relateras till pengar kan dessa hjälpa till att synliggöra siffrornas olika talvärden, inte bara beroende på materialet i sig utan också för att pengar ingår i elevernas vardagserfarenheter.

I det andra exemplet används tiobasmaterial för att illustrera subtraktion med tiotalsovergång. I likhet med vad som tagits upp tidigare om hur räknemetoder förklaras (excerpt E10-11), visar excerptet nedan hur läraren tillsammans med klassen utför räkneoperationen steg för steg med hjälp av tiobasmaterialet. Vid sidan av materialet som är uppsatt på tavlan skriver läraren samtidigt med symbolspråk varje räknehandling som genomförs. Uppgiften som elever och lärare löser tillsammans är $54-38$. De har genomfört subtraktionen av tiotalen, $50-30$ och ska nu subtrahera entalen från varandra enligt den metod de använder. På tavlan står $54-38=20$. Vid sidan om har läraren satt upp fem tiostavar och fyra entalssymboler. Excerptet inleds med lärarens fråga.

Excerpt E15

- L /.../ Hur ska vi fortsätta nu?... N
 N Entalen
 L Berätta hur vi ska göra då!
 N Vi ska ta... vi ska ta bort dom alla fyra från åttan.
 L Just det, för här har vi alltså fyra minus åtta [GÖR STRECK UNDER 4 OCH 8], ett mindre tal minus ett större. Jaha, här har vi ju dom här fyra [PEKAR PÅ ENTALSSYMBOLERNA], och vi ska ju ta bort åtta. En, två, tre, fyra [TAR BORT ENTALSSYMBOLERNA OCH RÄKNAR DEM SAMTIDIGT], dom där fyra gick ju jättebra att ta bort [SKRIVER 4 STRAX UNDER 8 OCH DRAR ETT STRECK FRÅN 4 UPP TILL 8],... men hur många mer är det kvar att ta bort N?
 N Fyra.
 L Det är ju kvar att ta bort fyra till [SKRIVER 4 PÅ NYTT STRAX UNDER 8 OCH DRAR ETT STRECK ÄVEN FRÅN DEN HÄR FYRAN UPP TILL ÅTTAN], och ska vi ta bort fyra till, då måste det ju bli minus fyra [SKRIVER - 4 EFTER 20]. Och tittar vi här borta då, då, så är det ju från det sista tiotalet, som vi ska ta bort fyra [HÅLLER UPP EN AV DE TVÅ TIOSTAVARNA]. Nu går ju inte det att göra med dom här, utan jag får liksom vika bort dom, en, två, tre, fyra... [VIKER BORT 4 RUTOR OCH SÄTTER UPP DEN FÖRKORTADE TIOSTAVEN IGEN BREDVID DEN HELA]. Då är detta det som är kvar. Tjugo minus fyra, vad är det för nånting?

Eleven säger att de ska ta bort alla fyra entalen från åttan, vilket läraren följer upp med sina kommentarer som förtydligar att det är åtta som ska tas bort.

När läraren först har tagit bort de fyra entalssymbolerna som fanns uppsatta, skriver läraren också siffran fyra under åttan. Genom de borttagna entalssymbolerna synliggörs att det inte finns några fler ental att ta bort. Med sin nästa fråga gör läraren eleverna uppmärksamma på att ytterligare fyra ental ska tas bort. Efter att eleven har svarat på lärarens fråga, skriver läraren minus fyra i mellanledet och ytterligare en fyra under siffran åtta. Genom att därefter vika in fyra rutor på en av tiostavarna så att den blir kortare och även berätta om det, tydliggör läraren att dessa fyra ental subtraheras från ett tiotal.

Subtraktionsberäkningar som genomförs med den här räknemetoden leder ibland till minustecken i mellanledet och ibland till plustecken, beroende på om subtraktionen innehåller en tiotalsovergång eller ej. Läraren går igenom flera exempel av båda subtraktionstyperna och använder både pengar och tiobasmaterial vid sidan av symbolspråket. Därigenom ges eleverna förutsättningar att förstå själva räknemetoden och inte bara lära den procedurmässigt.

Praxis till stöd för hantering av innehåll och form

Vid flera tillfällen använder alla eleverna tiobasmaterial i samband med additions- och subtraktionsberäkning. När klassen löser uppgifter tillsammans går läraren runt bland eleverna och kontrollerar att de har placerat tiostavarna och entalskuberna rätt, det vill säga på samma sätt som tiotal- och entalssiffror är placerade i talet. De två excerpten nedan visar hur läraren påminner eleverna om hur det ska se ut när de lägger talet med tiobasmaterial på sin bänk.

Excerpt E16

- L /.../ Och så vill jag att ni lägger så att ni har tiotalen till vänster och entalen sen, bredvid till höger.
 E1 För mig blev det så automatiskt, jag vet inte varför.
 L Nej, bra. Då har du det här inne [PEKAR PÅ SITTE HUVUD]

För eleven ovan verkar placeringen av tiotal och ental vara en etablerad praxis. Så är det inte för alla elever, vilket framgår av följande dialog.

Excerpt E17

- L Och så vill jag igen påminna om att ni lägger tiotalen till vänster [PEKAR PÅ TIOSTAVARNA PÅ TAVLAN] och entalen till höger [PEKAR PÅ ENTALSSYMBOLERNA] ...
 E1 Varför måste det vara så?
 L För när vi skriver talen →
 E1 Ja.

- L så skriver vi ju tiotalet [PEKAR PÅ ÅTTAN I 84] till vänster och [PEKAR PÅ FYRAN] så jag vill att ni ska lägga precis som vi skriver.

För eleven ovan verkar det inte givet att man ska placera tiostavarna till vänster och entalskuberna till höger. Läraren strävar efter att eleverna ska följa samma princip som gäller för hur vi skriver talen, det vill säga eleverna ska följa en bestämd regel när de använder tiobasmaterialet. En sådan regel kan hjälpa till att utveckla en praxis som skapar möjligheter att förstå det matematiska innehållet som här handlar om talsystemet. Annat som kan bidra till detta är lärarens förklaring som pekar på kopplingen mellan symbolspråk och tiobasmaterial.

Det finns också andra regler som läraren emellanåt påpekar för eleverna. De gäller matematikens form, till exempel hur eleverna ska skriva i sina räknehäften. Där ska det helst bara vara en siffra i varje ruta och efter varje uppgift i räknehäftet ska eleverna dra streck med linjalen. Detta är handlingar som bidrar till att det ser snyggt ut i boken och de flesta elever följer också lärarens uppmaning, men för några verkar det vara många moment att komma ihåg utöver hanteringen av det matematiska innehållet.

Sammanfattning

En sammanfattning av de teman som presenterats ger följande översikt av matematikklassrummet Eken.

Generella undervisningsprocesser i matematik

- Matematiklärande, ett gemensamt projekt
- Matematik med variation, tillsammans och individuellt
- Från konkret till abstrakt, från gemensamt till individuellt
- Allmän uppskattning uttrycks genom kollektivt beröm och individuell återkoppling
- Misstag slätas över
- Med sina förklaringar visar eleverna att de förstår
- Stöd och uppmuntran till elevers resonemang

Specifika undervisningsprocesser i matematik

- Mellanledet underlättar, matematik ska vara enkelt
- Räknetoder förklaras steg för steg
- Oklarheter och missuppfattningar blir undervisningsinnehåll
- Det matematiska innehållet representeras med variation
- Praxis till stöd för hantering av innehåll och form

En begrepps- och argumentationsinriktad verksamhet

Fortsättningsvis presenteras resultatet från den teoretiska analysen. I likhet med de tidigare två resultatkapitlen motsvarar avsnittsrubrikerna de medierande faktorerna i modellen för verksamhetssystem (se Engeström, 1987), det vill säga (1) Artefakter, (2) Regler, (3) Gemenskap och (4) Arbetsdelning.

Artefakter

Undervisningen karaktäriseras av att läraren går igenom räknemetoderna steg för steg på tavlan. Det innebär att läraren leder genomgången där eleverna redogör för varje nytt steg i beräkningsproceduren. Genom analysverktyget uppmärksammas både primära och sekundära artefakter (se Engeström, 1987; Wartofsky, 1979). Då sekundära artefakter är i centrum framträder några metoder som är kännetecknande vid dessa genomgångar.

En sådan metod innebär att läraren ställer frågor som upprepas återkommande, så kallade *nyckelfrågor*, där uppmärksamheten är riktad mot begreppen ental och tiotal. Härigenom påverkas eleverna så att de i sina svar använder ett formellt matematikspråk. I andra situationer då elever själva redovisar hur de har löst en uppgift använder de också ofta formuleringar som är identiska med dem som förekommit vid lärarens genomgång, vilket tyder på att de påverkas av lärarens nyckelfrågor. Vid tillfällen då elever använder ett *beskrivande språk* utnyttjar läraren metoden "*revoicing*", vilket här betyder att elevernas svar omformuleras med hjälp av synonyma uttryck. På så sätt återkommer vissa centrala begrepp ständigt. Då läraren skriver en ny uppgift på tavlan upprepas allt enligt samma mönster. Läraren dominerar samtalet med sina frågor till eleverna, men både lärare och elever använder ett *förklarande språk*. Parallellt med redovisningen illustrerar läraren räkneoperationen med laborativt material på tavlan. I samband härmed använder läraren också ett *laborativt språk*. Lärarens ständigt återkommande nyckelfrågor tyder på att proceduren är i fokus, men bruket av ett förklarande språk tillsammans med det laborativa språk som läraren använder visar att även begreppen har en central roll i kommunikationen. Tillsammans skapar dessa metoder alltså förutsättningar att utveckla såväl *begreppsförmåga* som *metod- och beräkningsförmåga*.

Kännetecknande för Eken är också att läraren är lyhörd och *använder elevens missuppfattningar* genom att utnyttja tillfällena som dyker upp under lektioner för att tydliggöra begrepps innebörd. En liknande typisk företeelse är också att läraren uppmuntrar eleverna till utförligare förklaringar när de

annars använder ett beskrivande språk, vilket också sätter de matematiska begreppen i fokus. Å andra sidan slätar läraren över osäkra elevers mindre felaktigheter i sammanhang då elever redovisar för klassen.

Då elever arbetar tillsammans ger läraren vid åtskilliga tillfällen råd till eleverna om hur de ska tala med och lyssna på varandra. Det handlar till exempel om att göra eleverna observanta på hur de ska uttrycka sig för att kunna *resonera* bättre. Det betyder att läraren arbetar för att eleverna ska använda ett *budskapsinriktat tal*. Med stöd av lärarens metod ges elever förutsättningar inte bara att utveckla sin *förmåga att kommunicera matematik* utan också möjlighet att utveckla sin *resonemangsförmåga*.

Till de stående inslagen hör att läraren berömmar och uppmuntrar elever i olika sammanhang. Inte minst i slutet av lektionerna får eleverna ta emot kollektiva lovord. Gemensamt för lärarens *uppmuntrande språk* är att det har en generell karaktär och inte specifikt pekar ut för eleverna vad de har lyckats med i matematiken.

Av resultatet från analysen av handlingar via primära artefakter framgår att ett återkommande inslag vid genomgångarna med klassen är att läraren *illustrerar* beräkningsmetoderna, det vill säga visar och förklarar med hjälp av laborativt material. Här är det framför allt tiobasmaterial, men även pengar som får representera hur tiotal- och entalsberäkningar genomförs. Härigenom synliggörs de skilda talsorterna på annat sätt än bara genom siffrornas olika placering i talen, samtidigt som talen också framträder i sin helhet. Därmed sätts begreppen i centrum, vilket också framgår då eleverna svarar på lärarens frågor.

Typiskt för elevernas användning av laborativt material är att det sker på lärarens initiativ i samband med hel- eller halvklassundervisning. Elever och lärare löser uppgifter tillsammans, genom att eleverna *laborerar* med materialet på sina bänkar och sedan turas om att redogöra för hur de har gått tillväga. Då alla löser samma uppgift som sedan redovisas, medför elevernas laborerande att inte bara lärare utan också elever kommunicerar via ett laborerande språk, där även begrepp som exempelvis ental och tiotal är framträdande.

Arbetsgången vid helklassundervisning sker enligt en bestämd progression, som bland annat innebär att läraren startar med matematiska handlingar som kan visas konkret och övergår till att låta eleverna arbeta på en abstrakt nivå med endast symbolspråk. Läraren påminner eleverna återkommande om att de kan ha hjälp av att tänka materialet i huvudet. Det laborativa materialet kan då användas som ett tankestöd av eleverna. Genom lärarens instruktioner får eleverna hjälp att hitta en struktur för användningen av materialet så att det kan vara ett fungerande stöd för deras lärande, inte minst beträffande *begrepps-förmågan*.

Regler

När blicken riktas mot handlingar via regler handlar det alltså om medierande faktorer av social karaktär och i analysresultatet framträder både praxis och normer. Bland de senare möter vi såväl sociala som sociomatematiska.

En sociomatematisk norm som visar sig hos både lärare och elever är att additions- och subtraktionsberäkningar blir lättare om man använder mellanled. Det kan i sin tur tolkas som ett uttryck för att matematik inte ska vara svårt. En annan norm som är klart synlig i Eken är att matematik både kan bedrivas på egen hand och tillsammans med andra.

Genom undervisningen skapas många tillfällen för lärare och elever att förklara både matematiska begrepp och räknemetoder. Läraren verkar också sträva efter en social norm som innebär att elever inte bara uppmanas att förklara för läraren i samband med att de inte har förstått eller har hamnat på fel spår i en tankegång. Det tycks annars vara det som eleverna förväntar sig, men istället för att följa den gängse normen försöker läraren påverka eleverna att även förklara sina tankar för läraren när de har förstått något. Det ger fler tillfällen för eleverna att förklara.

På samma sätt som läraren arbetar för att etablera normer pågår också ett arbete med att utveckla betydelsefull praxis. Det innebär att eleverna uppmanas att följa bestämda regler för hur tiobasmaterialet ska placeras, vilket kan bidra till att stärka kopplingen mellan material och symbolspråk. Genom att skapa förutsättningar för eleverna att förstå positionssystemets innebörd, ges de möjlighet att utveckla *begreppsförmåga*.

Annan praxis som läraren uppmanar eleverna till gäller matematikens form, det vill säga det ska se snyggt ut när eleverna skriver i sitt räknehäfte. Risker är att innehållsliga aspekter på så sätt hamnar i bakgrunden.

Förutom de normer som visar sig tyder alltså lärares och elevers metoder på förekomst av eller tendenser till olika praxis. Även om läraren ibland möter motstånd, verkar eleverna verkar finna sig i de regler som läraren stödjer och driver. Det visar att den här verksamheten domineras av *lärarstyrda regler*.

Gemenskap

Läraren genomför en omfattande del av undervisningen via gemenskapen klassen och läraren tillsammans, vilket har framgått av metoder som redan presenterats i avsnittet Artefakter. I relation till faktorn gemenskap synliggörs att läraren relaterar till gemensamma erfarenheter från tidigare matematiklektioner, vilket kan sammanfattas som metoden *kollektivt utbyte*. Metoden kan ge stöd till elevernas lärande och på samma gång öka samhörigheten mellan lärare och elever, genom att förstärka känslan av att

vara delaktiga i ett gemensamt projekt: elevernas matematiklärande. Samma anda verkar också komma till uttryck när läraren återkommande talar i vi-form.

En del av undervisningen innebär att gemenskapen elevparet är medel för lärares och elevers handlingar. Att arbeta tillsammans och hjälpas åt med att redovisa inför klassen visar på *positiv kamratpåverkan*. Genom att läraren låter elever presentera sina lösningar tillsammans parvis istället för individuellt och *uppmuntrar* elever som verkar osäkra ges eleverna möjlighet att utveckla säkerhet och växa i *tilltro* till sitt eget matematiska kunnande

I avsnittet om artefakter har det redan framkommit att läraren använder ett uppmuntrande språk. Det betyder även att elever som är motsträviga möts med både sympati och humor, det vill säga läraren visar ett positivt förhållningssätt. Vid helklassgenomgångar hör det inte till ovanligheterna att elever räcker upp handen och säger att de inte förstår. Jag tolkar det som ett uttryck för att eleverna känner sig trygga i den här verksamheten

Arbetsdelning

Analysen visar att de olika arbetsformerna som förekommer i Eken innebär att lärare och elever ibland använder samma sorts metoder. Läraren *leder genomgångar* i klassen, vilket ibland följs av att eleverna *övar* individuellt. Andra gånger arbetar eleverna *i par* och uppmuntras då att *resonera* med varandra. Elever *redovisar* också sina lösningar för kamraterna, på samma sätt som läraren, vid tavlan framför klassen. Sammanfattningsvis kan vi här tala om en verksamhet som utmärks av att vara både lärarcentrerad och elevcentrerad. Variationen av arbetsformer medverkar till att eleverna ges förutsättningar att utveckla följande fyra olika förmågor: *begreppsförmåga, metod- och beräkningsförmåga, kommunikationsförmåga* samt *resonemangsförmåga*. Resultatet bekräftas också genom de analyser som utförts med avseende på handlingar via artefakter.

Att elever och lärare ibland gör samma saker betyder inte att det råder oklarhet om lärares och elevers olika roller. Läraren leder verksamheten och det framgår tydligt för eleverna vem de ska anpassa sig efter när det gäller normer och praxis. I grunden verkar det finnas en stor samstämmighet mellan lärare och elever och även eleverna sinsemellan.

Vad är möjligt för Ekens elever att lära?

I tabellen nedan redovisas en sammanställning av lärares och elevers metoder som är kännetecknande för Eken samt vad dessa metoder ger elever möjlighet att lära med avseende på olika förmågor.

Tabell 8. Översikt som visar lärares och elever metoder i relation till möjligt lärande i Eken

FAKTOR	LÄRARE	ELEVER	MÖJLIGT LÄRANDE
Primära artefakter	Illustrerar räknetoder	Förklarar/ beskriver	Begreppsförmåga Metod- och beräkningsförmåga
	Initierar	Laborerar lärarlett	Begreppsförmåga
Sekundära artefakter	Använder nyckelfrågor	Förklarar/ beskriver	Begreppsförmåga Metod- och beräkningsförmåga
	"Revoicing	Förklarar/ beskriver	Begreppsförmåga
	Använder miss- uppfattningar	Förklarar	Begreppsförmåga
	Laborativt språk	Laborativt språk	Begreppsförmåga
	Uppmuntrar budskapsinriktat tal	Resonerar	Resonemangsförmåga
Regler	Kollektiv uppmuntrar	Lyssnar	
	Styr med regler	Accepterar	Begreppsförmåga
Gemenskap	Leder kollektivt utbyte	Deltar	
	Uppmuntrar	Positiv kamrat- påverkan	Tilltro till sin förmåga att använda matematik
Arbetsdelning	Leder genomgångar	Förklarar/ beskriver	Begreppsförmåga Metod- och beräkningsförmåga
	Instruerar	Övar	Metod- och beräkningsförmåga
	Uppmuntrar	Resonerar parvis	Resonemangsförmåga Kommunikationsförmåga
		Redovisar	Kommunikationsförmåga Resonemangsförmåga

7. Eken

Av tabellen på förra sidan framgår att metoderna som är kännetecknande för matematikklassrummet Eken ger förutsättningar för eleverna att utveckla flera olika förmågor. Särskild tonvikt tycks ligga på metoder där begreppsförmågan är i fokus, ibland tillsammans med metod- och beräkningsförmågan. Utmärkande är också att verksamheten skapar möjligheter för eleverna att utveckla sin resonemangsförmåga, vilket också förutsätter metoder som innebär att eleverna kommunicerar matematik. Därtill framträder även metoder som ger eleverna tillfälle att utveckla tilltro till sin egen matematiska förmåga. Sammanfattningsvis kan den här typen av verksamhet karaktäriseras som *begrepps- och argumentationsinriktad*.

8. Lönnen

I matematikklassrummet

Möbleringen är utformad så att det finns en del extra platser i klassrummet för elever som vill sitta och arbeta lite mer avskilt. Ibland är det elever som själva tar initiativ till att få använda de här platserna och andra gånger anvisar läraren någon att sitta för sig själv, till exempel för att göra en matematikdiagnos.

På skrivtavlan är dagens schema är inskrivet med ämnesförkortningar i rutor vid ena kanten. Bredvid schemat finns bilder som påminner eleverna om att de bland annat ska lyssna, titta, tala med låg samtalston och inte avbryta någon som har ordet. Längs med tavlans nederkant hänger fyra olika blädderblocksblad. Ett av dessa har rubriken Matte och innehåller i huvudsak anvisningar om vilka sidor i matematikboken som eleverna ska arbeta med under den aktuella veckan. Efter de gemensamma aktiviteterna under matematiklektionerna, placerar läraren detta blad på tavlan när eleverna ska fortsätta med individuellt arbete. På några olika platser i klassrummet finns laborativt material som används under matematiklektionerna. I sortimentet ingår bland annat askar med mynt och sedlar, multilinkkuber⁴¹ samt olika varianter av tiobasmaterial. I ett skåp finns också en del mattespel.

En del av undervisningen sker genom att eleverna arbetar med räkneuppgifter i grupper. Det blir då ganska högljutt, varvid läraren ger upprepade tillsägelser, riktade till såväl hela klassen som till enskilda elever. Andra lärare kommer ibland in i klassrummet för att hämta eller låna böcker eller material. Det sker ganska obemärkt och eleverna verkar inte heller notera när någon annan kommer in en stund i klassrummet.

I. Generella undervisningsprocesser i matematik

I avsnittet uppmärksammas handlingar i relation till matematik generellt.

Eleven i centrum

Genomgående i det här matematikklassrummet är variationen mellan olika arbetsformer. Eleverna arbetar på egen hand med veckobetinget i

⁴¹ Multilinkkuber är plastkuber i flera olika färger som kan byggas ihop exempelvis till långa stavar. Kuber av två olika färger kan bland annat användas för att bygga ihop stavar som visar hur ett tal kan vara uppbyggt av två andra tal.

matematikboken, löser uppgifter tillsammans i grupp och redovisar sina lösningar för klassen. Detta är arbetsformer där eleven är aktiv och har inflytande över utförandet av uppgifterna. Lärarledda genomgångar förekommer också, men i betydligt mindre omfattning. Då elever har redovisat egna metoder för klassen och ska fortsätta arbeta i sina matematikböcker uppmanas de av läraren att använda de olika sorters räknemetoder som har redovisats, såsom det framgår av följande excerpt.

Excerpt L1

- L Och det är bra när ni sitter och ska räkna sånt här i matteboken, då ska ni försöka tänka på dom här olika sätten som man kan räkna ut. Så börja inte och försöka räkna på fingrarna, 51 minus 9, för då blir ni jätteolyckliga

Läraren pekar inte ut någon specifik metod utan överlåter alltså till eleverna själva att välja. Det tyder på ett förhållningssätt som sätter eleven och elevens tankar i centrum.

Yttrandet ger också uttryck för en uppfattning som innebär att eleverna ska undvika metoder som ställer till problem, till exempel använda fingrarna. Här skymtar ett annat framträdande drag som tas upp lite längre fram i den här redovisningen, nämligen att matematik är svårt. Om eleverna inte lyckas kan det då leda till att de blir ledsna.

Ytterligare ett tema blir synligt genom lärarens kommentar, att matematikboken är i centrum. Därför är det betydelsefullt att eleverna lär sig att använda olika räknemetoder i syfte att kunna lösa uppgifterna i boken. Följande avsnitt visar hur temat framträder genom några andra exempel.

Matematikboken i centrum

För varje vecka har klassen ett beting som omfattar ett bestämt antal sidor i matematikboken, exempelvis nio sidor/vecka som det är under en period. Några av eleverna arbetar i en långsammare takt och får andra stoppsidor av läraren. De går också till en annan lärare några gånger i veckan för att ha matematikundervisning.

I samband med gemensamma aktiviteter då elever redovisar sina lösningar för klassen, uttrycker elever ibland missnöje över att det tar tid och de hinner inte arbeta tillräckligt i boken. Läraren gör då eleverna uppmärksamma på vad som är syftet med de gemensamma genomgångarna.

Excerpt L2

- L /.../ Varför har vi genomgångar, tror ni?
E1 Ja, jag vet! För att vi ska kunna genomföra matteboken lite bättre.

Eleven tvekar inte utan verkar helt på det klara med att målet är att ta sig igenom matematikboken. Det är i linje med lärarens budskap i föregående exempel, ett budskap som eleverna återkommande möter i samband med genomgångar. Ett ytterligare exempel som illustrerar detta är då läraren går igenom med eleverna hur de ska beräkna omkretsen på en simbassäng. Läraren kommenterar då med att ”det är särskilt viktigt, för det kommer en sån här uppgift om simbassäng i boken”. Tillsammans vittnar händelserna om att ett uttalat mål för matematikundervisningen är att eleverna ska klara matematikboken. Det kan leda till att många elever ser matematiken som något skolrelaterat.

Skolmatematiken är överordnad elevers andra matematikerfarenheter

När eleverna ska arbeta med att lösa additions-och subtraktionsuppgifter får de instruktioner av läraren som innebär att eleverna i respektive grupp ska lösa sin uppgift tillsammans. Därefter ska de komma överens om hur de ska berätta lösningen för klassen. Vid redovisningar av den här typen förekommer emellanåt att grupperna presenterar räknemetoder som motsvarar traditionella algoritmer, det vill säga ”uppställning”. Av lärarens reaktion är det inte svårt att utläsa att detta är metoder som eleverna inte förväntas använda vid algoritmräkning, men oftast får eleverna slutföra sin redovisning. Det vanliga är att eleverna trasslar in sig då de kommer till själva växlingsmomentet och därmed bekräftas tesen att detta inte är några lämpliga metoder.

Eleverna i exemplet nedan inleder sin presentation med att säga att ”sättet kallas låna”, vilket genast möts med viss skepsis av läraren. Uppgiften som eleverna har löst är 600-28 och vid redovisningen står två elever från gruppen vid tavlan. Den ena eleven (E1) sköter den muntliga presentationen medan den andra håller i pennan och skriver på uppmaning från kamraten.

Excerpt L3

- E1 /.../ Sättet kallas låna. Gör ett streck sådär [RIKTAT TILL ELEVEN SOM SKRIVER PÅ TAVLAN, PEKAR SNETT TVÄRS ÖVER SEXAN I 600].
- L Vet ni vad, ni får berätta om nåt annat sätt för det där tror jag inte
- E2 Det var så vi räknade här [EN ANNAN ELEV I GRUPPEN].
- L Räknar ni så alla fyra?... För nu har du lärt dig nåt sätt hemma som vi inte har lärt oss i skolan, som vi inte räknar med i skolan.
- E Mm.
- L Kan ni nåt annat sätt och förklara på?

Lärarens reaktion när eleven har inlett presentationen, signalerar att elevernas strategi inte passar i skolan. Yttrandet antyder att det som eleverna lär sig hemma eller utanför skolans verksamhet inte har någon större betydelse i relation till skolmatematiken, som därmed är överordnad och mer giltig än den matematik som eleven möter i andra sammanhang.

Prat är en matematisk aktivitet

Det har framkommit att individuellt arbete och grupparbete är vanliga arbetsformer i den här miljön. I varje grupp där det sitter fyra till sex elever finns också några lediga platser mellan eleverna. När eleverna arbetar tillsammans flyttar de spontant närmare varandra. Placeringen i grupper skapar förutsättningar för eleverna att kommunicera och samarbeta när de löser matematikuppgifter tillsammans. Lärarens instruktion nedan antyder också att eleverna är vana vid att arbeta i grupp.

Excerpt L4

- L /.../ Och då kommer vi göra såhär att i varje grupp så kommer ni att få en liten lapp med ett tal... *med* tiotalsövergång... och då ska ni jobba i grupp som vanligt och diskutera /.../

Eleverna kommer snabbt igång med sina gruppdiskussioner, vilket också stärker intrycket av att denna arbetsform inte är ny för dem. När de arbetar tillsammans med en uppgift ser de flesta elever ut att vara delaktiga i gruppens samtal, men i nästan alla grupper är det en eller två elever som tar mer initiativ och större utrymme i diskussionerna.

Medan eleverna arbetar i sina grupper går läraren runt i klassen och stannar ibland till vid någon grupp för att lyssna på deras samtal. Efteråt, när elevernas arbete utvärderas, lyfter läraren också fram vikten av elevernas samtal i grupperna.

Excerpt L5

- L /.../ men det jag tyckte var *jättebra* var att ni hade pratat i grupperna, och *alla* hade faktiskt löst talet och fått ett *svar*.

Lärarens beröm fokuserar på ”pratet”, vilket tyder på att samtalet mellan eleverna betonas i det här matematikklassrummet. Så som det framställs här kan prat också karaktäriseras som en matematisk aktivitet.

Elever som kan förklara visar att de förstår

I samband med att eleverna arbetar i grupp uppmanas de också att ge alla möjlighet att förklara för varandra i gruppen hur de tänker. Följande excerpt är en direkt fortsättning på excerpt L4 ovan.

Excerpt L6

- L /.../och det som är viktigt det är ju är att *alla* i gruppen *förstår* och kan förklara... lika bra. Det är inte bara *en* i gruppen som ska kunna förklara... eller hur?

Lärarens yttrande visar att elevernas förklaringar är ett uttryck för att de förstår. I enlighet med ett sådant synsätt är det viktigt att alla verkligen får tillfälle att förklara, vilket läraren betonar vid åtskilliga tillfällen. Det gäller inte minst då eleverna inte har uppfyllt lärarens intention.

Excerpt L7

- L Det som var viktigt, som ni glömde bort lite förut när ni har jobbat så här, det är att *alla* i gruppen ska kunna förklara. Det ska inte vara *en* som kan förklara utan *alla* fyra måste kunna förklara.

Förutom att det är väsentligt att alla i gruppen får förklara antyder kommentaren också att det är eleverna själva som har ansvar för att alla får komma till uttryck. Det stärker tesen som har presenterats tidigare, att det här matematikklassrummet kan beskrivas som elevcentrerat.

Läraren betonar svårigheter men det gör inte eleverna

En återkommande företeelse, som har nämnts inledningsvis är att läraren betonar svårigheter i matematiken. I det här sammanhanget är det särskilt subtraktion som lyfts fram som något besvärligt, bland annat i jämförelse med addition.

Excerpt L8

- L Som ni ser nu när det är minus blev det genast mycket svårare än plus, visst?

Andra exempel visar också hur läraren särskilt pekar på svårigheterna.

Excerpt L9

- L 44 minus 8...och det ser ju *också* väldigt svårt ut.

Excerpt L10

- L 51- 9 ... (SKRIVER 51- 9 PÅ TAVLAN) *det* ser ganska svårt ut va?... och *hur* har ni löst det?

Läraren ger uttryck för ett synsätt som innebär att subtraktion är svårt. I andra situationer kommer det fram att läraren tycker det är viktigt att hitta sätt som kan göra det lättare att räkna, det vill säga matematik ska egentligen vara lätt.

Eleverna bemöter sällan lärarens synpunkter om vad som är svårt. Den uteblivna responsen kan betyda att eleverna samtycker, det vill säga eleverna anser också att subtraktion är svårt. Likväl finns det undantag bland eleverna, något som de två exemplen nedan visar. Först möter vi en elev som uttrycker att hon tycker att matematik är väldigt lätt även när hon möter helt nya uppgifter. Eleven uttrycker sin uppfattning spontant i samband med att läraren ska avsluta lektionen. ”Talen” som eleven syftar på är subtraktionsuppgifter av typen 500-225.

Excerpt L11

- E1 Ibland när jag ser såna här nya tal och så→
L [HYSSJAR PÅ NÅGRA ELEVER]
E1 som jag aldrig har sett förut, ändå går det superlätt. Alltså så fort jag ser dom talen så vet jag vad det är för nåt, även om jag aldrig har räknat ut nåt sånt tal. Oftast är det också rätt då, alltså det bara kommer... att jag *vet* vad det är.
L Mm, så kan det vara, men det är inte alltid så, då måste man ha nåt bra sätt att tänka på... jättebra!

Det framgår att eleven tycker att det är enkelt att räkna. När hon säger att hon vet vad talen är så fort hon ser dem, kan det betyda att hon har automatiserade tabellkunskaper som hon kan använda vid subtraktion. Även om uppgifterna inte är så enkla att svaret alltid kan ges direkt är det troligt att det är elevens tabellkunnande som hjälper henne att snabbt kunna ”se” hur hon på ett enkelt sätt kommer fram till en lösning och ett snabbt svar.

Elevens yttrande ovan är inte en direkt replik till läraren, men det visar att eleven har en avvikande, positiv inställning till matematik, vilket här också verkar innefatta en stark tilltro till elevens egen matematiska förmåga. Följande excerpt visar däremot exempel på en elev som invänder mot lärarens uppfattning om att subtraktion är svårt. Uppgiften som läraren syftar på i den inledande repliken är 75-7.

Excerpt L12

- L Mm, det ser också väldigt svårt ut va?
E Jag tycker det är ganska lätt.
L Hur tänkte ni då?

Det framgår klart att eleven inte delar lärarens attityd till subtraktion. Läraren kommenterar inte elevens åsikt, utan går istället vidare med en direkt uppmaning till gruppen om att berätta om hur de har tänkt när de löste uppgiften. Både här och i det föregående exemplet illustreras att elevernas positiva attityder inte ges någon särskild uppmärksamhet. Istället tenderar positiva yttringar att tonas ner, vilket innebär att mer utrymme kan ges åt att

lyfta fram svårigheter i matematiken. Elever som verkar behärska olika räknemetoder och/eller har goda tabellkunskaper uttrycker inte någon större benägenhet att anpassa sig efter lärarens synsätt.

II. Specifika undervisningsprocesser i matematik

Här riktas intresset mot handlingar som sker i relation till undervisningsinnehållet, addition och subtraktion med tiotalsovergång.

Procedurmässiga beskrivningar av elevernas räknemetoder

Ett utmärkande drag i kommunikationen om olika räknemetoder är att tonvikten ligger på beskrivning av proceduren. Det visar sig både i elevernas samtal i sina grupper och vid redovisningar inför klassen.

Elevernas redovisningar sker genom att hela gruppen står vid tavlan och någon av gruppmedlemmarna håller i presentationen, alternativt att några i gruppen turas om att prata. Andra gånger står gruppen kvar vid sitt bord när de redovisar sina räknestrategier medan läraren står vid tavlan och kommenterar deras lösningar.

Eleven i exemplet som följer ingår i en grupp som har löst uppgiften $28+6$, vilket läraren skriver på tavlan innan någon i gruppen får ordet. Av excerptet framgår att läraren både upprepar det som eleven säger och ställer frågor. Med hjälp av lärarens frågor kan det kritiska i elevernas räknestrategi här tydliggöras, att det som tas bort från den ena termen läggs till den andra. Läraren gör också en pekrörelse som markerar att man ”flyttar över två” från sexan till åttan. Samtidigt med redovisningen skriver läraren det nya uttrycket, $30+4$, som elevernas strategi resulterar i.

Excerpt L13

- L Kan ni berätta hur man ska tänka när man gör det *här* talet?
Eller hur man *kan* tänka.
- E 1 Vi tar bort tvåan från sexan. Det är fyra.
- L Tar bort en tvåa från sexan, vad gör ni med den då?
- E1 Den [ohörbart] till åttan.
- L Vi flyttar över två där [GÖR EN PEKRÖRELSE FRÅN 6 MOT 8]. Jaa. Vad blir det då för nåt?
- E1 Trettio.
- L Mm. Ni fyllde alltså på till trettio [SKRIVER 30 UNDER 28].
Och hur mycket har ni kvar där då [PEKAR PÅ 6]?
- E1 Så har vi fyra kvar som det ser ut [ohörbart] [L SKRIVER + 4= 34].
- L Mm. Det var ganska likt det förra talet, visst? Där flyttade man ju en etta och här fick dom flytta över en tvåa.

När eleven beskriver tillvägagångssättet genom att använda sifferorden, exempelvis tvåan, sexan, och berätta hur siffror flyttas över är symbolspråket i centrum. Detta förstärks också av att läraren pekar för att markera sifferflyttningen. Att det är proceduren som är i fokus framgår av lärarens yttrande sist i excerptet. Här jämför läraren med den föregående gruppen och sammanfattar sedan gruppernas strategi till en procedur som innebär att man flyttar siffror.

På liknande sätt beskriver eleverna räknemetoder för varandra i grupperna med utgångspunkt från symbolerna. Excerptet nedan visar även att ett sätt att försöka lära sig kan vara att upprepa någon annans idé. Resonemanget som följer gäller subtraktionen 900-92.

Excerpt L14

- E1 Man lägger bort tvåan, och kör niohundra minus nittio. Och sen blir det åttahundratio. Och sen så tar man fram tvåan och så tar man minus tvåan och då så blir det åttahundraåtta.

[SAMTALET FORTSÄTTER MED ATT EN ELEV FÖRKLARAR FÖR DE TVÅ ANDRA HUR MAN DELAR UPP 92 I 90 OCH 2. EFTERSOM FLERA ELEVER TALAR SAMTIDIGT ÄR DET SVÅRT ATT URSKILJA ENSKILDA REPLIKER.]

- E2 Okej, jag förstår. Man tar bort tvåan och sen tar man ... äh niohundra minus nittio. Det är åttahundratio. Och sen lägger man dit tvåan och åttahundratio minus två det är åttahundraåtta.

Eleverna talar här om tvåan på ett sätt som tyder på att hanteringen av siffrorna är i fokus. Eleven E1 som först berättar hur uppgiften kan lösas ger dock uttryck för att hon har förstått själva principen om hur talet 92 kan delas upp i tiotal och ental även om dessa begrepp inte förekommer i gruppens samtal. Den andra eleven E2, upprepar sedan själva proceduren nästan ordagrant. Det betyder att uppmärksamheten är riktad mot proceduren även i det här sammanhanget.

Elever och lärare fokuserar skilda matematiska företeelser

Då eleverna löser uppgifter tillsammans i gruppen ska de ibland även kunna visa sin strategi med hjälp av något laborativt material som de själva väljer. När eleverna visar med materialet flikar läraren ofta in kommentarer samtidigt som eleverna berättar. Ibland demonstrerar läraren samma uppgift en gång till i syfte att förtydliga för klassen vad eleverna i gruppen just har visat. I dessa situationer är det vanligt att läraren demonstrerar något annat än den centrala idén i elevernas tankegångar, så som i situationen som

presenteras i följande excerpt. Uppgiften som eleverna har löst i gruppen är 39+7. De illustrerar sin strategi med hjälp av ett material som tydliggör positionssystemet⁴². Eleverna har löst uppgiften genom att ta bort ett ental från sju och addera det till 39. Detta verkar vara ganska oproblematiskt när eleven visar, bortsett från att de har glömt att plocka tillbaka trissor på pinnarna så att materialet verkligen representerar talet 39 från början.

Excerpt L15

- L [TAR MATERIALET OCH HÅLLER UPP FÖR KLASSEN. DEN MITTERSTA PINNEN HAR TRE UPPTRÄDDA TRISSOR OCH PÅ EN AV DE YTTERSTA PINNARNA FINNS TIO. DEN TREDJE PINNEN ÄR TOM.]
Hur mycket är det där?
- E1 Det är trettionio.
- L Trettionio?
- M Nä... [TAR SNABBT BORT EN TRISSA FRÅN DEN YTTERSTA PINNEN=ENTALSPINNEN] *nu* är det trettionio. Jaa, och då lägger man på en där [TRÄR PÅ EN TRISSA PÅ ENTALSPINNEN], och då blir det ett tiotal ... [HAR KVAR SEX TRISSOR I HANDEN], så och så har man sex [ohörbart]
- L Mja... och vad tänker du göra med det *där* då, som är tio? [PEKAR PÅ ENTALSPINNEN MED DE TIO TRISSORNA]
Ska det va tio?
- M Nä, alla dom ska bort [TAR BORT ALLA TRISSORNA FRÅN ENTALSPINNEN OCH TRÄR SEDAN EN PÅ TIOTALSPINNEN]
- L Förstår ni vad M gör nu? Han tar dom där tio och byter ut mot en tia, byter entalen mot en tia.
- M Och sen så har jag sex kvar [TRÄR SEX TRISSOR PÅ ENTALSPINNEN]... då har man sex, fyrtiosex.

Då eleven M redovisar framgår det att gruppen har valt en kompensationsstrategi⁴³ på samma sätt som gruppen i föregående exempel (Excerpt L14). Då eleven säger att han lägger på en så det blir ett tiotal och så har man sex, visar att han har förståelse för själva tillvägagångssättet. Lärarens kommentarer uppmärksammar däremot inte det som är själva kärnan i den här strategin, att det som subtraheras från den ena termen adderas till den andra. Kännetecknande är istället det som sker efter att

⁴² Det här materialet kallas ibland för ”öppen abacus” och utgörs av en bottenplatta där tre upprättstående pinnar är fästade. Pinnarna representerar hundratal, tiotal och ental och talens storlek bestäms med hjälp av antalet trissor som träs på respektive pinne.

⁴³ Se Aritmetik – ett dominerande innehåll (kapitel 2).

läraren ställer sin fråga, ”vad tänker du göra med det *där* då, som är tio”. Eleven plockar då snabbt bort de tio trissorna från entalspinnen och placerar en av dem på tiotalspinnen. Därefter trär han på de sex resterande på entalspinnen och säger samtidigt att han har sex kvar, alltså 46. Då läraren frågar eleverna om de förstår vad M gör och sedan redogör för eleverna är det nu växlingen av de tio entalen till ett tiotal, som sätts i fokus. Det innebär att strategins centrala idé, compensationen som inte särskilt har poängterats, riskerar att hamna i skymundan.

Det är inte bara då eleverna använder laborativt material som det visar sig att lärare och elever inte är riktigt samspelade om vad som är i fokus. Det tycks också råda olika uppfattningar bland elever och lärare angående vilka beräkningar som är rimliga att förklara, det vill säga vilka räkneoperationer som ska uppmärksammas och vilka som eventuellt kan lämnas åt sidan för att de utgör känd kunskap hos de flesta eleverna. Situationen som återges i följande excerpt illustrerar en grupp elever som redovisar för klassen hur de har löst subtraktionen 75-7. Eleverna berättar att de först tar bort fem och får kvar 70 och därefter tar de bort två och det blir 68. Efter detta ställer läraren den inledande frågan i excerptet.

Excerpt L16

- L Hur får du det till sextioåtta?
E1 Jag vet att det blir sextioåtta.
L Ja, men om man inte vet det, hur ska man tänka då?...Vad säger V eller R. Kan ni förklara?... Hur får ni det till sextioåtta?
V Sjuttio minus två.
L Mm. Hur kan man tänka? ... Tänk er att nu ska ni förklara för en kompis som inte kan, då kan ni inte säga såhär sjuttio minus två det blir sextioåtta, för då har den inte lärt sig nåt. Hur skulle ni förklara?... Jag tror ni kan.

Lärarens inledande fråga riktar uppmärksamheten mot det andra steget av subtraktionsberäkningen, som eleverna redovisat, det vill säga att de tar bort två från 70. Som svar förväntas eleverna argumentera för hur de har kommit fram till att $70-2 = 68$, vilket de också gör. Den ena eleven säger sig veta att $70-2$ är 68 och den andra anger att de kom fram till 68 genom subtraktionen $70-2$. För eleverna verkar detta vara självklara argument. Då läraren inte nöjer sig med elevernas förklaringar försvinner samtidigt fokus från elevernas tankegång för lösningen av 75-7. De har använt sig av idén att dela upp talet sju i två och fem, vilket fungerar bra eftersom det är enkelt att subtrahera fem från 75. De har valt ett tillvägagångssätt som visar att de har god förståelse för tal.

Efter lärarens sista replik ovan fortsätter samtalet genom att läraren vänder sig till en elev som inte tillhör gruppen som har arbetat med den aktuella uppgiften. Eleven berättar att man tar ”tiotalskompisen med tvåan”, vilket läraren följer upp med ”då tänker man att tio minus två är åtta”. Denna talkombination, vanligtvis kallad tiokamrater eller tiokompisar⁴⁴ är välbekant för de flesta elever redan från år 1. Det kan vara förklaringen till varför eleverna i gruppen inte verkar förvänta sig att de ska redogöra för den, då deras uppgift är att berätta hur de tänkt när de har löst subtraktionen $75-7$. Då läraren fokuserar på en enskild räkneoperation riktas inte längre uppmärksamheten mot det väsentliga, som här utgörs av den strategi som eleverna redovisat.

Båda sekvenserna som presenterats ovan exemplifierar hur fokus förflyttas från själva räknemetoden till ett specifikt moment i beräkningen, utan att detta har framstått som problematiskt för eleverna i gruppen. Då räknemetoden inte står i centrum kan elevernas redovisningar förlora en del av sitt syfte, att ge eleverna i klassen möjlighet att ta del av och få inblick i varandras räknemetoder för att sedan den intention med redovisningarna som läraren ger uttryck för (se excerpt L1).

Elevernas val av material påverkar vad som är möjligt att illustrera

Det har redan framkommit att miljön tillhandahåller flera olika sorters laborativt material för matematikundervisningen. Eleverna kan själva hämta vad de behöver när de arbetar på egen hand. Ibland uppmanas eleverna också att använda valfritt material för att illustrera sin lösning för klassen då de ska redovisa lösningar som de diskuterat tillsammans i grupperna.

Elevernas val av material innebär ibland att den valda strategin inte kan illustreras så tydligt med hjälp av materialet, vilket framgår av nedanstående exempel. En grupp har valt ett ostrukturerat material, multilinkklossar för att demonstrera hur de har löst uppgiften $67+4$.

Eleverna har först berättat hur de har löst uppgiften genom att addera två i taget. När de nu ska redovisa sin tankegång med materialet har de inte hämtat tillräckligt många klossar. En elev håller upp 65 multilinkklossar, fördelade på två staplar, enligt excerptet nedan. Eleven fnissar när hon säger att det egentligen ska vara två till. Det kanske är ett uttryck för att hon tycker det är lite förargligt att de inte har tillräckligt många, samtidigt som hon inte verkar tycka att det spelar någon roll för själva presentationen. Läraren tycks inte heller fästa någon större vikt vid att antalet inte är exakt, att döma av

⁴⁴ Tiokamrater är exempelvis talen 3 och 7 samt 9 och 1.

kommentaren ”det ska föreställa 67 där då”. Därefter beskriver eleven själva räkneoperationen i enlighet med den tankegång som de redovisat från början, det vill säga adderar två i två steg.

Excerpt L17

- L Vad hade ni, visa vad ni hade från början! De andra ser ingenting.
- E1 Så här mycket [ELEVEN RESER SIG OCH HÅLLER UPP MULTILINKSTAPLARNAN], men egentligen ska man ha två till [FNISSAR].
- L Det ska föreställa sextiosju där då.
- E1 Ja.
- L Mm.
- E1 Det här. [HÅLLER UPP TVÅ MULTILINKSTAPLAR]... Det här ska vara sextiosju [HÅLLER UPP DE TVÅ MULTILINKSTAPLARNAN IGEN].
- L Mm.
- E1 Och så tar man bara två till→
- L Två till så blir det →
- E1 och det blir sextionio... och sen två till det.
- L Och då blir det en hel tia och så blir det en över, visst?
- E Ja.

Som det ser ut visar eleven inte additionerna med klossarna. En trolig förklaring till detta är att det inte finns fler klossar att hämta. En annan orsak kan vara att eleverna inte tycker att de behöver visa alla klossarna eftersom uppgiften tycks vara väldigt enkel för dem. Läraren ger avslutningsvis en kommentar som betonar växling till en tia, vilket inte kan utläsas av de två staplar som eleven håller upp. Eleverna själva har ju inte heller betonat att de gör ett helt tiotal utan har istället valt att bara addera två i taget.

Med materialet som används här är det svårt för eleverna att återge hur det representerar talen som ingår i själva additionsuttrycket eller illustrerar elevernas räknehandlingar. För att kunna göra det förutsätts att eleverna bygger ihop klossarna så att de istället bildar tiostavar och entalsklossar. I situationer likt denna uteblir därför den kompletterande representation som materialet kan vara vid sidan av symbolspråket. Exemplet ovan visar således att det inte är betydelselöst vilket laborativt material eleverna använder i förhållande till den valda räknemetoden.

Läraren rekommenderar pengar som tankestöd

Ett hjälpmedel som läraren ständigt återkommer till i samband med additions- och subtraktionsberäkningar är pengar. Elevernas presentationer,

då de redovisar egna lösningar, åtföljs ofta av att läraren visar hur man också kan lösa den aktuella uppgiften med hjälp av pengar både konkret och som ett tankestöd. Följande två excerpt visar exempel på lärarens resonemang kring pengar som tankestöd.

Excerpt L18

- L /.../ Så alltid när ni sitter och räknar i matteboken och tänker att det här känns lite svårt, så tänk pengar för det är alltid lite lättare. Tänk att ni är i en affär och ska lämna fram så där mycket pengar, då är det mycket lättare och lösa.

Excerpt L19

- L Men *ett* bra sätt, det är att alltid tänka på pengar för då blir det lite lättare.

I sin strävan efter att göra matematiken lättare för eleverna hänvisar alltså läraren till pengar som ett användbart hjälpmedel, inte minst som stöd för tänkandet.

Läraren anknyter till vardagen men skolkontexten försvårar

Pengar är inte bara ett laborativt material utan det tillhör också de flesta elevers vardagserfarenheter. Här möter eleverna pengar i form av laborativt material, som symboliska bilder på tavlan och som tankeverktyg, metaforer. Exempel på det senare får vi genom situationen som återges nedan där läraren hjälper en grupp att förklara för klassen hur de har löst subtraktionen 93-6. I sin presentation har eleverna kommit fram till att det är 87 genom att gå via 90-3 och förklarar det som ett resultat av att treans tiokamrat är sju. De trasslar till sig en del bland siffrorna så att det till slut står 87-3 på tavlan, men håller fast vid att resultatet är 87. Då griper läraren in och anknyter till en vardagssituation där eleven har 93 kronor i form av nio tiar och tre enkronor och ska betala sex kronor.

Excerpt L20

- L Vi tar det lite långsamt... [SKRIVER 93-6 PÅ TAVLAN] om ni tänker att ni har nittitre kronor till exempel. Och så ska man *betala* sex kronor. Tänker alla på det? Och pengar? Det är jättebra att tänka på pengar när det blir såna *svåra* tal... så tänker ni att ni har nio tiar med er [PEKAR PÅ NIAN] och tre enkronor [PEKAR PÅ TREAN]. Och då kan ni ju lämna fram de tre enkronorna [SUDDAR TREAN OCH SEXAN OCH SKRIVER DIT 0 RESPEKTIVE 3 ISTÄLLET SÅ ATT DET STÅR 90-3], men då ska ni ju fortfarande betala tre *kronor*

8. Lönnen

- [PEKAR PÅ TREAN] och nu har ni ju bara *nio* tiotior kvar
[PEKAR PÅ NIAN]. Vad skulle ni räkna fram för nånting
då?...T
- T Åttiosju.
- L Ska du räkna fram åttiosju kronor?
- T Nää [TYST].
- L Om jag ska betala tre kronor och har med mig nio tiotior, vad ska
jag lämna fram då?... Lämna jag fram alla nio tiotior?
[FLERA ELEVER VISGAR]
- L R?
- R Nittiotre [ohörbart tal] eller...
- L Vad ska jag ge i affären? Hur ska jag betala tre kronor här till?

I excerptet hänvisar läraren till en situation då eleverna ska betala något som kostar sex kronor. Då läraren säger till eleverna att de kan lämna fram tre enkronor skiljer sig detta från det vanliga tillvägagångssättet då någon betalar. I de flesta fall skulle kunden troligen lämna fram en tia för att sedan få fyra kronor tillbaka.

I enlighet med den tänkta situationen skriver läraren sedan om subtraktionsuttrycket 93-6 till 90-3. När eleven svarar 87 kan det betyda att eleven är mer uppmärksam på uttrycket på tavlan än på lärarens fråga, som gäller hur mycket som nu ska lämnas fram när det bara finns nio tiotior kvar. Något acceptabelt svar ger inte eleverna, men efter ett antal ledande frågor från läraren och ytterligare några elevreplikor är det till slut läraren som själv sammanfattar resultatet på uppgiften, vilket framgår nedan.

Excerpt L21

- E En tia och [ohörbart tal] enkronor.
- L Jag har inga enkronor... men det du sa först var det rätta. Jag tar en av mina tiotior. Hur många tiotior har jag kvar då, A?
- A Åtta.
- L Då har jag kvar åtta tiotior och då skriver jag dom här [SKRIVER = 8]. Och hur mycket får jag tillbaka på min tia då, när jag betalar tre kronor, N?
- N Sju.
- L Sju, för tre och sju är tiokompisar [SKRIVER 7]. Då blev det åttiosju. Var det svårt det där, tycker ni?

Lärarens sista fråga antyder att eleverna inte riktigt visat att de har varit med på resonemanget. Elevernas svar övertygar inte heller eftersom det är blandat, både ja och nej

Genom det här exemplet illustreras återigen att läraren gärna väjer att relatera till pengar som ett hjälpmedel vid additions- eller subtraktionsberäkning. Av excerpten ovan framgår också att en del elever

verkar lite vilsna, vilket tyder på att de inte riktigt delar lärarens tankesätt. En tolkning är att lärarens sätt att resonera kring pengar är influerat av skolkontexten och stämmer således inte överens med hur pengar skulle användas i en vardagssituation. Samtidigt uttrycker lärarens fråga en intention om att eleverna ska tänka som om de är i affären. För eleven skapar denna motsättning problem, då det inte verkar möjligt att agera i enlighet med båda kontexterna samtidigt. Följaktligen blir eleverna osäkra. För eleven T (Excerpt L20), som fokuserar på uttrycket 90-3 är skolkontexten i förgrunden, vilket också framgår av svaret, 87. Varken eleven eller de andra kamraterna verkar ha uppfattat innebörden i lärarens fråga.

Liknande situationer som den ovan inträffar vid flera tillfällen i det här matematikklassrummet. Återkommande är att läraren ställer självklara frågor, som exempelvis ”hur mycket får jag tillbaka på min tia när jag betalar tre kronor”, vilket snarast leder eleverna genom lösningen. Det hinner bli många ”turer” innan uppgiften är helt genomförd och då är inte längre alla elever så fokuserade. Det framgår bland annat då en elev vid ett sådant tillfälle ska svara på en enkel fråga från läraren och istället säger ”vad sa du förresten, jag lyssnade nog inte”. Det verkar alltså inte som att kopplingen till pengar bidrar till att elevernas egna erfarenheter uppmärksammas. Det tycks snarare vara tvärtom i Lönnen. Genom att användningen av pengar i matematikundervisningen anpassas till skolkontexten verkar således möjligheten för eleverna att utnyttja eventuella erfarenheter av pengar i vardagen försvinna.

Sammanfattning

En sammanfattande översikt visar vad som är kännetecknande för matematikklassrummet Lönnen

Generella undervisningsprocesser i matematik

- Eleven i centrum
- Matematikboken i centrum
- Skolmatematiken är överordnad elevens andra matematikerfarenheter
- Prat är en matematisk aktivitet
- Elever som kan förklara visar att de förstår
- Läraren betonar svårigheter men det gör inte eleverna

Specifika undervisningsprocesser i matematik

- Procedurmässiga beskrivningar av elevernas räknemetoder
- Elever och lärare fokuserar skilda matematiska företeelser
- Elevernas val av material påverkar vad som är möjligt att illustrera
- Läraren rekommenderar pengar som tankestöd
- Läraren anknyter till vardagen men skolkontexten försvårar

En procedur- och kommunikationsinriktad verksamhet

Artefakter

I den här verksamheten ges mycket utrymme för elevernas muntliga kommunikation, exempelvis då eleverna löser uppgifter i grupp eller redovisar sina tankesätt för resten av klassen. Läraren uppmuntrar elevernas matematikprat, vilket är tecken på att prat uppfattas som en aktivitet bland andra i matematikklassrummet. Läraren betonar också vikten av att alla elever kan förklara räknemetoderna som används, eftersom det visar att eleverna förstår dem.

Analysen där intresset har riktats mot sekundära artefakter visar att beräkningsmetoderna vanligtvis beskrivs som förflyttning av siffror, trots att eleverna själva ofta väljer Lösingsstrategier som utgår från hur talen är uppbyggda. Vid elevernas redovisningar ger läraren återkoppling till eleverna genom upprepningar, omformuleringar och frågor, det vill säga ”*revoicing*”. Särskilt vanligt är att läraren upprepar elevernas beskrivande svar, vilket innebär att proceduren ges ytterligare uppmärksamhet eftersom då både lärare och elever använder ett *beskrivande språk*.

Eleverna berättar och visar också med hjälp av laborativt material hur de har gått tillväga. Vid sådana tillfällen synliggörs elevernas förståelse för tal, det vill säga redovisningar med hjälp av laborativt material ger eleverna förutsättningar att uttrycka begreppslig kunskap med hjälp av både laborativt språk och förklarande språk. Likväl dominerar ett beskrivande språk i dessa situationer hos både elever och lärare, vilket tyder på att *metod- och beräkningsförmågan* är i centrum samtidigt som eleverna också ges möjlighet att utveckla *förmågan att kommunicera matematik*.

Läraren uttrycker emellanåt att det är för högljutt i klassrummet, vilket det lätt blir när eleverna diskuterar och löser uppgifter i grupp. I de situationerna använder läraren med jämna mellanrum ett *reglerande språk* i syfte att sänka ljudnivån.

Då primära artefakter uppmärksammas genom analysverktyget framgår att det laborativa materialet har en central roll här och verksamheten kännetecknas av att *eleverna själva väljer* vilket material de ska använda. Olika sorters material finns placerat väl synligt i klassrummet. När eleverna arbetar *på egen hand* i boken är det flera som själva hämtar något material att använda under lektionen. Då eleverna arbetar *gemensamt* med att lösa uppgifter *uppmannas* de att välja material för att kunna visa sin strategi.

Som en följd av elevernas valfrihet inträffar ibland att det valda materialet inte är en relevant representationsform då det inte helt tydligt kan

illustrera den beräkningsmetod som eleverna avser att visa. I jämförelse med att använda ett laborativt material som är väl avpassat för sitt syfte, kan användningen som beskrivits ovan inte ge samma förutsättningar när det gäller att stödja elevers begreppsliga förståelse.

Ett annat typiskt drag som visar sig i samband med att elever redovisar sina räknemetoder med hjälp av laborativt material är att läraren verkar *förbise* elevernas egna tankegångar och riktar då uppmärksamheten mot andra matematiska företeelser jämfört med eleverna. Det kan exempelvis innebära att läraren lyfter fram växling av ental till tiotal istället för det tillvägagångssätt som eleverna faktiskt har visat.

Återkommande i Lönner är också att läraren hänvisar till pengar som ett viktigt hjälpmedel i arbetet med matematik, både konkret och som tankeredskap. I dessa situationer visar det sig dock att läraren låter *skolkontexten dominera över vardagskontexten*. Läraren demonstrerar hantering av pengar på ett sätt som inte stämmer med vardagsbruk, medan elevernas fokus är riktat mot symbolspråket på tavlan. Därmed uppstår problem i kommunikationen mellan lärare och elever, vilket skapar förvirring för eleverna. Det innebär att lärarens frågor som relaterar till elevers vardag inte ser ut att vara till någon större hjälp för eleverna här.

Regler

En norm som är väl synlig i den här verksamheten är att *matematik är något skolrelaterat* och att genomförandet av matematikboken är målet med undervisningen. Det framkommer också att skolmatematiken har en överordnad roll i jämförelse med matematik som elever lär sig utanför skolan. Den uppfattningen delas inte av alla elever och bland annat berättar elever vid flera tillfällen om räknemetoder som de har lärt sig hemma, det gäller framför allt traditionella subtraktionsalgoritmer med växling. Trots lärarens invändningar håller eleverna ihärdigt fast vid att få presentera sina räknemetoder, vilket de också får.

Andra uppfattningar som dominerar i kommunikationen är att subtraktion är svårt och att det alltid blir lättare att räkna om man tänker på pengar. Detta är synpunkter som läraren ofta framhåller och som därmed utgör en del av de regler som framträder i den här verksamheten. Kännetecknande är dock att dessa inte delas av alla elever, som exempelvis då läraren *betonar svårigheter* med subtraktion.

Elever och lärare verkar inte heller alltid vara överens om vilka regler som råder, till exempel då eleverna ska redovisa sina räknemetoder. Det kan karaktäriseras som en *oklar matematisk praxis*. Det händer att läraren då ställer frågor som istället uppmärksammar enkla räknehandlingar, det vill

säga andra företeelser än det som eleverna troligen förväntar sig, vilket leder till att eleverna verkar förvirrade. Eleverna är fokuserade på att redovisa själva räknemetoden och deras reaktion tyder på att de inte förstår vad läraren vill att de ska förklara. Elevers och lärares olika syn på praxis följer således samma mönster som visar sig när det gäller sociomatematiska normer, att gemensamma normer inte tycks etableras med lätthet. Andra normer som tillhör en mer traditionell klassrumskultur, exempelvis att det är viktigt att klara matematikboken, tycks dock inte ha svårt att få genomslag.

Gemenskap

Analysresultatet visar att gemenskapen klassen i stor utsträckning används av läraren för att ge tillsägelser, vilket betyder att sociala regler då är i fokus. I samband med grupparbetet är det också grupperna som är medlet för lärarens metoder, då läraren bland annat *uppmuntrar grupperna* och poängterar vikten av att alla i gruppen är delaktiga och ger grupperna beröm när de har redovisat för klassen. Därmed framstår *grupperna* som viktiga enheter, inom vilka det också existerar gemenskap och *positiv kamratpåverkan*.

Här innebär kamratpåverkan att kamraterna i den lilla gruppen har inflytande på och stärker varandra, vilket kan minska lärarens möjlighet att påverka. Det visar sig bland annat genom att eleverna i en del grupper ibland går egna vägar och inte anpassar sig efter lärarens synpunkter i valet av beräkningsmetod. Det kan också tyda på att de känner *tilltro till den egna förmågan* att hantera matematik.

Läraren tycks alltså inte alltid få gehör för sina synpunkter hos alla elever och enskilda elever invänder också ibland mot lärarens uppfattningar. Tillsammans med en viss oklarhet kring gemensamma regler tyder det på att lärare och elever tillsammans inte alltid strävar i samma riktning.

Arbetsdelning

Arbetsformerna som dominerar verksamheten kan beskrivas som elevcentrerade. Det gäller såväl *grupparbete* och *redovisningar* som individuellt arbete. När eleverna arbetar på egen hand kan det liknas vid att de *övar* genom enskilt arbete, eftersom eleverna har *veckobeting* som består av ett bestämt antal sidor i matematikboken. Följaktligen skapas förutsättningar för eleverna att utveckla *metod- och beräkningsförmågan*.

Läraren leder inte några omfattande genomgångar. Istället följer läraren upp och försöker stötta elevernas redovisningar eller går runt i klassrummet och hjälper eleverna då de arbetar i grupp eller enskilt. Därmed ger läraren visst stöd för elevernas möjligheter att utveckla kommunikationsförmågan..

8. Lönner

Lärarens roll liknar alltså mer en *handledares* och den som ger utrymme för elevernas projekt än den som styr och bestämmer över verksamheten.

Vad är möjligt för Lönnens elever att lära?

Tabell 9. Översikt som visar lärares och elevers metoder i relation till möjligt lärande i Lönnen.

FAKTOR	LÄRARE	ELEVER	MÖJLIGT LÄRANDE
Primära artefakter	Uppmanar	Väljer själva material	
	Uppmuntrar användning	Laborerar i grupp/på egen hand	
	Förbiser elevers tankesätt	Redovisar	
Sekundära artefakter	”Revoicing”	Beskriver	Metod – och beräkningsförmåga
	Uppmuntrar ma-prat	Pratar	Kommunikationsförmåga
	Reglerande språk	Anpassar sig	
	Låter skolkontext styra vardags-hjälpmiddel	Försöker förstå	
Regler	Betonar matematik som skolrelaterat	Instämmer/invänder	
	Betonar svårigheter	Accepterar/invänder	
	Visar oklar praxis kring elevers förklaringar	Förstår inte vilken praxis som gäller	
Gemenskap	Uppmuntrar grupper	Positiv kamratpåverkan	Tilltro till sin förmåga
Arbetsdelning	Handleder	Övar	Metod – och beräkningsförmåga
	Handleder	Arbetar i grupp	Kommunikationsförmåga
		Redovisar	Kommunikationsförmåga

8. Lönnen

Översikten visar att det inte är någon självklarhet vad en del av metoderna kan förväntas resultera i när det gäller eleveras möjliga lärande. De kopplingar som kan göras visar att metoder som är typiska för matematikklassrummet Lönnen bidrar med förutsättningar för eleverna att utveckla metod- och beräkningsförmåga samt kommunikationsförmåga. En möjlig följd av några metoder kan vara osäkerhet eller förvirring, medan andra ser ut att skapa möjlighet att utveckla tilltro till den egna förmågan att använda matematik. Sammantaget kan den här typen av verksamhet närmast beskrivas som *procedur- och kommunikationsinriktad*.

9. Diskussion

I kapitlet diskuteras resultatet i relation till de frågor som jag tidigare har ställt i samband med syftesbeskrivningen och som jag har sökt svaren på genom det här avhandlingsarbetet. Det betyder att jag kommer att diskutera lärares och elevers utmärkande handlingar samt vilka förutsättningar att utveckla olika förmågor som dessa handlingar ger elever i olika matematikklassrum. Diskussionen föregås av att frågeställningarna presenteras på nytt tillsammans med en summering av resultatet. En sammanfattande modell över de fyra verksamhetstyperna presenteras i slutet av diskussionen. Därefter redovisas några idéer kring forskning som avhandlingen skulle kunna leda vidare till.

Frågeställningarna på nytt

Min bearbetning av frågorna nedan har varit en hjälp på vägen för att uppfylla studiens syfte, att beskriva, analysera och förstå matematikundervisning på lågstadiet och vad denna undervisning ger elever i några klassrum möjlighet att lära då undervisningsinnehållet är addition och subtraktion med tal större än tjugo.

- Vad är kännetecknande för lärares handlingar i dessa klassrum?
- Vad är kännetecknande för elevers handlingar i dessa klassrum?
- Vilka förutsättningar för lärande med avseende på olika aspekter av matematikkunnskap skapas i dessa klassrum?

Med dessa tre frågor som utgångspunkt har jag gjort följande sammanställning av undersökningens resultat:

1. Vad är kännetecknande för lärares handlingar i dessa klassrum?

- Lärares handlingar
- riktar uppmärksamheten mot procedurer
 - sätter väsentliga begrepp och matematiska relationer i fokus
 - uppmärksammar elevers egna tankesätt
 - skapar förutsättningar för elever att kommunicera
 - ger vägledning för elever att argumentera

9. Diskussion

- visar att matematikaktiviteter kan vara lustfyllda och intresseväckande
- uppmuntrar elevers tilltro till sin egen matematiska förmåga
- betonar svårigheter i matematiken
- förbiser elevers tankegångar eller missuppfattningar

2. Vad är kännetecknande för *elevers handlingar i dessa klassrum?*

En väsentlig skillnad mellan lärares och elevers handlingar är att läraren ofta är initiativtagare och elevens handlingar sker vanligtvis till följd av något som läraren har gjort.

- Elevernas handlingar
- fokuserar på procedurer
 - riktar uppmärksamheten mot begrepp i matematiken
 - tillämpar kommunikationsförmåga vid redovisningar och i samtal med kamrater
 - fokuserar på att argumentera då läraren särskilt uppmuntrar det
 - riktar intresset mot matematik som lustfylld och engagerande
 - visar tilltro till sitt eget kunnande och tar egna initiativ eller följer inte alltid lärarens exempel
 - ger uttryck för förvirring vid otydliga sociomatematiska normer och praxis

3. Vilka förutsättningar för lärande med avseende på olika kompetenser i matematik skapas i dessa klassrum?

Studiens resultat visar att lärares och elevers metoder i dessa klassrum riktar uppmärksamheten mot olika kunskapsaspekter eller förmågor. Några av de handlingar som lärare och elever använder är kännetecknande för alla matematikklassrummen. Andra handlingar är utmärkande för två eller tre och det finns även de som är karaktäristiska för bara ett av klassrummen. Slutsatsen av detta blir sålunda att, beroende på vilket matematikklassrum eleverna tillhör skapas olika förutsättningar för eleverna att lära matematik.

Hur detta ser ut framgår av en modell som presenteras i slutet av diskussionen (figur 8).

En mångfald av metoder

Rubriken för det här avsnittet anknyter till mitt resultat, som alltså vittnar om att lärare och elever i olika matematikklassrum använder en mängd utmärkande metoder. Av sammanställningen som presenterats i början av kapitlet framgår att metoderna kan ordnas i fem grupper. Dessa grupper utgår till viss del från de förmågor eller kunskapsaspekter som aktualiseras genom de olika metoderna och de är representerade hos både lärare och elever: Det är metoder där (1) procedurer, (2) begrepp och samband, (3) matematisk kommunikation och resonemang samt (4) intresse och tilltro är i centrum. Hit hör också en femte grupp, men den avviker från de övriga då den utgörs av metoder som snarare bidrar till (5) stötestenar, vilket i sin tur innebär utmaningar för såväl lärare som elever. Det är med utgångspunkt från dessa fem grupper som jag nu kommer att fortsätta diskutera studiens resultat. En större del av diskussionen ägnas åt metoder som tillhör de två första grupperna, eftersom de flesta metoder som visat sig i resultatet har koppling till förmågor där procedurer samt begrepp och samband är i fokus.

Procedurerna i centrum

Från resultatet står det klart att både lärare och elever, oavsett vilken typ av verksamhet de tillhör, använder ett flertal metoder som riktar uppmärksamheten mot procedurer. Bland kursplanens förmågemål är det alltså metod – och beräkningsförmågan som sätts i centrum. Att det förhåller sig på det här sättet illustreras också genom modellen som presenteras i slutet av diskussionen (figur 8). Så långt pekar mitt resultat i samma riktning som nämnda kvalitetsgranskningar och nationella utvärderingsrapporter.

En väsentlig skillnad är dock, att i min studie är det inte främst undervisningens organisation som ligger till grund för slutsatserna om vad elever ges förutsättningar att lära. Med hjälp av verksamhetsteorin (Engeström, 1987) som har gett inspiration till mitt analysverktyg (figur 6, kapitel 3), har jag kunnat analysera lärares och elevers handlingar i några matematikklassrum, inte bara med avseende på en aspekt, vilket hittills verkar vara det vanliga bland forskare. Istället har jag granskat matematikundervisning utifrån flera infallsvinklar för att därigenom försöka förstå fenomenet matematikundervisning i de tidiga skolåren. Ett sådant förhållningssätt har fått ökad uppmärksamhet på senare år (se t. ex. Goodchild, 2001; Rezat & Sträßer, 2012; Schoenfeld, 2012).

Mitt analysverktyg har således gjort det möjligt att analysera lärares och elevers handlingar i förhållande till flera faktorer, artefakter, regler, gemenskap och arbetsdelning. Därmed har olika karaktäristiska metoder kunnat synliggöras och alltså inte endast metoder där i första hand arbetsformerna spelar en betydelsefull roll.

I det här avsnittet uppmärksammas metoder där procedurerna sätts i centrum, särskilt (a) övning, (b) beskrivande språk samt (c) nyckelord. I förhållande till analysverktyget och Engeströms modell för verksamhetssystem (figur 5, kap. 3) betyder det att diskussionen anknyter till relationen mellan subjekt, objekt och medierande faktor. Det senare motsvaras här av arbetsdelning, artefakter (sekundära) och regler.

Eleverna övar

De metoder i studien som sätter matematikens procedurer i centrum visar på tydliga kopplingar till de arbetsformer som används. I ett klassrum som kännetecknas av att *läraren presenterar fakta och regler samt instruerar* eleverna, tillsammans med att *eleverna övar* genom att arbeta på egen hand, ofta i boken, är det just metod- och beräkningsförmågan som eleverna ges möjlighet att utveckla (se Ernest, 1991; Samuelsson, 2007). Av nationella rapporter (Skolverket, 2003; Skolinspektionen, 2009) framgår också att undervisning i helklass och individuellt arbete är arbetsformer som dominerar i matematikundervisningen, men att arbete på egen hand i läroboken successivt har getts allt mer utrymme.

Beskrivande språk är centralt i klassrumskommunikationen

En metod som är framträdande när elever och lärare kommunicerar i matematikklassrummet, är *beskrivande språk* (se Löwing, 2004). Det kan jämföras med ett matematiskt vardagsspråk som eleverna behärskar (Setati & Adler, 2000), men som i motsats till det formella matematiska språket inte innehåller de begrepp som är kännetecknande för matematisk verksamhet. Bland forskare råder stor enighet om att det är väsentligt för elevers matematiklärande hur lärare och elever talar med varandra (se t. ex Franke et al., 2007; Hiebert et al., 2003; Stigler & Hiebert, 1997; Wood, 1998). Följaktligen är det en viktig utmaning för lärare att ge elever förutsättningar att utveckla och använda ett språk där centrala matematiska begrepp är allt mer förekommande.

Lärare och elever använder nyckelord

Forskare (t. ex. Ju & Kwon, 2007; Nickson, 1992; Yackel och Cobb, 1996) menar att de aktiviteter som utövas i matematikklassrummet i hög grad styrs av den sociomatematiska kultur som råder där. En norm som framträder i mitt resultat är att matematiken styrs av regler. Ett klassrum där läraren (eller läroboken) avgör vilka beräkningsmetoder eleverna ska lära sig och hur dessa ska utföras ger uttryck för att en sådan norm är rådande (Boaler, 2009; Jablonka, 2011a). I ett klassrum där istället eleverna själva avgör vilka beräkningsmetoder de vill använda eller där de genomför beräkningar utifrån egna tankesätt är en sådan norm inte lika synlig.

Andra metoder som tyder på att matematik betraktas som regelstyrt är metoder där olika *nyckelord* är i fokus. I ett sådant matematikklassrum är eleverna inriktade på att komma ihåg nyckelorden, till exempel ”fattas” och ”kvar”, som läraren presenterar vid genomgång av räkning med mellanled vid subtraktion. Eleverna försöker även konstruera egna regler i avsikt att lättare kunna hantera subtraktionsberäkningar. En förklaring till att elever fokuserar på nyckelord och regler är just att de uppfattar matematik som något regelstyrt, eftersom det är så matematiken presenteras för dem, något som är mycket vanligt, enligt Jablonka (2011a).

Ett genomgående resultat i studien är att frågan om det ska vara plus eller minus i mellanledet vid subtraktionsberäkning, står i centrum i klassrum där talsortsvisa beräkningsmetoder är i fokus. I ett sådant matematikklassrum är användning av nyckelord framträdande. För några elever tycks nyckelorden fungera som stöd, medan andra inte är hjälpta av dem vid genomförandet av subtraktionsberäkningar. För att nyckelorden ska kunna vara till nytta här är det nödvändigt, enligt min mening, att eleverna förstår hur förhållandet mellan entalen i subtraktionsuttrycket kan kopplas till något av nyckelorden. Först då kan ord som ”fattas” och ”kvar” vara till hjälp för elever då de ska bestämma sig för om de ska skriva plus eller minus i mellanledet.

Då eleverna ägnar mycket av sin uppmärksamhet åt att skapa och komma ihåg regler, kan det innebära att väsentliga begrepp hamnar i skymundan. Om nyckelorden saknar koppling till begreppsligt innehåll och endast fungerar som minnesregler är risken stor att de bara blir ett bristfälligt stöd för eleverna.

Subtraktionsuttrycken ställer alltså till problem för elever när de ska räkna med hjälp av mellanled, något som också andra forskare (Beishuizen, 1993; Bentley & Bentley, 2011; Fuson, 2003; Fuson et al., 1997; Löwing, 2008; Löwing & Kilborn, 2003) har påtalat. Att metod- och beräkningsförmågan i hamnar i centrum i ett klassrum som kännetecknas av

att lärare och elever ser matematik som regelstyrt framkommer även i undervisningsideologin Industrial Trainer (Ernest, 1991).

Begrepp och matematiska relationer uppmärksammas

Betydelsen av att elever använder ett språk som är rikt på väsentliga matematiska begrepp, exempelvis förklarande språk (se Löwing, 2004), har redan uppmärksammats i diskussionen. Studiens resultat visar att typiska metoder som lärare och elever använder riktar uppmärksamheten mot begrepp och relationer i matematiken. Det innebär att eleverna därmed ges möjlighet att utveckla sin begreppsliga förmåga. Här aktualiseras följande metoder: (a) revoicing, (b) lärarens frågor och (c) laborativt material – med och utan lärarstyrning. Det betyder att denna del av diskussionen riktar intresset mot metoder som har synliggjorts med hjälp av analysverktyget där relationen mellan subjekt, objekt och artefakter (men även regler) är i fokus. Artefakterna som är aktuella är språklig kommunikation och laborativt material, det vill säga både primära och sekundära artefakter men i omvänd ordning.

Revoicing för att klargöra begrepp och utveckla tankar

En av de metoder som kommer till uttryck i studien är revoicing (se O'Connor & Michaels, 1993). Egentligen kan revoicing beskrivas som flera metoder, bland annat *upprepa eller omformulera elevsvar*. Det senare betyder att läraren gör en korrigering så att det som uttrycks genom elevens svar och på så sätt hamnar i fokus, stämmer bättre med det som läraren vill uppmärksamma (Mercer, 1995). I jämförelse med strategier som läraren använder för att ge elever feedback, menar Björklund Boistrup (2010) att den här metoden är exempel på ”descriptive feedback strategies”, såsom de beskrivs hos Hargreaves et al., (2000). I ett klassrum där eleverna gärna använder ett beskrivande språk utgör således lärarens omformuleringar en sorts stöd som ger eleverna möjlighet att utveckla sin begreppsliga förmåga.

Karaktäristiskt för revoicing är att metoderna riktar intresset mot tänkande och begreppslig förståelse (O'Connor & Michaels, 1993). Detta gäller även metoden upprepning av elevsvar, som kan ge särskild uppmärksamhet åt något som läraren anser betydelsefullt för elevernas lärande (Mercer, 1995). I ett klassrum där beskrivande språk är det dominerande formella undervisningsspråket ser emellertid förutsättningarna något annorlunda ut. Här kan lärares användning av metoden att upprepa elevsvar istället medverka till att befästa elevers användning av det som Setati och Adler (2000) benämner matematiskt vardagsspråk.

Till grund för det här resonemanget finns i studien exempel på matematikklassrum som kännetecknas av att både lärares och elevers formella undervisningsspråk är beskrivande språk. Då lärarens utmärkande metoder är upprepning av elevsvar innebär det således att procedurer fortsätter att vara i centrum och beskrivande språk behåller sin starka ställning i undervisningen.

Det finns därför anledning att invända mot O'Connor och Michaels (1993), som menar att viktiga begrepp fokuseras genom revoicing. Genom den här studien visar det sig att detta inte gäller revoicing i form av upprepning av elevsvar i matematikklassrum där beskrivande språk är kännetecknande för eleverna. Beroende på rådande språkliga förutsättningar i ett matematikklassrum kan således metoden upprepning leda till olika förutsättningar för elevers lärande. Det betyder i sin tur att metoden revoicing inte generellt ger möjligheter för elevers utveckling av ett begreppsrikt språk och begreppslig förmåga.

Lärarens frågor kan skapa struktur och uppmuntra tankesätt

Kännetecknande för helklassundervisning är av tradition att lärare ställer frågor (se t. ex. Hiebert et al., 2003). En speciell sorts frågor som studien har synliggjort är *nyckelfrågor*, särskilt vid genomgångar av beräkningsmetoder. Den här sortens frågor kännetecknas av att centrala begrepp är i fokus och de upprepas återkommande. Enligt Mercer (1995) kan den här typen av frågor hjälpa eleverna att skapa strukturer och det är inte ovanligt att eleverna sedan använder lärarens formuleringar vid genomförandet av uppgifter. I mitt resultat kommer ett sådant tillvägagångssätt till uttryck då elever redovisar sina lösningar för klassen.

Där läraren begagnar sig av metoden att ställa nyckelfrågor använder eleverna förklarande språk i stor utsträckning. Här handlar det om att eleverna upprepar ord och formuleringar som de har hört åtskilliga gånger och så småningom lärt sig utantill. Mercer (1995) framhåller emellertid att ord som vi tar över från andra alltid bär med sig någon mening från tidigare användare. Det betyder att när eleverna i de här situationerna använder formuleringar som de tycks kunna utantill, rymmer dessa också en begreppslig innebörd som eleverna kan ana och som därmed kan vara till stöd för deras utveckling av förklarande språk och i förlängningen även den begreppsliga förmågan.

En metod som liknar nyckelfrågor är nyckelord, som vi redan har mött. I båda metoderna ligger tonvikten på att komma ihåg en procedur, vilket innebär att metod- och beräkningsförmågan är i fokus. Ändå finns en viktig skillnad när det gäller vad metoderna ger eleverna möjlighet att lära. När

läraren formulerar om elevers svar och går igenom räknemetoder steg för steg med hjälp av nyckelfrågor som eleverna senare upprepar, ger det förutsättningar för eleverna att inte bara lära procedurer utan också att förstå själva räknemetoden. En sådan förståelse pekas ut som en väsentlig aspekt för att utveckla goda räknefärdigheter (t. ex. Bergqvist, 2010; D. M. Clarke, 2006; Hiebert & Carpenter, 1992; Skolinspektionen, 2009).

En kontrast till nyckelfrågor däremot, är metoden som innebär att läraren ställer frågor som är formulerade i stil med ”Hur kan man tänka?”. Det innebär att eleverna inbjuds att komma med egna förslag på lösningar, istället för att endast redovisa ett bestämt sätt att utföra en beräkning. Kännetecknande för lärarens frågor är att *intresset riktas mot elevers olika tankesätt*. Exempel från studien tyder på att dessa frågor ibland resulterar i att eleverna beskriver procedurer, men många gånger visar elevernas redogörelser att de är fokuserade på att tänka och förstå.

Då lärare ställer den här typen av frågor i matematikklassrummet uppmuntras elever att lösa uppgifter på olika sätt. Möjligheten att lösa en uppgift på flera sätt innebär enligt forskare (Anghileri, 2006; McIntosh, 2006) att eleven inbjuds att föra ett matematiskt resonemang och använda sin talförståelse. Det ligger också i linje med den förändrade kunskapssyn som innebär att eleverna ges möjlighet att även utveckla andra förmågor utöver procedurkunskande (Anghileri, 2001; D. M. Clarke, 2006).

Laborativt material används med och utan lärarstyrning

Diskussionen övergår nu till att handla om några av de metoder som lärare och elever använder för att konkretisera det matematiska innehållet. Resultat från min undersökning tyder på att konkretisering förekommer mer eller mindre i någon form i alla matematikklassrummen. Användningen av laborativt material varierar på ungefär samma sätt, det vill säga i en del klassrum används i princip inget material medan i något annat finns det alltid material liggande framme, lätt tillgängligt för elever att använda om de behöver det. I ett sådant klassrum hämtar elever också material när de arbetar på egen hand, vilket eleverna inte gör i ett klassrum där materialet inte är synligt varken i undervisningen eller i själva rummet.

De senaste åren har inneburit omfattande nationella satsningar bland annat för att utveckla matematikundervisningen genom användning av laborativt material (Skolverket, 2011a). Forskare betonar emellertid att materialet i sig inte kan hjälpa eleverna att förstå den matematiska idé som materialet representerar (Ball, 1992; Clements, 1999; Löwing & Kilborn, 2002; Moyer, 2001). Det talar emot att elever själva väljer material och använder på egen hand för att lösa sina uppgifter.

9. Diskussion

I studien finns exempel som visar att elever, på lärarens uppmaning, själva väljer material i samband med att de löser uppgifter i grupp, för att sedan presentera sin lösning och beräkningsmetod för klassen och då även demonstrera detta med hjälp av något laborativt material. När elever använder laborativt material för att illustrera sin räknemetod för klassen kan det vara jämförbart med att materialet utnyttjas som stöd för att förstå innebörden av en räknemetod. Löwing och Kilborn (2002) pekar ut den här typen av konkretisering som särskilt värdefull, till skillnad från när elever använder material för att manipulera sig fram till ett svar.

För att bland annat undvika slentrianmässig användning eller manipulation, men också för att dela med sig av sina reflektioner över elevers representationer, framhåller forskare (Clements, 1999; Löwing & Kilborn, 2002; Moyer, 2001) betydelsen av lärarens medverkan. Exempel från min studie visar bland annat att en lärare i förväg har bestämt vilken typ av laborativt material som ska användas under lektionen. Här används laborativt material på tavlan i samband med att läraren går igenom talsortsvisa beräkningsmetoder för addition och subtraktion och då eleverna parvis löser liknande uppgifter. I ett klassrum där läraren har valt ut vilken typ av material som ska användas, skapas möjlighet för läraren att redan före lektionerna tänka igenom vilka kopplingar som kan göras med hjälp av representationen, mellan den nya räknemetoden som eleverna ska lära sig och deras befintliga kunskap. På så sätt kan det som annars är en stor utmaning för läraren (Moyer, 2001) bli hanterbart.

Forskare rekommenderar användning av laborativt material särskilt i samband med att elever ska lära sig något nytt i matematiken (Clements, 1999; Löwing & Kilborn, 2002). Mitt resultat visar också att materialet används på det sättet. Därtill framgår att lärarens intention är att eleverna i nästa steg inte ska använda materialet, utan bara tänka det i huvudet. Ett sådant synsätt har stöd hos Löwing och Kilborn (2002), som poängterar att ett av målen med att använda laborativt material är att det så snart som möjligt ska kunna fungera som ett tankeredskap.

Att läraren i förväg har tänkt igenom och valt ut det material som kan passa med tanke på innehållet är exempel på en metod där läraren styr och tar initiativet. Det är också ett uttryck för lärarens medverkan då laborativt material används i matematikklassrummet.

En annan metod som innebär att läraren medverkar visar sig då eleverna på lärarens initiativ använder tiobasmaterialet. Läraren uppmanar då eleverna att placera entalsklossar och tiotalstavar på ett bestämt sätt på bänken, för att underlätta kopplingen till symbolspråket. I likhet med tidigare forskning (se Clements, 1999) visar mitt resultat att det inte kan tas för givet att elever kan koppla ihop tiobasmaterial med det etablerade sättet att skriva talen. I ett

klassrum där läraren tydliggör viktig matematisk praxis, som exempelvis hur tiobasmaterialet lämpligen placeras, skapas möjligheter för begreppslig utveckling. Detta är ytterligare ett exempel på hur lärarens styrning och aktiva medverkan kan bidra till förutsättningar för utveckling av begreppslig förmåga i samband med elevers användning av laborativt material.

Ett matematikklassrum där läraren möter med kommentarer då eleverna redovisar sina lösningar och demonstrerar dessa med något material de själva har valt utgör också exempel på lärarens medverkan. Av studien framgår emellertid att det i själva verket kan vara så att läraren inte riktigt följer upp elevernas resonemang. Istället för att förtydliga elevernas tankegång med sina omformuleringar, vilket tycks vara lärarens intention, presenterar läraren istället ett snarlikt tankesätt som om detta var den idé eleverna illustrerade med hjälp av materialet, som de själva hade valt.

Mitt resultat bekräftar därmed vad Moyer (2001) har uppmärksammat i sin forskning, att lärare har svårt att följa elevers tankegång och hur den är representerad med hjälp av material. Hon påpekar särskilt att det inte är en enkel uppgift för lärare att tolka elevers matematiska tänkande när det uttrycks med hjälp av representationer. I ett klassrum där eleverna själva väljer material och läraren därmed inte har möjlighet att vara särskilt förberedd på elevers resonemang, blir kraven extra stora på läraren. Det betyder att det krävs både lyhördhet för elevernas tankesätt och kunskap om hur matematiska idéer överförs till konkreta representationer. Om det viktiga stödet från läraren är bristfälligt eller helt uteblir minskar möjligheten att användningen av laborativt material kan bidra med förutsättningar för eleverna att förstå den aktuella räknemetoden.

Att skapa möjlighet för kommunikation och resonemang

Två av förmågorna som eleverna, enligt Lgr11, ska ges förutsättningar att utveckla är kommunikationsförmåga och resonemangsförmåga eller som också använts tidigare i texten, argumentationsförmåga. Formuleringarna i läroplanen såväl som i ramverken som presenterats tidigare, visar att dessa två förmågor står i nära förbindelse med varandra. Kommunikationsförmåga beskrivs exempelvis som ”att i tal och skrift kunna diskutera och argumentera kring frågeställningar i matematik” (*Hög tid för matematik*, 2001, s. 43). I samma översikt presenteras argumentationsförmåga med följande beskrivning: ”att tänka logiskt och reflektera, samt förklara, troliggöra och berättiga matematiska påståenden” (ibid.).

Det betyder att förmågorna i viss mån är varandras förutsättningar. Utan förmåga att kommunicera matematik, det vill säga framföra matematiska idéer muntligt eller skriftligt, verkar det inte finnas möjlighet att föra

9. Diskussion

matematiska resonemang, att alltså förklara eller motivera sina eller andras matematiska idéer. Dessutom, att ”kunna argumentera kring frågeställningar i matematik” vilket utgör en aspekt av kommunikationsförmåga enligt både *Hög tid* (2001) och Lgr11, kräver ju samtidigt ett visst mått av resonemangsförmåga. I det här fallet är varken Lgr11 eller beskrivningarna i *Hög tid* (2001) helt distinkta.

I det danska ramverket (Niss, 2003) däremot, där förmågan att kommunicera beskrivs som att ”förstå och själv kunna uttrycka sig i matematiska texter och samtal” framstår skillnaden tydligare i förhållande till förmågan att resonera. Med en sådan beskrivning får kommunikationsförmåga en lite annan inriktning även om Niss text visar att det också krävs förståelse. Förklaringar och argumentation samt att kunna följa ett matematiskt resonemang är däremot olika aspekter av resonemangskompetens, så som det presenteras hos Niss (2003). För att undvika oklarheter har jag därför låtit definitionerna hos Niss vara vägledande för att kunna skilja ut de metoder i studien där kommunikationsförmåga respektive resonemangsförmåga har varit i fokus.

En typ av sådana metoder hör helt klart samman med organisationen i klassrummet. I ett klassrum där lärarens genomgångar och elevernas individuella arbete är de dominerande arbetsformerna skapas inte motsvarande förutsättningar att utveckla dessa förmågor som i ett klassrum där eleverna ges utrymme att exempelvis *arbeta i par*, *i grupper* eller *redovisa* hur de har använt olika beräkningsmetoder. Mitt resultat visar emellertid att det även förekommer andra utmärkande metoder utöver olika sätt att organisera undervisningen samtidigt som valet av arbetsformer innebär avgörande förutsättningar. Det handlar då, inte helt överraskande om metoder som visar sig då sekundära artefakter, alltså den språkliga kommunikationen, är i fokus.

En sådan metod är att läraren *uppmuntrar elevers matematikprat*, vilket tydliggör att prat ingår som en aktivitet i matematikklassrummet. Där läraren uppmuntrar eleverna att prata med varandra ges eleverna också förutsättningar att utveckla sin förmåga att kommunicera matematik. Det handlar alltså om kommunikationsförmåga i den mening som Niss (2003) uttrycker. Ett exempel är då elever i en grupp ”förklarar” för varandra hur de ska lösa ett subtraktionsuttryck. Det framgår att eleverna egentligen bara beskriver ett procedurmässigt tillvägagångssätt och för att visa för varandra att de har förstått upprepar de i princip bara vad föregående elev har sagt i gruppen. Här är således kommunikationsförmåga i fokus, men utan några tecken på resonemang eller förståelse av centrala begrepp.

Metoder som istället riktar uppmärksamheten mot resonemangsförmåga är *elever förklarar även då de har förstått* och *läraren ger vägledning*. Den

första av dessa metoder framträder som ett uttryck för den rådande klassrumskulturen, eller för den kultur som håller på att etableras. I ett klassrum där elever ombeds att förklara för läraren hur de har tänkt, även när de har lyckats att lösa aktuella uppgifter och verkar ha förstått det som fokuseras i undervisningen, skapas förutsättningar att utveckla resonemangsförmåga. Den allmänt rådande normen, det som tillhör tradition of practice (se Mercer, 1993), är annars att de elever som inte verkar ha lyckats med sin uppgift uppmanas att berätta hur de har tänkt. På det här sättet går läraren emot den gängse normen. Forskare betonar emellertid att det är nödvändigt med ett medvetet arbete som uppmanar utvecklingen av normer. För att kunna utveckla någon annan typ av matematikklassrum än det som eleverna förväntar sig, måste arbetet även omfatta sociomatematiska normer (Cobb, Wood & Yackel, 1993).

Den andra metoden, lärares vägledning till elever som upplever att de inte lyckas få gehör för sina matematiska idéer vid samtal med kamrater, kan likställas med att uppmuntra budskapsinriktat tal (se Brown, 1982; Pimm, 1987). Det betyder alltså att elever ges vägledning i hur de ska kunna argumentera bättre, vilket också skapar möjligheter att utveckla resonemangsförmåga.

Metoder för att främja intresse och tilltro

Gemensamt för metoderna som tillhör den fjärde gruppen av de fem som diskussionen utgår från, är att de är inriktade mot andra kunskapsaspekter, jämfört med det kunnande i termer av olika förmågor, som hittills diskuterats. Här handlar det istället om fenomen som intresse och tilltro. Tillsammans med bland annat att ”kunna se matematikens användbarhet” utgör ”tilltro till den egna förmågan att använda matematik” en av de väsentliga aspekter av matematikkunnande (produktivt förhållningssätt), som har lyfts fram i olika sammanställningar över matematisk kompetens (se kapitel 2). Det framgår även av syftesbeskrivningen i Lgr11, vilket också tagits upp tidigare i avhandlingen, att undervisningen ska främja utvecklingen av både elevens intresse för matematik och tilltro till den egna förmågan att använda matematik. Det förefaller därför rimligt att en diskussion om metoder i förhållande till möjligt lärande även tar upp vad som görs i matematikklassrummet när det handlar om att skapa förutsättningar för utveckling av detta. Några av de metoder som är framträdande i resultatet är: *matematikprestationer uppmuntras kollektivt, positiv kamratpåverkan* samt *kollektivt utbyte*. Det betyder att diskussionen i det här avsnittet sker i förhållande till de medierande faktorerna språk, gemenskap och arbetsdelning.

9. Diskussion

Det har framkommit tidigare i avhandlingen att återkoppling på elevprestationer kan ske på olika sätt. Ett resultat som studien visar är att lärare uttrycker uppskattning genom att exempelvis säga till elever att de har jobbat bra. Detta kan närmast liknas vid evaluating feedback strategies, (Hargreaves, McCallum & Gipps, 2000), eftersom det inte särskilt anger för eleverna vad det är som har gått bra.

I ett klassrum där läraren ger kollektivt beröm och samtidigt pekar ut vad eleverna har lyckats med, närmar sig återkopplingen istället descriptive feedback strategies (Hargreaves, McCallum & Gipps, 2000), vilket även har vissa likheter med revoicing (se O'Connor & Michaels, 1993). Det innebär att läraren uttrycker uppskattning och samtidigt låter eleverna förstå vad de behärskar. Därmed skapas möjlighet för eleverna att utveckla tillit sin förmåga att handskas med just den matematik, mot vilken läraren vänder sig med sitt beröm.

En annan metod som riktar intresset mot elevers tillit och som enligt Hattie (2009) är väsentlig när det gäller elevers prestationsförmåga är positiv kamratpåverkan. I ett klassrum där elever uppmuntras att arbeta tillsammans i par eller i grupper och även redovisa gemensamma lösningar förekommer positiv kamratpåverkan i den meningen att eleverna hjälper och stöttar varandra. Då detta sker i samband med att elever utövar matematikaktiviteter bidrar det även till elevernas möjlighet att utveckla tilltro beträffande sin hantering av matematik.

Utifrån Granströms (2007) resonemang kring ”det kollektiva samtalet” drar jag slutsatsen att tillfällen för lärares och elevers gemensamma upplevelser i klassrummet, har blivit mer sällsynta till följd av att matematikundervisningen har kommit att domineras alltmer av eget arbete. I avhandlingen har den här typen av aktiviteter fått benämningen kollektivt utbyte. Dessa är en viktig tillgång eftersom elevernas medvetenhet om gemensamma erfarenheter kan hjälpa dem att anknyta till kunskap som tidigare uppmärskammats (Mercer, 1995). Det kan i sin tur skapa möjlighet att utveckla olika förmågor i förhållande till matematikkunnande, tillsammans med tillit att använda de olika förmågorna.

Ett exempel på hur den här metoden visar sig, förutom i de gemensamma aktiviteterna, är då läraren uttrycker sig i vi-form, till exempel ”det som vi har tränat på tillsammans”. Till skillnad från Mercer (1995) anser Pimm (1987) att lärares användning av ”vi” på det här sättet tyder på att läraren är försiktig med att lägga fram sina egna matematiska tankegångar. Resultatet från min studie pekar snarare på att lärare använder vi-formen för att återknyta till tidigare situationer i matematikklassrummet, alltså i linje med hur Mercer resonerar.

I ett klassrum där lärare och elever tillsammans genomför matematiska aktiviteter i form av olika spel eller lekar, innebär kollektivt utbyte också att matematik uppmärksammas som lustfyllt och engagerande, vilket därmed ger förutsättningar för utveckling av elevers intresse (i alla fall en del) för matematik.

Stötestenar eller utmaningar?

Av resultatet och även av diskussionen så här långt har det framgått att lärares och elevers metoder i matematikklassrummen skapar möjligheter för elever att lära matematik i olika avseenden. Likväl visar studien på några karaktäristiska metoder som inte entydigt pekar i den riktningen. Dessa metoder har synliggjorts då faktorerna artefakter, regler och gemenskap har varit i fokus i analysredskapet.

Först gäller det metoden *skolkontexten styr användning av vardagsverktyg*. Den visar att i ett klassrum med en norm som innebär att skolmatematikens idéer är överordnade, tas inte pengars funktion i egenskap av vardagsverktyg tillvara. Användning av pengar (som visserligen kanske snart är ett minne blott) innebär vanligtvis att du lämnar fram en tia om du ska betala sex kronor och har 93 kronor i plånboken. Du får då tillbaka fyra kronor på din tia. Ett tillvägagångssätt i skolmatematiken, vilket synliggörs genom exempel i studien, är istället att först lämna fram de tre enkronorna. För att betala de återstående tre kronorna lämnas sedan en tia, vilket ger sju kronor tillbaka. Eftersom detta inte liknar hur det vanligtvis går till när någon betalar i affären är det tveksamt om elevernas eventuella erfarenheter av att hantera pengar i vardagen kan vara till någon större nytta för dem i en sådan situation som beskrivits här. Därmed förlorar pengar den särskilda betydelse materialet har genom sin egenskap att vara vardagsnära. Av studiens exempel framgår att detta tycks skapa en viss förvirring för eleverna.

Lärares utmaning är således att både vara lyhörd för elevernas egna erfarenheter av att bruka pengar och samtidigt ta vara på den möjlighet som ges genom att använda pengar i undervisningen, nämligen att hitta enklare tillvägagångssätt för att göra beräkningar.

En annan metod som kan ge upphov till stötestenar är att *läraren betonar svårigheter*. Min slutsats av Pimms (1987) tankegångar är bland annat att det som läraren säger och gör förväntas också alla andra i klassrummet ta efter. Det betyder att i ett klassrum där läraren återkommande talar om för eleverna vad som är svårt i matematiken blir det så småningom allas, eller i alla fall en dominerande uppfattning att matematik är svårt. Ett sådant synsätt kan knappast vara förenligt med ett klimat som främjar lärande. Forskare pekar ut just avsaknaden av ett gynnsamt lärandeklimat som en av orsakerna bakom

elevers matematikängslan (Samuelsson & Lawrot, 2009). Utmaningen för läraren i ett sådant klassrum är att försöka bemästra egna negativa erfarenheter av matematik och inte låta det gå ut över undervisningen.

En tredje metod är *oklar matematisk praxis*. Ett utmärkande drag för klassrummets matematiska praxis är att denna kan förändras i takt med att elevernas matematikkunnande utvecklas (Cobb & Yackel, 1996). I en situation där elever ska redovisa hur de har använt en beräkningsmetod, men lärarens frågor till eleverna istället uppmärksammar enkla företeelser som exempelvis tiokamrater, vilket verkar vara självklarheter för eleverna, kommer oklar matematisk praxis till uttryck.

Enligt (Cobb & Yackel, 1996) innebär matematisk praxis att elever inte längre förväntas argumentera för tankegångar som de flesta behärskar, vilket står helt i motsats till vad exemplet ovan visar. Det är inte oproblemiskt för elever att reglerna ändras (Jablonka, 2011a). Likväl, i den här situationen verkar det snarare vara läraren som har förbisett att det inte längre är tiokamraterna utan själva tillvägagångssättet för den redovisade räknemetoden som intresset förväntas vara riktat mot. En utmaning här är alltså att inte byta fokus utan låta själva beräkningsmetoden vara i centrum.

Ytterligare en metod som bör uppmärksammas som en stötesten är *omvänd kamratpåverkan*. Den här metoden visar sig som en motsats till positiv kamratpåverkan vilket kan betyda att hjälp, vänskap och känslomässigt stöd uteblir, vilket enligt Hattie (2009) kan leda till bristande engagemang hos eleverna. Omvänd kamratpåverkan kommer alltså till uttryck i ett klassrum där det inte tycks vara en självklarhet att elever hjälper varandra eller där det bara är vissa som får hjälp av sina kamrater. Det synliggörs också där elever inte tillåter sina bankkamrater att se deras uppgifter eller var de befinner sig på sidorna i matematikboken utan istället bygger upp skydd mot insyn. Den här metoden är knappast förenlig med ett positivt lärandeklimat utom möjligen för de elever som ser matematiken som en tävling om att ha kommit längst i boken. I ett klassrum där metoden omvänd kamratpåverkan råder verkar utmaningen bland annat vara ledarskapet i klassrummet. Till detta hör lärarens förmåga att reducera inslag som inverkar störande eller på annat sätt verkar negativa i förhållande till elevers möjligheter att lära (Hattie, 2009).

Handlingar i matematikklassrummet ger olika möjligheter

Den här avhandlingen visar att lärares och elevers handlingar i matematikklassrummet riktar uppmärksamheten mot olika kunskapsaspekter eller förmågor. En modell över de fyra typer av verksamheter som studien

9. Diskussion

har resulterat i visar hur metoderna som lärare och elever använder ger möjlighet att utveckla olika förmågor i de respektive verksamheterna.

			Resonemangs- förmåga
		Kommunikations- förmåga	Kommunikations- förmåga
	Begrepps- förmåga	–	Begrepps- förmåga
Tilltro, intresse	Tilltro, intresse	Tilltro	Tilltro
Metod- och beräknings-förmåga	Metod- och beräknings-förmåga	Metod- och beräknings-förmåga	Metod- och beräknings-förmåga
Procedurinriktad	Procedur- och begreppsinriktad	Procedur- och kommunikations- inriktad	Begrepps- och argumentations- inriktad

Figur 8. Modell över de fyra verksamhetstyperna och de förmågor som eleverna ges möjlighet att utveckla i respektive verksamhet.

Modellen visar vilka olika förmågor som respektive verksamhetstyp ger elever möjlighet att utveckla. Tomma celler illustrerar uteblivna eller bristande möjligheter att lära matematik. Genom modellen synliggörs således att inte alla verksamhetstyperna erbjuder motsvarande förutsättningar. Som vi tidigare har kunnat se leder detta fram till följande slutsats: De olika typerna av undervisningsverksamheter i matematik resulterar i möjligt lärande som varierar i omfattning i förhållande till de förmågemål som anges i Lgr11.

Förutom det som synliggörs genom modellen framkommer genom resultatet att det finns tydliga skillnader mellan verksamhetstyperna. En närmare granskning med utgångspunkt från arbetsdelning i analysredskapet visar att procedurinriktad verksamhet och procedur- och kommunikationsinriktad verksamhet befinner sig långt ifrån varandra när det gäller organisationen i klassrummet. Utmärkande för den procedurinriktade verksamheten är att läraren leder genomgångar med hela klassen och instruerar eleverna som sedan arbetar med att öva i boken. Det stämmer väl med Carlgren och Martons (2002) beskrivning av traditionell undervisning. Eftersom en väsentlig del av undervisningen här utgörs av lärarens genomgångar kan vi också tala om en lärarcentrerad undervisning. I den procedur- och kommunikationsinriktade verksamheten däremot, förekommer endast kortare sporadiska genomgångar och lektionerna domineras av att eleverna arbetar enskilt eller i grupp med att lösa uppgifter eller redovisa sina

9. Diskussion

lösningar för klassen. Det kan jämföras med elevcentrerad undervisning (se Cuban, 1993), vilket också är den typ av klassrumspraktik som har rekommenderats till följd av det paradigmskifte som har skett de senaste decennierna när det gäller synen på lärande (Brophy, 1999).

Beträffande laborativt material visar resultatet att det knappast förekommer i den procedurinriktade verksamheten medan det finns ett varierat utbud av material för eleverna i den andra verksamheten. Förutom att dessa elever själva utnyttjar materialet när de löser olika uppgifter används det också som illustration i samband med att eleverna redovisar sina räknemetoder för klassen.

De här beskrivningarna där arbetsdelning och artefakter (laborativt material) är utgångspunkt visar alltså på väsentliga skillnader mellan vilka metoder som används i de båda verksamheterna. En jämförelse med de olika undervisningsideologierna hos Ernest (1991) innebär att det procedurinriktade klassrummet i flera avseenden kan liknas vid ideologin "Industrial Trainer" där läraren presenterar matematiken som fakta och regler medan eleverna övar och försöker komma ihåg. Det stämmer också överens med vad Samuelsson (2007) tidigare har kommit fram till. Den procedur- och kommunikationsinriktade verksamheten, däremot, verkar närmast motsvara "Progressive Educator" eftersom verksamheten erbjuder olika sorters material för eleverna och lärarens roll är mindre framträdande. Eleverna ges möjlighet att undersöka, diskutera och ge egna förslag på lösningar, vilket också är framträdande drag i den ideologin (Ernest, 1991).

Även om metoderna skiljer sig åt på flera punkter i båda verksamheterna tycks ett gemensamt mål för både lärare och elever vara att genomföra matematikboken. Det här kan förklaras med utgångspunkt i verksamhetsteorin där det framgår att olika sorters handlingar kan ha samma mål (Leontiev, 1986). Undervisningen kan alltså se helt olika ut i två verksamheter även om målet är detsamma.

Ytterligare funderingar över kopplingarna till Ernests (1991) ideologier leder fram till att det verkar relevant att ställa sig frågan om hur väl den procedur- och kommunikationsinriktade verksamheten verkligen överensstämmer med ideologin Progressive Educator. Hur rimmar det med att målet för undervisningen är att eleverna ska klara boken? Kanske är det snarare så att lärarens metoder här i stället kan liknas vid det som lärare C gör i beskrivningen hos Carlgren och Marton (2002). Det framgår där att lärarens intention är att undervisa i likhet med Progressive Educator men i praktiken hamnar undervisningen närmare ideologierna Technological Pragmatist och Industrial Trainer. Eftersom både elever och lärare i den procedur- och kommunikationsinriktade verksamheten verkar vara mer inriktade på metod-

och beräkningsförmåga och betydligt mindre på begreppslig förmåga skulle en sådan beskrivning kunna passa även här.

Trots att de olika verksamhetstyperna tycks skilja sig åt i flera avseenden visar modellen ovan att metoder som kan ge eleverna möjlighet att utveckla sin metod- och beräkningsförmåga förekommer i alla verksamhetstyperna, vilket är relevant med tanke på undervisningsinnehållet. Modellen visar också att det ges förutsättningar för elever att utveckla andra förmågor utöver metod- och beräkningsförmåga. Eftersom detta är grundläggande krav i de aktuella styrdokumenterna (se Lgr11) är resultatet ett gott tecken. Det är också viktigt att notera att dessa förutsättningar ändå inte verkar komma alla elever till del. För många elever i studien ser det trots allt ut som att möjligheterna som ges att utveckla andra förmågor är något begränsade, beroende på vilken typ av verksamhet de tillhör. Av resultatet står det klart att klassrumskulturen, inte minst olika aspekter av regler tillsammans med språkanvändning, här har en avgörande betydelse.

Genom att uppmärksamma elevers och lärares utmärkande metoder i matematikundervisningen visar den här avhandlingen att olika klassrum ger olika förutsättningar att lära matematik. Den kan därmed fungera som en ögonöppnare beträffande vilka möjligheter till lärande som ges elever i ett helt vanligt matematikklassrum, då räknemetoder för addition och subtraktion är i fokus.

Vidare forskning

Avhandlingen anknyter till en mängd olika forskningsområden inom det matematikdidaktiska fältet. Det betyder också att det finns resultat som väcker intresse, men som på grund av både tids- och utrymmesskäl inte har varit rimliga att bearbeta inom ramen för avhandlingsprojektet. Istället innebär det möjligheter till senare fördjupning i några av de spörsmål som har aktualiserats genom det här arbetet.

Studiens resultat visar i likhet med tidigare forskning (t. ex. Beishuizen, 1993; Bentley & Bentley, 2011; Fuson, 2003; Fuson et al., 1997; Löwing, 2008; Norton, 2012), att elever hamnar i svårigheter då de ska genomföra subtraktionsberäkningar med hjälp av skriftliga räknemetoder. Mycket pekar i samma riktning som andra forskare redan har kommit fram till, att förklaringen till problemet ligger i undervisningen (Emanuelsson, 1989; Johansson, 2006). Genom studien står det klart att elever ges olika förutsättningar bland annat beroende på hur läraren uttrycker sig, hur det laborativa materialet används och vilka möjligheter läraren har att förbereda sig för att kunna bemöta elevers tankesätt. Det här är tre områden som vart

och ett kan göras till föremål för interventionsstudier i syfte att hitta metoder som kan vara till stöd för eleverna att hantera subtraktionsräkning.

Ett annat område av intresse för fortsatt forskning är regler och normer i matematikklassrummet. Även om intentionen har varit att uppmärksamma normer ur både lärar- och elevperspektiv har lärarperspektivet dominerat. Forskare (Levenson et al., 2009) påpekar att det råder osäkerhet kring hur elever faktiskt uppfattar normer som verkar gemensamma i klassrummet. Det betyder att även om normerna som demonstreras i klassrummet är i enlighet med de normer som läraren stödjer, är det osäkert om eleverna verkligen har uppfattat dessa normer. Genom studien synliggörs vikten av sociomatematiska normer och praxis i matematikklassrummet. Eftersom detta är faktorer som är väsentliga i relation till elevers matematiklärande finns det anledning att vidare undersöka hur etablering av värdefulla normer och viktig praxis kan vara ett stöd för elevers kunskapsutveckling i matematik. En sådan studie skulle kunna ge värdefull kunskap om vad som är betydelsefullt i matematikundervisningen, särskilt med avseende på elevgrupper som befinner sig på olika prestationsnivåer. Även här kan interventionsstudier vara en möjlig väg. Dessutom finns det alltså behov att ytterligare belysa elevperspektivet i studier där sociomatematiska normer är i fokus.

Slutligen vill jag också lyfta fram diskussionen kring lärarcentrerad respektive elevcentrerad undervisning, där elevcentrerade metoder, från ett utomasiatiskt perspektiv brukar betraktas som god undervisning medan lärarcentrerad undervisning har kopplats samman med en traditionell undervisning som domineras av lärarens genomgångar i helklass. Eftersom det är en schabloniserad bild, vilket också har framkommit tidigare i avhandlingen, är detta ett område som kan vara betydelsefullt att bearbeta inom det matematikdidaktiska fältet. För att vidga mitt eget perspektiv inom det här området har jag fått möjlighet att inom den närmaste tiden studera några japanska klassrum. Avsikten med detta är att göra en jämförelse med resultaten som redovisats här. Kanske kan den nya undersökningen tillföra kunskap som kan komma att sätta dessa resultat i en ny dager och därmed öppna upp för nya sätt att betrakta lärares och elevers handlingar i svenska matematikklassrum.

Actions in the Mathematics Classroom – A Study of Teaching Activities in Primary School When Calculation Methods for Addition and Subtraction Are in Focus

Summary

Background

This thesis is about characteristics of teaching of mathematics in some primary school classroom when the instructional content is written calculation methods for addition and subtraction. Teachers' and pupils' activities are in focus, as well as what it is possible for the pupils learn as a consequence of these activities. The thesis, thus, belongs to the research area of teaching and learning in mathematics, or, as it is often called, the field of mathematics education.

A recurrent theme within this research area in the last decades has been culture as an important factor in relation to the teaching of mathematics (Bishop, 1988; Presmeg, 2007; Seeger et al., 1998). In this context culture is the equivalent of ideas, values, knowledge, and other resources, for instance, artefacts, which we acquire through interaction with the world around us (Säljö, 2000).

That the culture of the mathematics classroom influences pupils' learning becomes evident, i.e., in the results of earlier international comparative studies, such as, TIMSS 1995 and PISA (De Corte & Verschaffel, 2007). In line with this, researchers emphasize the importance of taking indirect processes in teaching and learning into consideration, as direct teaching does not tell the whole truth about mathematics education (Seeger et al., 1998).

It is commonly assumed that mathematics education looks the same wherever it occurs, i.e., a lesson starts with a short introduction and the pupils thereafter work on their own in their exercise books. In order to change this idea it is, according to Laborde (1996), necessary to give more attention to 'the multiple aspects of teaching and learning mathematics interrelated with social, cultural and cognitive dimensions' (s. 509).

Recently the problems concerning the relation between the method of teaching and the outcome of it have attracted attention (see, e.g., Hattie, 2009; Hiebert & Grouws, 2007). Researchers point to the fact that teaching includes several components in close cooperation (Cohen et al., 2003; Jablonka, 2011b; Marton, 2000; Stigler & Hiebert, 1997). It is

therefore impossible, in principle, to predict learning in mathematics based on the use of one specific method. On the other hand, it is most relevant to discuss pupils' learning in mathematics based on what *different* methods have to offer the pupils in terms of *possibilities to learn* (Hiebert & Grouws, 2007; Marton & Booth, 1997).

The thesis belongs, as indicated previously, to the research area of mathematics education. Mathematics is a complex concept, which is also reflected in the research area of mathematics education. An overview of the area demonstrates how the research is structured in four sectors, where this thesis can be placed in the second sector:

1. Curriculum, Goals, Content, Resources
2. Teaching and Learning Mathematics
3. Perspectives and Interdisciplinary Contexts
4. Social Conditions & Perspectives on Professional Development
(Bishop et al., 1996)

An extensive survey of international articles within the field of mathematics education, published between 1996 and 2006, reveals that studies of authentic classrooms are scarce (Hägström, 2008). A similar trend is seen in Swedish doctoral theses, among which classroom research focusing on teaching and learning of mathematics in lower primary school comprises an infinitesimally small amount until the year 2009, when this survey was made (Bergsten, 2010).

All this taken together, there is obviously a large empty space for research in mathematics education, and, particularly, research which, like the present thesis, is directed towards mathematics education in lower primary school.

Aim

The aim of this study is, thus, to describe, analyse and understand teaching of mathematics in lower primary school. More precisely, the aim is to investigate what this teaching offers pupils in some classrooms in terms of learning, when the content of teaching is written calculation methods for addition and subtraction.

The contents and methods of school mathematics

The essential questions in this thesis concern teachers' and pupils' typical actions in the mathematics classroom and what it is possible for the pupils to learn, as a result of this teaching. One part of the theoretical knowledge base

that supports this dissertation includes descriptions of mathematical knowledge, whereas another part encompasses research about methods of teaching mathematics.

After comprehensive school was introduced in Sweden the ideas about knowledge have gradually changed. Focus, which was earlier mostly directed towards mathematical content, has now shifted so as to include different skills. This can be observed in the syllabi, in the fact that mathematics has gone from being presented as a purely skills-based subject to being presented as a subject where mathematical competence is expressed as being able to perform certain operations in relation to different areas with mathematical content. Arithmetic is still an essential part of the content in mathematics education in primary school, in the early school years in particular. The new views of knowledge in mathematics have contributed to the introduction of other written calculation methods than traditional algorithms.

Parallel to this development we have been able to acquaint ourselves with various frameworks, in which mathematical knowledge has been presented in terms of general competencies (e.g., *Hög tid för matematik [High Time for Mathematics]*, 2001; Kilpatrick et al., 2001; Niss, 2003). The different frameworks are similar to a large extent and there are also substantial similarities with the five competencies described in Lgr 11 [The Swedish National Curriculum 2011].

Apart from different aspects of mathematical ability, teachers' and pupils' actions in the mathematics classroom are at the core of this thesis, as has been pointed out previously. Another way to discuss actions is in terms of methods, Marton (2000) defines methods in terms of 'who-makes-what-with the help of what' (p. 152). This means that methods in the classroom are arrangements that can be described with actors, artefacts, and activities as points of departure. A presentation of five teaching ideologies (Ernest, 1991) and descriptions of six teachers' instruction (Carlgren & Marton, 2002) together constitute a theoretical base, which demonstrates methods that teachers and pupils use, in relation to the expected results of the instruction, that is, what pupils are given possibilities to learn, or, put in another way, *possible learning*.

In addition to teachers' and pupils' actions, artefacts, classroom culture and classroom organization are paid attention to in the study. Language is one of the artefacts in teaching that is observed, another one is manipulatives. Some researchers that have taken an interest in the relationship between language and mathematics emphasize the importance of giving pupils ample opportunities to 'talk mathematics' (Hiebert et al., 2003; Stigler & Hiebert, 1997; Wood, 1998), whereas other researchers have

dug deeper into the function of language in teaching (Löwing, 2000; Pimm, 1987), and some have studied the various ways of teachers to give feedback on pupils' responses (Hargreaves et al., 2000; Mercer, 1995). Besides language the use of manipulatives, which has received much attention lately, plays an important role in mathematics education. Among other things, teachers' participation has been highlighted, since the use of manipulatives does not necessarily enhance pupils' learning (Ball, 1992; Clements, 1999; Löwing & Kilborn, 2002; Moyer, 2001).

As has already been pointed out, another area of interest that is focused in the thesis is the culture of the mathematics classroom. Through the actions of the individual mutual conceptions and norms, which are part of the culture, will manifest themselves in the classroom. This includes, for instance, socio-mathematical norms, i.e., the attitudes towards mathematics that teacher and pupils develop among them, as well as the mathematical custom [praxis] that prevails in the classroom (Cobb & Yackel, 1996; Jablonka, 2011a; Ju & Kwon, 2007; Yackel & Cobb, 1996).

A third aspect, apart from artefacts and classroom culture, that is important in relation to the methods that teachers and pupils use in the classroom, is how teaching is organized (Cobb, 1990; Rezat & Sträßer, 2012; Schoenfeld, 2012; Stigler & Hiebert, 1997). Working procedures can be described as either teacher centred or pupil centred. These labels have, however, been questioned in later years, as it has been shown that a stereotyped use of them may lead to misunderstandings, not least in an international perspective (Chazan & Ball, 1997; Clarke, 2006; Li, 2011; Mok, 2006a).

Theoretical Perspective

In the last decades the overall views on knowledge and learning have changed, which i.a., means that learning is looked upon as a social process influenced by the historical context. Vygotsky (1978, 1986), for example, is one of the proponents for the new theories of learning. One of these theories is the Cultural Historical *Activity Theory* (CHAT) (see e.g., Engeström, 1987; Leontiev, 1986), which is represented in several research areas, among them education, and which has become fairly popular in the last two decades. The essential ideas in CHAT are, that activity exists in the form of human actions (Leontiev, 1986) and that our actions can be explained and understood in relation to the activities in which we take part (Engeström, 1987). This makes the theory useful as a point of departure when analysing the activity of mathematics education.

Summary

Based on Engeström's (1987) model I have constructed a tool, which has been adjusted to the activity of teaching and by the help of which I have analysed teachers' and pupils' methods, that is, their actions mediated by cultural and social factors in the mathematics classroom. Factors observed in the thesis are *artefacts* (primary and secondary), *rules*, *community*, and *division of labour*.

A generalised model of this analysing tool illustrates the relationships between *subject*, *object* and *mediating factor*, on one hand, and *possible learning*, on the other.

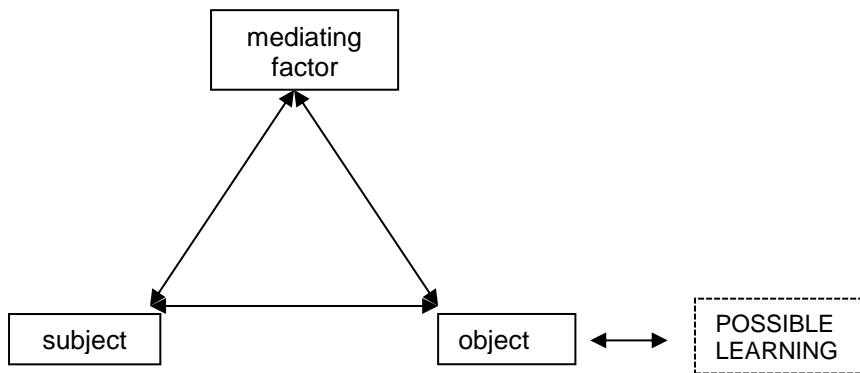


Figure 1. A generalised model of mediated actions.

In the model the subject is sometimes represented by the teacher and sometimes by the pupil. Methods used by teachers and pupils are in focus of the analysis. The methods are directed towards the object, that is, the task or the mathematical activity representing the mathematical knowledge, which the pupil is supposed to develop. What is possible to learn is, thus, the result of the methods, that is, teachers' and pupils' actions which are performed in relation to a certain factor. The result, or what is made possible to learn, or put in another way, possible learning, is presented in terms of different competencies and aspects of knowledge that are described in the curriculum (Lgr11).

When looking for characteristics of teaching, the interest is, thus, directed towards teachers' and pupils' actions. Here we can see a certain similarity with a naturalistic tradition, where studies of human interaction in natural settings are essential in the efforts to create understanding of the phenomenon that is studied (Bryman, 2011). In the thesis this means that descriptions presented in the results of the study emanate from data, which have been collected in authentic situations. Characteristic of such situations is that 'interactions between human beings *appear or progress without participation of the researcher or pshychologist*' (Granström, 2004, p. 290, translated).

The authentic situations, that my results are based on and thus constitute the bulk of my collected data, consist of video-recorded mathematics lessons in five different classes. In addition, there are data from some lessons that have been observed only. In all the lessons one and the same content has been in focus, i.e., calculating methods for addition and subtraction with numbers exceeding twenty, often using regrouping. Collection of data started during the spring when the pupils were in second grade and continued during the autumn, when the pupils were in third grade. The video-recorded material comprises a total of 24 lessons.

The collected research material has been analysed in two steps, Analysis I and Analysis II; the first step can be described as empirically oriented and thematical. The results derived from Analysis I have then been used as the basis for Analysis II, where my analysing tool, inspired by Engeström (1987), has guided the analysing process.

Results and discussion

The empirically oriented analysis has resulted in a characterisation of four different mathematics classrooms, which have been named Almen [The Elm], Björken [The Birch], Eken [The Oak], and Lönnen [The Maple]. Two types of teaching processes in mathematics were revealed, i.e., *general* or *specific*. The *general* teaching processes include activities that occur in relation to the actual subject of mathematics. Many of them reflect attitudes and views, in other words, the socio-mathematical culture that prevails or is about to be established in the mathematics classroom. Some examples:

- Mathematics is about following the methods and rules (of the textbook)
- Mathematics demands active thinking
- Mathematics is about making calculations both quickly and accurately
- School mathematics is superior to other mathematical experiences
- In their reasoning the pupils demonstrate their understanding.

The specific teaching processes include actions that are carried out in relation to topical subject matter, in this case, (written) calculation methods for addition and subtraction. Also in these processes connections with norms and praxis are obvious:

- The intermediate simplifies, mathematics should be easy
- Calculation methods are explained step by step
- 'Keyword rules' are a good help in subtraction
- The intermediate can be a means of assistance or an expression of thought

Summary

- The pupils' own calculation methods are in focus

The second step of analysis, Analysis II, departs from the results of Analysis I. By use of the analysing tool attention was directed towards the calculation methods used by teachers and pupils. This means that activities mediated by (1) *artefacts*, (2) *rules*, (3) *community*, and (4) *division of labour*, have been focused in the analysis. In this thesis *artefacts* are limited to manipulatives and verbal communication. *Rules* are to be understood, both as norms and praxis demonstrated in interactions between teacher and pupils, and as conceptions that can be developed into established norms. Community corresponds to a fellowship within the class as a whole, i.e., teacher and class together, or within smaller groups in the physical classroom. It can also reflect influences from the world outside the classroom, such as, family, friends, and other teachers. The fourth mediating factor, division of labour, refers to the working procedures that characterise the sphere of activity. In this context no consideration is given to factors like power or hierarchical structures, rather, the intention is describe organization in the classroom.

The results of the theoretical analysis bear witness to the fact that teachers and pupils in different mathematics classrooms make use of a variety of characteristic methods. These can be sorted into five groups, primarily based on competencies and ability aspects that are actualised by different methods. The following groups of methods are used both by teachers and pupils, i.e., methods, where (1) *procedures*, (2) *concepts and connections*, (3) *mathematical communication and reasoning*, and (4) interest and confidence are in focus. There is also a fifth group, but it deviates from the others, as it consists of methods that contribute to (5) *stumbling blocks*, which in turn means that they become *challenges* for teachers as well as pupils.

Procedures in focus

The methods that focus on mathematical procedures show clear connections with the general ways of working. In a classroom, where *the teacher presents facts and rules and instructs the pupils*, and the pupils are *practising on their own*, often in the exercise book, the ability to use methods and calculations is what the pupils are given possibilities to develop (see Ernest, 1991; Samuelsson, 2007). Other characteristic methods where focus is on procedures can be found in the verbal communication, where both pupils and teacher use descriptive language. This can be compared with a mathematical everyday language and does not contain those concepts that are characteristic of mathematical activities (Löwing, 2004). Yet another set of methods can be connected to the socio-mathematical culture. This means

that a classroom where the teacher (or the textbook) decides what calculation methods the pupils should learn and how these are to be carried out, demonstrates that mathematics is governed by rules (Boaler, 2009; Jablonka, 2011a).

Concepts and mathematical relations are given attention

The results of the study also indicate that the typical methods teachers and pupils use direct attention to concepts and connections in mathematics. These methods are most apparent in relation to their use of artefacts such as language and manipulatives. One characteristic method in this respect is *revoicing* (O'Connor & Michaels, 1993), which is used to clarify concepts and develop ideas and which means that *the teacher poses questions that can create structures* (Mercer, 1995). Another method, *posing questions that can encourage ways of thinking*, shows that teachers use various questioning techniques. Although the questions have different character they still direct attention to concepts and connections. Questions that *can create structures* make it possible not only to learn procedures but also to understand the calculation method in itself (e.g., Bergqvist, 2010; Clarke, 2006; Hiebert & Carpenter, 1992; Skolinspektionen, 2009). Questions that focus on *pupils' different ways of thinking* encourage them to use their number sense, which is corroborated by examples in the study. This is in line with the new approach to mathematical knowledge, according to which pupils should be given possibilities to develop other competencies besides mere procedural knowledge (Anghileri, 2001; Clarke, 2006).

Apart from revoicing and teachers' various questioning techniques, the results of the study indicate that *teacher-lead use of manipulatives* creates pre-requisites for developing conceptual competence. Teacher-lead use of manipulatives means that the teacher has decided in advance what material the pupils should use; the teacher sets a set of standards for how, e.g., the different parts of base ten blocks should be placed and illustrates calculation methods on the whiteboard in front of the whole class. These results, thereby, point in the same direction as the hypothesis that several researchers have pinpointed, that is, that the teacher's participation is most essential when the pupils use manipulatives (Clements, 1999; Löwing & Kilborn, 2002; Moyer, 2001). The present results also demonstrate the opposite, namely, that lack of teacher instruction, for instance, when pupils choose materials on their own, is a great challenge for the teacher. He or she is then supposed to be able to interpret the mathematical ability of the pupils as it is

expressed in terms of various types of representations, which is no simple matter (Moyer, 2001).

Creating possibilities for communication and reasoning

Two of the competencies that pupils, in accordance with the curriculum (Lgr 11), should be given possibilities to develop are the abilities to communicate and reason, which, according to descriptions, are closely related to each other. Taking some texts in '*Hög tid*' ['High time'] (2001) and Lgr11 as points of departure, this means that these abilities are, to some extent, also each other's pre-requisites. A more distinct difference between the two is described in the Danish framework (see Niss, 2003), and taking this into account it has been possible, in the present study, to distinguish methods where abilities of communication and reasoning, respectively, have been in focus.

One characteristic of these methods is that they are connected to the organisation in the classroom, for instance, whether the pupils are supposed to *work in pairs* or *in small groups*, or *report in front of the whole class*.

Another method is that *the teacher encourages the pupils to talk mathematics*, which puts the ability to communicate into focus. In a classroom where pupils are expected to *explain also when they have understood*, and where the *teacher guides the pupils* when they are to argue with one another, possibilities are given for them to develop their ability to reason in mathematical terms.

Methods for enhancing interest and confidence

In this section other aspects of knowledge than those preciously discussed, i.e., competence in terms of different abilities, are highlighted. Phenomena, such as interest and confidence, have also been emphasized as important aspects of mathematical competence in various overviews (e.g. *Hög tid*, 2001; Kilpatrick et al., 2001), as well as in the curriculum, Lgr 11. Some of the instructional methods that stand out, in this respect, are as follows: *mathematical performance is encouraged collectively*, *positive influence from classmates*, and *collective exchange*.

The first method can be linked with feedback on pupils' performance, as the teacher makes the pupils realize what they master (Hargreaves, McCallum, & Gipps, 2000), and just like *positive influence from classmates* this method makes it possible for the pupils to develop confidence as regards their ability to use mathematics. The present results reveal that positive influence from classmates, in the sense that the pupils help and support each other, is prevalent in a classroom where pupils are encouraged to work

Summary

together in pairs or small groups and also to present mutual solutions. According to Hattie (2009) such a method is important for pupils' achievements in the classroom.

The third method, *collective exchange*, puts the finger on conditions for the pupils to develop an interest in mathematics, as teacher and pupils together carry out mathematical activities in the form of different games where playfulness, pleasure, and engagement are expressed.

Stumbling blocks or challenges?

The present thesis demonstrates that methods used by teachers and pupils in the mathematics classroom create possibilities, in various respects, for pupils to learn mathematics. Nevertheless, the study points out some characteristic methods that are not unequivocally pointing in that direction. These methods have been revealed, when factors such as artefacts, rules, and community have been focused in the analysis

One such method is when *the school context governs the use of everyday tools*. This shows that in a classroom, where the norm is that the ideas of school mathematics are superior, the teacher demonstrates subtraction by using money for regrouping, in accordance with common school practice. Another method reveals itself when the *teacher meets pupils' explanations with vague praxis*, meaning that the teacher cannot adapt her/his questions to the pupils' new level of competence (see Cobb & Yackel, 1996), which seems to create confusion among the pupils. A third method, which appears in the study, is that the *teacher emphasizes difficulties* in mathematics.

Activities in the mathematics classroom offer different possibilities

The present thesis, thus, indicates that teachers' and pupils' actions in the mathematics classroom direct attention to different aspects of knowledge and abilities. A model of the four types of activities, which the study has revealed, shows how the different methods offer possibilities to develop different competencies in the respective activities.

Summary

			Reasoning ability
		Communication ability	Communication ability
	Conceptual ability	–	Conceptual ability
Confidence, interest	Confidence, interest	Confidence	Confidence
Methods and calculation ability	Methods and calculation ability	Methods and calculation ability	Methods and calculation ability
Procedure oriented activity	Procedure and concepts oriented activity	Procedure and communication oriented activity	Concepts and reasoning-oriented activity

Figure 2. Models of the four types of activities and the abilities possible for the pupils to develop in the respective activities

The model, thus, demonstrates what abilities or skills that the different types of activities give the pupils possibilities to develop. An empty cell illustrates lack of possibility to learn. In this way it becomes obvious that not all types of activities offer the right kind of conditions for learning. This leads us to the following conclusion: Different types of teaching activities in mathematics result in possible learning, the extent of which varies in relation to the educational goals set in the curriculum (Lgr 11).

It is also shown in the model that in all types of activities there exist methods, which can offer the pupils possibilities to develop their calculation skills. This is relevant considering the subject matter of teaching. In addition, the model indicates that conditions are given for pupils to develop other skills besides calculation ability. As this is a basic requirement in the curriculum (Lgr 11) it is important to note that it does not seem to apply to all pupils. For most pupils taking part in the study it seems as if the possibility to develop other competencies is rather limited, depending on what kind of activity they are part of. By paying attention to the most prominent methods teachers and pupils use in the mathematics classroom, this thesis may function as an eye-opener concerning what possibilities to learn pupils are offered when calculation methods for addition and subtraction are in focus.

Referenser

- Alexander, R. J. (1984). *Primary teaching*. London: Holt, Rinehart and Winston.
- Alvesson, M., & Sköldböck, K. (1994). *Tolkning och reflektion. Vetenskapsfilosofi och kvalitativ metod*. Lund: Studentlitteratur.
- Andersson, P., Picetti, M. & Sundin, K. (2003). *Matte direkt. Borgen. 4 A*. (1. uppl.) Stockholm: Bonnier utbildning.
- Anghileri, Julia (2001). Setting the agenda for arithmetic teaching and learning. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching. Innovative approaches for the primary classroom* (pp. 1-3). Buckingham: Open University Press.
- Anghileri, J. (2006). *Teaching number sense*. (2nd ed.) London: New York: Continuum.
- Aritmetik (u.å.). I *Nationalencyklopedin*. Hämtad 7 maj 2012, från <http://www.ne.se/lang/aritmetik>
- Askew, M. (1997). Mental methods of computation. *Mathematics Teaching*, 160, 7-8.
- Ball, D. L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator* 16(2), 14–18, 46–47.
- Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, 93, 373-397.
- Baroody, A. J. (1989). Manipulatives don't come with guarantees. *Arithmetic Teacher*, 37(2), 4-5.
- Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise* (pp. 1-33). Mahwah, N J: Lawrence Erlbaum Associates.
- Bauersfeld, H. (1988). Interaction, Construction and Knowledge. In T. J. Cooney & D. A. Grouws (Eds.), *Perspectives on research on effective mathematics teaching*. (pp. 27-46). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Lawrence Erlbaum Ass.
- Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(4), 294-323.

- Bekdemir, M. (2010). The pre-service teachers' mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 311-328.
- Ben-Yehuda, M. Lavy, I. Linchevski, L. & Sfard, A. (2005). Doing Wrong With Words: What Bars Students' Access to Arithmetical Discourses. *Journal for Research in Mathematics Education*. 36(3), 176-247.
- Bentley, P. O., & Bentley, C. (2011). "Det beror på hur man räknar!": matematikdidaktik för grundlärare. (1. uppl.) Stockholm: Liber.
- Berg, B. L. (2009). *Qualitative research methods for the social sciences*. (7. ed.) Boston: Allyn & Bacon.
- Bergqvist, E., Bergqvist, T., Boesen, J., Helenius, O., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2010). *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet [Elektronisk resurs]: grundskolan våren 2009*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet. Hämtad 10 juni 2012 från:
http://ncm.gu.se/media/ncm/forskning/kunskapsöversikt_ncm_uvm_gr.pdf
- Bergqvist, K. (2001). Skolarbete som interaktion I S. Lindblad & F. Sahlström (red.), *Interaktion i pedagogiska sammanhang* (s. 36-52). Stockholm: Liber.
- Bergsten, C. (2010). Mathematics Education Research in Sweden: An introduction. In B. Sriraman, (Ed.), *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education: Norway, Sweden, Iceland, Denmark, and contributions from Finland* (pp. 269-282). Charlotte: Information Age Pub.
- Berthén, D. (2007). *Förberedelse för särskildhet: särskolans pedagogiska arbete i ett verksamhetsteoretiskt perspektiv*. Diss. Karlstad: Karlstads universitet. Hämtad 7 maj 2012 från:
<http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:kau:diva-899>
- Bishop, A. J. (1988). *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*.
- Bishop, A. J. (1996). Introduction. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education. P.1* (pp. 1-4). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (Eds.) (1996). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Björklund, C. (2008). *Bland bollar och klossar: matematik för de yngsta i förskolan*. Lund: Studentlitteratur.
- Björklund Boistrup, L. (2010). *Assessment Discourses in Mathematics Classrooms: A Multimodal Social Semiotic Study*. Diss. Stockholm: Stockholms universitet.

- Björklund Boistrup, L. (2013). *Bedömning i matematik pågår! Återkoppling för elevers engagemang och lärande*. Stockholm: Liber.
- Björklund Boistrup, L., Pettersson, A., & Tambour, T. (2007). Skolmatematik och universitetsmatematik ur ett didaktiskt perspektiv. I T. Englund, A. Pettersson, & T. Tambour (red.), *Matematikdidaktiska texter: beprövad erfarenhet och vetenskaplig grund. Del 1* (s. 8-26). Stockholm: Institutionen för undervisningsprocesser, kommunikation och lärande, Lärarhögskolan i Stockholm (UKL).
- Björkqvist, O. (2003). *Matematikdidaktiken i Sverige: en lägesbeskrivning av forskningen och utvecklingsarbetet*. Stockholm: Kungliga Vetenskapsakademien.
- Boaler, J. (2002). Exploring the nature of mathematical activity: Using theory, research and working hypotheses' to broaden conceptions of mathematics knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 3-21.
- Boaler, J. (2009). *The elephant in the classroom: helping children learn and love maths*. (Rev. from the US ed.) London: Souvenir.
- Boero, P., Dapueto, C., & Parenti, L. (1996) Didactics of Mathematics and the Professional Knowledge of Teachers. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education. P.2* (pp. 1097-1121). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3, 77-101.
- Brophy, J. (1999). Perspectives of classroom management: Yesterday, today and tomorrow. In H. J. Freiberg (Ed.), (1999). *Beyond behaviorism: changing the classroom management paradigm* (pp. 43-56). Boston: Allyn and Bacon.
- Brown, G. (1982). The spoken language. In R. Carter (Ed.), *Linguistics and the teacher* (pp. 75-87). London: Routledge & K. Paul.
- Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. (2., [rev.] uppl.) Malmö: Liber.
- Butterworth, B. (2000). *Den matematiska människan: om vår medfödda förmåga att räkna - och om siffrornas roll i vår kultur och historia*. Stockholm: Wahlström & Widstrand.
- Buys, K. (2001). Progressive mathematization: sketch of a learning strand. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching. Innovative approaches for the primary classroom* (pp. 106-118). Buckingham: Open University Press.
- Carlgren, I. & Marton, F. (2002). *Lärare av i morgon*. ([Ny utg.]). Stockholm: Lärarförbundet.

- Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E & Empson, S. B. (1997). A Longitudinal Study of Invention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 3-20.
- Cazden, C. B. (2001). *Classroom discourse: the language of teaching and learning* (2. ed.). Portsmouth, NH: Heinemann.
- Chazan, D. & Ball, D. L. (1999). Beyond being told not to tell. *For the Learning of Mathematics*, 9, 2-10.
- Clarke, D. J. (2006). Using International Research to Contest Prevalent Oppositional Dichotomies. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 38(5), 376-387.
- Clarke, D. M. (2006). Algoritmundervisning i tidiga skolår. I J. Boesen, G. Emanuelsson, A. Wallby & K. Wallby (red.), *Lära och undervisa matematik - internationella perspektiv* (s. 21-34). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.
- Clements, K. (1996) Introduction to Section 3. In A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education. P.1* (pp. 821-825). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Clements, D. H. (1999). 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood 1*(1), 45–60.
- Cobb, P. (1990). Multiple perspectives. In L.P. Steffe & T. Wood (Eds.), *Transforming children's mathematical education: International perspectives* (pp. 200-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work. Coping with multiple theoretical Perspectives. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Vol.1* (pp. 3-38). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures*. Hillsdale, N.J.: L. Erlbaum Associates.
- Cobb, P., Perlwitz, M., & Underwood, D. (1996). Constructivism and activity theory: A consideration of their similarities and differences as they relate to mathematics education. In H. Mansfield, N.A. Pateman, & N. Bednarz (Eds.), *Mathematics for tomorrow's young children* (pp. 10-58). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Educational Psychologist*, 31(3/4), 175-190.
- Cobb, P. & Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. In F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio

- (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking and classroom practice. In E. A. Forman, N. Minick, & C. A. Stone (Eds.), *Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children's development* (pp. 91-119). New York: Oxford University Press.
- Cohen, D. K., & Ball, D. L. (1999). *Instruction, capacity, and improvement* (CPRE Research Report No. RR-043). Philadelphia: University of Pennsylvania, Consortium for Policy Research in Education.
Hämtad 10 september 2012 från: <http://www-personal.umich.edu/~dball/papers/CohenBallInstructorCapacity.pdf>
- Cohen, D. K., Raudenbush, S. W., & Ball D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 25, 119-122.
- Cole, M., & Engeström, Y. (1993). A cultural-historical approach to distributed cognition. In G. Salomon (Ed.), *Distributed cognitions: Psychological and educational considerations* (pp. 1-46). Cambridge: Cambridge University Press.
- Cuban, L. (1993). *How teachers taught: constancy and change in American classrooms, 1890-1990*. (2. ed.) New York: Teachers College Press.
- De Corte, E., & Verschaffel, L. (2007). Analyzing mathematics classroom cultures and practices. *International Journal of Educational Research*, 46, 247-251.
- Derry, S.J., Pea, R.D., Barron, B., Engle, R.A., Erickson, F., Goldman, R., Hall, R., Koschmann, T., Lemke, J.L., Sherin, M.G., & Sherin, B.L. (2010). Conducting Video Research in the Learning Sciences: Guidance on Selection, Analysis, Technology, and Ethics. *Journal of the Learning Sciences*, 19(1), 3-53.
- Elvstrand, H., Högberg, R., & Nordvall, H. (2009). Analysarbete inom fältforskning. I A. Fejes & R. Thornberg (red.), *Handbok i kvalitativ analys* (s. 178-197). Stockholm: Liber.
- Emanuelsson, G. (1989). Bokföring av huvudräkning. Användning av miniräknare. *Nämnamnaren*, 16(3), 43-45. <http://nbas.ncm.gu.se/node/16216>
- Emanuelsson, G. (2001). Svårt att lära – lätt att undervisa? I *Hög tid för matematik* (s. 107-119). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.
- Emanuelsson, J. & Sahlström, F. (2006.) Same from the Outside, Different on the Inside; Swedish Mathematics Classrooms from Students' Point of View. In D. Clarke, C. Keitel, & Y. Shimizu, (Eds.), *Mathematics classrooms in twelve countries: the insiders perspective* (pp. 307-322). Rotterdam: Sense Publishers.

- Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: an activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit Oy.
- Engeström, Y. (1998). Reorganizing the motivational sphere of classroom culture: An activity-theoretical analysis of planning in a teacher team. In F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 76-103). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*. Vol. 14(1). 133-156.
- Engeström, Y., & Miettinen, R. (1999). Introduction. Activity theory: A well-kept secret. In Y. Engeström, R. Miettinen & R-L. Punamäki (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 1-16). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Engström, A., Engvall, M., & Samuelsson, J. (2007). *Att leda den tidiga matematikundervisningen*. Linköping: Skapande vetande, Linköpings universitet.
- Ernest, P. (1991) *The Philosophy of Mathematics Education*. London: Falmer.
- Ernest, P. (2001). Foreword by Professor Paul Ernest. I Goodchild, S. *Students' goals: a case study of activity in a mathematics classroom* (p. - 8). Bergen: Caspar forlag.
- Fangen, K. (2005). *Deltagande observation*. Malmö: Liber.
- Forslund Frykedal, K., & Hammar Chiriack, E. (2011). Assessment of students' learning when working in groups. *Educational Research*, 3, 331-345.
- Foxman, D., & Beishuizen, M. (2002). Mental calculation methods used by 11-year-olds in different attainment bands: A reanalysis of data from the 1987 APU survey in the UK. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1-2), 41-69.
- Franke, M. L., & Carey, D. A. (1997). Young children's perceptions of mathematics in problem solving environments. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 8-25.
- Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Vol. 1. (pp. 225-256). Charlotte, NC: Information Age Pub.
- Fuson, K. C. (2003). Developing Mathematical Power in Whole Number Operations. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School*

- Mathematics* (pp. 68-94). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 130-162.
- Garrett, T. (2008). Student-Centered and Teacher-Centered Classroom Management: A Case Study of Three Elementary Teachers. *Journal of Classroom Interaction*, 43(1), 34-47. Hämtad den 12 juli 2013 från <http://www.eric.ed.gov/PDFS/EJ829018.pdf>
- Glaserfeld, E. von (1995). *Radical constructivism. A way of knowing and learning*. London: The Falmer Press.
- Goodchild, S. (2001). *Students' goals: a case study of activity in a mathematics classroom*. Bergen: Caspar forlag.
- Granström, K. (2004). Om tillförlitligheten i observationer inom forskning och psykologisk praktik. *Nordisk Psykologi*, 56, 289-303.
- Granström, K. (2007). Ledarskap i klassrummet. I K. Granström (red.), *Forskning om lärares arbete i klassrummet* (s. 13-32). Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.
- Grevholm, B. (2001). Läraren som forskare i matematikdidaktik. I B. Grevholm (red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* (s. 257-274). Lund: Studentlitteratur.
- Grouws, D. A. (Ed.) (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hammar Chiriac, E. & Einarsson, C. (2013). *Gruppobservationer: teori och praktik*. (2. uppl.) Lund: Studentlitteratur
- Hammersley, M. (1998). *Reading ethnographic research: a critical guide*. (2. ed.) London: Longman.
- Hammersley, M., & Atkinson, P. (1995). *Ethnography. Principles in practice*. (2 ed.). London: Routledge.
- Hargreaves, E., McCallum, B., & Gipps, C. (2000). Teacher feedback strategies in primary classrooms – new evidence. In S. Askew (Ed.), *Feedback for learning* (pp. 21-31). London: Routledge.
- Hattie, J. A. C. (2009). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London: Routledge.
- Heath, C., Hindmarsh, J., & Luff, P. (2010). *Video in qualitative research: Analysing social interaction in everyday life*. London: Sage.
- Hedegaard, M. (2002). *Learning and child development: a cultural-historical study*. Aarhus: Aarhus University Press.

- Hedegaard, M., Chaiklin, S. & Jensen, U. J. (1999). Activity Theory and Social Practice: An Introduction. In S. Chaiklin, M. Hedegaard, & U. J. Jensen (Eds.), *Activity theory and social practice: cultural-historical approaches* (pp. 12-30). Aarhus: Aarhus University Press.
- Heikkilä, M., & Sahlström, F. (2003). Om användning av videoinspelning i fältarbete. *Pedagogisk Forskning i Sverige*, 8(1-2), 24-41.
- Hedén, Rolf (2006). Elever har rätt att få lära sig matematik. *Nämnnaren* 33 (2), 52-53. http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/5256_06_2.pdf
- Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM Standards. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, D. Schifter & National Council of Teachers of Mathematics (Eds.), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (pp. 5-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, N J: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hiebert, J. & Carpenter T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws, (Ed.), *Handbook of research on the teaching and learning of mathematics* (pp. 65-97). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., et al. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study*, NCES (2003-013). U. S. Department of Education. Washington, DC: National Center for Education Statistics.
- Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). Charlotte, N.C.: Information Age Publishing.
- Howe, K.R. (2003). *Closing methodological divides toward democratic educational research*. Dordrecht: Kluwer Academic. Hämtad från: <http://site.ebrary.com/lt.ltag.bibl.liu.se/lib/linkoping/docDetail.action?docID=10067525>
- Howitt, D. (2010). *Introduction to qualitative methods in psychology*. Harlow, England: Financial Times Prentice Hall.
- Huang, R., Li, Y., & He, X. (2010). What constitutes effective mathematics instruction: A comparison of chinese expert and novice teachers' views. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 10(4), 293-306.
- Håstad, M. (1978). *Matematikutbildningen från grundskola till teknisk högskola i går - idag - i morgon: [Training in mathematics from grade*

- school to technical university yesterday - today - tomorrow*]. Diss. Uppsala: Univ. Stockholm.
- Hägström, J. (2008). *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: what is made possible to learn?* Diss. Göteborg: Göteborgs universitet. Göteborg.
- Hög tid för matematik*. (2001). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs univ. Hämtad 25 maj 2012, från <http://ncm.gu.se/node/462>
- Jablonka, E. (2011a). The (hidden) rules in a mathematics classroom. I G. Brandell & A. Pettersson (red.), *Matematikundervisning: vetenskapliga perspektiv* (s. 65-91). Stockholm: Stockholms universitets förlag.
- Jablonka, E. (2011b). Research in mathematics education – an appendix of mathematics or of educational science? In J. Emanuelsson, L. Fainsilber, J. Hägström, A. Kullberg, B. Lindström & M. Löwing (red.), *Voices on learning and instruction in mathematics* (pp. 51-61). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.
- Jank, W., & Meyer, H. (1997a). Nyttan av kunskaper i didaktisk teori. I M. Uljens (red.), *Didaktik* (s. 17-34). Lund: Studentlitteratur.
- Jank, W., & Meyer, H. (1997b). Didaktikens centrala frågor. I M. Uljens (red.), *Didaktik* (s. 47-74). Lund: Studentlitteratur.
- Johansson, B. (2006). Elever har rätt att få lära sig räkna. *Nämnamnaren* 33(1), 28-31. http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/2831_06_1.pdf
- Jordan, B., & Henderson, A. (1995). Interaction analysis: Foundation and practice. *Journal of the Learning Sciences*, 4(1), 39-103.
- Ju, M. K., & Kwon, O. N. (2007). Ways of talking and ways of positioning: Students' beliefs in an inquiry-oriented differential equations class. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 267-280.
- Kazemi, E., & Stipek, D. (2001). Promoting Conceptual Thinking in Four Upper-Elementary Mathematics Classrooms. *The Elementary School Journal*, 102(1), 59-80.
- Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. I D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 3-38). New York: MacMillan.
- Kilpatrick, J. (1995). Staking claims. *Nordisk matematikdidaktik* 3, 21-40.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.), (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, D.C.: National Academy Press.
- Knutagård, H. (2002). *Introduktion till verksamhetsteori*. Lund: Studentlitteratur.
- Kroksmark, T. (1997). Undervisningsmetodik som forskningsområde. I M. Uljens (red.), *Didaktik* (s. 77-97). Lund: Studentlitteratur.

- Kullberg, B. (2004). *Etnografi i klassrummet*. (2., [rev.] uppl.) Lund: Studentlitteratur.
- Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned. Professional insights gained and shared by teachers of mathematics* (Gothenburg studies in educational sciences 293). Gothenburg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Laborde, C. (1996) Introduction to Section 2. In A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education. P.1* (pp. 505-509). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Laborde, C. & Perrin-Glorian, M-J. (2005). Introduction. Teaching situations as object of research: Empirical studies within theoretical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 1-12.
- Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-63.
- Lampert, M., Rittenhouse, P., & Crumbaugh, C. (1996). Agreeing to Disagree: Developing Sociable Mathematical Discourse. In D. R. Olson, & N. Torrance (Eds.), *The handbook of education and human development: new models of learning, teaching and schooling* (pp. 731-764). Cambridge, Mass: Blackwell.
- Larsson, S. (2005). Om kvalitet i kvalitativa studier. *Nordisk Pedagogik*, 25(1), 16-35.
- Larsson, S. (2009). A pluralist view of generalisation in qualitative research. *International Journal of Research & Method in Education*, 32(1), 25-38.
- Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Leontiev, A. N. (1986). *Verksamhet, medvetande, personlighet*. Moskva: Progress/Göteborg: Fram. (Originalt publicerat 1978.)
- Lerman, S. (1998). Research on socio-cultural perspectives of mathematical teaching and learning. In A. Sierpiska, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: a search for identity. Book 1*. (pp. 333-350). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Lerman, S. (2000) The Social Turn in Mathematics Education Research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 19-44). Westport, CT: Ablex Publishing.
- Lerman, S., Xu, G., & Tsatsaroni, A. (2002). Developing theories of mathematics education research: The ESM story. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 23-40.

- Levenson, E., Tirosh, D. & Tsamir, P. (2009). Students' perceived sociomathematical norms: The missing paradigm. *Journal of Mathematical Behavior*, 28, 171-187.
- Levine, J. M., & Moreland, R. L. (1991). Culture and socialization in work groups. In L. B. Resnick, J. M. Levine, & S. D. Teasdale (Eds.), *Perspectives on socially shared cognition* (pp. 257–279). Washington, DC: American Psychological Association.
- Lgr69. *Läroplan för grundskolan. 1, Allmän del*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Lgr80. *Läroplan för grundskolan. Allmän del*. Stockholm: Skolöverstyrelsen och Liber Utbildningsförlaget.
- Lgr11. *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket. Tillgänglig på Internet: <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2575>
- Li, Y. (2011). Elementary teachers' thinking about a good Mathematics lesson. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9, 949-973.
- Lindgren, A. (1945). *Pippi Långstrump*. Stockholm: Rabén & Sjögren.
- Liljestrand, J. (2007). Elevcentrerade undervisningsfilosofier som pedagogisk paradox. *Utbildning och demokrati*, 16(3), 37-52.
- Lincoln, Y., & Guba, E. (1999) Establishing trustworthiness. In A. Bryman & R.G. Burgess, (Eds.), *Qualitative research*, Vol. 3 (pp. 397-444). London: Sage.
- Lindblad, S., & Sahlström, F. (2001). Förord. I S. Lindblad & F. Sahlström (red.), *Interaktion i pedagogiska sammanhang* (s. 5–8). Stockholm: Liber.
- Linell, P. (1994). *Transkription av tal och samtal: teori och praktik*. Linköping: Universitetet, Tema kommunikation.
- Linikko, J. (2009). *"Det gäller att hitta nyckeln": lärares syn på undervisning och dilemman för inkludering av elever i behov av särskilt stöd i specialskolan*. Diss. Stockholm: Stockholms universitet. Hämtad den 5 maj 2011 från: <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:su:diva-8505>
- Liljestrand, J. (2007). Elevcentrerade undervisningsfilosofier som pedagogisk paradox. *Utbildning och demokrati*, 16(3), 37-52.
- Lpo94. *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet*. Stockholm: Utbildningsdepartementet. Tillgänglig på Internet: <http://www.skolverket.se/publikationer?id=1069>
- Lundgren, U. P. (1977). *Model analysis of pedagogical processes*. Lund: Liber Läromedel/Gleerup.
- Lundgren, U. P. (1999). Ramfaktorteori och praktisk utbildningsplanering. *Pedagogisk forskning i Sverige*, 4(1), 31–41.

- Läroplanskommittén (1992). *Skola för bildning: huvudbetänkande*. Stockholm: Allmänna förlaget.
- Löwing, M. (2000). *Kartläggning av utländska lärares utbildning och arbetssituation: delrapport 1: bakgrund och instrument*. Göteborg: Institutionen för pedagogik och didaktik, Göteborgs universitet.
- Löwing, M. (2004). *Matematikundervisningens konkreta gestaltning: en studie av kommunikationen lärare - elev och matematiklektionens didaktiska ramar*. Diss. Göteborg : Universitetet.
- Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik: matematikdidaktik för lärare*. (1. uppl.) Lund: Studentlitteratur.
- Löwing, M. & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik: för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur.
- Löwing, M. & Kilborn, W. (2003). *Huvudräkning: en inkörsport till matematiken*. Lund: Studentlitteratur.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marton, F. (1986). Vad är fackdidaktik? I F. Marton, (red.), *Fackdidaktik. Vol. 1, Principiella överväganden, yrkesförberedande ämnen* (s. 15-77). Lund: Studentlitteratur.
- Marton, F. (2000). Om konsten att lära alla allt. *Pedagogisk forskning i Sverige*, 5, 151-154.
- Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, N.J.: Erlbaum.
- Matematik (u.å.). I Nationalencyklopedin. Hämtad 7 maj 2012, från <http://www.ne.se/matematik>
- McIntosh, A. (2006). Nya vägar i räkneundervisningen. I J. Boesen, G. Emanuelsson, A. Wallby & K. Wallby (red.), *Lära och undervisa matematik - internationella perspektiv* (s. 7-20). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.
- Mercer, N. (1993). Culture, context and the construction of knowledge in the classroom. In P. Light, & G. Butterworth (Eds.), *Context and cognition: ways of learning and knowing* (pp. 28-46). Hillsdale, N.J.: L. Erlbaum Associates.
- Mercer, N. (1995). *The guided construction of knowledge: talk among teachers and learners*. Clevedon: Multilingual Matters
- Mehan, H. (1979). *Learning lessons*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Mellin-Olsen; S. (1989). Hvem bestemmer hvilken algoritme eleven skal bruke? *Nåmnaren*, 16(3), 40-41. <http://nbas.ncm.gu.se/node/16214>

- Merriam, S. B. (1998) *Qualitative Research and Case Study Applications in Education*. (Rev. and expanded ed.) San Francisco: Jossey-Bass.
- Mok, I. A. C. (2006a). Shedding Light on the East Asian Learner Paradox: Reconstructing Student-Centredness in a Shanghai Classroom. *Asia Pacific Journal of Education*, 26(2), 131-142.
- Mok, I. A. C. (2006b). Teacher-dominating lessons in Shanghai: The insiders' story. In D. J. Clarke, C. Keitel & Y. Shimizu (Eds.), *Mathematics classrooms in twelve countries: The insider's perspective* (pp. 87–98). Rotterdam, The Netherlands: Sense.
- Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach Mathematics. *Educational Studies of Mathematics*, 47, 175-197.
- Nickson, M. (1992). The culture of the mathematics classroom: An unknown quantity? In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 101–114). New York: Macmillan.
- Niss, M. (1994). Mathematics in society. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics As a Scientific Discipline* (pp. 367-378). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Niss, M. (1996). Goals of Mathematics Teaching. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education. P.1* (pp. 11-47). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 1-24.
- Niss, M., & Højgaard-Jensen, T. (red.). (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr.18. København: Undervisningsministeriet. Hämtad 8 juli 2012 från <http://pub.uvm.dk/2002/kom/04.htm>
- Niss, M. (2003). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project*. Paper presented at the Third mediterranean conference on mathematics education. Hämtad 8 juli 2012 från http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf
- Norton, S. (2012). The use of alternative algorithms in whole number computation. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*. (October 26: 2012; pp. 2-16). Hämtad 26 augusti 2013 från <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm>
- Nygren, E., & Persson, H. (2006). Skriftlig huvudräkning – en vågrät algoritm? *Nämnamnaren* 33(3), 36-38. Hämtad från: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/3638_06_3.pdf

- O'Connors, M. C., & Michaels, S. (1993). Aligning Academic Task and Participation Status through Revoicing: Analysis of a Classroom Discourse Strategy. *Anthropology & Education Quarterly*, 24, 318-335.
- Olteanu, C., & Olteanu, L. (2012). Improvement of effective communication – the case of subtraction. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10, 803-826.
- Patel, R. & Davidson, B. (2003). *Forskningsmetodikens grunder: att planera, genomföra och rapportera en undersökning*. (3., [uppdaterade] uppl.) Lund: Studentlitteratur.
- Pettersson, A. (2003) Från räkning till matematik. I S. Selander (red.), *Kobran, nallen och majjen: tradition och förnyelse i svensk skola och skolforskning* (s. 170-187). Stockholm: Myndigheten för skolutveckling. Hämtad från: <http://www.skolverket.se/publikationer?id=1820>
- Pettersson, A. (2010). Satsa medvetet på matematik. *Newsmill*. Hämtad 28 februari 2013 från <http://www.newsmill.se/artikel/2010/01/27/satsa-medvetet-p-matematik>
- Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: communication in mathematics classrooms*. London: Routledge & Kegan Paul Ltd.
- Presmeg, N. (2007). The role of culture in teaching and learning mathematics. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Vol.1* (pp. 435-458). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Rezat, S. & Sträßer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 44, 641-651.
- Rockström, B. (1991). Skriftlig huvudräkning. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (red.), *Tal och räkning 2* (s. 35-50). Lund: Studentlitteratur och Utbildningsradion.
- Rockström, B. (2006). Ska man lära sig algoritmerna? *Nämnamnaren* 33 (2), 54-56. http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/5256_06_2.pdf
- Rockström, B. (2007). Skriftlig huvudräkning igen. *Nämnamnaren* 34 (1), 26-29.
- Rockström, B. (2012). Skriftlig huvudräkning – framsteg eller katastrof? *Nämnamnaren* 39 (1), 32-33.
- Rockström, B. & Lantz, M. (2004). *Matteboken 2, Lärarhandledning med facit*. (2. uppl.) Stockholm: Bonnier utbildning.
- Rockström, B. & Lantz, M. (2005). *Matteboken 3A, [Grundbok]*. (2. uppl.) Stockholm: Bonnier utbildning.
- Rosenlund, K. & Backström, I. (2001). *Mattestegen. A steg 1-4. Höst*. (1. uppl.) Stockholm: Natur och kultur.

- Roth, W.-M. (2001). Situating Cognition. *Journal of the Learning Sciences*, 19(1&2), 27-61.
- Roth, W.-M. (2004). Activity Theory and Education: An Introduction. *Mind, culture and activity*, 11(1), 1-8.
- Roth, W.-M. (2007). Epistemic Mediation: Video Data as Filters for the Objectification of Teaching by Teachers. In R. Goldman, R. Pea, B. Barron & S. J. Derry (Eds.), *Video Research in the Learning Sciences*. (pp. 367-382). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Roth, W.-M., & Lee, Y.-J. (2007). "Vygotsky's Neglected Legacy": Cultural-Historical Activity Theory. *Review of Educational Research*, 77(2), 186-232.
- Rystedt, E., & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning: vad vet vi?* Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.
- Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll*. Göteborgs universitet. Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Sahlström, F. (2008). *Från lärare till elever, från undervisning till lärande [Elektronisk resurs]: utvecklingslinjer i svensk, nordisk och internationell klassrumsforskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Samuelsson, J. (2005). *Lärarstudenters erfarenheter av matematikundervisning. Vad händer med elever när de inte förstår. Pius-rapport*. Linköping: Linköpings universitet. Institutionen för beteendevetenskap och lärande.
- Samuelsson, J. (2007). Skolmatematik. I K. Granström (red.), *Forskning om lärares arbete i klassrummet* (s. 247-264). Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.
- Samuelsson, J., & Lawrot, K. (2009). Didaktik för elever med läsningar i matematik. *Didaktisk tidskrift*, 18(3), 337-353.
- Schoenfeld, A. H. (2012) Problematizing the didactic triangle. *ZDM Mathematics Education*, 44, 587-599.
- Seeger, F., Voigt, J., & Waschescio, U. (1998). Introduction. In F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom*. (pp. 1-9). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Selander, S. & Kroksmark, T. (u.å.) Didaktik. I *Nationalencyklopedin*. Hämtad 16 juli 2012 från <http://www.ne.se/lang/didaktik>
- Setati, M., & Adler, J. (2000). Between languages and discourses: Language practices in primary multilingual mathematics classrooms in South Africa. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 243-269.
- Sfard, A. (2000). On Reform Movement and the Limits of Mathematical Discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(3), 157-189.

- Sfard, A. (2006). Participationist discourse on mathematics learning. In J. Maasz & W. Schloeglmann (Eds.), *New mathematics Educations research and Practice* (pp. 153-170). Amsterdam: Sense Publishers.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.
- Sfard, A., Forman, E., & Kieran, C. (2001). Learning discourse: Sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 1-12.
- Sierpinska, A. & Kilpatrick, J. (Eds.) (1998). *Mathematics education as a research domain: a search for identity: an ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Skolinspektionen (2009). *Undervisningen i matematik: undervisningens innehåll och ändamålsenlighet*. Stockholm: Skolinspektionen. Hämtad 23 maj 2012 från:
<http://www.skolinspektionen.se/documents/kvalitetsgranskning/matte/granskningsrapport-matematik.pdf>
- Skolverket. (1997). *Kommentarer till grundskolans kursplan och betygskriterier i matematik*. Stockholm: Liber distribution.
- Skolverket (2000). *Grundskolan: kursplaner och betygskriterier*. (1. uppl.) Stockholm: Statens skolverk.
- Skolverket (2003). *Lusten att lära: med fokus på matematik: nationella kvalitetsgranskningar 2001-2002*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2004). *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003: sammanfattande huvudrapport*. Stockholm: Statens skolverk.
- Skolverket (2008a). *TIMSS 2007: svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2008b). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007 [Elektronisk resurs]: en jämförande analys av elevernas taluppfattning och kunskaper i aritmetik, geometri och algebra i Sverige, Hong Kong och Taiwan*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2008c). *Grundskolan: kursplaner och betygskriterier: förordning (SKOLFS 2000:135) om kursplaner för grundskolan: Skolverkets föreskrifter (2000:141) om betygskriterier för grundskolans ämnen*. (2., rev. uppl.) Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2009). *Analysschema i matematik för åren före skolår 6*. (Rev. uppl.) Stockholm: Statens skolverk. Hämtad 11 juli 2012 från
<http://www.skolverket.se/publikationer?id=2219>
- Skolverket (2011a). *Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverkstäder: en utvärdering av matematikatsningen*.

- Stockholm: Skolverket. Tillgänglig på Internet:
<http://www.skolverket.se/publikationer?id=2724>
- Skolverket (2011b). *Ämnesproven i grundskolans årskurs 3. En redovisning från genomförandet 2011*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2012a). *Ämnesproven i grundskolans årskurs 3. En redovisning från genomförandet 2012*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2012b). *TIMSS 2011: svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket. Tillgänglig på Internet:
www.skolverket.se/publikationer?id=2942
- Skolöverstyrelsen (1962). *Läroplan för grundskolan*. Stockholm: Kungl. Skolöverstyrelsen.
- Skott, J., Jess, K., Hansen, H. C., & Lundin, S. (2010). *Matematik för lärare. Delta, Didaktik*. Malmö: Gleerups Utbildning.
- Sparrman, A. (2005). Video recording as interaction: participant observation of children's everyday life. *Qualitative Research in Psychology*, 2, 241-255.
- Starrin, B. (1994). Om distinktionen kvalitativ - kvantitativ i social forskning. I B. Starrin & P-G. Svensson (red.), *Kvalitativ metod och vetenskapsteori* (s. 11-39). Lund: Studentlitteratur.
- Staub, F. C. (2007). Mathematics classroom cultures: Methodological and theoretical issues. *International Journal of Educational Research*, 46, 319-326.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1997). Understanding and improving classroom mathematics instruction. *Phi Delta Kappan*, 79, 14-21.
- Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma.
- The PISA 2003 assessment framework: mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. (2003). Paris: Organization for Economic Co-operation and Development. Hämtad den 23 maj 2013 från
<http://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33694881.pdf>
- Unenge, J. (1989). Algoritmerna igen. *Nämnnaren*, 16((3), 42-43.
<http://nbas.ncm.gu.se/node/16215>
- Unenge, J., Sandahl, A. & Wyndhamn, J. (1994). *Lära matematik: om grundskolans matematikundervisning*. Lund: Studentlitteratur.
- Usiskin, Z. (1998). Paper-and-pencil algorithms in a calculator and computer age. In L. J. Morrow & M. J. Kennedy (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 7-20). Reston, VA: NCTM.

- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic mathematics education in the Netherlands. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching: Innovative approaches for the primary classroom* (pp. 49-64). Buckingham: Open University Press.
- Velander, J. P. (1884). Ämnet räkning i folkskolan. *Svensk läraretidning*, 3(46). Hämtad 12 juli 2012 från https://gupea.ub.gu.se/bitstream/2077/27706/1/gupea_2077_27706_1.pdf
- Vetenskapsrådet (2011). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet. Hämtad 5 juni 2013 från <http://www.codex.vr.se/texts/HSFR.pdf>
- Voigt, J. (1996). Negotiation of Mathematical Meaning in Classroom Processes: Social Interaction and Learning Mathematics. In L. P. Steffe & P. Nesher (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (p. 21-50). Mahwah, N J: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language*. (Rev. ed., A. Kozulin, Ed.). Cambridge, MA: MIT Press. [Original work published 1934].
- Wallström, A. L. (2009, 1 oktober). Granskning avslöjar usel skolmatte. *Dagens Nyheter*. Hämtad 2 maj 2012 från <http://www.dn.se/nyheter/sverige/granskning-avslojar-usel-skolmatte>
- Wartofsky, M. W. (1979). *Models: Representation and the Scientific Understanding*. Dordrecht: Riedel.
- Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt: vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna*. Diss. Umeå: Umeå universitet.
- Wistedt, I. (1987). *Rum för lärande: om elevers studier på gymnasiet = [Latitude for learning]: [on pupils' schoolwork at the upper secondary level]*. Diss. Stockholm: Univ. Stockholm.
- Wood, T. (1998) Alternative patterns of communication in mathematics classes: Funneling or focusing? In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi & A. Sierpiska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 167-178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Wood, D., Bruner, J., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17, 89–100.
- Wyndhamn, J. (1990). *Fyra matematikdidaktiska satser. Fyra matematikdidaktiska satser: en sammanställning av fyra tidigare skrivna uppsatser*. Rapport nr 15. Linköping: Lärarutbildningen, Universitetet.

- Wyndhamn, J. (1997). *Från räkning till matematik: om matematik och matematikämnet i de senaste läroplanerna*. Linköping: Universitetet, Inst. för tillämpad lärarkunskap.
- Yackel, E., Cobb, P., & Wood, T. (1991). Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 390-408.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 4, 458-477.

Linköpings universitet 2009-03-05

Till Dig som undervisar i matematik i skolår 2!

Jag heter Margareta Engvall och jag arbetar med att utbilda lärare för de tidigare skolåren, främst inom området matematik. Innan jag kom till Linköpings universitet som lärarutbildare hade jag varit yrkesverksam som lågstadielärare i nästan 25 år.

Mitt huvudintresse är alltså undervisning och lärande i matematik med fokus på de tidiga skolåren och min förhoppning är att kunna genomföra ett forskningsprojekt inom detta område med särskild tonvikt på aritmetik. För att detta ska vara möjligt är jag helt beroende av att det finns lärare som vill låta mig ta del av klassens matematikundervisning och det lärande som sker hos eleverna i klassen. Min tidsplan för denna undersökning sträcker sig över ungefär ett år med start under vt 2009 och avslutning vt 2010. Om detta är alltför optimistiskt kan starten skjutas upp till tidig ht 2009.

Jag vänder mig till dig som är lärare i år 2 under innevarande läsår eftersom matematik-undervisningen i år 2 innebär ett stort steg för många elever, bl a är introduktion av tiotalsovergång en kritisk punkt. I min undersökning vill jag titta närmare på just detta, dels i år 2, men också fortsätta i år 3 eftersom eleverna då förväntas klara både addition och subtraktion med tiotalsovergång. Allt insamlat material behandlas konfidentiellt.

Min förhoppning är att kunna följa de aktuella klasserna under ca ett år, men min närvaro i samband med matematikundervisningen kommer förstås att begränsas till kortare perioder, 1-2 lektioner/vecka under en eller två perioder på 2-3 veckor. Förutom själva undervisningen önskar jag också få inblick i elevernas kunnande, framför allt deras taluppfattning. Därför kommer jag att genomföra matematikdiagnoser med eleverna både före och efter dessa undervisningsperioder.

För att mitt forskningsprojekt ska kunna genomföras är jag i stort behov av att det finns lärare som är villiga att delta. Därför vädjar jag nu till Dig och hoppas innerligt att Du vill medverka i detta forskningsprojekt om de tidiga skolårens matematik.

Du är alltid välkommen att höra av dig med frågor!

Enklast når du mig via e-post: margareta.engvall@liu.se
men även på telefon: 013-282351 eller mobil:

Tacksam för svar snarast!

Vänliga hälsningar
Margareta Engvall

Till föräldrar/vårdnadshavare

Efter 25 år som lågstadielärare och sedan fem år tillbaka verksam i lärarutbildningen vid Linköpings universitet, har jag nu påbörjat ett forskningsprojekt om lärares matematik-undervisning och elevers lärande i matematik, när det gäller tal och räkning. Min förhoppning är att projektet ska kunna utgöra en viktig del i mitt avhandlingsarbete. För att kunna genomföra min undersökning behöver jag samarbeta med elever i år 2-3 och deras lärare i olika skolor i Linköpings kommun med omnejd.

Forskningsprojektet innebär att jag kommer att vistas i klassen vid någon enstaka matematiklektion under resten av vårterminen, men främst under höstterminen i år 3. Några matematiklektioner kommer att filmas och jag kommer även att göra anteckningar över det jag ser. Andra aktiviteter som ingår i min undersökning är matematikdiagnoser som klassen kommer att genomföra vid tre olika tillfällen under perioden maj – december.

Deltagande i undersökningen är givetvis frivilligt och kan när som helst avbrytas. Linköpings universitet ansvarar för förvaringen och bearbetningen av de uppgifter som samlas in. Alla uppgifter kommer att avidentifieras innan de används, vilket innebär att varken skola och enskilda individer ska vara igenkännbara i min redovisning. Du/Ni samt klassläraren har också rätt att i efterhand få ta del av den information som samlats in inom ramen för projektet. De filmade sekvenserna kommer bara att användas i mitt eget forskningssyfte och inte visas i andra sammanhang.

Om barnet vill delta i mitt forskningsprojekt och Du/Ni är positiva till detta behöver jag Ditt/Ert skriftliga samtycke. Fyll i svaret längst ner på sidan och lämna till klassläraren senast tisdag den 5 maj.

Välkommen att ringa om Du har frågor!

██████████ eller 013-28 23 51

Vänliga hälsningar

Margareta Engvall
Doktorand och lärarutbildare

KLIPP HÄR-----

(Barnets namn)

får delta i forskningsprojektet

får inte delta i forskningsprojektet

Förälders underskrift: _____

LINKÖPING STUDIES IN BEHAVIOURAL SCIENCE

150. GAHAMANYI, MARCEL. Mathematics at Work. A Study of Mathematical Organizations in Rwandan Workplaces and Educational Settings. 2010. ISBN: 978-91-7393-459-6
151. WISTUS, SOFIA. Det motsägelsefulla partnerskapet. En studie av utvecklingspartnerskap som organiseringsform inom EQUAL-programmet. 2010. ISBN: 978-91-7393-422-0
152. WIDÉN, PÄR. Bedömningsmakten. Berättelser om stat, lärare och elev, 1960-1995. 2010. ISBN:978-91-7393-372-8
153. SANDLUND, MONICA. Lärare med utländsk bakgrund. Sju yrkeslivsberättelser om möten med nya skolsammanhang. 2010. ISBN: 978-91-7393-371-1
154. MUGISHA, INNOCENT SEBASAZA. Assessment and Study Strategies. A study among Rwandan Students in Higher Education. 2010. ISBN: 978-91-7393-340-7
155. ALM, FREDRIK. Uttryck på schemat och intryck i klassrummet. En studie av lektioner i skolor utan timplan. 2010. ISBN: 978-91-7393-322-3
156. LÖGDLUND, ULRİK. Networks and Nodes. Practices in Local Learning 2011. ISBN: 978-91-7393-249-3
157. SIN, SAMANTHA (AKA HSIU KALOTAY). An Investigation of Practitioners' and Students' Conceptions of Accounting Work. 2011. isbn: 978-91-7393-174-8
158. BIRBERG THORNBERG, ULRİKA. Fats in Mind. Effects of Omega-3 Fatty Acids on Cognition and Behaviour in Childhood. 2011. ISBN: 978-91-7393- 164-9
159. KILHAMMAR, KARIN. Idén om medarbetarskap. En studie av en idé resa in i och genom två organisationer. 2011. ISBN: 978-91-7393-092-05
160. SARKOHI, ALI. Future Thinking and Depression. 2011. ISBN: 978-91-7393-020-8
161. LECH, BÖRJE, Consciousness about own and others' affects. 2012. ISBN: 978-91-7519-936-8
162. SOFIA JOHNSON FRANKENBERG. Caregiving Dilemmas: Ideology and Social Interaction in Tanzanian Family Life. 2012. ISBN: 978-91-7519-908-5
163. HALLQVIST, ANDERS. Work Transitions as Biographical Learning. Exploring the dynamics of job loss. 2012. ISBN: 978-91-7519-895-8

164. MUHIRWE, CHARLES KARORO. Developing Academic Literacies in Times of Change. Scaffolding Literacies Acquisition with the Curriculum and ICT in Rwandan Tertiary Education. 2012. ISBN: 978-91-7519-841-5
165. RUTERANA, PIERRE CANISIUS. The Making of a Reading Society. Developing a Culture of Reading in Rwanda. 2012. ISBN: 978-91-7519-840-8
166. SANDBERG, FREDRIK. Recognition of Prior Learning in Health Care. From a Caring Ideology and Power, to Communicative Action and Recognition. 2012. ISBN: 978-91-7519-814-9
167. FÄGERSTAM, EMILIA. Space and Place. Perspectives on Outdoor Teaching and Learning. 2012. ISBN: 978-91-7519-813-2
168. FALKENSTRÖM, FREDRIK. The Capacity for Self-Observation in Psychotherapy. 2012. ISBN: 978-91-7519-797-5
169. BENNICH, MARIA. Kompetens och kompetensutveckling i omsorgsarbete. Synen på kompetens och lärande i äldreomsorgen – i spänningsfältet mellan samhälleliga förutsättningar och organisatoriska villkor. 2012. ISBN: 978-91-7519-777-7
170. RUSANGANWA, JOSEPH. Enhancing Physics Learning through Instruction, Technical Vocabulary and ICT. A Case of Higher Education in Rwanda. 2012. ISBN: 978-91-7519-739-5
171. MBABAZI, PENELOPE. Quality in Learning in Rwandan Higher Education: Different Stakeholders' Perceptions of Students' Learning and Employability. 2013. ISBN: 978-91-7519-682-4
172. BYSTRÖM, ERICA. Ett lärorikt arbete? Möjligheter och hinder för undersköterskor att lära och utvecklas i sjukvårdsarbetet. 2013. ISBN: 978-91-7519-679-4
173. KAGWESAGE, ANNE MARIE. Coping with Learning through a Foreign Language in Higher Education in Rwanda. 2013. ISBN: 978-91-7519-640-4
174. MUTWARASIBO, FAUSTIN. Understanding Group-based Learning in an Academic Context: Rwandan Students' Reflections on Collaborative Writing and Peer Assessment. 2013. ISBN: 978-91-7519-633-6
175. MÅRDH, SELINA. Cognitive erosion and its implications in Alzheimer's disease. 2013. ISBN: 978-91-7519-612-1
176. HARLIN, EVA-MARIE. Lärares reflektion och professionella utveckling – Med video som verktyg. 2013. ISBN: 978-91-7519-611-4
177. ÖSTERGREN, RICKARD. Mathematical Learning Disability. Cognitive Conditions, Development and Predictions. 2013. ISBN: 978-91-7519-565-0